

М.А.Зеликман

Курс лекций по физике  
2-й семестр

Электромагнетизм.  
Электрические колебания.  
Упругие волны.  
Электромагнитные волны.

Учебное пособие

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Электродинамика

### Глава 1. Электростатика

§1. Электростатическое поле в вакууме. Основные факты.....	3
§2. Электростатическое поле. Напряженность поля.....	3
§3. Потенциал.....	4
§4. Электрическая энергия системы зарядов.....	6
§5. Связь между напряженностью и потенциалом.....	7
§6. Диполь.....	8
§7. Поле системы зарядов на больших расстояниях от нее.....	10

### Глава 2. Элементы векторного анализа.

§1. Градиент.....	11
§2. Поток вектора.....	13
§3. Дивергенция.....	14
§4. Теорема Остроградского-Гаусса.....	15
§5. Циркуляция и ротор.....	15
§6. Теорема Стокса.....	16
§7. Оператор набла.....	17
§8. Циркуляция и ротор электростатического поля.....	17
§9. Теорема Гаусса и дивергенция электростатического поля.....	18
§10. Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса.....	18

### Глава 3. Электрическое поле в диэлектриках.

§1. Полярные и неполярные молекулы.....	20
§2. Поляризация диэлектрика.....	20
§3. Поле внутри диэлектрика.....	21
§4. Объемные и поверхностные связанные заряды.....	21
§5. Вектор электрического смещения.....	22
§6. Поле внутри плоской диэлектрической пластины.....	23
§7. Условия на границе двух диэлектриков.....	24
§8. Сегнетоэлектрики.....	24

### Глава 4. Проводники в электрическом поле

§1. Электрическое поле в проводниках.....	25
§2. Напряженность поля у поверхности проводника.....	25
§3. Потенциал уединенного проводящего шара.....	26
§4. Метод зеркального отображения.....	27
§5. Метод зеркального отображения в случае шара.....	27
§6. Электроемкость уединенного проводника.....	29
§7. Конденсаторы.....	30
§8. Энергия электрического поля.....	31

### Глава 5. Постоянный электрический ток.

§1. Электрический ток.....	32
§2. Уравнение непрерывности.....	33
§3. Электродвижущая сила (ЭДС).....	33
§4. Закон Ома. Сопротивление.....	34
§5. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа.....	35
§6. Метод контурных токов.....	36
§7. Мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.....	36
§8. Напряжение на зажимах источника тока.....	37

### Глава 6. Магнитное поле в вакууме.

§1. Магнитное поле. Основные факты.....	38
§2. Вектор магнитной индукции.....	38
§3. Закон Био-Савара-Лапласа.....	39
§4. Поле бесконечного прямолинейного тока.....	39
§5. Линии магнитной индукции и их свойства.....	39
§6. Принцип суперпозиции.....	39

§7. Поле движущегося заряда.....	40
§8. Закон Ампера.....	40
§9. Сила Лоренца.....	41
§10. Контур с током в магнитном поле.....	41
§11. Энергия контура с током в магнитном поле.....	43
§12. Магнитное поле кругового контура с током.....	43
§13. Примеры анализа магнитных взаимодействий.....	43
§14. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле.....	46
§15. Дивергенция и ротор магнитного поля.....	46
§16. Поле внутри соленоида.....	48

### Глава 7. Магнитное поле в веществе.

§1. Намагничивание магнетика.....	49
§2. Напряженность магнитного поля.....	49
§3. Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля.....	50
§4. Вычисление поля в магнетике.....	51
§5. Условия на границе двух магнетиков.....	52
§6. Виды магнетиков.....	53

### Глава 8. Электромагнитная индукция.

§1. Явление электромагнитной индукции.....	55
§2. ЭДС индукции.....	56
§3. Примеры анализа явления электромагнитной индукции.....	58
§4. Явление самоиндукции.....	59
§5. Ток при замыкании и размыкании контура.....	60
§6. Взаимная индукция.....	60
§7. Энергия магнитного поля.....	61

### Глава 9. Уравнения Максвелла.

§1. Вихревое электрическое поле.....	62
§2. Ток смещения.....	63
§3. Уравнения Максвелла.....	64

## Электрические колебания.

§1. Свободные незатухающие колебания в колебательном контуре.....	65
§2. Свободные затухающие колебания.....	66
§3. Вынужденные электрические колебания. Резонанс.....	67

## Упругие волны.

§1. Распространение волн в упругой среде.....	69
§2. Уравнения плоской и сферической волн.....	70
§3. Волновое уравнение.....	71
§4. Стоячие волны.....	72
§5. Колебание струны.....	73
§6. Звук.....	73
§7. Эффект Доплера для звуковых волн.....	73

## Электромагнитные волны.

§1. Волновое уравнение для электромагнитных волн.....	75
§2. Плоская электромагнитная волна.....	76
§3. Экспериментальное исследование электромагнитных волн.....	78
§4. Энергия и импульс электромагнитных волн.....	78
§5. Излучение движущегося заряда.....	79
Список вопросов к экзамену.....	81

# ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

## Глава 1. Электростатика.

### §1. Электростатическое поле в вакууме. Основные факты.

Существуют два вида зарядов: положительные и отрицательные. Одноименные отталкиваются, разноименные притягиваются.

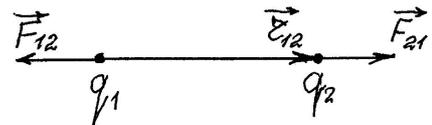
Заряд тела определяется зарядами элементарных частиц: электрон  $q = -e$ , протон  $q = e$ , нейтрон  $q = 0$ , где элементарный заряд  $e$  равен  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Обычно макроскопические тела являются квазинейтральными.

Способы зарядки:

- 1) контакт с заряженным телом;
- 2) трение;
- 3) индукция (влияние). 

Закон сохранения электрического заряда: в замкнутой системе суммарный заряд остается постоянным.

Закон Кулона:  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$



Кулоновская сила – это сила взаимодействия двух точечных зарядов.

Коэффициент  $k$  в разных системах единиц разный. В СГС (см, г, с)  $k = 1$ , тогда сила измеряется в динах, единица заряда - основная.

В СИ единица заряда – производная, заряд измеряется в Кулонах (Кл), Кулон определяется через основную единицу – Ампер: 1 Кл – это заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за 1 секунду, при силе тока 1 А. Тогда

$$k = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \left( \frac{\text{м}}{\Phi} \right), \quad \text{где } \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\Phi}{\text{м}}$$

диэлектрическая проницаемость вакуума, или электрическая постоянная.

Два точечных заряда по 1 Кл каждый на расстоянии 1 метр взаимодействуют с силой, равной  $9 \cdot 10^9$  Н.

### §2. Электростатическое поле. Напряженность поля.

Вокруг заряженного тела существует электростатическое поле, которое обнаруживается внесением в него пробного заряда. Для характеристики поля вводится понятие напряженности. Напряженностью поля в точке называется отношение силы, которая действовала бы на пробный заряд, внесенный в данную точку, к величине этого заряда.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \quad [E] = 1 \frac{H}{Кл} = 1 \frac{B}{м}$$

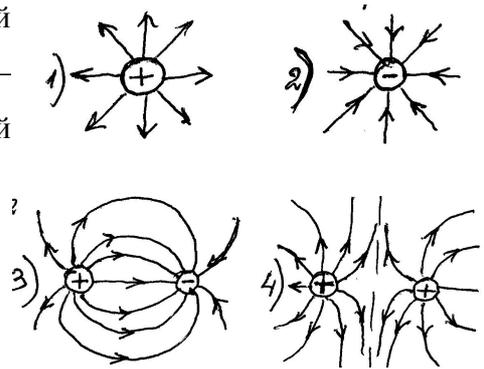
Напряженность поля точечного заряда равна:  $\vec{E}_{m.z.} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$ .

Зная распределение  $\vec{E}$  в некоторой области, можем найти силу, действующую на любой точечный заряд, внесенный в любую точку этой области:  $\vec{F} = q\vec{E}$ .  $\vec{E}$  - силовая характеристика поля (позволяет найти силу).

Принцип суперпозиции: если поле создано несколькими зарядами, то напряженность поля в любой точке равна векторной сумме напряженностей, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности:  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ .

Если тело, создающее поле, разбить на малые части и проинтегрировать, то можно найти напряженность поля, созданную телом любой формы.

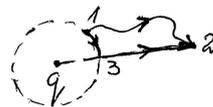
Для изображения электростатических полей пользуются силовыми линиями. Силовая линия - воображаемая кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором  $\vec{E}$  в этой точке. Свойства силовых линий: 1) непрерывны, 2) не пересекаются, 3) начинаются на плюсах, кончаются на минусах, 4) где линии гуще, там поле сильнее.



### §3. Потенциал.

Рассмотрим поле точечного заряда  $q$ :  $\vec{F} = F(r)\vec{e}$  - это поле центральное, т.е. сферически симметричное. В разделе «Механика» (в прошлом семестре) мы показали, что такое поле является консервативным, т.е. работа не зависит от формы траектории:

$$A_{12} = \int_1^2 F(r)\vec{e} \cdot d\vec{l}$$



Вычислим работу по перемещению пробного заряда  $q'$  из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = A_{13} + A_{32} = 0 + \int_1^2 F(r)dr = \frac{q \cdot q'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = W_{p1} - W_{p2},$$

где  $W_p = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}$  - потенциальная энергия заряда  $q'$  в поле заряда  $q$ . Но эта энергия

зависит от величины заряда  $q'$ . Мы же хотим характеризовать само поле, вне зависимости от внесенного в него заряда. Поэтому введем понятие потенциала. Потенциал точки поля численно равен потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в эту точку:  $\varphi = W_p / q'$ . Потенциал – скаляр. Потенциал точки поля точечного заряда

$$\varphi_{m.з.} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Пусть поле создано системой точечных зарядов. Аналогично предыдущему получим для работы по перемещению пробного заряда  $q'$  из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \sum A_i = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \cdot q'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right) = W_{p1} - W_{p2}$$

$$W_p = \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$$

Это принцип суперпозиции: если поле создано несколькими зарядами, то потенциал в любой точке равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности.

Зная распределение потенциалов, можно найти энергию заряда  $q'$ , помещенного в любую точку:  $W_p = q'\varphi$ . Тогда  $A_{12} = q'(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Если заряд  $q'$  перемещается из данной точки в бесконечность, то  $A_{1\infty} = q'\varphi$ , т.е. потенциал точки поля численно равен работе поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

Разность потенциалов двух точек численно равна работе поля по перемещению единичного положительного заряда из первой точки во вторую.

$[\varphi] = 1 \text{ В}$  (Вольт) – потенциал такой точки, что при перемещении из нее в бесконечность заряда 1 Кл поле совершает работу 1 Дж. Несистемная единица энергии и работы 1 эВ (электрон-Вольт) – работа, которую поле совершает при перемещении одного электрона между точками с разностью потенциалов 1 В.  $1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ .

#### §4. Электрическая энергия системы зарядов.

##### 1. Энергия взаимодействия заряженных тел.

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов:  $W_{p12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ , а для  $N$  зарядов:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq k \\ i, k=1}}^N W_{pik} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq k \\ i, k=1}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (*)$$

где  $\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{k \\ k \neq i}}^N \frac{q_k}{r_{ik}}$  - потенциал в точке нахождения  $i$ -го заряда, созданный всеми

другими зарядами.

Рассмотрим, например систему из четырех зарядов  $q$ , находящихся в вершинах тетраэдра со стороной  $a$ . Энергия взаимодействия каждой пары равна  $W_{p1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a}$ .

Всего таких взаимодействующих пар 6 (число сочетаний из 4 по 2), так что энергия взаимодействия всех зарядов равна  $W_p = 6W_{p1} = \frac{6}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a}$ .

Теперь найдем эту энергию, используя формулу (\*). Потенциал в месте нахождения одного из зарядов, обусловленный тремя остальными, равен  $\varphi = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a}$ . Поэтому

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \varphi_i = \frac{1}{2} 4q\varphi = \frac{6}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a}, \text{ как и ранее.}$$

##### 2. Полная энергия взаимодействия.

Если заряды распределены непрерывно, то, разлагая систему на совокупность элементарных зарядов  $dq = \rho dV$  и переходя от суммирования в (\*) к интегрированию, получим

$$W_p = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV, \quad (**)$$

где  $\varphi$  - потенциал, создаваемый всеми зарядами системы в элементе  $dV$ .

Можно ошибочно думать, что (\*\*) – это только видоизмененное выражение (\*), соответствующее замене точечных зарядов на непрерывно распределенные. В действительности это не так, эти выражения различаются по своему содержанию! Дело в разном смысле потенциала  $\varphi$ , входящего в эти выражения. Поясним это на примере. Пусть

система состоит из двух шариков с зарядами  $q_1$  и  $q_2$ . Расстояние между ними много больше их радиусов, так что можно считать их точечными. Найдем энергию этой системы с помощью обеих формул.

Согласно (\*),  $W_p = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2$ , где  $\varphi_1$  - потенциал, созданный зарядом  $q_2$  в месте расположения  $q_1$ .

Согласно же (\*\*), мы должны разбить каждый шарик на бесконечно малые элементы  $\rho dV$  и каждый из них умножить на потенциал, созданный не только зарядом другого шарика, но и элементами заряда этого шарика. Ясно, что результат будет совершенно иным, а именно:  $W_p = W_1 + W_2 + W_{12}$ . Здесь  $W_1$  - энергия взаимодействия друг с другом элементов первого шарика,  $W_2$  - то же, но для второго, а  $W_{12}$  - энергия взаимодействия элементов первого шарика с элементами второго.  $W_1$  и  $W_2$  называются собственными энергиями зарядов 1 и 2, а  $W_{12}$  - энергией взаимодействия первого и второго зарядов.

Таким образом, расчет по (\*) дает только  $W_{12}$ , а по (\*\*) - полную энергию взаимодействия: т.е. кроме  $W_{12}$  еще и собственные энергии  $W_1$  и  $W_2$ . Это различие обязательно нужно иметь в виду!

### **§5. Связь между напряженностью и потенциалом.**

$$\vec{F} = -\nabla W_p, \text{ т.е. } q\vec{E} = -q\nabla\varphi.$$

$$\text{Отсюда получаем } \vec{E} = -\nabla\varphi = -\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}_{E_x}\vec{i} - \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}_{E_y}\vec{j} - \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}_{E_z}\vec{k}.$$

Если задать направление  $\vec{l}$  и выбрать его в качестве оси  $x$ , то получим проекцию напряженности поля на это направление:  $E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ .

Проверим для точечного заряда:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3}, \quad E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \text{ как и должно быть.}$$

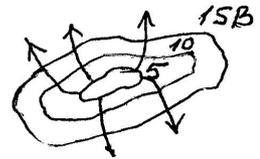
Таким образом, зная  $\varphi(\vec{r})$ , по формуле  $\vec{E} = -\nabla\varphi$  можно найти  $\vec{E}(\vec{r})$ .

Как от  $\vec{E}(\vec{r})$  перейти к  $\varphi(\vec{r})$ ?

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 q \vec{E} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$$

Интеграл можно брать по любой линии из точки 1 в точку 2. Из того факта, что работа по замкнутому контуру равна нулю, получим  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$  (кружочком обозначается интеграл по замкнутому контуру).

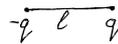
Для изображения распределения потенциалов пользуются эквипотенциальными поверхностями – это геометрическое место точек, имеющих один и тот же потенциал:  $\varphi(x, y, z) = const$ . Они



перпендикулярны силовым линиям, так как проекция  $\vec{E}$  на касательную к такой поверхности равна нулю. Обычно они проводятся так, чтобы потенциалы на разных поверхностях отличались на одну и ту же величину. Тогда, чем гуще эквипотенциали (меньше расстояние между ними), тем сильнее поле.

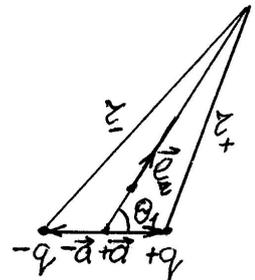
### §6. Диполь.

Электрическим диполем называется система из двух одинаковых по величине, разноименных точечных зарядов.



Найдем потенциал и напряженность поля диполя в точке, расстояние до которой много больше размера диполя (расстояние между зарядами).

Поле диполя обладает осевой симметрией, т.е. картина одна и та же во всех плоскостях, проходящих через ось диполя, причем вектор  $\vec{E}$  лежит в этой плоскости.



Обозначим  $\vec{l} = 2\vec{a}$  (от минуса к плюсу).

$r_+ = r - a \cos\theta = r - \vec{a}\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_r$  - это орт, направленный из центра диполя на точку.

$r_- = r + a \cos\theta = r + \vec{a}\vec{e}_r$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{l}\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\vec{p}\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (*)$$

где  $\vec{p} = q\vec{l}$  - электрический дипольный момент (направлен от - к +).

Поле диполя вдали от него определяется электрическим моментом диполя  $\vec{p}$ :

$$\varphi(r) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Найдем  $\vec{E}$ .  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ . В осях  $x, y, z$   $\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ , в других

координатах выражения для градиента другие, например в полярных координатах

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3};$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

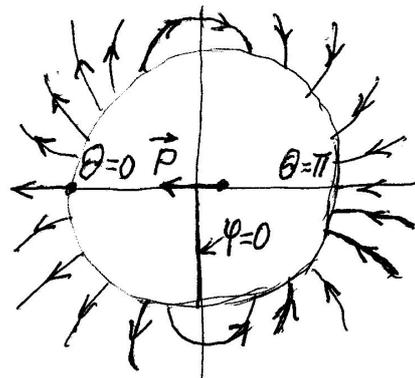
При  $\theta = 0$   $E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} > 0$ , при  $\theta = \pi$   $E_{\parallel} = E_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} < 0$ , т.е. в

точках на оси диполя  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3}$ .

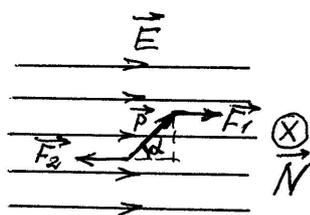
При  $\theta = \pi/2$  получим

$$E_r = 0, \quad E_{\perp} = E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}.$$

На плоскости, проходящей через центр диполя перпендикулярно к нему,  $\varphi = 0$ .



Мы исследовали поле, созданное диполем на большом расстоянии от него. Теперь рассмотрим поведение диполя во внешнем электрическом поле. Пусть внешнее поле однородно (вектор  $\vec{E}$  во всех точках один и тот же). На диполь действует пара сил (две равных по модулю, параллельных, противоположно направленных силы). Результирующая сила равна нулю. Найдем вращающий момент пары:



$$N = Fl \sin \alpha = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha.$$

В векторном виде этот момент можно записать так:  $\vec{N} = [\vec{p}, \vec{E}] = \vec{p} \times \vec{E}$ .

Таким образом, в однородном поле диполь будет только поворачиваться, пока не встанет в положение равновесия, когда  $\vec{p}$  параллелен  $\vec{E}$ , тогда  $\vec{N} = 0$ . Как мы увидим дальше,  $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$  - устойчивое равновесие,  $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{E}$  - неустойчивое.

Найдем потенциальную энергию диполя во внешнем поле.

$$\begin{aligned} W_p &= q\varphi_+ - q\varphi_- = q\Delta\varphi = q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z\right) = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}p_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}p_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}p_z = \vec{p} \cdot \nabla\varphi = -\vec{p} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Потенциальная энергия достигает минимума, когда  $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$ , значит, это устойчивое равновесие.

Если поле не однородное, то, кроме вращающего момента, действует еще и сила. Найдем ее.

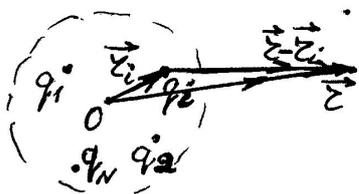
$$\vec{F} = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) - \text{если поле однородно, то } \vec{E}_+ = \vec{E}_- \text{ и } \vec{F} = 0.$$

$$\begin{aligned} F_x &= q(E_{+x} - E_{-x}) = q\Delta E_x = q\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial E_x}{\partial z}\Delta z\right) = \\ &= q\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}l_x + \frac{\partial E_x}{\partial y}l_y + \frac{\partial E_x}{\partial z}l_z\right) = q \cdot (\vec{l} \cdot \nabla)E_x = (\vec{p} \cdot \nabla)E_x. \end{aligned}$$

$$\text{Итого, } \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E} = p \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}$$

### §7. Поле системы зарядов на больших расстояниях от нее.

Возьмем N зарядов:  $q_1, q_2, \dots, q_N$  в объеме с линейными размерами порядка  $l$  и исследуем поле на расстоянии  $r \gg l$  от системы. Потенциал в любой точке равен



$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ |\vec{r} - \vec{r}_i| &= r - \vec{r}_i \cdot \vec{e}_r = r\left(1 - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{e}_r}{r}\right) \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

При  $x \ll 1$  ограничимся двумя первыми членами:  $1/(1-x) \approx 1+x$ . Тогда

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r} (1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{e}_r}{r}) = \frac{\sum q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i = \frac{\sum q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (*)$$

где  $\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i$  - дипольный электрический момент системы зарядов.

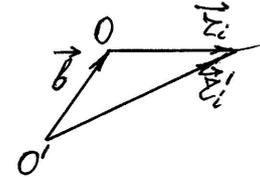
В случае диполя, где всего два заряда, получаем  $\vec{p} = q\vec{l}$ . В общем случае вектор  $\vec{p}$  зависит от выбора начала координат  $O$ , но если  $\sum q_i = 0$ , то не зависит.

Доказательство. Возьмем два начала координат:  $O$  и  $O'$ .

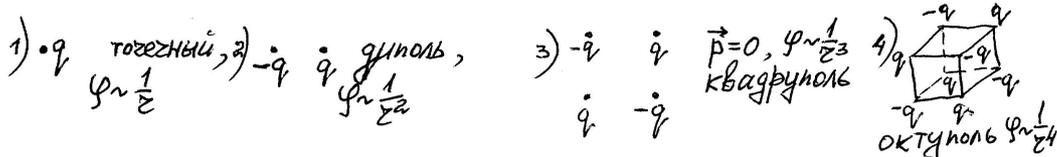
$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{b};$$

$$\vec{p}' = \sum q_i \vec{r}_i' = \sum q_i (\vec{r}_i + \vec{b}) = \sum q_i \vec{r}_i + \vec{b} \sum q_i = \vec{p} + \vec{b}q$$

Если  $q \neq 0$ , то  $\vec{p}' \neq \vec{p}$ , но если  $q = 0$ , то  $\vec{p}' = \vec{p}$ .



