Троицкий авиационный технический колледж – филиал федерального
государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования «Московский государственный
технический университет гражданской авиации»

ЦК “Программирование для ЭВМ”

Н.Х. Валеева

Методические указания и пособие по курсу

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Тема: «Приближенные методы решения алгебраических уравнений»

для специальности
09.02.07 «Информационные системы и программирование»
(очное отделение, 1 семестр)

Предварительные замечания

Учебная дисциплина "Численные методы" является общепрофессиональной, устанавливающей базовый уровень знаний для освоения других общепрофессиональных и специальных дисциплин.

Программа предмета "Численные методы " предусматривает изучение тех разделов математики, которые позволяют с помощью алгоритмов ряда методов решить наиболее часто встречаемые прикладные задачи. Программа не предусматривает изучения всего многообразия существующих методов, главной целью является добиться понимания основных идей методов, особенностей и областей их применения. Программа позволяет на некоторые математические понятия взглянуть с точки зрения информатики, в частности, с точки зрения языка программирования Пайтон. Тесная межпредметная связь дисциплины с вопросами высшей математики, дискретной математики, основами алгоритмизации и программирования, теорией вероятности и математической статистики, а также с курсом теории алгоритмов дает возможность формирования у студентов системы знаний, необходимой для профессиональной подготовки.

По окончании изучения указанной темы курсанты должны *знать*:

- приближенные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

Курсанты должны *уметь*:

- разрабатывать алгоритмы для приближенных методов решения уравнений,
- составлять и реализовывать программу по алгоритму решения задачи.

Необходимо по каждому из представленных ниже вопросов знать **смысл** и **свойства математических понятий**, **владеть алгоритмом** решения задач.

Рассмотрена и утверждена на заседании ЦК ПЭВМ

протокол от 15 ноября 2022 г.

Председатель ЦК ПЭВМ ____________ /И.А. Гончаренко/

Содержание

1. Введение. Виды уравнений

На практике часто приходится решать алгебраические и трансцендентные уравнения, что может представлять собой самостоятельную задачу или являться частью более сложных задач. В обоих случаях практическая ценность метода в значительной мере определяется быстротой и эффективностью полученного решения.

Выбор подходящего метода для решения уравнений зависит от характера рассматриваемой задачи. Задачи, сводящиеся к решению алгебраических и трансцендентных уравнений, можно классифицировать по числу уравнений и в зависимости от предлагаемого характера и числа решений (Рисунок 1).

Одно уравнение будем называть *линейным*, *алгебраическим* или *трансцендентным* в зависимости от того, имеет ли оно одно решение, n решений или неопределенное число решений. Систему уравнений будем называть *линейной* или *нелинейной* в зависимости от математической природы входящих в нее уравнений. Решение линейного уравнения с одним неизвестным получается достаточно просто и здесь не рассматривается.

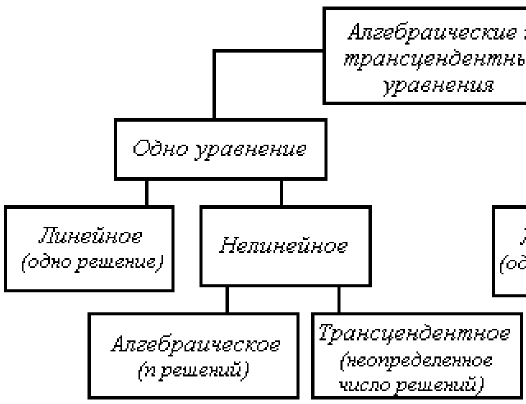


Рисунок 1. Классификация уравнений

Нелинейные уравнения можно разделить на 2 класса - алгебраические и трансцендентные. *Алгебраическими уравнениями* называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией. Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и другие) называются *трансцендентными.*

Методы решения нелинейных уравнений делятся на две группы:

1) *точные методы*;
2) *итерационные методы*.

Точные методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры известны такие методы для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений.

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой[1]. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Для их решения используются *итерационные методы* с заданной степенью точности.

2. Постановка задачи. Определение корня

Пусть дано уравнение $f(x) = 0,$ (1)

где:

1) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка.

2) Значения $f(x)$ на концах отрезка имеют разные знаки ($f(a) \cdot f(b) < 0$).

3) Первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют определенный знак на всем отрезке.

Условия 1) и 2) гарантируют, что на интервале $[a, b]$ находится хотя бы один корень, а из 3) следует, что $f(x)$ на данном интервале монотонна и поэтому корень будет единственным.