Формула (\*) соответствует разложению потенциала в ряд по степеням  $1/r$ . Если  $q \neq 0$ , то главный член – первый, и поле вдали от системы соответствует полю точечного заряда ( $1/r$ ). Если  $q = 0$ , а  $\vec{p} \neq 0$ , то главный член – второй, и поле определяется как поле диполя ( $1/r^2$ ) (см. формулу (\*) в §6). Если же и  $q = 0$ , и  $\vec{p} = 0$ , то главным будет следующий член в разложении, соответствующий «квадруполю» и пропорциональный  $1/r^3$ . Если и он обращается в ноль, то поле соответствует «октуполю» ( $1/r^4$ ).



## Глава 2. Элементы векторного анализа.

### §1. Производная по направлению. Градиент.

Если в каждой точке задано значение какой-то физической величины, то говорят, что задано поле этой величины. Оно может быть скалярным или векторным, например, температура или напряженность поля.

*Производная по направлению* - это обобщение понятия производной на случай функции нескольких переменных. Производная по направлению показывает, насколько быстро функция изменяется при движении вдоль заданного направления.

Производная функции одной переменной показывает, как изменяется её значение при малом изменении аргумента. Если мы попытаемся по аналогии определить производную функции многих переменных, то столкнёмся с трудностью: в этом случае изменение аргумента (то есть точки в пространстве) может происходить в разных направлениях, и при

этом будут получаться разные значения производной. Именно это соображение и приводит к определению производной по направлению.

Пусть задано скалярное поле  $\varphi(x, y, z)$ . Для любого единичного вектора  $\vec{e}$  определим производную функции  $f$  в точке  $\vec{x}_0$  по направлению  $\vec{e}$  следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial e} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{x}_0 + h \cdot \vec{e}) - \varphi(\vec{x}_0)}{h}$$

Значение этого выражения показывает, как быстро меняется значение функции при сдвиге аргумента в направлении вектора  $\vec{e}$ .

Если вектор  $\vec{e}$  сонаправлен с координатной осью, то производная по направлению совпадает с частной производной по этой координате.

*Градиентом* скалярной величины  $\varphi$  называется выражение:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

Введем дифференциальный векторный оператор «набла»  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ , тогда

$$\text{grad } \varphi = \nabla \cdot \varphi.$$

Приращение функции  $\varphi$  при смещении точки на  $d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k} = dl \cdot \vec{e}$

$$\text{равно } d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \frac{\partial \varphi}{\partial e} dl = \text{grad } \varphi \cdot d\vec{l}.$$

Отсюда следует, что производная функции по направлению равна проекции градиента функции на это направление или, иначе, скалярному произведению градиента на орт направления:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial e} = \nabla \varphi \cdot \vec{e}$$

Эта производная максимальна, если направление совпадает с направлением градиента функции в данной точке, т.е. вектор градиента показывает направление наибыстрейшего роста функции. Максимальное значение производной равно  $|\text{grad } \varphi|$ .

Изменение вектора  $\vec{F}$  при смещении точки на  $d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k} = dl \cdot \vec{e}$  равно

$$d\vec{F} = dF_x \vec{i} + dF_y \vec{j} + dF_z \vec{k} = (\nabla F_x \cdot d\vec{l}) \vec{i} + (\nabla F_y \cdot d\vec{l}) \vec{j} + (\nabla F_z \cdot d\vec{l}) \vec{k} = (d\vec{l} \cdot \nabla) \vec{F}.$$

\*\*\*\*\*

**Об операторах, функциях и функционалах.**

Оператор – это действие, сопоставляющее функции функцию, например, если оператор  $\sin$  применить к функции  $f(x)$ , то получим новую функцию  $\sin(f(x))$ .

Функция ставит в соответствие числу число:  $y = x^3$ , числу  $x = 2$  соответствует  $y = 8$ . Существует еще одно понятие - функционал. Он ставит в соответствие функции число,

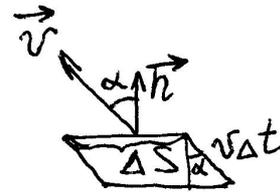
например,  $A = \int_1^5 f(x)dx$  - каждой функции  $f(x)$  соответствует число  $A$ .

\*\*\*\*\*

**§2. Поток вектора.**

Рассмотрим течение жидкости. Задано векторное поле скоростей  $\vec{v}(\vec{r})$ . Объем жидкости, протекающей через поверхность за 1 секунду, называется потоком жидкости через эту поверхность. Найдем его. Разобьем поверхность  $S$  на участки  $\Delta S$ . За время  $\Delta t$  через  $\Delta S$  пройдет объем  $\Delta V$ ,

равный объему призмы:  $\Delta V = \Delta S \cdot \underbrace{v \cdot \Delta t \cdot \cos \alpha}_{\text{высота призмы}}$ .



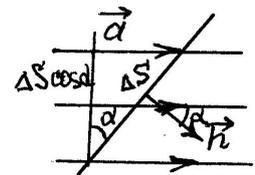
Поток  $\Delta \Phi = \Delta V / \Delta t = \Delta S \cdot v \cdot \cos \alpha$ . Считая  $\Delta S$  равным бесконечно малому  $dS$ , получим  $d\Phi = dS \cdot v \cdot \cos \alpha = \vec{v} \cdot d\vec{S}$ . Мы ввели вектор  $d\vec{S}$ , направленный по нормали к поверхности в данной точке. Тогда  $\Phi_v = \int_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S}$ .

Аналогично можно ввести поток любого вектора  $\vec{a}$  через поверхность  $S$ :

$$\Phi_a = \int_{(S)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} a_n dS$$

Поток – величина скалярная (алгебраическая). Его знак зависит от выбора направления нормали  $\vec{n}$  к поверхности. В случае замкнутых поверхностей  $\vec{n}$  всегда направлен наружу.

Потоку можно дать геометрическую интерпретацию. Изобразим векторное поле системой линий, построенных так, что в каждой точке густота линий равна  $|\vec{a}|$  в этой точке (например, силовые линии



электрического поля). Число пересечений этими линиями площади  $\Delta S$ , равно  $\Delta N = a \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha = a_n \Delta S$ , есть поток вектора  $\vec{a}$  через площадку  $\Delta S$ .

Для учета знака будем при остром угле  $\alpha$  считать число пересечений с плюсом, а при тупом – с минусом. В нашем примере  $\Delta N = 3$ . Если выбрать  $\vec{n}$  направленным в противоположную сторону, то  $\Delta N = -3$ .

Рассматривая целую поверхность, получим  $\Phi = \sum \Delta N_i = N_+ - N_-$ .

Для замкнутой поверхности пересечения изнутри наружу имеют знак плюс, наоборот – минус.

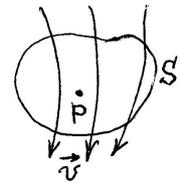
Если линии непрерывны, то в замкнутую поверхность они входят столько же раз, сколько и выходят из нее. Поэтому  $\Phi = 0$ . Если же

они могут оканчиваться или начинаться внутри, то  $\Phi = N_{нач} - N_{оконч}$ . Знак  $\Phi$  зависит от того, каких больше.



### §3. Дивергенция.

Пусть задано векторное поле скоростей жидкости  $\vec{v}$ . Возьмем в окрестности точки Р замкнутую поверхность площадью  $S$ . Если в объеме внутри этой поверхности нет ни стоков, ни истоков, то  $\Phi = 0$ . Если  $\Phi \neq 0$ , значит, есть стоки или истоки.  $\Phi$  определяет соотношение стоков и истоков.  $\Phi/V$  дает среднюю удельную (на  $1 \text{ м}^3$ ) мощность источников в объеме  $V$ . Устремляя  $V$  к нулю, т.е. стягивая объем в точку Р, получаем удельную мощность источников в точке Р. Назовем ее дивергенцией (или расхождением).



$$\text{div } \vec{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_v}{V}$$

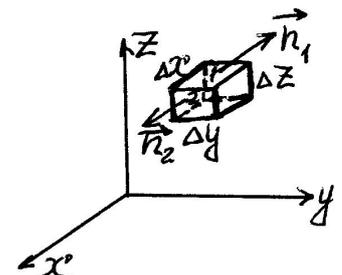
Аналогично для любого векторного поля:  $\text{div } \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_a}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{a} d\vec{S}$ . Интеграл

берется по любой замкнутой поверхности, окружающей точку Р.

$\text{div } \vec{a}$  - скалярная функция координат. Она численно равна плотности (концентрации) точек, в которых начинаются (+) или оканчиваются (-) линии вектора  $\vec{a}$ . Найдем ее выражение в декартовой системе координат.

Вычислим поток вектора  $\vec{a}$  через грани 1 и 2 (заднюю и переднюю) параллелепипеда. Нормаль в замкнутой поверхности всегда направлена наружу. Поэтому  $\vec{n}_2 \uparrow \uparrow O_x$ ,  $\vec{n}_1 \uparrow \downarrow O_x$ .

Найдем проекции  $\vec{a}$  на  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ :  $a_{n_2} = a_{x_2}$ ;  $a_{n_1} = -a_{x_1}$ .



$$\Phi_2 = a_{x_2} \underbrace{\Delta y \Delta z}_{\Delta S}; \quad \Phi_1 = -a_{x_1} \underbrace{\Delta y \Delta z}_{\Delta S}$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = (a_{x_2} - a_{x_1}) \Delta y \Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta V$$

Аналогично найдем потоки через левую и правую, а также через верхнюю и нижнюю грани параллелепипеда. В итоге получим:

$$\Phi_a = \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi_a}{\Delta V} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Используя векторный оператор  $\nabla$ , получим  $\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$  (скалярное произведение).

#### §4. Теорема Остроградского-Гаусса.

Зная дивергенцию в каждой точке, можно найти поток вектора  $\vec{a}$  через любую заданную поверхность. Рассмотрим вектор скорости жидкости  $\vec{v}$ . Тогда  $\operatorname{div} \vec{a} \cdot dV$  - мощность источников в объеме  $dV$ , а  $\int_{(V)} \operatorname{div} \vec{v} \cdot dV$  - суммарная мощность источников в объеме  $V$ . Она должна равняться потоку, вытекающему из объема через поверхность  $S$ :

$$\oint_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{v} \cdot dV$$

Это же верно для любого  $\vec{a}$ :

$$\oint_{(S)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} \cdot dV \quad - \text{ это теорема Остроградского-Гаусса.}$$

Левый интеграл берется по замкнутой поверхности  $S$ , а правый – по объему внутри  $S$ .

#### §5. Циркуляция и ротор.

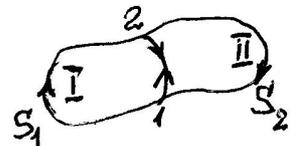
Назовем циркуляцией вектора  $\vec{a}$  по замкнутому контуру  $\Gamma$  (гамма)

величину  $\oint_{(\Gamma)} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \oint_{(\Gamma)} a_l dl$ . Для понимания смысла этого понятия



полезно помнить, что механическая работа – это циркуляция вектора силы.

Циркуляция обладает аддитивностью, т.е.  $C = C_1 + C_2$ . Выполнение этого равенства легко увидеть из рисунка, так как по общему участку в циркуляциях  $C_1$  и  $C_2$  проходим в противоположных направлениях, т.е. знаки будут разными.



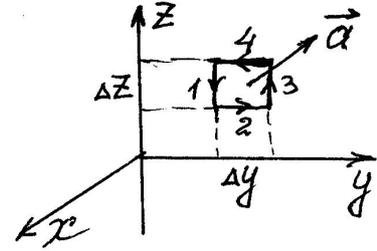
Аддитивность циркуляции позволяет ввести понятие удельной циркуляции, т.е. рассмотреть отношение циркуляции к площади обтекаемой поверхности.

Рассмотрим  $\lim_{S \rightarrow 0} \frac{C_a}{S}$ . Эта величина зависит не только от точки, но и от ориентации

площадки. Можно показать, что существует такой вектор (назовем его ротором), что

$$(\text{rot } \vec{a})_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{C_a}{S}, \text{ где вектор } \vec{n} \text{ - нормаль к площадке } S.$$

(В зарубежной литературе вместо обозначения “rot” используется “curl”).



Найдем проекцию ротора на ось x. Циркуляция равна

$$\begin{aligned} C &= C_2 + C_3 + C_4 + C_1 = a_{y_2} \Delta y + a_{z_3} \Delta z - a_{y_4} \Delta y - a_{z_1} \Delta z = \\ &= (a_{z_3} - a_{z_1}) \Delta z - (a_{y_4} - a_{y_2}) \Delta y = \frac{\partial a_z}{\partial y} \Delta y \Delta z - \frac{\partial a_y}{\partial z} \Delta z \Delta y \\ &= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \underbrace{\Delta y \Delta z}_{\Delta S} \end{aligned}$$

$$(\text{rot } \vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$$

Аналогично получим:  $(\text{rot } \vec{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}$  и  $(\text{rot } \vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$ .

Это формулы для нахождения проекций вектора  $\text{rot } \vec{a}$  на декартовы оси координат.

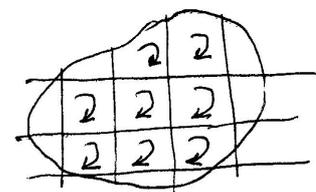
Используя оператор набла, можно написать  $\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}$

Обобщим результаты:  $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$ ;  $\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$ ;  $\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$ .

Отметим, что в других системах координат (сферической, цилиндрической и т.п.) все эти формулы имеют другой вид, и оператор  $\nabla$  не используется.

### §6. Теорема Стокса.

Зная  $\text{rot } \vec{a}$  в каждой точке поверхности, можно найти циркуляцию  $\vec{a}$  по контуру  $\Gamma$ , ограничивающему эту поверхность. Для этого разобьем поверхность на малые  $\Delta S$ . Ввиду малости, их



можно считать плоскими. Поэтому  $\Delta C \approx (\text{rot } \vec{a})_n \Delta S = \text{rot } \vec{a} \cdot \Delta \vec{S}$ .

Тогда  $C = \sum \Delta C_i \approx \sum \text{rot } \vec{a}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$ , а при стремлении  $\Delta S_i$  к нулю, получим

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{(S)} \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S} \text{ - теорема Стокса.}$$

Здесь  $S$  - это поверхность, ограниченная контуром  $\Gamma$ .

### **§7. Оператор набла.**

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi; \text{ div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}; \text{ rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a}.$$

$\nabla$  - оператор, действующий на все величины, стоящие справа от него. Получим некоторые формулы, действуя с оператором формально.

$$\text{grad } (\varphi \cdot \psi) = \nabla(\varphi\psi) = \psi \nabla \varphi + \varphi \nabla \psi = \psi \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \cdot \text{grad } \psi$$

$$\text{div}(\varphi \vec{a}) = \nabla(\varphi \vec{a}) = \nabla \varphi \cdot \vec{a} + \varphi \cdot \nabla \vec{a} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{a} + \varphi \cdot \text{div } \vec{a}$$

$$\text{div grad } \varphi = \nabla \cdot (\nabla \cdot \varphi) = \nabla \cdot \nabla \cdot \varphi = \nabla^2 \varphi = \left( \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{\Delta \text{-оператор Лапласа}} \right) \cdot \varphi = \Delta \varphi$$

$$\text{rot grad } \varphi = \nabla \times \nabla \varphi = (\nabla \times \nabla) \varphi = 0$$

$\text{div rot } \vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$ , так как смешанное произведение равно объему призмы, который обращается в ноль, если два вектора из трех совпадают.

$$\text{rot rot } \vec{a} = \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \cdot \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$$

Здесь мы использовали формулу:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ .

Отметим, что вывод этих формул не является строгим. Он только дает возможность предположить результат, для уверенности их нужно проверять строгой математикой.

Из формулы  $\text{div rot } \vec{a} = 0$  следует, что  $\text{rot } \vec{a}$  не имеет источников. Именно поэтому в теореме Стокса интеграл от ротора по поверхности определяется только ограничивающим ее контуром  $\Gamma$ .

### **§8. Циркуляция и ротор электростатического поля.**

Электростатические силы консервативны, т.е их работа по замкнутому контуру равна нулю. Отсюда следует:

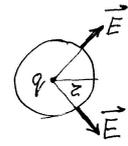
$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{(S)} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ по любой поверхности } S, \text{ ограниченной контуром } \Gamma. \text{ Из}$$

этого следует:  $\text{rot } \vec{E} = 0$  - первое уравнение электростатического поля.

### §9. Теорема Гаусса и дивергенция электростатического поля.

Рассчитаем поток  $\vec{E}$  через сферу радиуса  $r$  для поля точечного заряда  $q$  :

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{dS}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi r^2}{r^2} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Это количество линий, начинающихся (или при  $q < 0$  заканчивающихся) на заряде  $q$  .

Значит, поток  $\vec{E}$  через любую замкнутую поверхность, внутри которой в любой точке находится точечный заряд  $q$  , равен  $q / \epsilon_0$  .

Пусть внутри замкнутой поверхности находится  $N$  точечных зарядов. Тогда поток

вектора  $\vec{E}$  будет равен:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \oint \left( \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0}$$

Это теорема Гаусса: поток  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на  $\epsilon_0$  .

Если заряд распределен непрерывно, т.е. задана плотность заряда  $\rho(\vec{r}) = dq / dV$  :

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

С другой стороны, из теоремы Остроградского-Гаусса следует, что поток  $\vec{E}$  через поверхность равен

$$\oint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \int_{(V)} \text{div } \vec{E} \cdot dV$$

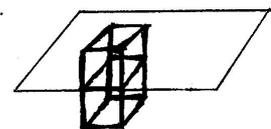
Это справедливо для любой поверхности, поэтому  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Это дифференциальная форма теоремы Гаусса (2-е уравнение Максвелла для электростатики).

### §10. Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса.

#### 1. Бесконечная заряженная плоскость.

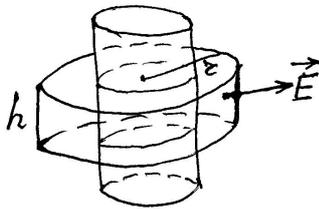
Пусть поверхностная плотность заряда на плоскости равна  $\sigma = dq / dS$  . Построим параллелепипед, так что плоскость



рассекает его пополам. Из соображений симметрии следует, что вектор  $\vec{E}$  в любой точке направлен перпендикулярно плоскости (от нее, если  $\sigma > 0$  ). Тогда поток через боковые грани равен нулю.

$$\Phi_E = Q/\varepsilon_0 \Rightarrow 0 + 2ES = \sigma S/\varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ (поле однородно)}$$

## 2. Бесконечный заряженный цилиндр.



Пусть линейная плотность заряда равна  $\lambda = dq/dl$ . Построим цилиндрическую поверхность такого вида, проходящую через исследуемую точку. Из симметрии следует, что  $\vec{E}$  направлен по  $\vec{r}$  в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, причем  $|\vec{E}|$

зависит только от расстояния до оси  $r$ . Запишем теорему Гаусса:  $\Phi_E = Q/\varepsilon_0$ . Поток через верхний и нижний круги равен нулю (т.к. линии  $\vec{E}$  их не «протыкают»). На боковой поверхности  $\vec{E}$  параллелен  $d\vec{S}$ .

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E} d\vec{S} = E \oint dS = E \cdot \underbrace{2\pi r h}_{\substack{\text{площадь} \\ \text{боковой} \\ \text{пов-ти}}}, \quad E \cdot 2\pi r h = \lambda h / \varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

## 2. Объемно заряженный шар.

Из симметрии следует, что  $\vec{E}$  в любой точке направлен по радиусу и модуль  $\vec{E}$  зависит только от  $r$ . Мысленно проведем сферу радиусом  $r$  с центром в точке O.



$$1) r \leq R$$

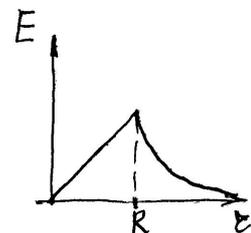
$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E} d\vec{S} = E \oint dS = E \cdot \underbrace{4\pi r^2}_{\substack{\text{площадь} \\ \text{пов-ти} \\ \text{сферы}}} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 / \varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r.$$

Поскольку  $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ , то  $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3}$  (при  $r \leq R$ ).



$$2) r \geq R, \quad E \cdot 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

При  $r = R$  обе формулы дают один и тот же результат.



### Глава 3. Электрическое поле в диэлектриках.

#### §1. Полярные и неполярные молекулы.

Диэлектрики – вещества, не способные проводить электрический ток. Идеальных диэлектриков не существует, но реальные диэлектрики проводят ток в  $10^{20}$  раз хуже, чем проводники.

Если диэлектрик внести в электрическое поле, то это поле и сам диэлектрик претерпевают изменения. Это происходит потому, что в состав атома входят отрицательные электроны и положительное ядро. Всякая молекула имеет суммарный заряд, равный нулю. Ее размеры малы, поэтому на макроскопических расстояниях ее поле является полем диполя, «плюс» которого находится в «центре тяжести» положительного заряда, а «минус» - в «центре тяжести» отрицательного.

У симметричных молекул ( $H_2, O_2$  и т.п.) центры плюсов и минусов совпадают, и дипольный момент равен нулю. Такие молекулы называются неполярными. У несимметричных молекул ( $CO_2, NH_3$  и т.п.) центры плюсов и минусов сдвинуты относительно друг друга. Такие молекулы обладают собственным дипольным моментом и называются полярными. В электрическом поле полярные и неполярные молекулы ведут себя по-разному. В неполярных под действием поля плюсы и минусы раздвигаются, и молекула приобретает дипольный момент, величина которого пропорциональна  $\vec{E}$ :  $\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}$ , ( $\beta$  называется поляризуемостью молекулы). При снятии поля  $\vec{p}$  исчезает. Говорят, что неполярная молекула ведет себя в поле, как упругий диполь.

Полярные молекулы в поле  $\vec{E}$  поворачиваются, стремясь встать по полю. Их дипольный момент не зависит от  $\vec{E}$ , поэтому говорят, что полярная молекула ведет себя в поле, как жесткий диполь. Строго говоря, раздвижение плюсов и минусов под действием поля также происходит, но этот эффект пренебрежимо мал в сравнении с влиянием поворота молекул.

#### §2. Поляризация диэлектрика.

В отсутствие внешнего поля дипольный момент диэлектрика равен нулю. Под действием  $\vec{E}$  диэлектрик поляризуется, т.е. его дипольный момент становится отличным от нуля. В качестве характеристики степени поляризации диэлектрика естественно взять дипольный момент единицы объема. Если поле или диэлектрик неоднородны, т.е. степень поляризации в разных точках разная, то назовем поляризацией величину  $\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}$ , где

суммирование ведется по физически бесконечно малому объему  $\Delta V$ .  $\vec{P}$  называется поляризацией.

У изотропных диэлектриков любого типа  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ , где  $\kappa \neq f(\vec{E})$  - безразмерная величина, называемая поляризуемостью диэлектрика.

Проверим размерности:  $[p] = Кл \cdot м$ ,  $[P] = \frac{Кл}{м^2} = [\epsilon_0 E]$ , как и должно быть.

### §3. Поле внутри диэлектрика.

Заряды, входящие в состав молекул, называются связанными. Под действием  $\vec{E}$  они могут только немного смещаться от положения равновесия, но не могут покинуть молекулу. Заряды, не входящие в состав молекул, называются сторонними. Поле в диэлектрике является суперпозицией полей, созданных связанными и сторонними зарядами:

$$\vec{E}_{\text{микро}} = \vec{E}_{\text{стор}} + \vec{E}_{\text{связ}}.$$

Микроскопическое поле сильно меняется в пределах межмолекулярных расстояний. Поскольку связанные заряды еще и движутся, то оно меняется и со временем. В качестве характеристики поля возьмем поле, усредненное по физически бесконечно малому объему:

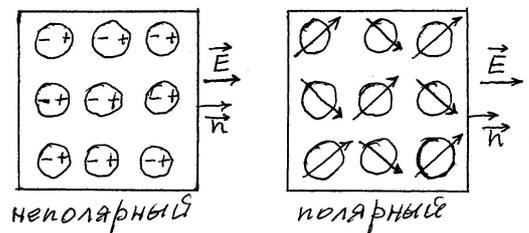
$$\vec{E} = \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = \langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle + \langle \vec{E}_{\text{связ}} \rangle = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \text{ Здесь } \vec{E} - \text{макроскопическое поле, } \vec{E}_0 -$$

внешнее, поле связанных зарядов здесь и далее будем обозначать  $\vec{E}'$ . Поляризация  $\vec{P}$  - макроскопическая величина, поэтому в формулу  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$  входит именно  $\vec{E}$ . В вакууме

$$\vec{E} = \vec{E}_0 = \langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle.$$

### §4. Объемные и поверхностные связанные заряды.

Когда диэлектрик не поляризован, то  $\rho' = 0$  и  $\sigma' = 0$ . При поляризации  $\sigma'$  и иногда  $\rho'$  отличаются от нуля. Из рисунков видно, что на границах диэлектрика возникает избыток зарядов одного знака, т.е.  $\sigma' \neq 0$ .



Можно показать, что  $\sigma' = P_n = \kappa \epsilon_0 E_n$ , где  $P_n$  и  $E_n$  - проекции на нормаль к поверхности векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  внутри диэлектрика. Поэтому там, где  $E_n > 0$ , т.е. силовые линии выходят из диэлектрика,  $\sigma' > 0$  и наоборот.

Объемная плотность связанных зарядов для обоих типов диэлектриков оказывается равной:

$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P} = -\text{div } \vec{P}$$

Из теоремы Гаусса  $\nabla \vec{E} = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}$ , где  $\rho$  - сторонняя плотность зарядов,  $\rho'$  - связанная.

Тогда  $\rho' = -\nabla \vec{P} = -\nabla(\kappa \varepsilon_0 \vec{E}) = -\varepsilon_0(\vec{E} \nabla \kappa + \kappa \nabla \vec{E}) \Rightarrow$

$$\rho' = -\varepsilon_0 \vec{E} \nabla \kappa - \kappa \rho - \kappa \rho' \Rightarrow \rho' = -\frac{1}{1 + \kappa} (\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \nabla \kappa + \kappa \rho)$$

Значит,  $\rho' \neq 0$ , если а) диэлектрик неоднороден, т.е.  $\nabla \kappa \neq 0$ ; б) есть сторонние заряды, т.е.  $\rho \neq 0$ .

### §5. Вектор электрического смещения.

Источником поля служат и сторонние, и связанные заряды:  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}$  (\*).

Эта формула неудобна для нахождения вектора  $\vec{E}$ , так как  $\rho'$  зависит от  $\vec{E}$ .

Введем вспомогательную величину, источниками которой являются только сторонние заряды. Подставив в формулу (\*)  $\rho' = -\nabla \vec{P}$ , получим  $\text{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$ . Значит, источниками этой величины являются только сторонние заряды. Обозначим  $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$  и будем называть ее электрическим смещением (или электрической индукцией):

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \kappa) \vec{E}$$

Назовем величину  $\varepsilon = 1 + \kappa$  относительной диэлектрической проницаемостью среды:

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

Мы рассматриваем изотропные диэлектрики (свойства которых не зависят от направления). В них  $\vec{D}$  параллелен  $\vec{E}$ . В анизотропных это не так: в них  $\varepsilon$  является тензором.

Мы получили формулу  $\text{div} \vec{D} = \rho$ , тогда теорема Гаусса в интегральном виде выглядит так:  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{стор}} = \int \rho \cdot dV$

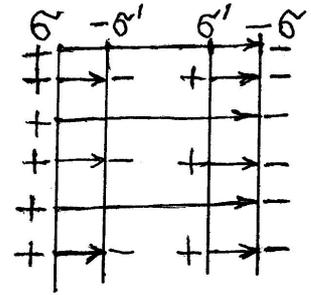
Поток электрического смещения через замкнутую поверхность равен сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних зарядов.

Можно ввести линии электрического смещения. Линии  $\vec{E}$  начинаются и заканчиваются и на сторонних зарядах, и на связанных, а линии  $\vec{D}$  - только на сторонних, а через связанные они проходят, не прерываясь.

### §6. Поле внутри плоской диэлектрической пластины.

Под действием поля диэлектрик поляризуется, возникают связанные заряды  $\sigma'$ . Внутри диэлектрика  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ ; проецируя, получим

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma')$$



Мы воспользовались формулой напряженности поля в плоском конденсаторе  $E = \sigma / \varepsilon_0$ .

Нарисуем линии  $\vec{E}$ , начинающиеся на плюсах, кончающиеся на минусах. Вне диэлектрика  $E = E_0$ .

Учтя  $\sigma' = \kappa \varepsilon_0 E_n = \kappa \varepsilon_0 E$ , получим  $E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \kappa E$ , откуда

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

т.е. поле в диэлектрике ослабевает в  $\varepsilon$  раз.

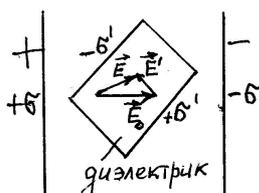
Рассчитаем  $D$ :  $D = \varepsilon \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E_0 = D_0$ , т.е.  $D$  непрерывен.

$$D = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \sigma$$

Найдем поверхностную плотность связанных зарядов:

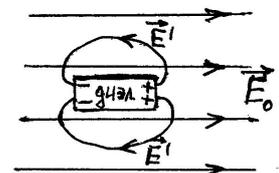
$$\sigma' = \kappa \varepsilon_0 E = \frac{\kappa \varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

Можно сделать важное общее утверждение: если однородный и изотропный диэлектрик полностью занимает пространство между двумя эквипотенциальными поверхностями, то напряженность поля в диэлектрике по модулю в  $\varepsilon$  раз меньше напряженности поля сторонних зарядов  $\vec{E}_0$  в этой точке (т.е. той, что была без диэлектрика), и совпадает с ней по направлению, а  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$  (т.е. остается тем же, что был).



Если эти условия нарушены, то  $\vec{D} \neq \varepsilon_0 \vec{E}_0$  и может отличаться от нее даже по направлению (пример на рисунке слева).

Отметим, что поле  $\vec{E}'$  может отличаться от нуля даже вне диэлектрика,

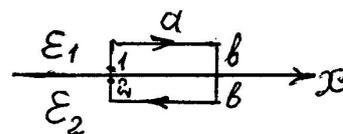


т.е. и там  $\vec{E} \neq \vec{E}_0$  (см. рисунок справа).

### §7. Условия на границе двух диэлектриков.

Выведем их из уравнений  $rot \vec{E} = 0$ ,  $div \vec{D} = \rho$ .

1) Построим контур интегрирования. Вычислим циркуляцию по этому контуру по часовой стрелке:



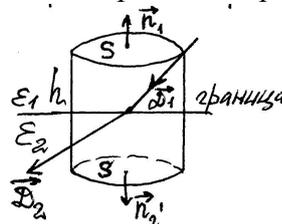
$$\oint E_l dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_{верт} \rangle 2b$$

Учтя, что  $\oint E_l dl = \int rot \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ , и, устремив  $b$  к нулю (чтобы получить условия на

границе), получим  $E_{1x} = E_{2x} \Rightarrow \frac{D_{1x}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2x}}{\epsilon_2}$ .

На границе двух диэлектриков касательная проекция вектора  $\vec{E}$  непрерывна.

2) Будем считать, что поверхностная плотность сторонних зарядов на границе равна нулю. Построим цилиндрическую поверхность.



$$div \vec{D} = \rho, \quad \Phi_D = Q = 0 \Rightarrow$$

$$D_{1n_1}S + D_{2n_2}S + \langle D_{бок} \rangle S_{бок} = 0$$

Устремив  $h$  к нулю, получим:  $D_{1n_1} + D_{2n_2} = 0$ . Если рассматривать проекции на одну и ту же ось ( $\vec{n}_1$  или  $\vec{n}_2$ ), получим:  $D_{1n} = D_{2n}$  (или  $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$ ), т.е. нормальная проекция вектора  $\vec{D}$  непрерывна.

Вывод: на границе двух диэлектриков непрерывными являются касательная компонента  $\vec{E}$  и нормальная компонента  $\vec{D}$ .

### §8. Сегнетоэлектрики.

Сегнетоэлектрики - это вещества со спонтанной (самопроизвольной) поляризацией в отсутствие внешнего поля.

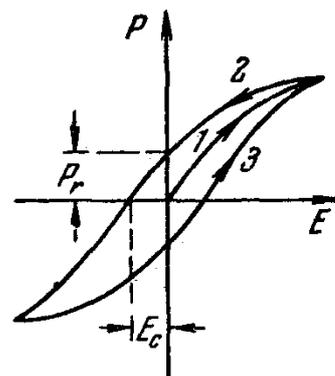
Отличия от остальных диэлектриков:

1) очень большая диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  (порядка тысяч, а у обычных порядка единиц);

2) зависимость поляризации  $P$  от напряженности внешнего поля  $E$  нелинейная, т.е.  $\epsilon$  зависит от  $E$ ;

3) существует гистерезис, т.е.  $P$  зависит не только от  $E$  в данный момент, но и от предыстории. В частности, при изменении  $E$  в разные стороны движение происходит по разным кривым.

4) При  $E = 0$  сохраняется так называемая остаточная поляризация; с другой стороны, поляризация обращается в ноль при некотором значении



$E_C \neq 0$ . Это значение называется коэрцитивной силой (имейте в виду: это не сила! Просто использовано такое слово).

5) Сегнетоэлектрики по поведению похожи на ферромагнетики. В них тоже есть домены, т.е. области со спонтанной поляризацией. Для каждого сегнетоэлектрика существует температура, выше которой все эти свойства исчезают и он становится обычным диэлектриком. Эта температура называется точкой Кюри.

## Глава 4. Проводники в электрическом поле

### §1. Электрическое поле в проводниках.

В проводниках много свободных зарядов (электронов). Если каждый атом отдает хотя бы по одному электрону, то количество этих электронов в одном моле будет иметь порядок числа Авогадро. Свободные электроны способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы, поэтому для равновесия зарядов в проводнике должны быть выполнены следующие условия:

- 1) всюду внутри проводника  $\vec{E} = 0$ ; если бы это было не так, то электроны перемещались бы под действием  $\vec{E}$ , и равновесия зарядов не было бы;
- 2) на поверхности вектор  $\vec{E}$  параллелен нормали (та же причина);
- 3) все избыточные заряды находятся на поверхности проводника;
- 4) все точки проводника имеют одинаковый потенциал, т.к. для любых точек 1 и 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Если вырезать внутренность проводника, это не отразится на расположении зарядов (они все на поверхности), а  $\vec{E}_{внутри} = 0$ . На этом основана электрoзащита от внешних полей, т.е. внутри замкнутой проводящей поверхности поле всегда равно нулю. Внешнее поле компенсируется возникшими на поверхности зарядами, т.е. заряды на поверхности проводника перераспределяются так, чтобы своим полем компенсировать внешнее во всех точках внутри проводника.

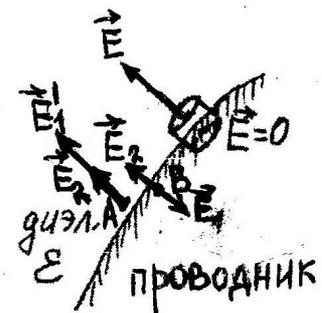
Экран можно делать и из достаточно густой сетки.

### §2. Напряженность поля у поверхности проводника.

Нарисуем поверхность для теоремы Гаусса.

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q \Rightarrow \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E \cdot \Delta S = \sigma \cdot \Delta S, \text{ откуда следует,}$$

что напряженность поля у поверхности проводника равна



$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$ , где  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

Найдем силу, действующую на элемент поверхности проводника. Она не равна произведению  $\sigma \cdot \Delta S \cdot E$ , как может показаться на первый взгляд. Ведь  $\vec{E}$  создается всеми зарядами тела, в частности и зарядами площадки  $\Delta S$ , а они сами на себя действовать не могут.

Для нахождения силы надо найти  $\vec{E}$ , создаваемую всеми зарядами, кроме зарядов площадки  $\Delta S$ . Поле в любой точке есть суперпозиция поля  $\vec{E}_1$ , созданного площадкой и  $\vec{E}_2$ , созданного всеми остальными зарядами. В точках А и В у поверхности проводника вектор  $\vec{E}_2$  один и тот же, а  $\vec{E}_1' = -\vec{E}_1$ . В точке В  $\vec{E}_B = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$  (так как внутри проводника), т.е.  $\vec{E}_2 = -\vec{E}_1$ . Тогда  $E_A = 2E_2$ , т.е.  $E_2 = E_A / 2$ , а искомая сила равна

$$\vec{F} = \sigma \cdot \Delta S \cdot \vec{E}_2 = \sigma \cdot \Delta S \cdot \frac{\vec{E}_A}{2} = \sigma \Delta S \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma^2 \Delta S}{2\epsilon\epsilon_0}.$$

К этому же результату можно придти, воспользовавшись формулой для напряженности поля бесконечной заряженной плоскости:  $E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$  и условием  $\vec{E}_2 = -\vec{E}_1$ .

### §3. Потенциал уединенного проводящего шара.



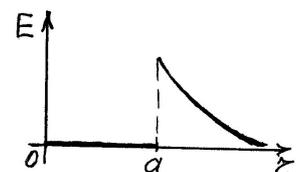
Рассмотрим проводящий шар радиуса  $a$ , заряженный зарядом  $Q$ . Из теоремы Гаусса можно легко получить, что напряженность поля вне шара такая же, как в случае точечного заряда. Поэтому и распределение потенциала снаружи такое

же:  $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ , причем эта формула справедлива и на самой поверхности шара.

Как говорилось ранее, все точки внутри проводника имеют одинаковый потенциал, равный потенциалу поверхности шара  $\varphi_{in} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ . Именно поэтому мы имеем право

говорить не о «потенциале точки», а о «потенциале шара» (в общем случае «проводника») – ведь он во всех точках шара один и тот же.

Внутри шара напряженность поля равна нулю. График зависимости напряженности от координаты изображен на рисунке.

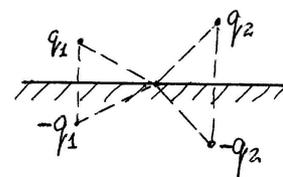


#### **§4. Метод зеркального отображения.**

Справедливость этого метода доказывается с помощью теоремы о единственности решения при определённых граничных условиях. При заданном распределении зарядов внутри области и потенциалов на ее границе существует только одно решение для электростатического поля. Это значит, что, если мы найдем какое-то распределение полей, обеспечивающее заданное распределение потенциала на границе, то оно и будет единственным решением.

Метод применим, например, когда в задаче имеется бесконечная проводящая плоскость. Если поле создается только зарядами, находящимися поблизости, то потенциал точек, бесконечно удаленных от наших зарядов, равен нулю. Поскольку плоскость проводящая, то все ее точки имеют один и тот же потенциал, также равный нулю. Границами области являются бесконечность и сама плоскость. Везде на границах потенциал равен нулю. Если мы найдем поле, обеспечивающее это условие при заданном расположении зарядов, то оно и будет решением.

Расположим симметрично за плоскостью (как изображение в плоском зеркале) заряды, равные исходным по величине, но противоположные по знаку. Легко видеть, что потенциал в точках плоскости, определяемый по принципу суперпозиции, будет равен нулю. В бесконечности он тоже равен нулю. Значит, требуемые граничные условия удовлетворены, и искомое поле в исследуемой области (над плоскостью) идентично полю данной системы зарядов, которое может быть легко рассчитано.

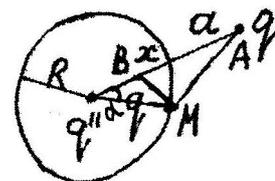


Этот метод может быть применен и в некоторых других ситуациях. Нужно только подобрать величины и координаты дополнительных зарядов, обеспечивающих выполнение граничных условий.

#### **§5. Метод зеркального отображения в случае шара.**

Рассмотрим поле, создаваемое точечным зарядом  $q$ , расположенным в точке А на расстоянии  $a$  от поверхности незаряженного проводящего шара радиуса  $R$ . В данном случае потенциалы бесконечно удаленных точек равны нулю, а потенциал шара нам пока не известен. Мы найдем его позже.

Поместим дополнительный заряд  $q'$  в точке В внутри шара на прямой, соединяющей заряд  $q$  с центром шара, на расстоянии  $x$  от поверхности шара.



Тогда потенциал точки М поверхности шара, создаваемый зарядами  $q$  и  $q'$  равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{AM} + \frac{q'}{BM} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{\sqrt{R^2 + (R+a)^2 - 2R(R+a)\cos\alpha}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2 + (R-x)^2 - 2R(R-x)\cos\alpha}} \right)$$

Покажем, что существуют такие значения  $q'$  и  $x$ , при которых потенциал во всех точках поверхности шара, т.е. при любых  $\alpha$ , равен нулю:

$$\frac{q}{\sqrt{R^2 + (R+a)^2 - 2R(R+a)\cos\alpha}} = - \frac{q'}{\sqrt{R^2 + (R-x)^2 - 2R(R-x)\cos\alpha}}$$

Заметим, что  $q$  и  $q'$  имеют разные знаки.

Введем обозначение  $k = q'/q$ , возведем обе части в квадрат и получим:

$$R^2 + (R-x)^2 - 2R(R-x)\cos\alpha = k^2(R^2 + (R+a)^2 - 2R(R+a)\cos\alpha)$$

Это равенство удовлетворено при всех  $\alpha$ , если выполнены два условия:

- 1)  $R-x = k^2(R+a)$
- 2)  $R^2 + (R-x)^2 = k^2(R^2 + (R+a)^2)$ .

Подставляя  $(R-x)$  из первого условия во второе, получим биквадратное уравнение относительно  $k$ :

$$k^4 - k^2 \left( \frac{R^2}{(R+a)^2} + 1 \right) + R^2/(R+a)^2 = 0$$

По теореме Виета получим корни  $k^2 = 1$  и  $k^2 = R^2/(R+a)^2$ . Первый корень не подходит, поскольку соответствует  $x = -a$ , т.е. заряд  $q' = -q$  должен расположиться в точке А и полностью компенсировать исходный заряд. Мы же не вправе располагать дополнительные заряды в самой области, только вне ее! Поэтому остается только второе решение. Поскольку знаки  $q'$  и  $q$  противоположны, то  $k = -R/(R+a)$ . При этом

$$x = R - k^2(R+a) = R - \frac{R^2}{R+a} = \frac{aR}{R+a} < R$$

Обозначим  $(R+a)/R = \xi$ , тогда  $k = -1/\xi$ ;  $q' = -q/\xi$ ;  $x = R(\xi - 1)/\xi$ .

Теперь учтем, что шар был не заряжен. Расположим заряд  $q'' = -q' = q/\xi$  в центре шара, тогда суммарный заряд шара равен нулю. При этом потенциал во всех точках

поверхности шара увеличится на одну и ту же величину и будет равен

$$\varphi_{ш} = \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R \xi}. \text{ Это и есть ответ на поставленный ранее вопрос о потенциале}$$

незаряженного шара.

Например, если точечный заряд находится от поверхности шара на расстоянии, равном радиусу, то  $\xi = 2$ ,  $x = R/2$ ,  $q' = -q/2$ .

Поскольку заряды  $q''$  и  $q'$  равны по модулю, но  $q'$  ближе к заряду  $q$ , то результатом всегда будет притяжение.

Наше решение годится и для случая заряженного шара, просто в центр придется поместить заряд другой величины. Пусть изначально шар имел заряд  $Q$ . Тогда в его центр

$$\text{поместим заряд } q'' = Q - q' = Q + \frac{q}{\xi}.$$

Найдем силу взаимодействия.

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left( \frac{q''}{\xi^2} + \frac{q'}{(x/R + \xi - 1)^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2 \xi^2} \left( Q + \frac{q}{\xi} - \frac{q\xi}{(x/R + \xi - 1)^2} \right)$$

Эта сила будет положительной, если  $Q > Q_0$ , где

$$Q_0 = \frac{q}{\xi} \left( \frac{\xi^2}{\left(\frac{\xi-1}{\xi} + \xi - 1\right)^2} - 1 \right) = \frac{q}{\xi} \left( \frac{\xi^4}{(\xi^2 - 1)^2} - 1 \right) = q \frac{(2\xi^2 - 1)}{\xi(\xi^2 - 1)^2}$$

Из вышесказанного следует, что при малых величинах заряда шара  $Q$  будет притяжение, которое сменится отталкиванием только при превышении зарядом  $Q$  некоторого значения  $Q_0$  (например, при  $a = R$ , т.е.  $\xi = 2$ ,  $Q_0 = 7q/18$ ). Иначе говоря, пока  $Q < Q_0$ , два одноименных заряда будут притягиваться! Неожиданный результат!

### **§6. Электроемкость уединенного проводника.**

Можно показать, что заряд уединенного проводника всегда пропорционален его потенциалу вне зависимости от формы. Коэффициент пропорциональности между зарядом и потенциалом проводника называется электроемкостью:  $q = C\varphi$ ,  $C = q/\varphi$ .

$$\text{Для шара получим: } C_{ш} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R_{ш}.$$

Размерность  $[C] = 1 \text{ Ф}$  (Фарада) – это емкость шара радиусом  $9 \cdot 10^9$  м, т.е. 1500 радиусов Земли. 1 Ф – очень крупная единица, поэтому пользуются ее долями: микрофарада  $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ , нанофарада  $1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$ , пикофарада  $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ .

## §7. Конденсаторы.

Уединенные проводники имеют малую емкость, например, емкость Земли – 700 мкФ. На практике требуются устройства, накапливающие заряд. Поскольку  $q = C\varphi$ , то чем больше емкость, тем больший заряд накопится.