Решить уравнение (1) *итерационным методом* значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней и найти значения корней с нужной точностью.

Всякое значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. такое, что:

$$f(\xi) = 0,$$

называется *корнем уравнения* (1) или *нулем* функции $f(x)$.

Задача нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ итерационным методом состоит из двух этапов:

1) *отделение корней* - отыскание приближенного значения корня или содержащего его отрезка;

2) *уточнение приближенных корней* - доведение их до заданной степени точности.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в граничных $x = a$ и $x = b$ точках области ее существования.

***Пример* 1.** Отделить корни уравнения $x^3 - 6x + 2 = 0.$ (2)

---

[1] Доказательство этого факта связано с именами замечательных математиков Абеля (1802 – 1829) и Галуа (1811 – 1832).

Решение.

Определим функцию $f(x) = x^3 - 6x + 2$

Составим приблизительную схему:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x)$	-	-	+	+	-	+	+

Следовательно, уравнение (2) имеет три действительных корня, лежащих в интервалах [-3, -1], [0, 1] и [1, 3].

Приближенные значения корней (*начальные приближения*) могут быть также известны из физического смысла задачи, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, или могут быть найдены графическим способом.

3. Графическое решение уравнений

В инженерной практике распространен *графический способ* определения приближенных корней.

Принимая во внимание, что действительные корни уравнения (1) - это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график функции $f(x)$ и отметить точки пересечения $f(x)$ с осью *Ox,* или отметить на оси *Ox* отрезки, содержащие по одному корню. Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение (1) *равносильным* ему уравнением:

$$f_1(x) = f_2(x), \qquad (3)$$

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - более простые, чем функция $f(x)$. Тогда, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

==

Пример 2. Решить уравнение $x\lg x = 1$ (4).

Решение.

Уравнение (4) удобно переписать в виде равенства $\lg x=1/x$.

Отсюда ясно, что корни уравнения (4) могут быть найдены как абсциссы точек пересечения графиков двух функций: логарифмической кривой $y = \lg x$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Построив (Рис. 2) эти кривые, приближенно найдем единственный корень $\xi \approx 2{,}5$ уравнения (4) или определим отрезок [2, 3], содержащий этот корень.

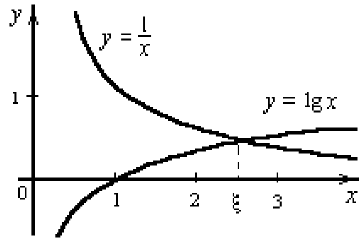


Рисунок 2. Графики функций

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения x_0. Каждый такой шаг называется *итерацией*. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если эти значения с увеличением числа итераций *n* приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс *сходится*.

4. Метод дихотомии (Метод половинного деления)

Для нахождения корня уравнения (1), принадлежащего отрезку [a, b], делим этот отрезок пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $\xi = \frac{a+b}{2}$ является корнем уравнения. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ (что, практически, наиболее вероятно), то выбираем ту из половин $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ или $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, на концах которой функция f(x) имеет противоположные знаки. Новый суженный отрезок [a1, b1] снова делим пополам и производим те же самые действия.

Метод половинного деления практически удобно применять для грубого нахождения корня данного уравнения, метод прост и надежен, всегда сходится.

Пример 3. Методом половинного деления уточнить корень уравнения

$f(x) \equiv x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0,$

лежащий на отрезке [0, 1].

Последовательно имеем:

$f(0) = -1;\ f(1) = 1;\ f(0{,}5) = 0{,}06 + 0{,}25 - 0{,}5 - 1 = -1{,}19;$

$f(0{,}75) = 0{,}32 + 0{,}84 - 0{,}75 - 1 = -0{,}59;$

$f(0{,}875) = 0{,}59 + 1{,}34 - 0{,}88 - 1 = +0{,}05;$

$f(0{,}8125) = 0{,}436 + 1{,}072 - 0{,}812 - 1 = -0{,}304;$

$f(0{,}8438) = 0{,}507 + 1{,}202 – 0{,}844 – 1 = - 0{,}135;$

$f(0{,}8594) = 0{,}546 + 1{,}270 – 0{,}859 – 1 = - 0{,}043$ и т. д.