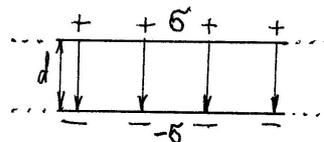
Конденсатор – два проводника, помещенных близко друг к другу. Форма их такова, что все поле сосредоточено внутри: плоские, цилиндрические, сферические. Силовые линии начинаются на плюсах и кончаются на минусах, значит, заряды обкладок равны по модулю. Емкостью конденсатора называется коэффициент пропорциональности между модулем заряда одной обкладки и разностью потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}$$

$C$  определяется формой и размерами конденсатора, а также диэлектрическими свойствами среды.

1) Плоский конденсатор:  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$  - как поле у поверхности проводника. В

однородном поле  $U = Ed = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$ , откуда  $C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ .

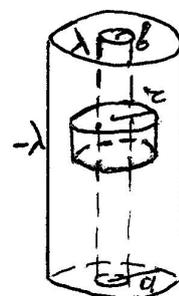


2) Цилиндрический конденсатор.

По теореме Гаусса для вектора  $\vec{D}$  для  $a < r < b$ :  $D \cdot 2\pi r h = \lambda h$ ,

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}, U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_a^b \vec{E} d\vec{l} = \int_a^b \frac{\lambda dr}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a};$$

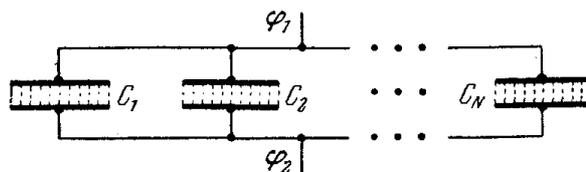
$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln b/a}, \text{ где } l - \text{длина цилиндра.}$$



3) Аналогично для сферического конденсатора получим:  $C_{сф} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ , где  $R_2$  и

$R_1$  - радиусы большей и меньшей сфер.

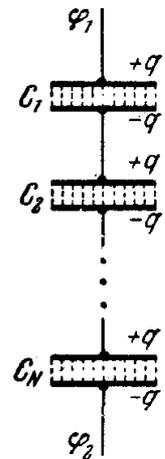
Конденсаторы могут соединяться параллельное или последовательно. При параллельном соединении разности потенциалов между обкладками у всех конденсаторов одинаковы. Общий заряд равен



$$q = \sum q_k = \sum C_k (\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum C_k$$

Емкость батареи равна  $C = q / (\varphi_1 - \varphi_2) = \sum C_k$ , т.е. при параллельном соединении конденсаторов ёмкости складываются.

На рисунке справа показано последовательное соединение конденсаторов. При помещении заряда  $+q$  на верхнюю обкладку первого конденсатора на его нижней обкладке индукционно появится заряд  $-q$  (придет снизу), тогда на верхней обкладке второго останется заряд  $+q$  и т.д. Следовательно, при последовательном соединении все конденсаторы имеют одинаковый заряд.



Напряжение на каждом из них  $U_k = q / C_k$ . Сумма всех этих напряжений равна приложенной разности потенциалов:  $\varphi_1 - \varphi_2 = \sum U_k = q \sum \frac{1}{C_k}$ , откуда

получаем  $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_k}$ , т.е. при последовательном соединении складываются величины, обратные емкостям.

### §8. Энергия электрического поля.

#### 1) Энергия заряженного проводника.

Ранее мы вывели формулу полной энергии системы зарядов  $W_p = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$

(формула(\*\*) § 4 Гл.1). Потенциалы всех точек проводника равны, поэтому

$$W_p = \frac{1}{2} \varphi \int dq = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

#### 2) Энергия заряженного конденсатора. Разобьем интеграл $W_p = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$ на две

части – для одной и другой обкладок:  $W_p = \frac{1}{2} (q\varphi_1 + (-q)\varphi_2) = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$

#### 3) Энергия электрического поля.

Рассмотрим плоский конденсатор:

$$W_p = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d} U^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V$$

Но есть и формула  $W_p = q^2 / 2C$ . Где же сосредоточена энергия: в зарядах или в пространстве? В рамках электростатики на этот вопрос ответить не удастся, но переменное поле может существовать отдельно от зарядов (электромагнитные волны). Значит, энергия сосредоточена в самом поле. Объемная плотность энергии – энергия единицы объема:

$$w = \frac{W_p}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

Найдем энергию поля заряженного проводящего шара радиуса  $R$  с зарядом  $q$  :

$$\begin{aligned} W &= \int w dV = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \int_R^\infty \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_R^\infty r^{-2} dr = \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{q}{2} \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}}_{\varphi_{ш}} = \frac{q\varphi_{ш}}{2} \end{aligned}$$

Получили прежнюю формулу для энергии, что подтверждает факт распределения энергии в пространстве (в поле).

## Глава 5. Постоянный электрический ток.

### §1. Электрический ток.

Электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов. Сила тока – поток электрического заряда, т.е. заряд, проходящий через поверхность за 1 секунду.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Ток может переноситься положительными и отрицательными частицами:

$$I = \frac{dq_+}{dt} + \frac{dq_-}{dt}. \text{ За направление тока принято направление движения положительных}$$

зарядов, хотя чаще всего носителями тока являются электроны, заряженные отрицательно. Одна и та же сила тока соответствует движению положительных зарядов в одну сторону или отрицательных – в противоположную.

Плотность тока  $\vec{j}$  - вектор, модуль которого равен отношению тока через расположенную перпендикулярно к направлению движения носителей площадку к ее площади:  $j = dI / dS$ .  $\vec{j}$  направлен по движению положительных зарядов.

Геометрически распределение токов можно изобразить с помощью линий тока, аналогичных силовым линиям.

$$I = \int \vec{j} d\vec{S}, \text{ т.е. сила тока – это поток вектора плотности тока } \vec{j} \text{ через поверхность.}$$

Пусть в единице объема содержится  $n^+$  частиц с зарядом  $e^+$  и  $n^-$  частиц с зарядом  $e^-$ .

$$\text{Если их средние скорости равны } \vec{u}^+ \text{ и } \vec{u}^-, \text{ то } \vec{j} = e^+ n^+ \vec{u}^+ + e^- n^- \vec{u}^- = \rho^+ \vec{u}^+ + \rho^- \vec{u}^-.$$

Если  $I$  не зависит от времени, то он называется постоянным током:  $I = q/t$ .

Сила тока измеряется в Амперах:  $[I]=1 \text{ А}$ . Это основная единица, ее эталон мы определим в главе, посвященной магнитному полю.

### **§2. Уравнение непрерывности.**

$\oint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$  - интегральная запись уравнения непрерывности. Здесь  $q$  - заряд,

находящийся внутри объема  $V$ .

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int \rho dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Применим теорему Остроградского-Гаусса:  $\int_{(V)} \text{div} \vec{j} dV = -\int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ , откуда

$$\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ - уравнение непрерывности.}$$

По сути, это закон сохранения заряда: сколько заряда вытекло через поверхность, на столько уменьшился заряд внутри.

Если плотность заряда  $\rho$  не зависит от времени, то  $\text{div} \vec{j} = 0$ . Это значит, что вектор  $\vec{j}$  не имеет источников, т.е. линии тока нигде не начинаются и не заканчиваются, они замкнуты сами на себя.

### **§3. Электродвижущая сила (ЭДС).**

Во-первых, это не сила! Так же, как сила тока, сила света, сила звука и т.п. Никакого отношения к Ньютонам!

Для поддержания тока надо разделять заряды. Например, дети скатываются с горки. Через какое-то время их на горке не останется. Чтобы продолжать это удовольствие, им придется подниматься наверх, причем этот подъем будет осуществляться против сил тяжести. Либо надо идти пешком, тогда работают мускулы, либо (на дорогих зимних курортах) есть лифт, тогда работает электрическая тяга. Так и в случае электрического тока, электростатическими силами разделить заряды не удастся. Необходим участок, на котором на заряды действуют силы другой природы – механические, химические, даже электрические, но не электростатические (!), а вихревые (о них будем говорить потом). Эти силы называются сторонними. Их можно охарактеризовать работой, совершаемой ими в цепи. ЭДС – работа, совершаемая сторонними силами над единичным положительным зарядом в замкнутой цепи или на участке:  $\mathcal{E} = A_{cm} / q$ . Понятно, что ЭДС, как и разность потенциалов, измеряется в Вольтах.

Общая работа по перемещению заряда  $q$  из точки 1 в точку 2 равна

$$A_{\text{общ}} = A_{\text{см}} + q \int \vec{E} d\vec{l} = A_{\text{см}} + q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\varepsilon_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Величина, численно равная работе, совершенной сторонними и электрическими силами при перемещении единичного положительного заряда, называется падением напряжения, или напряжением на участке:  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$ .

Участок, где не действуют сторонние силы, называется однородным. На нем напряжение равно разности потенциалов:  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ .

#### §4. Закон Ома. Сопротивление.

Закон Ома: сила тока прямо пропорциональна падению напряжения:

$$I = \Sigma \cdot U = U / R. \quad (*)$$

В неоднородном участке закон Ома имеет вид:  $I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R}$ . Если цепь замкнутая,

то  $\varphi_1 = \varphi_2$ , и  $I = \frac{\varepsilon}{R}$ , где  $\varepsilon$  - суммарная ЭДС в цепи.

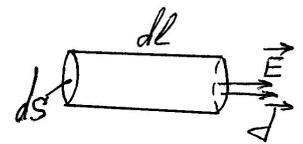
На однородном участке из (\*) следует, что сила тока пропорциональна разности потенциалов между его концами.

Коэффициент пропорциональности  $\Sigma$  называется проводимостью, а  $R$  - электрическим сопротивлением.  $\Sigma$  измеряется в Сименсах (См,  $S$ ), а  $R$  - в Омах (Ом,  $\Omega$ ).

Сопротивление провода равно  $R_{\text{пров}} = \frac{\rho l}{S}$ , где  $l$  - длина провода,  $S$  - площадь сечения,

$\rho$  - удельное сопротивление материала.

Найдем связь между  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  в изотропном проводнике (в нем  $\vec{j}$  параллельна  $\vec{E}$ , в общем случае это не так). Рассмотрим участок токовой трубки длиной  $dl$  и площадью сечения  $dS$ .



$$I = \frac{U}{R}, R = \frac{\rho \cdot dl}{dS} \Rightarrow jdS = \frac{Edl}{\rho dl} dS \Rightarrow j = \frac{1}{\rho} E \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E}$$

где  $\sigma = 1/\rho$  - удельная проводимость.

Это закон Ома для однородного участка в дифференциальной форме.

Резисторы тоже могут соединяться параллельно, когда все они имеют одно и то же напряжение, и последовательно, когда во всех текут одинаковые токи. Легко убедиться, что при последовательном соединении складываются сопротивления, а при параллельном - проводимости.

## §5. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа.

Расчет разветвленных цепей производится с помощью двух правил Кирхгофа.

1) Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

Узел – точка, в которой сходится более двух проводников. Ток, входящий в узел, берется с плюсом, а выходящий – с минусом.

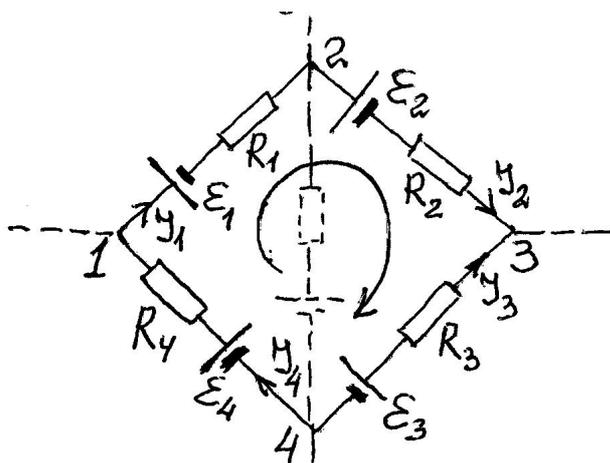
Это правило вытекает из закона сохранения заряда.

Его можно записать для всех  $N$  узлов цепи, но независимыми из них будет только  $N-1$ , а в одном оно выполняется автоматически.

2) Второе правило справедливо для любого замкнутого контура. Если пройти по контуру и на каждом неразветвленном участке записать закон Ома, то получим

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \varepsilon_k$$

Рассмотрим замкнутый контур, являющийся частью какой-то большой схемы, и запишем закон Ома для четырех участков:



$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 - \varepsilon_1$$

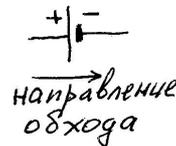
$$I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 - \varepsilon_2$$

$$-I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 - \varepsilon_3$$

$$I_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 + \varepsilon_4$$

Просуммировав эти уравнения, получим  $\sum_k I_k R_k = \sum_k \varepsilon_k$ . Мы доказали второе правило Кирхгофа.

При этом токам и ЭДС надо приписывать знаки в соответствии с выбранным направлением обхода. Если ток направлен по направлению обхода, то он берется с плюсом, если против - с минусом. ЭДС берется с плюсом, если она «стремится» гнать ток по направлению обхода, т.е. в случае, изображенном на рисунке,  $\varepsilon$  берется с минусом.



В рассмотренном нами контуре с минусом берутся  $I_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

Направление тока в каждом неразветвленном участке, а также направление обхода замкнутого контура можно выбрать произвольно. Контурные любые, но обязательно замкнутые. Число независимых уравнений из 2-го правила Кирхгофа равно разности между числом неизвестных токов и количеством уравнений из первого правила Кирхгофа (число узлов – минус один).

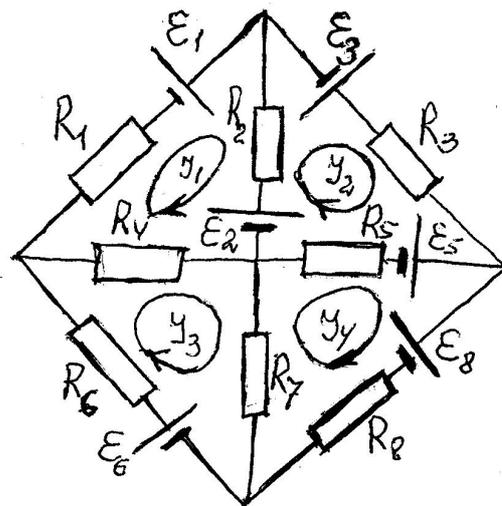
### §6. Метод контурных токов.

Выделяем в цепи отдельные замкнутые контуры, приписывая каждому из них определенное значение «контурного» тока. После этого записываем второе правило Кирхгофа для каждого из контуров, считая силу тока в элементах равной алгебраической сумме токов контуров, частями которых является данный элемент. В этом подходе отпадает необходимость записывания первого правила Кирхгофа, что заметно уменьшает число неизвестных и уравнений. Их количество равно числу контуров.

Рассмотрим для примера следующую схему.

При решении задачи по методу Кирхгофа мы должны ввести 8 неизвестных токов в каждом колене и записать столько же уравнений, из которых четыре (5 узлов минус 1) являются первым правилом Кирхгофа, а оставшиеся четыре – вторым.

При решении методом контурных токов вводятся четыре контурных тока  $J_1 \div J_4$ , которые и будут неизвестными. Для них записываются четыре уравнения, что существенно меньше восьми:



$$R_1 J_1 + R_2 (J_1 - J_2) + R_4 (J_1 - J_3) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$R_3 J_2 + R_5 (J_2 - J_4) + R_2 (J_2 - J_1) = \varepsilon_2 - \varepsilon_5$$

$$R_6 J_3 + R_4 (J_3 - J_1) + R_7 (J_3 - J_4) = \varepsilon_6$$

$$R_8 J_4 + R_7 (J_4 - J_3) + R_5 (J_4 - J_2) = \varepsilon_5 - \varepsilon_8$$

Выражения для результирующих токов в каждом элементе понятны из написанных уравнений. Знаки ЭДС определяются так же, как и всегда во втором правиле Кирхгофа, т.е. плюс, если хочет гнать ток в направлении обхода.

Чем сложнее схема, т.е. чем больше в ней узлов, тем больше будет выигрыш в числе уравнений.

### §7. Мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.

Рассмотрим произвольный участок цепи, к концам которого приложено напряжение  $U$ . За время  $t$  через поперечное сечение проводника пройдет заряд  $q = I \cdot t$ . Это значит, что такой заряд перешел с одного конца участка на другой, т.е. поле и сторонние силы совершили работу  $A = qU = IUt$ . Значит, мощность равна

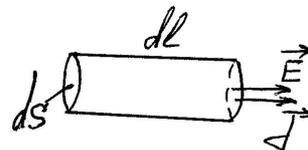
$$P = A/t = IU = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \varepsilon_{12}I$$

Если в системе нет механического движения и каких-либо химических процессов, то работа идет только на нагревание:

$$Q = U \cdot I \cdot t = I^2 R t \quad - \text{ закон Джоуля-Ленца.}$$

$Q$  - количество теплоты, выделяемое в проводнике сопротивлением  $R$ .

Перейдем к дифференциальной форме: рассмотрим трубку с током длиной  $dl$  и сечением  $dS$ .



$$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} \cdot (jdS)^2 dt = \rho j^2 dl dS dt = \rho j^2 dV dt$$

$$q_{уд} = \frac{dQ}{dV dt} = \rho j^2 \quad - \text{ закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. Здесь } q_{уд} -$$

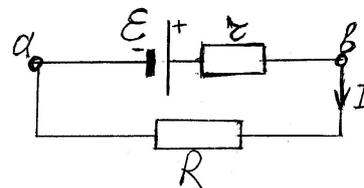
удельная (на единицу объема) тепловая мощность.

### §8. Напряжение на зажимах источника тока

Опыт показывает, что при протекании тока источник тоже нагревается, т.е. в нем выделяется некоторое количество теплоты. Тогда из закона Джоуля-Ленца следует, что источник имеет некоторое (так называемое «внутреннее») сопротивление  $r$ , и работа сторонних сил по перемещению заряда  $q$  идет на нагрев как внешней цепи, так и источника, т.е.  $\varepsilon q = I^2 R t + I^2 r t$ . Поскольку  $q = It$ , то  $\varepsilon = I(R + r)$ .

Из схемы видно, что напряжение на зажимах (то есть между точками  $a$  и  $b$ ) равно

$$U_{заж} = IR \quad \text{или} \quad U_{заж} = \varepsilon - Ir.$$



Из последней формулы следует, что при замкнутой цепи напряжение на зажимах источника тока всегда меньше ЭДС. Оно зависит от силы тока и только в предельном случае разомкнутой цепи, когда сила тока  $I = 0$ , напряжение на зажимах равно ЭДС.

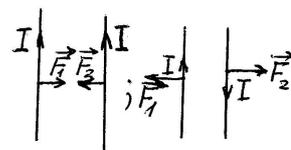
Многие думают, что обозначение на батарейке «1,5 В» означает, что на ее зажимах должно быть всегда 1,5 В. Как мы видим, это заблуждение! Напряжение определяется полученной формулой. Таким образом, ЭДС  $\varepsilon$  и внутреннее сопротивление  $r$  - это два параметра, которые, будучи подставлены в формулы  $I = \varepsilon / (R + r)$  и  $U_{заж} = \varepsilon - Ir$  (или  $U_{заж} = IR$ ), позволяют найти силу тока и напряжение на зажимах.

Как же измерить ЭДС батарейки? Поскольку хороший вольтметр имеет очень большое сопротивление (чтобы не влиять на распределение токов при измерении), то при подключении его к разомкнутой батарейке сила тока будет очень мала, т.е. показанное вольтметром напряжение на зажимах будет очень близко к ЭДС.

## Глава 6. Магнитное поле в вакууме.

### §1. Магнитное поле. Основные факты.

Опыт показывает, что электрические токи взаимодействуют между собой. В частности, параллельные токи притягиваются, антипараллельные отталкиваются.



Из силы взаимодействия на единицу длины двух бесконечных прямолинейных проводников с токами введено понятие 1 Ампер:  $F = k \frac{2I_1 I_2}{l}$ .

Если токи равны  $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ , а  $l = 1 \text{ м}$ , то  $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$ , т.е.  $k = 10^{-7} \text{ Гн/м}$ . Удобнее записывать так:  $F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{l}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ .

1 Ампер (А) – сила такого тока, что два бесконечных проводника, по которым протекает такой ток, расположенных параллельно друг другу на расстоянии 1 метр, взаимодействуют с силой  $2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$  на каждый метр длины.

1 Кулон (Кл) – заряд, проходящий за 1 секунду через поперечное сечение проводника при силе тока 1 Ампер.

Можно сказать, что электрический ток создает вокруг себя поле, которое проявляется в том, что на другой электрический ток, внесенный в него, действует сила. Поскольку электрический ток – это поток электрических зарядов в нейтральной среде, то можно сказать, что движущийся заряд создает поле, в котором на другой движущийся заряд действуют силы.

### §2. Вектор магнитной индукции.

Как охарактеризовать магнитное поле в точке? Надо ввести величину, аналогичную напряженности электрического поля. Будем вносить не пробный точечный заряд, а пробный контур с током малого размера. Однако, оказывается, на такой контур действует не сила (равнодействующая равна нулю), а вращающий момент  $\vec{N}$ , причем он зависит от углов поворота контура. Поэтому метод, использованный при введении вектора напряженности электрического поля, не подходит.

Введем по отдельности направление и модуль вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ .

Вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости пробного контура в его установившемся состоянии, причем так, чтобы, глядя с конца  $\vec{B}$ , видеть ток в контуре текущим против часовой стрелки.

За величину  $|\vec{B}|$  примем  $B = N_{\max} / IS$  - отношение максимального вращающего момента к произведению силы тока в контуре на его площадь.  $[B] = 1 \text{ Тесла (Тл)}$ .

### §3. Закон Био-Савара-Лапласа.

Это аналог формулы в электростатике  $d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$ .

В 1820 году Био и Савар провели опыты с проводниками разной формы, а Лаплас проанализировал эти результаты и получил:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}$  - вектор магнитной индукции, создаваемой элементом проводника  $d\vec{l}$  с током  $I$  в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$ .

### §4. Поле бесконечного прямолинейного тока.

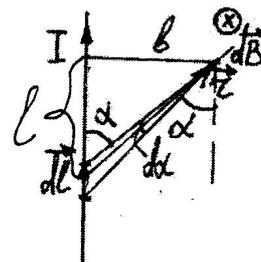
Вспользуемся для нахождения  $\vec{B}$  законом Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}.$$

$B = \int dB$ , так как все  $d\vec{B}$  направлены одинаково.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{|dl| \cdot r \cdot \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{b \cdot d\alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot b^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot b} \cdot 2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{b}$$

Здесь сделаны замены:  $r = b / \sin \alpha$ ,  $l = b \cdot \text{ctg} \alpha$ ,  $dl = -b \cdot d\alpha / \sin^2 \alpha$ .



### §5. Линии магнитной индукции и их свойства.

Линии  $\vec{B}$  - это воображаемые кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению с вектором  $\vec{B}$  в этой точке.

Свойства линий магнитной индукции:

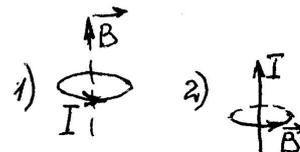
- 1) непрерывны;
- 2) не пересекаются;
- 3) охватывают создающий поле ток и замкнуты сами на себя.

Направление  $\vec{B}$  находят по правилу буравчика.

Правило буравчика можно использовать в одной из двух формулировок:

а) если ток круговой, то ручку буравчика крутим по току, направление движения самого буравчика даст направление  $\vec{B}$ ;

б) если ток прямолинейный, крутим буравчик так, чтобы он двигался по току, тогда направление вращения даст направление  $\vec{B}$ .



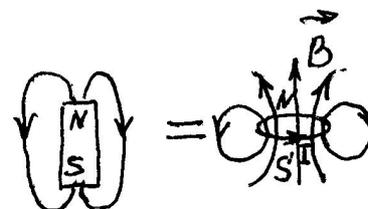
### §6. Принцип суперпозиции.

Если поле создано несколькими токами, то  $\vec{B}$  в любой точке равно векторной сумме индукций, созданных в этой точке каждым током в отдельности:  $\vec{B} = \sum_k \vec{B}_k$ .

Простейшие виды полей: поле бесконечного прямолинейного тока и поле кругового тока.



Очень полезна аналогия витков с током и магнитов. Виток с током эквивалентен постоянному магниту, причем север (N) находится с той стороны витка, с которой ток виден текущим против часовой стрелки. Эта аналогия может использоваться при нахождении характера взаимодействия токов друг с другом и с магнитами.



N и S притягиваются. Этот факт следует и из того, что сонаправленные параллельные токи притягиваются.



### §7. Поле движущегося заряда.

Магнитное поле создается всеми движущимися зарядами в элементе тока  $dl$ . Силу тока можно записать в виде  $I = jS = envS$ . Вектор плотности тока  $\vec{j} = en\vec{v}$  и вектор  $d\vec{l}$  имеют одинаковое направление, поэтому можно написать  $I d\vec{l} = \vec{S} j dl = enS \cdot dl \cdot \vec{v}$ . Воспользовавшись этим, преобразуем закон Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e \overbrace{(dl \cdot S \cdot n)}^{dN} (\vec{v} \times \vec{r})}{r^3}$$

Значит, магнитная индукция, создаваемая движущимся зарядом, равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3},$$

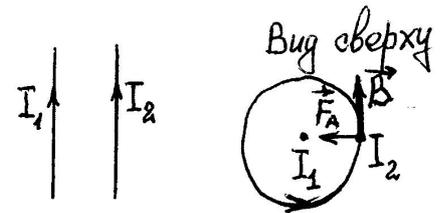
где  $\vec{r}$  - вектор, проведенный в точку наблюдения из точки, в которой находится частица.

### §8. Закон Ампера.

Что же нам дает знание магнитной индукции? В электростатике, зная напряженность поля, мы могли по формуле  $\vec{F} = q\vec{E}$  найти вектор силы, действующей на заряд, внесенный в данную точку. Что-то аналогичное хотелось бы иметь и в магнитном поле. Правда, здесь всё немного сложнее: приходится вводить векторное произведение. Анализируя опытные данные, Ампер сделал вывод, что на участок проводника длиной  $dl$  с током  $I$ , помещенный в магнитное поле  $\vec{B}$ , действует сила  $d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$ .

Модуль силы Ампера равен  $dF = IBdl \sin \alpha$ , а ее направление находят по правилу левой руки: линии  $\vec{B}$  входят в ладонь, 4 пальца - по току, отставленный большой покажет направление силы.

Для примера рассмотрим взаимодействие двух параллельных проводников с токами:  $F_A = I_2 Bl$ . Тогда сила взаимодействия на единицу длины равна



$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}$$

Этой формулой мы пользовались раньше, когда вводили понятие 1 Ампер.

### §9. Сила Лоренца.

Это сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле.

Запишем выражение для силы Ампера в виде

$$d\vec{F}_A = Id\vec{l} \times \vec{B} = S \cdot dl \cdot \vec{j} \times \vec{B} = \underbrace{S \cdot dl}_{dV} \cdot n \cdot q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Значит, на каждую частицу действует сила  $\vec{F}_{\text{лор}} = \frac{d\vec{F}_A}{dN} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ .

Если учесть и электростатическое поле, то  $\vec{F}_{\text{лор}} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$ .

Рассмотрим взаимодействие двух точечных зарядов, двигающихся параллельно с одинаковой скоростью  $v \ll c$  на расстоянии  $l$  друг от друга:

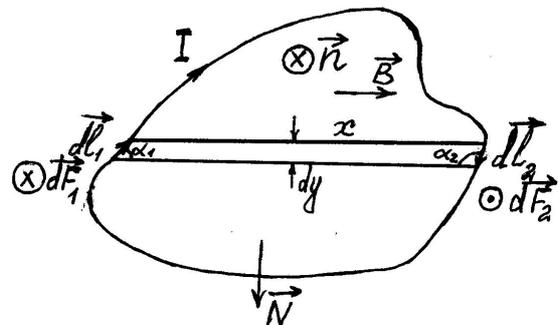
$$F_{\text{магн}} = \frac{q^2 \mu_0 v^2}{4\pi l^2}, \quad F_{\text{эл}} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q^2}{l^2}, \quad \frac{F_{\text{магн}}}{F_{\text{эл}}} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \ll 1.$$

$$\text{Мы учли, что } \mu_0 \epsilon_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = \frac{1}{9 \cdot 10^{16}} = \frac{1}{c^2}.$$

Отметим этот важный факт: скорость света определяется всемирными константами.

### §10. Контур с током в магнитном поле.

Пусть поле однородно ( $\vec{B} = \text{const}$ ). На каждый элемент контура действует сила Ампера:  $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ . Полная сила, действующая на весь контур равна



$$\vec{F} = \oint Id\vec{l} \times \vec{B} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B} = 0$$

Таким образом, результирующая сила, действующая на контур любой формы в однородном поле, равна нулю. Это верно для любого контура, даже не плоского.

Далее ограничимся плоскими контурами. Найдем результирующий вращающий момент. Покажем, что этот момент будет одним и тем же относительно любой оси.

Пусть ось перпендикулярна плоскости контура и проходит через точку  $O$ :  $\vec{N} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$

Рассчитаем момент относительно точки  $O'$ , сдвинутой от  $O$  на  $\vec{b}$ :

$$\vec{N}' = \int \vec{r}' \times d\vec{F} = \int (\vec{r} - \vec{b}) \times d\vec{F} = \vec{N} - \underbrace{\vec{b} \times \int d\vec{F}}_{=0} = \vec{N}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Рассмотрим произвольный плоский контур в однородном поле (см. рисунок). Нормаль  $\vec{n}$  к контуру направим так, чтобы, глядя с ее конца, видеть ток в контуре текущим против часовой стрелки.

$$dF_1 = IBdl_1 \sin \alpha_1 = IBdy$$

$$dF_2 = IBdl_2 \sin \alpha_2 = IBdy$$

Покажем на рисунке направления сил  $d\vec{F}_1$  и  $d\vec{F}_2$ , найденные по правилу левой руки.

При этом вектор  $\vec{B}$  раскладываем на параллельную и перпендикулярную  $d\vec{l}$  составляющие  $\vec{B}_{\parallel}$  и  $\vec{B}_{\perp}$ .

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} = Id\vec{l} \times (\vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}) = Id\vec{l} \times \vec{B}_{\perp}$$

В результате  $d\vec{F}_1$  направлена от нас, а  $d\vec{F}_2$  - к нам, а по модулю они равны. Значит, они составляют пару сил с вращающим моментом, равным произведению модуля силы на расстояние между ними:  $dN = IBdy \cdot \underbrace{x}_{dS} = IBdS$ .

В векторном виде:  $d\vec{N} = I(\vec{n} \times \vec{B})dS$ , где  $\vec{n}$  - орт нормали к контуру.

$$\vec{N} = \oint dN = I(\vec{n} \times \vec{B})S = (IS\vec{n}) \times \vec{B} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

Вектор  $IS\vec{n} = \vec{p}_m$  назовем дипольным магнитным моментом. Еще раз напомним, что нормаль выбирается так, чтобы, глядя с ее конца, видеть ток в контуре текущим против часовой стрелки.

Из выведенной формулы следует правильность введения в §2 модуля  $\vec{B}$ :

$$|\vec{B}| = N_{\max} / IS.$$

Итого: на плоский контур в однородном магнитном поле действует вращающий момент  $\vec{N} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ . Можно показать, что эта формула верна и для неплоского контура.

Наблюдаем аналогию с электростатикой, где вращающий момент, действующий на диполь, равен  $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$ .

### §11. Энергия контура с током в магнитном поле.

Чтобы увеличить угол между  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  на  $d\alpha$ , надо совершить работу против магнитных сил  $dA = N \cdot d\alpha = p_m B \sin \alpha \cdot d\alpha$ . Возвращаясь к первоначальному положению, контур может вернуть эту работу, совершив ее над каким-нибудь телом. Значит,  $dA$  идет на увеличение механической энергии контура в магнитном поле:

$$dW_{\text{мех}} = p_m B \sin \alpha \cdot d\alpha \Rightarrow W_{\text{мех}} = -p_m B \cos \alpha + \text{const}$$

Если положить константу равной нулю, то  $W_{\text{мех}} = -\vec{p}_m \vec{B}$  (в электростатике было  $W = -\vec{p} \vec{E}$ ).

$W_{\text{мех}}$  минимальна, когда  $\vec{p}_m \uparrow \uparrow \vec{B}$ . Значит, это состояние устойчивого равновесия.

### §12. Магнитное поле кругового контура с током.

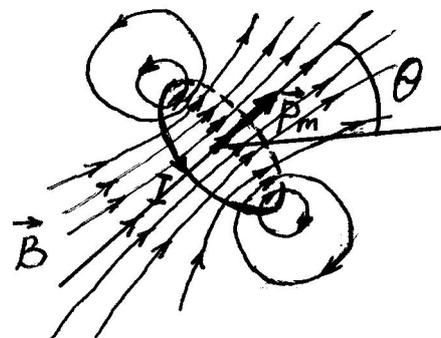
Легко показать, используя закон Био-Савара-Лапласа,

что на оси в любой точке  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}$ , где  $R$  - радиус витка,  $r$  - расстояние от центра.

Если же не на оси, то при  $r \gg R$  можно получить

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

(В электростатике напряженность поля диполя вдали от него  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$ ).

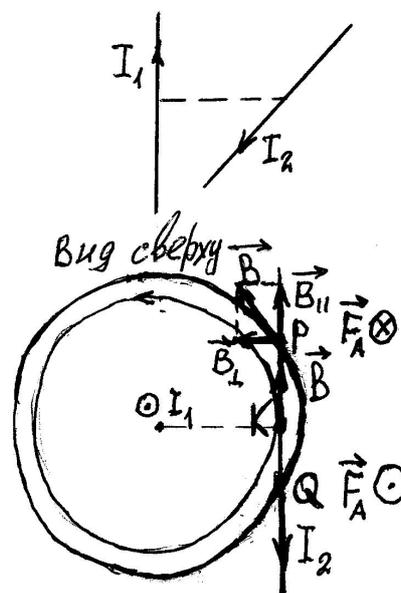


Таким образом, из последних параграфов следует, что  $\vec{p}_m$  - важная характеристика, определяющая как создаваемое контуром поле, так и его поведение во внешнем поле.

### §13. Примеры анализа магнитных взаимодействий.

1) По двум свободным, скрещивающимся под прямым углом, проводникам пропускаются токи. Что будет происходить?

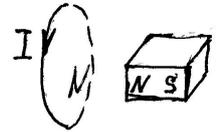
В точке К вектор  $\vec{B}$ , созданный током  $I_1$ , направлен противоположно току  $I_2$ , т.е. сила Ампера  $F_A$  равна нулю. В точке Р вектор  $\vec{B}$  направлен под углом к току  $I_2$ . Разложим  $\vec{B}$  на  $B_{||}$  и  $B_{\perp}$ .  $B_{||}$  дает  $F_A = 0$ ,  $B_{\perp}$  по правилу левой руки дает направление силы Ампера: в точке Р от нас, в точке Q -





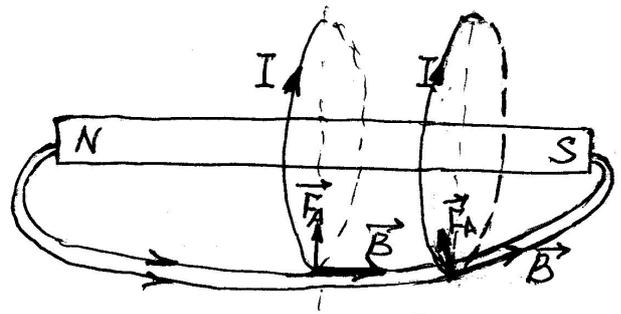
магнитного поля будет однородным. В плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ ,  $\vec{v}_\perp$  обеспечит движение по окружности радиусом  $R = \frac{m_v \perp}{qB}$ . В итоге, частица движется по спирали вокруг линии  $\vec{B}$ .

5) Кольцо с током висит на проводах. К нему подносят магнит (см. рисунок). Что будет с кольцом?



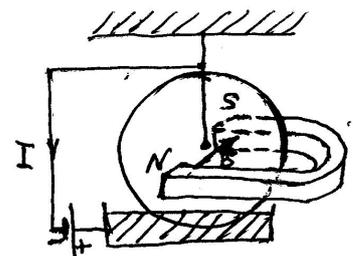
Правая сторона кольца является северным полюсом. Поэтому кольцо оттолкнется, перевернется и наскочит на магнит.

6) Кольцо с током расположено посередине магнита (см. рисунок). Что произойдет при изменении направления тока в кольце?



Если кольцо находится точно посередине, то сила Ампера, найденная по правилу левой руки, направлена строго вертикально, т.е. сжимает кольцо. Если оно достаточно прочное, то эта сила никак не проявит себя, т.е. кольцо находится в состоянии равновесия. Предположим, что кольцо слегка сдвинулось от середины вправо. Тогда сила Ампера уже не вертикальна, а ее горизонтальная составляющая направлена влево, т.е. возвращает кольцо в середину. Значит, равновесие устойчивое, кольцо в нем может оставаться бесконечно долго. Если поменять направление тока, то сила Ампера повернется на 180 градусов. Кольцо будет растягиваться. При малом сдвиге вправо сила Ампера будет иметь составляющую, направленную вправо. Равновесие стало неустойчивым. Кольцо соскочит с магнита, развернется и снова наскочит на него.

7) Медный диск укреплен на горизонтальной оси и помещен между полюсами магнита (см. рисунок). Нижний край диска погружен в ртуть. Что произойдет?



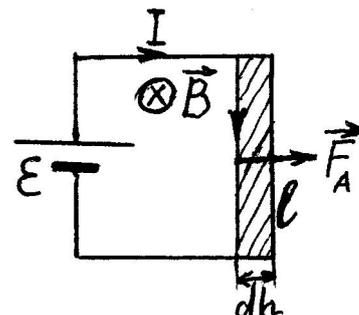
Магнит находится ниже оси. Линии  $\vec{B}$  идут от N к S. Ток течет по диску снизу вверх. По правилу левой руки сила Ампера направлена влево, т.е. диск начнет вращаться по часовой стрелке.

### §14. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле.

На участок длины  $l$  действует сила Ампера  $\vec{F}_A$  (по правилу левой руки)  $F_A = IBl$ . Она совершает работу

$$dA = F_A dh = IBl dh = I \underbrace{B}_{dS} d\underbrace{l}_{d\Phi} = Id\Phi.$$

Поток вектора  $\vec{B}$  через площадку  $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}$  называется магнитным потоком.



Можно показать, что и в общем случае неплоского контура остается верной формула  $dA = Id\Phi$ , где  $d\Phi$  - это приращение магнитного потока через контур.

$A_{12} = \int dA = I(\Phi_2 - \Phi_1)$  - работа магнитных сил при перемещении любого контура. В частности, при повороте плоского контура в однородном поле из положения  $\vec{p}_m \uparrow \downarrow \vec{B}$  ( $\Phi = -BS$ ) в положение  $\vec{p}_m \uparrow \uparrow \vec{B}$  ( $\Phi = BS$ ) магнитное поле совершает работу  $A = I(BS - (-BS)) = 2IBS$ .

Тот же результат можно получить из выражения для энергии контура во внешнем магнитном поле  $W_{\text{мех}} = -\vec{p}_m \vec{B}$ :

$$A = \underbrace{W_{\text{мех}1}}_{\text{начал}} - \underbrace{W_{\text{мех}2}}_{\text{конеч}} = p_m B - (-p_m B) = 2p_m B = 2IBS.$$

### §15. Дивергенция и ротор магнитного поля.

Поскольку линии  $\vec{B}$  замкнуты сами на себя, то магнитный поток через замкнутую поверхность равен нулю:  $\Phi_{\text{замкн}} = \oint \vec{B} d\vec{S} = 0$  - теорема Гаусса для  $\vec{B}$ .

$$\oint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = \int_{(V)} \text{div} \vec{B} \cdot dV = 0 \text{ - теорема Остроградского-Гаусса. Поскольку это справедливо}$$

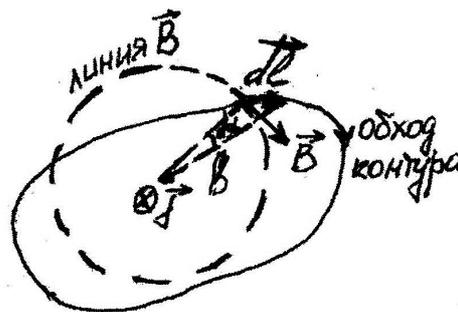
для любых объемов, то можно сделать вывод, что  $\text{div} \vec{B} = 0$ , или  $\nabla \vec{B} = 0$ .

Теперь рассмотрим циркуляцию  $\oint \vec{B} d\vec{l}$ . Проще всего вычислить ее для бесконечного прямого тока. Пусть (для простоты) контур лежит в плоскости, перпендикулярной току.

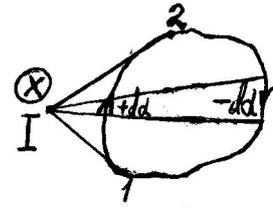
$$\vec{B} d\vec{l} = B dl_B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} b d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha,$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha$$

Если контур охватывает ток, то  $\oint d\alpha = 2\pi$ .



Пусть теперь ток не «прокалывает» контур. При обходе контура по кругу по часовой стрелке при переходе из 1 в 2 величины  $d\alpha$  положительны, а из 2 в 1 – отрицательны, так что  $\oint d\alpha = 0$ .



В результате приходим к формуле  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$ , где  $I$  - это ток, охватываемый контуром.

Отсюда можно вывести формулу для  $\vec{B}$  бесконечного прямолинейного тока. Рассмотрим круговой контур радиуса  $r$ , совпадающий с линией  $\vec{B}$ :  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$ , откуда

$$B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi r} - \text{этой формулой мы пользовались в предыдущих параграфах.}$$

Мы рассмотрели ситуацию только с одним бесконечным прямолинейным током. Можно показать, что наши выводы справедливы для любого количества токов и для контура любой формы.

Запишем полученное соотношение в виде  $\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_{(S)} \vec{j} d\vec{S}$ . Воспользовавшись

теоремой Стокса, получим  $\int_{(S)} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ . Поскольку это равенство выполнено

для любого контура, то  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

Итак, мы получили четыре уравнения Максвелла для стационарных (не зависящих от времени) электростатического и магнитного полей в вакууме:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}; & \text{rot} \vec{E} &= 0; \\ \text{div} \vec{B} &= 0; & \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned}$$

Из формул видно, что электростатическое и магнитное поля существенно различаются.

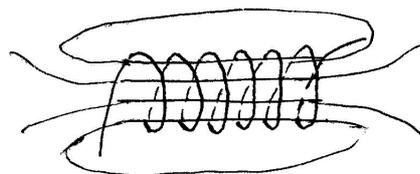
Из формулы  $\text{rot} \vec{E} = 0$  можно прийти к выводу, что электростатическое поле потенциально, и ввести скалярный потенциал  $\varphi$ . Магнитному полю такой потенциал приписать нельзя.

Поскольку  $\text{div} \vec{B} = 0$ , то  $\vec{B}$  можно представить в виде ротора некоторого вектора  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  (поскольку  $\text{div} \text{rot}$  любого вектора равна нулю). Вектор  $\vec{A}$  называется векторным потенциалом магнитного поля.

Поле, дивергенция которого равна нулю, не имеет источников, а его линии замкнуты сами на себя. Поэтому оно называется вихревым (или соленоидальным).

### §16. Поле внутри соленоида.

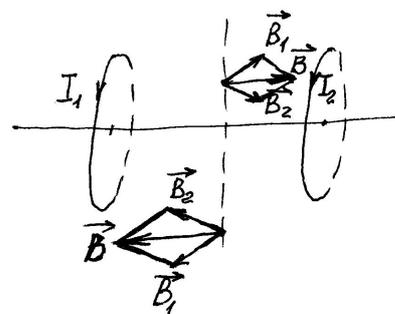
Соленоид – это провод, плотно намотанный на цилиндрический каркас.



Пусть сила тока в проводе равна  $I$ , число витков на 1 метр –  $n$ . Тогда линейная плотность тока, т.е. ток на 1 метр длины,  $j_{\text{лин}} = nI$ .

Для простоты рассмотрим бесконечно длинный соленоид. Его поле а) однородно, б) полностью сосредоточено внутри его. Докажем эти положения.

Рассмотрим два витка. Найдем  $\vec{B}$  в плоскости их симметрии. Все витки соленоида можно разбить на пары, симметричные относительно точки наблюдения.

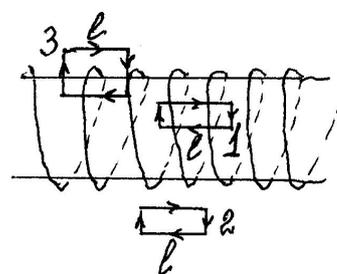


Таким образом, поле внутри соленоида направлено вдоль его оси. Вне соленоида  $\vec{B}$  также параллелен оси, но направлен в противоположную сторону.