Можно принять

$$\xi = \frac{1}{2}(0{,}859 + 0{,}875) = 0{,}867$$

---

5. Метод хорд

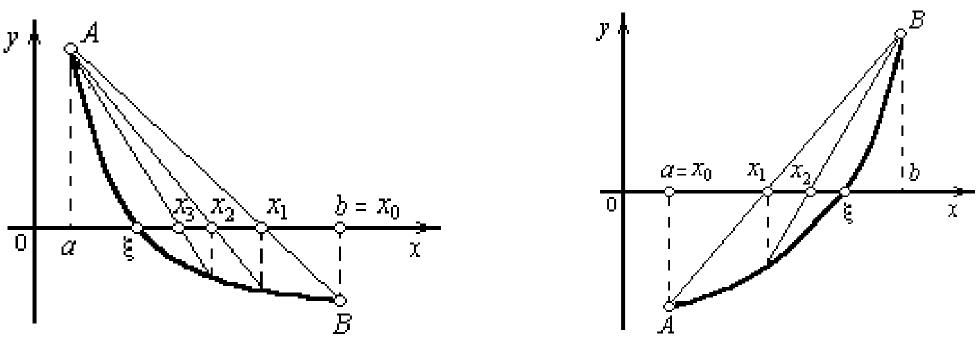
В данном методе процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений к корню уравнения (1) принимаются значения $x_1, x_2, ..., x_n$ точек пересечения хорды AB с осью абсцисс (Рис. 3). Сначала запишем уравнение хорды AB:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Для точки пересечения хорды AB с осью абсцисс ($x = x_1$, $y = 0$) получим уравнение:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Пусть для определенности $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$ (случай $f''(x) < 0$ сводится к нашему, если записать уравнение в виде $-f(x) = 0$). Тогда кривая $y = f(x)$ будет выпукла вниз и, следовательно, расположена ниже своей хорды AB. Возможны два случая: 1) $f(a) > 0$ (Рис. 3, *а*) и 2) $f(b) < 0$ (Рис. 3, *б*).



а) *б)*

Рисунок 3. Метод хорд

В первом случае конец a неподвижен и последовательные приближения: $x_0 = b$;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a), \qquad (i = 0, 1, 2, ...) \qquad (5)$$

образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < \xi < \ldots < x_{i+1} < x_i < \ldots < x_1 < x_0.$$

Во втором случае неподвижен конец b, а последовательные приближения: $x_0 = a$;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i) \qquad (6)$$

образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < \xi < b.$$

Обобщая эти результаты, заключаем:

1) неподвижен тот конец, для которого знак функции $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$;
2) последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня ξ, где функция $f(x)$ имеет знак, противоположный знаку ее второй производной $f''(x)$.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет обнаружено, что

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon,$$

где ε - заданная предельная абсолютная погрешность.

***Пример* 4.** Найти положительный корень уравнения

$f(x) \equiv x^3 - 0{,}2\,x^2 - 0{,}2\,x - 1{,}2 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение.

Прежде всего, отделяем корень.

Так как $f(1) = -0{,}6 < 0$ и $f(2) = 5{,}6 > 0$, то искомый корень ξ лежит в интервале [1, 2]. Полученный интервал велик, поэтому разделим его пополам. Так как

$f(1{,}5) = 1{,}425 > 0$, то $1 < \xi < 1{,}5$.

Так как $f''(x) = 6x - 0{,}4 > 0$ при $1 < x < 1{,}5$ и $f(1{,}5) > 0$, то воспользуемся формулой (5) для решения поставленной задачи:

$$x_1 = 1 + \frac{0{,}6}{1{,}425 + 0{,}6}(1{,}5 - 1) = 1{,}15;$$

$$|x_1 - x_0| = 0{,}15 > \varepsilon,$$

следовательно, продолжаем вычисления:

$f(x_1) = -0{,}173;$

$x_2 = 1{,}15 + \dfrac{0{,}173}{1{,}425 + 0{,}173}(1{,}5 - 1{,}15)$ = 1,190;

$|x_2 - x_1| = 0{,}04 > \varepsilon$, $f(x_2) = -0{,}036$;

$x_3 = 1{,}190 + \dfrac{0{,}036}{1{,}425 + 0{,}036}(1{,}5 - 1{,}190)$ = 1,198;

$|x_3 - x_2| = 0{,}008 < \varepsilon$.

Таким образом, можно принять $\xi = 1{,}198$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Заметим, что точный корень уравнения $\xi = 1{,}2$.

6. Метод Ньютона

Отличие этого итерационного метода от предыдущего состоит в том, что вместо хорды на каждом шаге проводится касательная к кривой $y = f(x)$ при $x = x_i$ и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс (Рис. 4).