Теперь покажем, что и внутри, и вне соленоида поле однородно. Рассмотрим циркуляции  $\vec{B}$  по прямоугольным контурам 1 и 2 (см. рисунок). Контур 1 полностью располагается внутри соленоида.

$$\oint_{(1)} \vec{B} d\vec{l} = B_1 l - B_2 l = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2.$$

Значит, внутри поле однородно. Рассматривая циркуляцию по контуру 2, расположенному полностью вне соленоида, аналогично приходим к выводу об однородности поля снаружи.

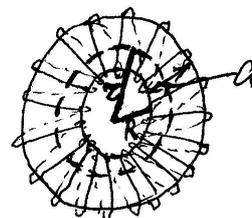


Найдем поле снаружи. Для этого рассечем соленоид плоскостью, перпендикулярной его оси. Так как линии  $\vec{B}$  непрерывны и замкнуты сами на себя, то магнитный поток внутри соленоида равен потоку снаружи, т.е.  $B_{\text{внутри}} \cdot S = B_{\text{снаружи}} \cdot \infty$ . Отсюда следует, что поле снаружи равно нулю.

Найдем поле внутри. Для этого запишем циркуляцию по контуру 3, пересекающему поверхность соленоида:  $B_{\text{внутри}} \cdot l + 0 = \mu_0 \underbrace{Inl}_{I_{\text{сумм}}}$ . Отсюда  $B_{\text{внутри}} = \mu_0 nI$ . Итак, поле

однородно и полностью сосредоточено внутри соленоида.

Рассмотрим тороидальный соленоид, в котором провод намотан на тор. Из соображений симметрии ясно, что линии индукции представляют собой окружности. Вычислим циркуляцию по окружности радиуса  $r$  ( $R < r$ ):



$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 2\pi R n I \quad \Rightarrow \quad B(r) = \mu_0 n I \frac{R}{r}$$

Вне тора поле равно нулю. Если  $R \gg a$ , т.е.  $r \approx R$ , то  $B = \mu_0 n I$ .

## Глава 7. Магнитное поле в веществе.

### §1. Намагничивание магнетика.

До сих пор мы считали, что провода с током находятся в вакууме. Если это не так, то поле будет другим, так как все вещества являются магнетиками, т.е. могут приобретать магнитный момент – намагничиваться. Намагниченное вещество создает магнитное поле  $\vec{B}'$ , которое накладывается на поле  $\vec{B}_0$ , созданное проводниками.

$$\vec{B}_{\text{микро}} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

Истинное поле  $\vec{B}_{\text{микро}}$  сильно меняется на микрорасстояниях порядка межмолекулярных. Макроскопическим называют поле, усредненное по физически бесконечно малому объему (как и в электростатике):  $\vec{B} = \langle \vec{B}_{\text{микро}} \rangle$ .

Для объяснения намагничивания Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи. Каждый ток обладает магнитным моментом и создает магнитное поле. В отсутствие внешнего поля магнитные моменты молекул ориентированы хаотически, поэтому общий магнитный момент равен нулю. Под действием внешнего поля моменты приобретают преимущественную ориентацию, и магнетик намагничивается: магнитный момент становится отличен от нуля и возникает  $\vec{B}'$ .

Намагничивание вещества характеризуют намагниченностью (аналог в электростатике - поляризация). Намагниченность – магнитный момент единицы объема:

$$\vec{I} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}, \text{ где } \vec{p}_m \text{ - магнитный момент одной молекулы, } \Delta V \text{ - физически бесконечно}$$

малый объем, по которому ведется суммирование.

$$\vec{B}' \text{ также не имеет источников, поэтому } \nabla \vec{B} = \nabla \vec{B}_0 + \nabla \vec{B}' = 0.$$

Это первое уравнение Максвелла для среды:  $\text{div } \vec{B} = 0$ .

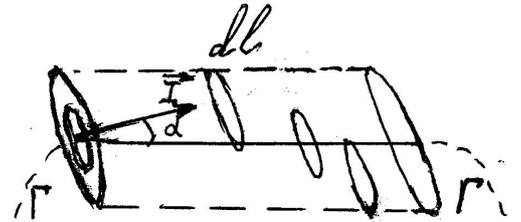
### §2. Напряженность магнитного поля.

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot } \vec{B}_0 + \text{rot } \vec{B}' \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{\text{молек}})$$

$\vec{B}$  зависит от  $\vec{j}_{\text{молек}}$ , а  $\vec{j}_{\text{молек}}$ , в свою очередь, зависит от  $\vec{B}$ . Избежать этого мы можем, введя величину, ротор которой определяется только сторонней плотностью тока  $\vec{j}$ . Чтобы

найти вид этой величины, выразим  $\vec{j}_{\text{молек}}$  через намагниченность  $\vec{I}$ . Для этого вычислим сумму молекулярных токов, охватываемых некоторым контуром  $\Gamma$ :  $\int_{(S)} \vec{j}_{\text{молек}} d\vec{S}$ . Поверхность  $S$  натянута на контур  $\Gamma$ . В эту сумму войдут только те молекулярные токи, которые «нанизаны» на контур. Все остальные пересекают поверхность или 0, или 2 раза, поэтому их вклад равен нулю.

Пусть все молекулярные токи ориентированы одинаково и имеют одинаковые площади  $S_{\text{молек}}$  и силы тока  $I_{\text{молек}}$ . Элемент контура  $dl$ , образующий с вектором  $\vec{I}$  угол  $\alpha$ , нанизывает на себя все молекулярные токи, центры которых попадают внутрь косоугольного цилиндра с объемом  $S_{\text{молек}} \cdot \cos \alpha \cdot dl$ . Если  $n$  - число молекул в единице объема, то ток, охватывающий элемент  $dl$ , равен  $\underbrace{I_{\text{молек}} \cdot S_{\text{молек}}}_{=P_m} \cdot n \cdot \cos \alpha \cdot dl = \underbrace{I}_{=I} \cdot d\vec{l}$ .



Воспользовавшись теоремой Стокса, получим:  $\int_{(S)} \vec{j}_{\text{молек}} d\vec{S} = \oint \vec{I} d\vec{l} = \int_{(S)} \text{rot } \vec{I} d\vec{S}$ . Отсюда

можно сделать вывод, что

$$\vec{j}_{\text{молек}} = \text{rot } \vec{I} = \nabla \times \vec{I} \quad (\text{В электростатике было } \rho' = -\text{div } \vec{P}).$$

Подставив это выражение, получим:  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \text{rot } \vec{I}) \Rightarrow \text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} \right) = \vec{j}$ .

Введем понятие напряженности магнитного поля  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$ . Она удовлетворяет

соотношению:  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ . Это 2-е уравнение Максвелла для стационарного магнитного поля.

### §3. Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля.

Возьмем интеграл от обеих частей по поверхности  $S$ :  $\int_{(S)} \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \int_{(S)} \vec{j} d\vec{S}$ . Используем

теорему Стокса:  $\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{(S)} \vec{j} d\vec{S}$ . Если токи текут по дискретным проводам, то

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k.$$

**Теорема:** циркуляция напряженности магнитного поля по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром.

Напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  - это аналог электрического смещения  $\vec{D}$  в электрическом поле. Исторически считалось, что электрическое и магнитное поля аналогичны. Тогда и были введены понятия  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . Позже выяснилось, что  $\vec{B}$  аналогичен  $\vec{E}$ , а  $\vec{H}$  -  $\vec{D}$ , но названия остались. Отметим, что  $\vec{D}$  иногда называют вектором электрической индукции. Тогда аналогия заметна еще сильнее.

В вакууме  $\vec{I} = 0$ , поэтому  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ , и мы снова приходим к уравнению  $rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

Поле прямолинейного бесконечного тока  $I$  в вакууме на расстоянии  $b$  от него равно:  
 $H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi b}$ , тогда циркуляция  $H \cdot 2\pi b = I$ , как и следует из доказанной теоремы.

Размерность напряженности магнитного поля -  $[H] = 1 \frac{A}{m}$ .

Иногда пользуются системой единиц СГС. В ней  $[H] = 1 \text{ Эрстед}$ ,  $[B] = 1 \text{ Гаусс}$ .

Намагниченность принято связывать не с  $\vec{B}$ , а с  $\vec{H}$ :

$\vec{I} = \chi \cdot \vec{H}$ , где  $\chi$  - магнитная восприимчивость.

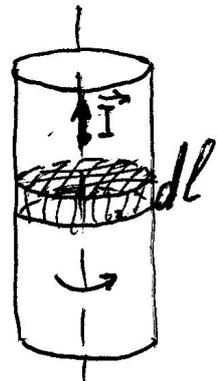
Тогда  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi)} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} \Rightarrow \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$

где  $\mu = 1 + \chi$  - магнитная проницаемость. (В электрическом поле было  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ ).

#### §4. Вычисление поля в магнетике.

Рассмотрим бесконечно длинный стержень. Пусть намагниченность  $\vec{I}$  во всех точках одна и та же и направлена вдоль оси стержня.

Разрежем стержень на перпендикулярные его оси слои толщиной  $dl$ . Каждый слой разобьем на бесконечно малые цилиндрические элементы произвольной формы. Магнитный момент каждого элемента  $dp_m = IdV = IdSdl$ . Поле  $d\vec{B}$  на больших расстояниях от стержня



эквивалентно полю, которое создал бы ток  $di = Idl$ , обтекающий этот элемент по боковой поверхности. Действительно, магнитный момент такого тока  $dp_m = di \cdot dS = IdldS$ , а поле на больших расстояниях определяется только магнитным моментом.

Токи, текущие по общим для двух соседних элементов участкам равны по величине и противоположны по направлению. Их сумма равна нулю. Таким образом, нескомпенсированными остаются только токи, текущие по внешней (боковой) поверхности всего слоя. Значит, слой создает поле, эквивалентное тому, которое создавалось бы током  $di = Idl$ , текущим по боковой поверхности стержня. Линейная плотность этого тока (сила тока на единицу длины)  $j_{лин} = I$ . Это поле бесконечного соленоида: внутри оно однородно и равно  $B' = \mu_0 j_{лин} = \mu_0 I$ , а снаружи равно нулю. Таким образом, поле внутри стержня  $\vec{B}' = \mu_0 \vec{I}$ , а снаружи  $\vec{B}' = 0$ .

Пусть есть однородное внешнее поле  $\vec{B}_0$ . В него вносят бесконечный стержень, параллельный  $\vec{B}_0$ . В стержне создается намагниченность  $\vec{I}$ , параллельная  $\vec{B}_0$ , а значит, возникает  $\vec{B}'$ . Суммарная индукция  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ , т.е. внутри  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{I}$ . Тогда

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \text{ т.е. } \vec{H} = \vec{H}_0.$$

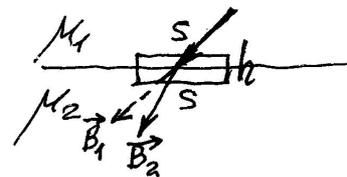
Напряженность в стержне оказалась равной внешней  $\vec{H}_0$ , а индукция ( $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} = \mu\vec{B}_0$ ) в  $\mu$  раз больше, чем была в вакууме. Вне стержня  $\vec{B}' = 0$ , т.е.  $\vec{B}$  осталась той же.

Эти выводы справедливы, если магнетик полностью занимает пространство между линиями  $\vec{B}$ , т.е. его границы совпадают с линиями  $\vec{B}$ .

### §5. Условия на границе двух магнетиков.

Запишем уравнения Максвелла:  $div \vec{B} = 0$ ,  $rot \vec{H} = \vec{j}$ .

1) Рассмотрим на границе двух магнетиков замкнутую цилиндрическую поверхность малой толщины  $h$  с площадью основания  $S$ . Поток  $\vec{B}$  через эту поверхность должен

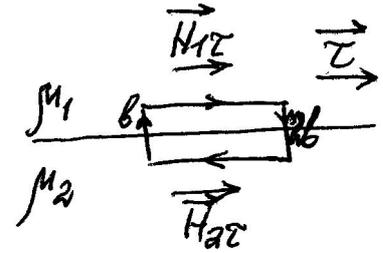


равняться нулю (так как  $div \vec{B} = 0$ ), т.е.  $\Phi_{\vec{B}} = B_{1n_1} S + B_{2n_2} S + \langle B \rangle S_{бок} = 0$ . Устремим толщину  $h$  к нулю, тогда поток через боковую поверхность стремится к нулю, и  $B_{1n_1} + B_{2n_2} = 0$ . Перейдя от  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ , направленных в разные стороны (изнутри наружу) к одному  $\vec{n}$ , получим

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \mu_1 H_{1n} = \mu_0 \mu_2 H_{2n} \quad \Rightarrow \quad \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

2) Теперь рассмотрим контур около границы высоты  $b$  и рассчитаем циркуляцию  $\vec{H}$ :

$\oint H_l dl = H_{1\tau} a - H_{2\tau} a + \langle H \rangle b$ . По теореме о циркуляции она должна быть равна  $I_{гран}$ . Если плотность тока на границе равна нулю, то при  $b \rightarrow 0$  получим



$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}$$

Резюме: при переходе через границу двух магнетиков не изменяются нормальная компонента  $\vec{B}$  и касательная компонента  $\vec{H}$ .

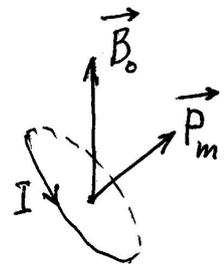
### §6. Виды магнетиков.

- 1) Диамагнетики:  $\chi < 0 \Rightarrow \mu = 1 + \chi < 1, |\chi| \ll 1$ .
- 2) Парамагнетики:  $\chi > 0 \Rightarrow \mu = 1 + \chi > 1, \chi \ll 1$ .
- 3) Ферромагнетики:  $\chi > 0 \Rightarrow \chi \gg 1 \Rightarrow \mu \gg 1$ .
- 4) Идеальные диамагнетики (сверхпроводники):  $\mu = 0$ .

Это значит, что  $\vec{I}$  может быть как совпадать по направлению, так и быть противоположно направлено по отношению к  $\vec{H}$ . (В электростатике всегда  $\vec{P} \uparrow \uparrow \vec{E}$ ).

#### а) Диамагнетики.

Рассмотрим круговой ток, нормаль к плоскости которого составляет угол  $\alpha$  с  $\vec{B}_0$ . Тогда магнитные силы стремятся установить вектор  $\vec{p}_m$  по направлению  $\vec{B}_0$ . Ситуация похожа на волчок, который при угле между осью вращения и силой тяжести начинает прецессировать вокруг вертикали. Вектор  $\vec{p}_m$  начнет вращаться вокруг  $\vec{B}_0$ . Это так



называемая ларморова прецессия. Ее частота  $\omega_L = \frac{eB_0}{2m_e}$  одинакова для всех электронов.

Ларморова прецессия создает дополнительное вращение всех электронов вокруг  $\vec{B}_0$  с одинаковой частотой  $\omega_L$ , в результате чего возникает магнитный момент, направленный против внешнего поля. Таким образом,  $|\vec{B}| < |\vec{B}_0|$ .

#### б) Парамагнетики.

Ларморова прецессия возникает всегда, но если атом уже обладает магнитным моментом  $\vec{p}_m$ , то магнитное поле не только создает прецессию, но и действует на магнитные

моменты атомов, стремясь выстроить их вдоль поля. Этот положительный магнитный момент всегда много больше отрицательного, возникающего вследствие прецессии.

Диамагнетики – всегда вещества, атомы которых не имеют суммарного магнитного момента (сумма магнитных моментов всех электронов атома равна нулю).

В парамагнетиках тепловое движение стремится разориентировать моменты, а магнитное поле – выстроить их. В результате устанавливается некоторое промежуточное состояние. Кюри установил, что магнитная восприимчивость парамагнетика  $\chi$  обратно пропорциональна температуре  $T$ .

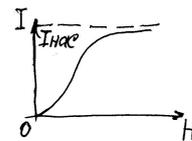
в) Идеальные диамагнетики – сверхпроводники. Магнитное поле выталкивается из них полностью, т.е. внутри сверхпроводника  $\mu = 0$ .

г) Ферромагнетики (железо, никель, кобальт и др.) – это вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего поля.

Характерные свойства ферромагнетиков.

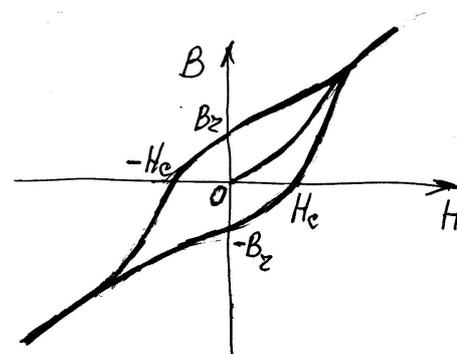
1) Ферромагнетики – сильномагнитные вещества. Их намагниченность в огромное число раз (до  $10^{10}$ ) превосходит намагниченность диа- и парамагнетиков. Иначе говоря,  $\mu \gg 1$ .

2) Намагниченность нелинейно зависит от напряженности внешнего поля (в диа- и парамагнетиках линейно!).



3) Гистерезис – при увеличении и уменьшении внешнего поля  $H$  кривые имеют различный вид.

Пусть в начальный момент и внешнее поле, и намагниченность равны нулю. При увеличении внешнего поля магнитная индукция в образце растет  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{I})$ . После достижения насыщения выходим на наклонную прямую  $B = \mu_0(H + const)$ . Эта часть кривой называется основной кривой намагничивания. При дальнейшем уменьшении внешнего поля будем двигаться по другой кривой и в начальную точку не вернемся. При циклическом изменении внешнего поля получаем петлю гистерезиса.

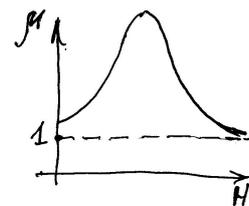


$B_r$  - остаточная индукция,  $H_c$  - коэрцитивная сила (конечно, это не сила, просто так называется!).

Мы видим, что при  $H = 0$  магнитный момент  $\vec{I}$  нулю не равен – это постоянный магнит.

Петля гистерезиса называется максимальной, если доходит до насыщения. Если не доходит, то называется частной.

Легко видеть, что  $B$  является многозначной функцией  $H$ , т.е. значение  $B$  при данной  $H$  зависит от предыстории. График  $\mu(H)$  для основной кривой изображен на рисунке.



Основы теории ферромагнетизма заложили Яков Ильич Френкель, работавший в Ленинградском физико-техническом институте, и выдающийся немецкий физик, один из основоположников квантовой механики Вернер Гейзенберг. Причина ферромагнетизма – собственные (спиновые) магнитные моменты атомов. Первоначально считали, что спин связан с вращением электрона вокруг своей оси. Однако в дальнейшем выяснилось, что такая трактовка приводит к ряду противоречий. Поэтому сейчас считают, что спиновый механический и связанный с ним магнитный моменты – такие же свойства электрона, как масса и заряд.

В определенных условиях между спиновыми магнитными моментами атомов возникают так называемые обменные силы, заставляющие их спины выстраиваться параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного намагничивания – домены. В каждом домене все спины выстроены параллельно друг другу, т.е. ферромагнетик в домене намагничен до насыщения. Направления моментов разных доменов хаотичны, так что при отсутствии внешнего поля намагниченность равна нулю. Размеры доменов 1-10 мкм.

Во внешнем поле магнитные моменты доменов поворачиваются, причем в пределах одного домена все одновременно. В результате образец приобретает магнитный момент. Этот процесс необратим, поэтому имеет место гистерезис.

Каждый ферромагнетик имеет температуру  $T_C$ , при нагревании выше которой ферромагнитные свойства исчезают. Она называется точкой Кюри. При  $T > T_C$  имеем обычный парамагнетик, магнитная восприимчивость которого подчиняется закону Кюри-Вейсса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \quad (\text{в обычных парамагнетиках } \chi = \frac{C}{T}).$$

## Глава 8. Электромагнитная индукция.

### §1. Явление электромагнитной индукции.

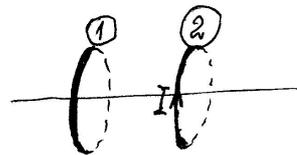
В 1831 году Фарадей установил закон электромагнитной индукции: при изменении магнитного потока через контур в контуре возникает ЭДС индукции, равная скорости изменения магнитного потока

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (*)$$

Здесь знак «-» стоит для нахождения правильного направления.

Правило Ленца для нахождения направления индукционного тока: индукционный ток направлен так, чтобы всеми своими проявлениями препятствовать причине, его вызвавшей.

Например, при приближении второго контура к первому в первом должен возникнуть ток, отталкивающий второй контур, т.е. против часовой стрелки.

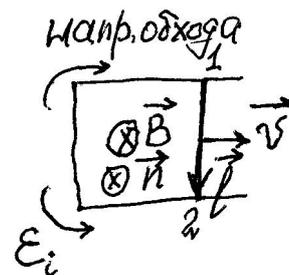


## §2. ЭДС индукции.

Для пояснения формулы (\*) рассмотрим рамку, одна сторона которой движется со скоростью  $\vec{v}$ , в перпендикулярном рамке магнитном поле  $\vec{B}$ . На каждый электрон участка 1-2 действует сила Лоренца

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -e \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Ее действие можно трактовать как воздействие электрического поля с напряженностью  $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ . Это поле не является электростатическим, так как  $\varepsilon_i = \oint \vec{E} d\vec{l} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \neq 0$ , а в электростатике  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ , так как  $\text{rot } \vec{E} = 0$ .



Выведем закон Фарадея математически. Предварительно выберем направление нормали к контуру  $\vec{n}$ , например, вдоль  $\vec{B}$ . Этот выбор определяет направление обхода при вычислении циркуляции – по часовой стрелке: оно образует с  $\vec{n}$  правую систему координат (с конца  $\vec{n}$  обход виден идущим против часовой стрелки). Тогда

$$\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \vec{l} = \vec{B} (\vec{l} \times \vec{v}) = \vec{B} \left( \vec{l} \times \frac{\vec{v} dt}{dt} \right) = \vec{B} \cdot \frac{-\vec{n} dS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Если бы выбрали  $\vec{n}$  наоборот, то и направление обхода было бы обратным, и мы получили бы ту же формулу.

Проверим результат. При направлении нормали, как на рисунке,  $\Phi$  растет со временем, т.е.  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ , а  $\varepsilon_i < 0$ , т.е. направлена против часовой стрелки.

Если бы нормаль выбрали в противоположную сторону, то  $\frac{d\Phi}{dt}$  было бы меньше нуля, а  $\varepsilon_i > 0$ . Но, поскольку направление обхода изменилось бы на обратное, то положительная  $\varepsilon_i$  снова соответствовала бы обходу против часовой стрелки.

Отсюда можно вывести единицу магнитного потока  $[\Phi] = 1 \text{ Вебер} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$ . В СГС он измеряется в Максвеллах. 1 Вебер – это такой магнитный поток, при равномерном убывании которого до нуля за 1 секунду в контуре возникнет ЭДС 1 Вольт.

Мы рассмотрели случай, когда  $\vec{B} = const$ , а изменяется геометрия контура. Однако  $\Phi$  может изменяться при постоянной геометрии и меняющемся во времени поле. В таком случае объяснение с силой Лоренца не подходит, так как электроны не движутся и сила Лоренца не возникает. Тогда возникновение ЭДС индукции объясняется иначе, а именно: изменяющееся во времени  $\vec{B}$  порождает вихревое электрическое поле, под действием которого электроны приходят в движение и возникает электрический ток. Если контур состоит из  $N$  витков (соленоид), то  $\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$ , где  $\Psi = N\Phi$  называется полным магнитным потоком, или потокосцеплением.

Отметим, что, если не весь контур состоит из проводника, то сила тока равна нулю, но  $\varepsilon_i \neq 0$ .

Примечание. Если проводник длины  $l$  движется в магнитном поле со скоростью  $\vec{v}$ , причем векторы  $\vec{B}, \vec{v}, \vec{l}$  взаимно перпендикулярны, то  $\varepsilon_i = Blv$ . Направление индукционного тока определяется правилом правой руки: линии  $\vec{B}$  входят в ладонь, отогнутый большой палец направлен вдоль скорости, тогда 4 пальца укажут направление индукционного тока.

Токи Фуко – это индукционные токи в сплошных массивных проводниках. Сопротивление мало, поэтому токи могут быть очень большими (например в СВЧ-печах). Так можно плавить металл в вакууме. Кроме того, это явление используется для успокоения стрелок приборов. По правилу Ленца, токи Фуко направлены так, чтобы своим проявлением препятствовать причине, их вызвавшей. Поэтому на подвижной части прибора (стрелке) устанавливается проводящая пластина, которая вводится в зазор постоянного магнита. При движении пластинки в постоянном поле возникают силы, препятствующие колебаниям стрелки. Важно, что при остановке эти силы исчезают и не влияют на показания прибора.

Часто токи Фуко вредны. Например, чтобы предотвратить нагревание сердечников в трансформаторе, эти сердечники набирают из тонких пластин, разделенных изоляторами. Пластины располагают так, чтобы  $\varepsilon_i$  была к ним перпендикулярна.

\*\*\*\*\*

#### Систематизируем правила.

- 1) Правило буравчика – направление вектора  $\vec{B}$  и линий магнитной индукции.
- 2) Правило левой руки – направление сил Ампера и Лоренца.
- 3) Правило Ленца – направление индукционного тока.
- 4) Правило правой руки – направление ЭДС индукции в движущемся проводнике.

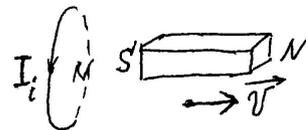
\*\*\*\*\*

### §3. Примеры анализа явления электромагнитной индукции.

1) Два прямолинейных параллельных проводника сближаются друг с другом. По одному течет ток. Куда потечет индукционный ток во втором проводнике?

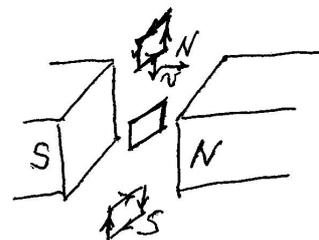
По правилу Ленца возникающая сила Ампера должна препятствовать сближению. Отталкиваются противоположно направленные токи. Поэтому индукционный ток направлен в противоположную сторону.

2) Южный полюс магнита удаляют от проводящего кольца (см. рисунок). В каком направлении возникнет ток в кольце?



По правилу Ленца должна возникнуть сила притяжения, т.е. в кольце должен возникнуть северный полюс (N). Ток потечет против часовой стрелки.

3) Рамка падает между полюсами магнита. Какие токи будут возникать на разных этапах падения?

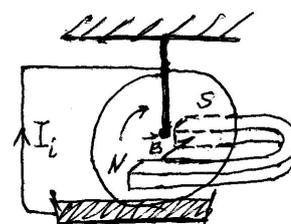


Наверху рамка входит в магнитное поле. По правилу Ленца сила Ампера должна препятствовать, т.е. отталкивать. Значит, справа у рамки должен возникнуть север (N), т.е. ток против часовой стрелки.

В середине магнитный поток через рамку не меняется (поле однородно), поэтому индукционный ток равен нулю.

Внизу рамка вылетает из поля. Сила Ампера препятствует, т.е. притягивает, значит, справа у рамки должен быть южный полюс (S). Ток идет по часовой стрелке.

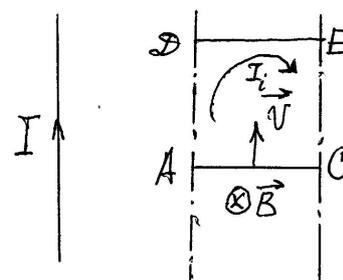
4) Медный диск расположен между полюсами магнита, как показано на рисунке. В каком направлении будет протекать индукционный ток при вращении диска по часовой стрелке?



Элемент диска ниже его центра, находящийся между полюсами магнита, движется справа налево. Линии  $\vec{B}$  направлены от N к S. По правилу правой руки индукционный ток в этом участке пойдет вниз. По правилу левой руки можно убедиться, что сила Ампера будет направлена вправо, т.е. препятствует движению, что согласуется с правилом Ленца.

Этот эффект преобразования механической энергии в энергию электрического тока применяется на электростанциях.

5) Прямолинейный проводник AC движется по проводящим направляющим (рельсам). Куда будет направлен индукционный ток в проводнике AC?



Рассмотрим несколько способов рассуждения.

а) Силой, препятствующей движению по правилу Ленца,

будет сила Ампера. Правило левой руки показывает, что, для того чтобы она была направлена против движения, ток в АС должен течь от С к А.

б) По правилу левой руки найдем направление силы Лоренца, действующей на носители тока в проводнике, которая и будет сторонней силой, обеспечивающей ЭДС. Ток пойдет от С к А.

в) Мысленно замкнем контур, например, сверху (ДЕ). По правилу буравчика определяем, что линии  $\vec{B}$  направлены от нас. Магнитный поток (от нас) через АДЕС при движении АС убывает (так как уменьшается площадь). Значит, индукционный ток должен течь так, чтобы своим магнитным потоком стремиться компенсировать убывание потока, т.е. его магнитное поле будет направлено от нас. По правилу буравчика для этого ток в АДЕС должен течь по часовой стрелке, т.е. в проводнике ток течет от С к А.

г) Используем правило правой руки для нахождения направления индукционного тока в движущемся проводнике: линии  $\vec{B}$  входят в ладонь, отогнутый большой палец направлен вдоль скорости, тогда 4 пальца укажут направление индукционного тока - от С к А.

#### **§4. Явление самоиндукции.**

Любой электрический ток в контуре создает магнитное поле, которое формирует магнитный поток, пронизывающий сам контур. При изменении тока изменяется поток через, т.е. в нем возникает ЭДС индукции.

Самоиндукция – явление возникновения ЭДС индукции в контуре при изменении тока в нем.

Согласно закону Био-Савара-Лапласа, индукция  $B$  прямо пропорциональна силе тока  $I$ , поэтому и полный магнитный поток через контур тоже пропорционален  $I$ :  $\Psi = LI$ . Коэффициент пропорциональности  $L$  называется индуктивностью. Он зависит от геометрии и магнитных свойств среды. Для ферромагнетиков  $\Psi$  нелинейно зависит от  $I$ , т.е.  $L = f(I)$ , для других  $L = const$ .

$$[L] = 1 \text{ Генри (Гн)}.$$

Вычислим индуктивность соленоида.

$$B = \mu\mu_0 In, \text{ где } n - \text{ число витков на единицу длины } ([n] = 1/м).$$

$$\Phi = BS, \Psi = NBS = n^2 l \mu\mu_0 IS, \text{ где } N = nl - \text{ общее количество витков.}$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu\mu_0 n^2 l S = \mu\mu_0 n^2 V, \text{ где } V - \text{ объем соленоида.}$$

Отсюда можно найти размерность  $[\mu_0] = 1 \text{ Гн/м}$  ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ ).

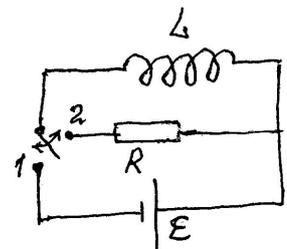


$$\text{ЭДС } \varepsilon_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \text{ В то же время } \Psi_1 = L_{12}I_2 \text{ и } \varepsilon_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

Контурь 1 и 2 называются связанными, а явление возникновения индукционного тока в одном контуре при изменении тока в другом называется взаимной индукцией.  $L_{12}$  и  $L_{21}$  - взаимные индуктивности контуров. В отсутствие ферромагнетиков  $L_{12} = L_{21}$ . Их величины зависят от геометрии контуров и магнитных проницаемостей среды.

### §7. Энергия магнитного поля.

При ключе в положении 1 через  $L$  установится ток  $I$ . При переключении ключа в положение 2 ток постепенно убывает до нуля. Найдем работу ЭДС самоиндукции:



$$dA = \varepsilon_{si} dq = \varepsilon_{si} Idt = -\frac{d\Psi}{dt} Idt = -Id\Psi$$

Если  $L \neq f(I)$ , т.е. нет ферромагнетиков, то  $d\Psi = LdI$ . Тогда  $dA = -LI dI$  и

$$A = -\int_I^0 LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Эта энергия уходит на изменение внутренней энергии сопротивления  $R$  и проводов. При этом магнитное поле исчезает, других изменений нет. Значит, магнитное поле обладает энергией  $W = \frac{LI^2}{2}$  - магнитная энергия проводника с индуктивностью  $L$  при токе  $I$  в нем.

Эта энергия локализована в магнитном поле. (В электростатике  $W = \frac{CU^2}{2}$ )

Легко показать, что при создании магнитного поля, т.е. при возникновении тока, внешним источником совершается такая же работа.

Выразим магнитную энергию соленоида через его параметры:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V, \quad H = nI \Rightarrow I = \frac{H}{n} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V.$$

Так как поле соленоида однородно, то можно найти объемную плотность магнитной

энергии  $w = \frac{W}{V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}$  (в электростатике  $w = \frac{ED}{2}$ )

Для произвольного объема имеем  $W = \int_{(V)} w dV$ .

$$\text{Для двух связанных контуров } W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} + \frac{L_{21} I_2 I_1}{2}.$$

$$\text{Для } N \text{ связанных контуров } W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N L_{ik} I_i I_k.$$

## Глава 9. Уравнения Максвелла.

### §1. Вихревое электрическое поле.

Рассмотрим электромагнитную индукцию, когда контур покоится, а  $\vec{B}$  меняется. Возникает индукционный ток, значит, существуют сторонние силы, действующие на электроны. Они не имеют ни химической, ни тепловой природы. Они не магнитные, так как магнитное поле работы не совершает. Приходим к выводу, что возникает электрическое поле (не электростатическое!). Назовем его вихревым -  $\vec{E}_e$ .

$$\text{Преобразуем выражение для ЭДС индукции } \varepsilon_i = \oint \vec{E}_e d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

$$\oint \vec{E}_e d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{(S)} \vec{B} d\vec{S}, \text{ где } S - \text{ произвольная поверхность, натянутая на контур.}$$

$$\oint \vec{E}_e d\vec{l} = -\int_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

$$\text{По теореме Стокса: } \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \int_{(S)} \text{rot } \vec{E}_e \cdot d\vec{S} = -\int_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

$$\text{Поскольку } S \text{ произвольная, то } \text{rot } \vec{E}_e = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Максвелл предположил, что даже без проводника в пространстве возникает электрическое поле. Оно не электростатическое, так как для электростатического  $\text{rot } \vec{E}_{\text{стат}} = 0$ .

$$\text{Будем рассматривать общее поле } \vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_{\text{стат}}.$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{одно из уравнений Максвелла.}$$

Из этого уравнения следует, что нельзя рассматривать электрическое и магнитное поля отдельно. Действительно, пусть электрическое поле создано системой неподвижных зарядов. Но относительно другой системы отсчета они движутся, а значит, создают еще и магнитное поле.

С другой стороны, неподвижный провод с постоянным током создает магнитное поле. Но относительно других систем отсчета он движется, т.е. магнитное поле в каждой точке является переменным и, согласно формуле, создает вихревое электрическое поле.

Таким образом, электростатическое или магнитостатическое поле в других системах отсчета представляют собой совокупность электрического и магнитного полей, образующих единое электромагнитное поле.

## §2. Ток смещения.

Для стационарного магнитного поля мы вывели формулу

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad (\text{rot } \vec{H} = \vec{j}) \quad (*)$$

Кроме того, выполнено уравнение непрерывности  $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  ( $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ).

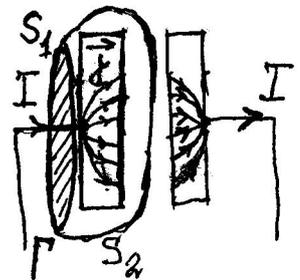
Поле может быть стационарным, только если  $\rho$  и  $\vec{j}$  не зависят от времени. Тогда  $\text{div } \vec{j} = 0$ , т.е. линии тока не имеют источников и замкнуты сами на себя.

Рассмотрим нестационарный случай, например, зарядку конденсатора (см.рисунок). Ток изменяется со временем и обращается в ноль, когда конденсатор полностью заряжен. При протекании тока линии  $\vec{j}$  имеют разрыв. Возьмем замкнутый контур  $\Gamma$ , охватывающий провод, и вычислим интеграл по поверхности  $S$ , опирающейся на контур и пересекающей провод:

$$\int_{(S_1)} \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_{(S_1)} \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

По теореме Стокса  $\int_{(S_1)} \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{l}$ . Тогда

$$\int_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{(S_1)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I.$$



Если же проделать те же действия по поверхности  $S_2$ , также опирающейся на контур  $\Gamma$ , но не пересекающей провод, то  $\int_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{(S_2)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ .

Но один и тот же  $\int_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{l}$  не может равняться разным числам!

Значит, уравнение (\*) не верно. Напрашивается вывод, что должен быть член, пропорциональный производной по времени.

На неправильность уравнения (\*) указывает и следующее рассуждение:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \text{div}(\text{rot } \vec{H}) = \text{div } \vec{j}$$

Левая часть равенства всегда равна нулю, так как  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$ . Правая же часть не всегда равна нулю, что следует из уравнения непрерывности.

Для устранения этих противоречий Максвелл добавил к  $\vec{j}$  так называемый ток смещения  $\vec{j}_{\text{смещ}}$ :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{смещ}} \quad (**)$$

Сумма тока проводимости и тока смещения называется полным током:

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{смещ}}$$

Вычислив дивергенцию от (\*\*), получим  $div(rot \vec{H}) = div(\vec{j} + \vec{j}_{смещ})$ .

Но левая часть равна нулю, значит:  $div \vec{j}_{смещ} = -div \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ .

Чтобы выразить  $\vec{j}_{смещ}$  через характеристики поля, продифференцируем по времени

уравнение  $div \vec{D} = \rho$ :  $div \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow div \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = div \vec{j}_{смещ} \Rightarrow \vec{j}_{смещ} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Подставим в (\*\*):  $rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (\*\*\*)

Это одно из уравнений Максвелла.

Можно показать, что при учете  $\vec{j}_{смещ}$  имеем  $\int_{(S_1)} rot \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_{(S_2)} rot \vec{H} \cdot d\vec{S}$ , т.е. введение

тока смещения снимает все проблемы.

Термин “ток смещения” является условным, просто размерность  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  совпадает с размерностью  $\vec{j}$ . Из всех физических свойств, присущих току, ток смещения обладает только одним: он создает магнитное поле.

Из (\*\*\*) следует, что переменное электрическое поле создает магнитное. Из выведенного ранее уравнения Максвелла следовало, что переменное магнитное создает электрическое. Значит, магнитное и электрическое поля уравнились в свойствах.

Ток смещения есть везде, где есть переменное электрическое поле. В частности, он есть и в проводах, по которым течет переменный электрический ток. Но в проводах обычно  $j_{смещ} \ll j_{пров}$ . Для тока смещения тоже можно строить линии тока. Мы знаем, что в конденсаторе  $D = \sigma$  (поверхностная плотность заряда), поэтому  $\dot{D} = \dot{\sigma}$ , т.е. плотность тока смещения равна плотности тока проводимости в проводнике. Их равенство означает непрерывность линий тока на границе, т.е. линии полного тока непрерывны.

### §3. Уравнения Максвелла.

$$\begin{cases} rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div \vec{D} = \rho \\ rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ div \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Уравнения Максвелла являются такой же основой для всей электродинамики, как законы Ньютона для механики. Их надо дополнить связями  $\vec{D}$  и  $\vec{j}$  с  $\vec{E}$ , а также  $\vec{B}$  с  $\vec{H}$ :

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad \text{где } \sigma \text{ - удельная проводимость. Это дифференциальный закон Ома.}$$

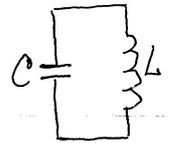
Выше мы записали уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Можно перейти к интегральной форме, интегрируя по поверхности или по контуру и пользуясь теоремами Остроградского-Гаусса и Стокса:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}d\vec{S} \\ \oint \vec{D}d\vec{S} = q \\ \oint \vec{H}d\vec{l} = I + \frac{d}{dt}\int \vec{D}d\vec{S} \\ \oint \vec{B}d\vec{S} = 0 \end{array} \right.$$

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ.

### §1. Свободные незатухающие колебания в колебательном контуре.

В цепи, содержащей конденсатор  $C$  и катушку  $L$ , могут возникать электрические колебания. Поэтому такую цепь называют колебательным контуром.



Пусть активное сопротивление  $R$  отсутствует. Тогда колебания будут незатухающими. Вызвать колебания можно либо сообщив заряд обкладкам конденсатора, либо возбуждив ток в катушке.

Рассмотрим первый способ. Подключим конденсатор  $C$  без катушки к источнику тока  $\varepsilon$ . Он зарядится. Теперь переключим конденсатор с источника на катушку  $L$ . Он начнет разряжаться, пойдет ток. При этом заряд конденсатора  $q$  будет убывать, а сила тока  $I$  в цепи – расти. Электрическая энергия  $q^2/2C$  превращается в магнитную  $LI^2/2$ . Поскольку потерь энергии в цепи нет, то полная энергия остается постоянной. Мы пренебрегаем излучением электромагнитных волн, которое тем больше, чем больше частота и чем “открытее” контур.

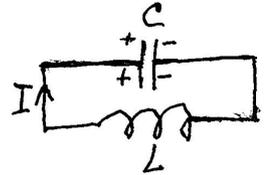
Из закона сохранения энергии следует, что ток максимален, когда конденсатор полностью разряжен. Далее ток убывает, но ЭДС самоиндукции продолжает его поддерживать, так что он убывает до нуля за конечное время, в течение которого конденсатор перезарядится до того же по модулю заряда, и т.д. Таким образом, колебания

сопровождаются переходом энергии из электрической в магнитную и обратно. Здесь видим явную аналогию с точкой на пружине, где потенциальная энергия  $kx^2/2$  переходит в кинетическую  $mv^2/2$  и наоборот. Это наводит на мысль об аналогиях:  $q^2/2C \rightarrow kx^2/2$  и  $LI^2/2 \rightarrow mv^2/2$ , тем более что  $I = \dot{q}$ , как и  $v = \dot{x}$ .

Найдем уравнение колебаний. Пусть в данный момент  $q$  растет.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon_{si} \Rightarrow \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{q}{C} + L\dot{q} = 0$$

$$\text{Вводя обозначение } \frac{1}{LC} = \omega_0^2, \text{ получим } \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$



дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

Период колебаний равен  $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  - формула Томсона.

Решение дифференциального уравнения имеет вид:  $q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , откуда

$$U = \frac{q}{C} = U_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$I = \dot{q} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

Ток опережает напряжение по фазе на  $\pi/2$ . Он равен нулю, когда  $U = U_m$ .

Амплитуды напряжения и тока равны:  $U_m = \frac{q_m}{C}$ ,  $I_m = q_m \omega_0$ , т.е.  $U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m$ . Эту связь

можно получить также из равенства максимальных энергий:  $\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}$ .

## §2. Свободные затухающие колебания.

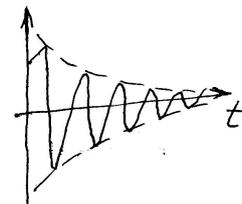
Всякий реальный контур обладает сопротивлением  $R$ , поэтому энергия постепенно переходит в тепло и колебания затухают.

$$\varphi_2 - \varphi_1 + IR = \varepsilon_{si} \Rightarrow \frac{q}{C} + R\dot{q} + L\ddot{q} = 0 \Rightarrow \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \text{ где } \beta = \frac{R}{2L}.$$

Это дифференциальное уравнение затухающих колебаний (в механике было точно такое же). Его решение имеет вид:

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$



Логарифмический декремент затухания  $\lambda = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \beta T = \frac{\pi R}{\omega L}$ .

Добротность контура определяется формулой:  $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ . Можно показать, что

при малом затухании добротность, деленная на  $2\pi$ , дает отношение энергии системы в данный момент к ее потере за период.

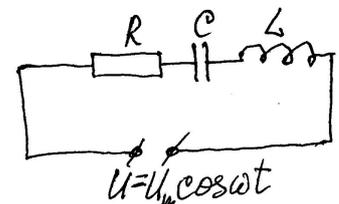
Если затухание мало ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ), то  $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Если  $\beta > \omega_0$ , то колебаний нет - режим аperiодический.

**§3. Вынужденные электрические колебания. Резонанс.**

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t$$

Как и в случае механических колебаний, решение неоднородного дифференциального уравнения представляет собой сумму затухающего свободного колебания и вынужденного



незатухающего:  $q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \alpha) + q_m \cos(\omega t - \psi)$ ,

где  $q_m = \frac{U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$ , (\*)  $tg \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ .