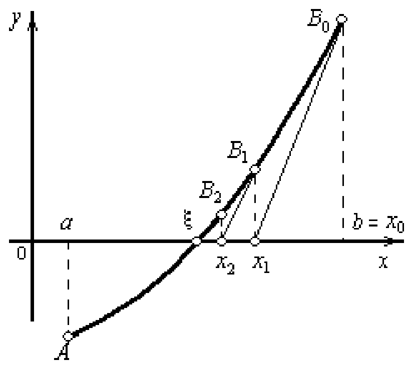


Рисунок 4. Метод Ньютона

При этом не обязательно задавать отрезок $[a, b]$, содержащий корень уравнения (1), достаточно найти лишь некоторое начальное приближение корня $x = x_0$.

Применяя метод Ньютона, следует руководствоваться следующим правилом: *в качестве исходной точки x_0 выбирается тот конец интервала $[a, b]$, которому отвечает ордината того же знака, что и знак $f''(x)$*, то есть произведение $f(x) * f''(x) > 0$

Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ через точку B_0 с координатами x_0 и $f(x_0)$, имеет вид: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Отсюда найдем следующее приближение корня x_1 как абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox ($y = 0$): $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения как точки пресечения с осью абсцисс касательных, проведенных в точках B_1, B_2 и так далее. Формула для $i+1$ приближения имеет вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \qquad (7)$$

Для окончания итерационного процесса может быть использовано или условие $|f(x_i)| < \varepsilon$, или условие близости 2^x последовательных приближений $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$.

Итерационный процесс сходится если $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

При правильном выборе начального приближения метод Ньютона дает наиболее быстрое приближение к корню.

7. Индивидуальные задания по теме

Уровень 1

1. На основе анализа изученного теоретического материала разработать алгоритм в виде блок-схемы к выбранным двум приближенным методам решения уравнения.

2. Составить программу на языке программирования и решить выбранными в п.1 методами следующие уравнения:

1) $x - 2 + 2x^3 = 0$ 2) $x - \sin(x) + 0{,}25 = 0$

3) $2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$ 4) $2x + 5 - \cos(x) = 0$

3. Определить эффективность каждого метода, сравнив количество итераций, совершаемых при вычислении корня при одной и той же степени точности.

4. Используя материалы образовательного портала, подготовить реферат по одной из следующих тем "Нильс Абель и алгебраические уравнения ", "Точные методы решения алгебраических уравнений", "Вклад И. Ньютона в развитие вычислительной математики".

Уровень 2

1. На основе анализа изученного теоретического материала разработать алгоритм в виде блок-схемы к каждому описанному приближенному методу решения уравнения.

2. Составить программу на языке программирования и решить выбранными методами следующие уравнения:

1) $x^4 + x^3 + x - 1 = 0$ 2) $x + \ln x - 0{,}125e^x = 0$

3) $\sin x + \cos 2x = 0$ 4) $5\cos(2x) - 3/x = 0$

3. Сделать вывод о самом эффективном методе, сравнив количество итераций, совершаемых при вычислении корня при одной и той же степени точности.

4. Используя материалы образовательного портала, самостоятельно разобрать приближенный метод простых итераций решения уравнений, разработать описание, блок-схему метода.

Уровень 3

1. На основе анализа изученного теоретического материала разработать алгоритм в виде блок-схемы к каждому описанному приближенному методу решения уравнения.
2. Составить программу на языке программирования и решить выбранными методами следующие уравнения:

1) $x^5+x^4+2x-5=0$ 2) $2X^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$
3) $\sin^2 x - \cos 2x - 0$ 4) $3\cos(x^2) - 2/x^2 = 0$

3. Сделать вывод о самом эффективном методе, сравнив количество итераций, совершаемых при вычислении корня при одной и той же степени точности, и объяснить почему он самый эффективный.

4. Используя материалы образовательного портала, самостоятельно разобрать приближенный интегрированный метод "секущих-касательных" и написать по этому методу обучающую программу.

Литература

Печатные издания
1. Лапчик М.П. Численные методы (1-ое изд.) (в электронном формате) – М.: ОИЦ «Академия», 2021.
2. Слабнов В.Д. Численные методы и программирование: Учебное пособие – коллекция «Информатика – Издательство «Лань»(СПО)» ЭБС ЛАНЬ, 2021.

Электронные издания (электронные ресурсы)

Exponenta.ru: образовательный математический сайт [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://www.exponenta.ru/, свободный.

2. Intuit.ru: Учебный видеокурс “Численные методы” [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://www.intuit.ru/, свободный.