Через какое-то достаточно короткое время свободные колебания затухнут до нуля и останутся только вынужденные. Выразим ток и напряжения на разных участках:

$$I = \dot{q} = I_m \cos(\omega t - \psi + \pi / 2), \text{ где } I_m = \omega q_m;$$

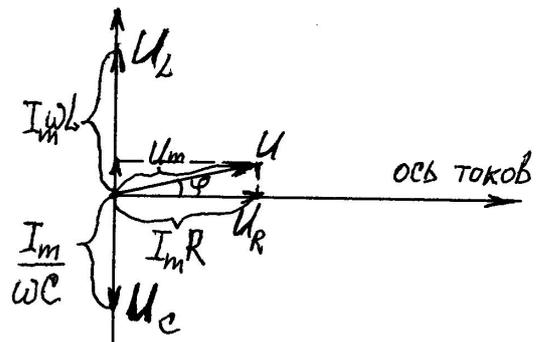
$$U_C = \frac{q}{C} = U_{Cm} \cos(\omega t - \psi), \text{ где } U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{I_m}{\omega C};$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = U_{Lm} \cos(\omega t - \psi + \pi), \text{ где } U_{Lm} = \omega L I_m;$$

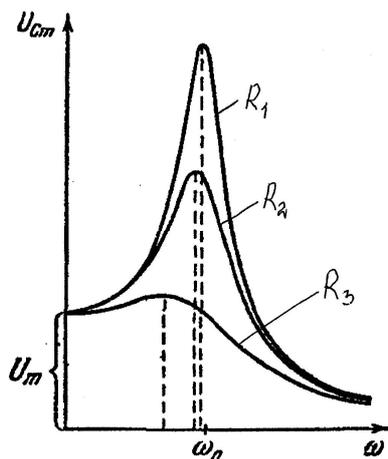
$$U_R = IR.$$

Таким образом,  $U_C$  отстает от тока на  $\pi / 2$ , а  $U_L$  опережает его на  $\pi / 2$ .

Эти связи удобно иллюстрировать с помощью векторной диаграммы. Гармоническое колебание можно представить в виде вектора, длина которого равна амплитуде, а направление составляет с



некоторой осью угол, равный начальной фазе. В качестве этой оси (абсцисс) удобно выбрать вектор тока (в рассматриваемой цепи он одинаков во всех элементах). Легко изобразить все “векторы” напряжений. Сумма  $\vec{U}_L + \vec{U}_C + \vec{U}_R$  должна равняться вектору приложенного напряжения  $\vec{U}$ . Отсюда следует, что амплитуда полного напряжения равна  $U_m = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ . Эту формулу также можно легко получить из (\*).



На рисунках приведены резонансные кривые, т.е. зависимости амплитуды от частоты ( $R_1 < R_2 < R_3$ ). Для разных величин максимум соответствует разным частотам. Для  $q$  и  $U_C$  резонансная частота определяется минимизацией подкоренного выражения в знаменателе (\*):

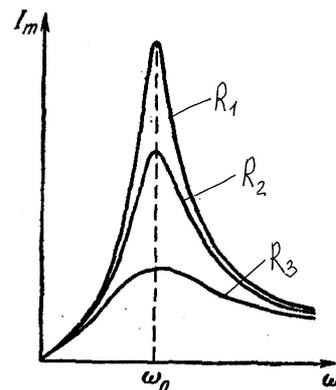
$$\omega_{q \text{ рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0.$$

Амплитуда тока  $I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$  максимальна,

когда  $\omega L - 1/\omega C = 0$ , т.е.  $\omega_{I \text{ рез}} = \omega_0$ .

При малом затухании ( $\beta \ll \omega_0$ ) резонансные частоты совпадают с собственной частотой контура  $\omega_0$ , а

$\frac{U_{Cm \text{ рез}}}{U_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q$ . Таким образом, добротность



контура  $Q$  показывает, во сколько раз амплитуда напряжения на конденсаторе может превысить приложенное  $U_m$ . В этом и заключался главный смысл введения понятия “добротность”. Кроме того, можно показать, что добротность равна отношению резонансной частоты к ширине резонансной кривой на высоте, в  $\sqrt{2}$  раз меньшей максимуму.

Явление резонанса используется для выделения из сложного сигнала нужной составляющей:  $U = U_{m1} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots$ . Настроив конденсатор (или катушку) на одну из частот (подобрав  $L, C$ ), можно получить на конденсаторе напряжение с амплитудой, в  $Q$  раз превышающей амплитуду данной составляющей. Все другие амплитуды останутся малыми. Такой процесс осуществляется при настройке радиоприемника на нужную частоту.

## УПРУГИЕ ВОЛНЫ.

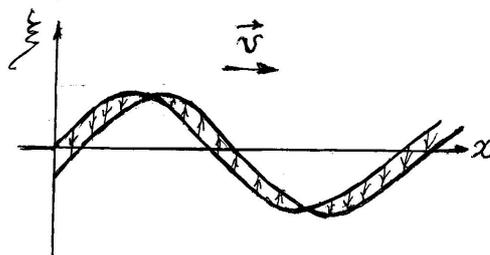
### §1. Распространение волн в упругой среде.

Если в какой-нибудь упругой среде (газообразной, жидкой, твердой) возбудить колебания частиц, то эти колебания будут распространяться от частицы к частице с некоторой скоростью  $v$ . Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной.

Частицы при этом не бегут вместе с волной – они только совершают колебания около своих положений равновесия. В зависимости от направления колебаний частиц относительно направления распространения волны различают продольные и поперечные волны. В продольных частицы колеблются вдоль направления распространения волны, в поперечных – перпендикулярно ему. Упругие поперечные волны могут существовать только в среде, сопротивляющейся сдвигу. Поэтому в жидкостях и газах существуют только продольные волны, а в твердых телах – и продольные и поперечные.

Особый случай – волны на поверхности жидкости. Они определяются не упругими силами, а силами поверхностного натяжения. При малой амплитуде (рябь на воде) эти волны являются поперечными. При больших амплитудах структура волны меняется – частицы двигаются по окружностям (вспомним большие волны, набегающие на берег).

Рассмотрим для примера бегущую поперечную волну в струне. Каждая точка совершает колебания, двигаясь перпендикулярно струне. Амплитуды колебаний у всех частиц одинаковы, а фазы различны.

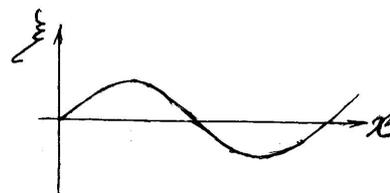


В случае пространства колеблются точки в некотором объеме. При распространении волны от источника в волновой процесс вовлекаются все новые точки пространства. Геометрическое место точек, до которых доходит волна к моменту  $t$ , называется фронтом волны. Он отделяет часть пространства, в которой уже идет волновой процесс, от области, где колебаний еще нет.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Ее можно провести через любую точку пространства, охваченную волновым процессом. Волновых поверхностей бесконечно много, они остаются неподвижными. Фронт один и все время движется.

Волновые поверхности могут быть разной формы. Простейшие – плоскость (плоская волна) и сфера (сферическая волна). В плоской волне волновые поверхности – множество параллельных друг другу плоскостей, перпендикулярных направлению распространения. В сферической – множество концентрических сфер.

Рассмотрим плоскую волну (см. рисунок). Это не геометрическое изображение волны, так было бы только в случае волны в струне. В общем случае это зависимость от координаты колеблющейся физической величины (смещения точки от положения равновесия). Этот график соответствует как поперечной, так и продольной волне.  $\xi$  - функция координат и времени, т.е.  $\xi(x, t)$ , где  $x$  - равновесная координата точки.



Расстояние  $\lambda$ , на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний  $T$ , называется длиной волны:  $\lambda = v \cdot T$ , где  $v$  - скорость волны. Переходя к частоте  $f = 1/T$ , получим  $v = \lambda \cdot f$ . Можно пояснить и так: за 1 секунду генерируется  $f$  длин волн  $\lambda$ . За это время первый гребень проходит длину  $v$ , на которой они и должны уместиться.

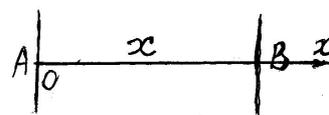
Чтобы не ошибиться с вышеприведенными формулами, полезно анализировать размерности. Например, скорость (м/с) равна длине волны (метр), деленной на период (секунда). Отсюда можно получить и другие формулы.

## §2. Уравнения плоской и сферической волн.

Уравнение волны – это выражение, определяющее смещение колеблющейся частицы как функцию координат и времени:  $\xi = \xi(x, y, z, t)$ , где  $x, y, z$  - координаты равновесного положения частицы.

В случае плоской волны, бегущей вдоль оси  $x$ ,  $\xi = \xi(x, t)$ . Эта функция должна быть периодической как по времени, так и по координате. Периодичность по  $t$  вытекает из того, что при фиксированных  $x, y, z$  величина  $\xi$  описывает периодическое колебание частицы. Периодичность по координате следует из того, что точки, отстоящие на расстояние  $\lambda$ , колеблются одинаково.

Будем считать волну гармонической. Пусть колебание точки А задается формулой  $\xi(0, t) = a \cos(\omega t + \alpha)$ . Найдем  $\xi(x, t)$  - колебание точки В. Чтобы пройти путь от 0 до  $x$ , требуется время  $\tau = x/v$ . Значит, колебания частиц в точке В (лежащих в плоскости В) будут отставать от колебаний частиц в плоскости А на время  $\tau$ :



$$\xi(x, t) = a \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right) - \text{уравнение плоской волны (продольной или поперечной)}.$$

Найдем связь между  $t$  и тем местом  $x$ , где фаза имеет фиксированное значение:

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha = const$$

Дифференцируя по времени, получим  $dx/dt = v$ . Таким образом, скорость волны – это скорость перемещения фазы, поэтому ее называют фазовой скоростью. В нашем случае  $dx/dt > 0$ , т.е. волна движется в сторону возрастания  $x$ . Для волны, движущейся в противоположном направлении, уравнение волны имеет вид:  $\xi(x, t) = a \cos(\omega(t + \frac{x}{v}) + \alpha)$ .

Введем обозначение:  $k = 2\pi / \lambda$  - волновое число. Тогда  $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$ , т.е.

$$\xi(x, t) = a \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

При выводе этой формулы мы считали, что амплитуда  $a$  не зависит от  $x$ . Для плоской волны это так, если нет поглощения энергии средой. Если такое поглощение есть, то  $a$  постепенно убывает с ростом  $x$ , чаще всего по экспоненциальному закону:

$$\xi(x, t) = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

Мы получили уравнение плоской волны, бегущей вдоль оси  $x$ . Если плоская волна распространяется вдоль  $\vec{n}$ , то введем понятие волнового вектора  $\vec{k} = k \cdot \vec{n}$ , где  $k = 2\pi / \lambda$ . Уравнение такой плоской волны имеет вид  $\xi(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$ .

Уравнение сферической волны имеет вид  $\xi(r, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$ . Убывание амплитуды с ростом  $r$  связано с тем, что по мере удаления от источника поток энергии, остающийся тем же, распределяется по площади, увеличивающейся пропорционально  $r^2$ , т.е. плотность потока энергии, пропорциональная квадрату амплитуды, убывает как  $1/r^2$ . Значит, амплитуда убывает как  $1/r$ . Если есть поглощение средой, то добавляется множитель  $e^{-\gamma r}$ .

### **§3. Волновое уравнение.**

Уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения, называемого волновым. Установим его вид. Для простоты рассмотрим плоскую волну:

$\xi(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$ . Легко видеть, что  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi$  (\*), а также

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 \xi; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 \xi; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 \xi,$$

т.е. 
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k^2 \xi.$$

Подставив  $\xi$  из (\*), получим  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ , или  $\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ , (\*\*)

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа.

Если плоская волна распространяется вдоль оси  $x$ , то волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Уравнение (\*\*) было выведено нами для плоской волны, но подробный расчет показывает, что оно справедливо для любых волн.

#### **§4. Стоячие волны.**

Если в среде распространяются несколько волн, то колебания частиц представляют собой сумму колебаний от каждой волны – это принцип суперпозиции волн. Если колебания, обусловленные волнами, имеют одну и ту же частоту и в каждой точке обладают постоянной во времени разностью фаз, то такие волны называются когерентными. При сложении когерентных волн имеет место явление интерференции, когда в одних точках волны усиливают друг друга, а в других ослабляют.

Важный случай интерференции имеет место при наложении встречных волн с одинаковой амплитудой и частотой. При этом образуется стоячая волна.

$$\xi(x, t) = a \cos(\omega t - kx + \alpha_1) + a \cos(\omega t + kx + \alpha_2) = \left[ 2a \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \right] \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

Модуль выражения в квадратных скобках равен амплитуде колебания точки.

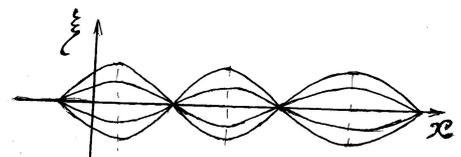
Выбрав начало отсчета времени так, что  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 0$ , а начало отсчета  $x$  так, что

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 0, \text{ и заменив } k = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ получим: } \xi(x, t) = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t.$$

В каждой точке имеем гармоническое колебание с круговой частотой  $\omega$  и амплитудой  $\left| 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$ . В точках, где  $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm n\pi$ , амплитуда максимальна и равна  $2a$ . Эти точки

( $x = n \frac{\lambda}{2}$ ) называются пучностями. В узлах, где  $x = (n + 1/2) \frac{\lambda}{2}$ , амплитуда равна нулю.

Примером стоячей волны являются колебания закрепленной струны. На рисунке изображены положения струны в разные моменты времени. В отличие от бегущей волны, где колебания разных точек имеют одинаковые



амплитуды и разные фазы, в стоячей волне колебания точек имеют разные амплитуды и одинаковые фазы (внутри каждой полуволны, в соседней полуволне фаза отличается на  $\pi$ ).

Стоячая волна стоит на месте, распространение энергии отсутствует. Просто в каждой точке происходит переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно.

### **§5. Колебание струны.**

В закрепленной с обоих концов струне, при возбуждении в ней поперечных колебаний, устанавливаются стоячие волны. В местах закрепления должны быть узлы. Поэтому могут установиться только колебания с длинами волн, отвечающими условию:  $l = n \lambda / 2$ , т.е. на длине струны  $l$  укладывается целое число длин полуволн. Значит, длины волн могут равняться только  $\lambda_n = 2l / n$ . Им соответствуют частоты  $f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n$ , где  $v$  - скорость волны в струне, определяемая силой натяжения струны и ее линейной плотностью.  $f_n$  - собственные частоты струны – гармоники. Основная частота  $f_1 = \frac{v}{2l}$ . В общем случае колебание струны есть наложение гармоник.

### **§6. Звук.**

Звук – это упругие волны в разных средах. Пределы слышимости человека: частоты от 20 Гц до 20 кГц. Ниже 20 Гц инфразвук, выше 20 кГц – ультразвук. Скорость звука в газах определяется по формуле  $v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ , в воздухе она равна примерно 330 м/с.

Звук характеризуется высотой, громкостью, тембром. Высота определяется частотой, громкость – амплитудой, тембр – наличием разных гармоник.

Порог слышимости – интенсивность звука, которую может слышать человек:  $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт} / \text{м}^2$ . Существует также порог болевого ощущения.

Уровень громкости  $L = \lg \frac{I}{I_0}$  Бел (Б),  $L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$  децибел (дБ).

### **§7. Эффект Доплера для звуковых волн.**

Если источник звука и приемник находятся в покое, то частота, испускаемая источником, равна принимаемой приемником:  $f = f_0$ . Если же один или оба движутся, то  $f \neq f_0$  - эффект Доплера. Выведем формулу эффекта. Будем считать скорости источника и приемника положительными, если они соответствуют уменьшению расстояния между ними.

За одну секунду источник создает  $f_0$  колебаний. За это время первый гребень уйдет от источника на расстояние  $(v - v_{уст})$ . На этом расстоянии укладываются  $f_0$  длин волн:

$$v - v_{уст} = f_0 \lambda, \text{ т.е. } \lambda = \frac{v - v_{уст}}{f_0}.$$

Рассмотрим приемник. Если он неподвижен, то мимо него за 1 секунду пройдут гребни на длине  $v$ . Если он движется со скоростью  $v_{пр}$  навстречу волне, то через 1 секунду около него



окажется гребень, находившийся от него на расстоянии  $(v + v_{пр})$ , т.е.  $v + v_{пр} = f\lambda$ . Отсюда

следует эффект Доплера: 
$$f = \frac{v + v_{пр}}{v - v_{уст}} f_0.$$

Если  $v_{пр}$  и  $v_{уст}$  положительны, то  $f > f_0$ . При разных знаках ситуация не очевидна.

Запишем формулу в виде: 
$$f = \frac{(v - v_{уст}) + (v_{пр} + v_{уст})}{v - v_{уст}} f_0 = \left(1 + \frac{v_{пр} + v_{уст}}{v - v_{уст}}\right) f_0.$$

Здесь  $v_{пр} + v_{уст}$  - это результирующая скорость сближения. Таким образом, если она положительна, т.е. расстояние между источником и приемником уменьшается, то  $f > f_0$ , а если расстояние растет, то  $f < f_0$ .

Эффект Доплера для звуковых волн определяется скоростями приемника и источника относительно среды. Для электромагнитных волн эффект Доплера существует, но формула

другая: 
$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}.$$
 В этом случае среды нет, поэтому в формулу входит только

относительная скорость приемника и источника  $v$ . Здесь  $\vartheta$  - угол между направлением на источник и вектором скорости в системе приемника. Если источник радиально удаляется от наблюдателя, то  $\vartheta = 0$ , если приближается -  $\pi$ .

Эффект Доплера для электромагнитных волн определяется двумя причинами: а) классический аналог изменения частоты (как для звуковых волн), б) релятивистское замедление времени. Последний фактор приводит к поперечному эффекту Доплера, когда  $\vartheta = \pi/2$ . В этом случае изменение частоты является чисто релятивистским эффектом, не имеющим классического аналога.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.

### §1. Волновое уравнение для электромагнитных волн.

Запишем уравнения Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

Пусть объемная плотность сторонних зарядов  $\rho$  и сторонняя плотность тока  $\vec{j}$  равны нулю, т.е. сторонние заряды и токи отсутствуют.

Выразим  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  из соотношений:  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$  и подставим в уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \end{array} \right.$$

Вычислим ротор от обеих частей первого уравнения:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}.$$

Преобразуем  $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{\operatorname{div} \vec{E}=0}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$  и получим  $\Delta \vec{E} = \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ .

Напомним, что здесь  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа.

Учтем, что  $\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 9 \cdot 10^{16} = c^2$  - квадрат скорости света.

Окончательно приходим к уравнению  $\Delta \vec{E} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ .

Проводя похожие преобразования, можно получить уравнение  $\Delta \vec{H} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$ .

Это волновые уравнения для волн со скоростью  $c/\sqrt{\varepsilon \mu}$ . В вакууме  $\varepsilon = \mu = 1$ , поэтому скорость электромагнитных волн равна скорости света  $c$ .

## §2. Плоская электромагнитная волна.

Исследуем простейший случай плоской волны в нейтральной ( $\rho = 0$ ), непроводящей ( $\vec{j} = 0$ ) среде с постоянными  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Направим ось  $Ox$  перпендикулярно волновой поверхности. Тогда  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  не зависят от  $y$  и  $z$ . Из уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; & \text{div } \vec{E} = 0; \\ \text{rot } \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; & \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases}$$

имеем

$$0 = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} (1); \quad -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} (2); \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} (3); \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 (4)$$

$$0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} (5); \quad -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} (6); \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} (7); \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 (8)$$

Из (1) и (5) следует, что  $H_x = \text{const}$  и  $E_x = \text{const}$ , т.е. это постоянные поля, наложенные на электромагнитное поле волны. Само поле волны не имеет компоненты вдоль направления распространения  $Ox$ , т.е. волна поперечная.

Объединим (3) с (6)

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases} (*)$$

Эта система связывает только  $E_y$  и  $H_z$ , а система (2) и (7)

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

- только  $E_z$  и  $H_y$ .

Допустим, что было создано переменное поле  $E_y$ . Оно создает  $H_z$ , а оно – снова  $E_y$  и т.д. Ни  $E_z$ , ни  $H_y$  не возникают. Аналогично, если было  $E_z$ , то возникнет  $H_y$ . Достаточно взять только одну систему, например первую, тогда  $E_z = H_y = 0$ .

Продифференцируем первую систему по  $x$  и  $t$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \end{cases}$$

Это частный случай волновых уравнений.

Простейшее решение имеет вид:

$$\begin{cases} E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1) \\ H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2) \end{cases}$$

Из (\*) получим

$$\begin{cases} kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu\mu_0\omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) \\ kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) \end{cases}$$

откуда следует  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Тогда 
$$\begin{cases} kE_m = \mu\mu_0\omega H_m \\ kH_m = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m \end{cases} \quad (**)$$

Перемножая, получим  $k^2 = \mu\varepsilon\mu_0\varepsilon_0\omega^2 \Rightarrow \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\mu\varepsilon} = \frac{c^2}{\mu\varepsilon} \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ .

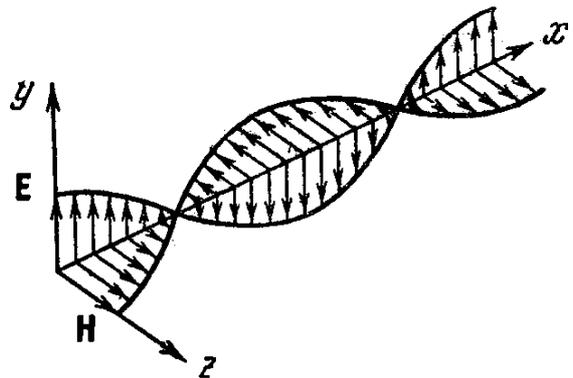
Поделим уравнения (\*\*) одно на другое:  $\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2$ .

Таким образом, колебания электрического и магнитного полей происходят в фазе, а амплитуды связаны соотношением  $\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$ . В вакууме  $\mu = \varepsilon = 1$ , и  $\frac{E_m}{H_m} = 120\pi \text{ Ом}$ .

В векторном виде при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  (выбрали так начало отсчета) получим

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx) \\ \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

Изобразим моментальную фотографию.  $E$  и  $H$  одновременно растут и убывают. Это происходит во всех точках, но с разными фазами.



### §3. Экспериментальное исследование электромагнитных волн.

Первые опыты с несветовыми электромагнитными волнами проводил Герц в 1888 году. Он изобрел для излучения волн вибратор – два стержня, разделенные искровым промежутком. При подаче на вибратор высокого напряжения от индукционной катушки в нем проскакивала искра. За время ее проскока успевало произойти большое количество колебаний с частотой, при которой длина волны  $\lambda$  равнялась двум длинам вибратора.

Помещая вибратор в фокусе вогнутого параболического зеркала, Герц получал направленные плоские волны с  $\lambda$  от 0,6 м до 10 м. Он исследовал излучаемую волну таким же вибратором ( $d = \lambda / 2$ ). В нем возникали колебания, имеющие из-за резонанса значительную амплитуду, что вызывало проскакивание небольших искр, заметных в темноте. С помощью зеркал и большой асфальтовой призмы (длина больше 1 м, масса больше 1000 кг) Герц изучал отражение и преломление волн. Оказалось, что они подчиняются тем же законам, что и свет.

Отразив волну зеркалом назад, он получил стоячую волну. Из расстояния между узлами и пучностями нашел длину волны. Умножив ее на частоту, вычислил скорость волны, действительно близкую к скорости света.

Расположив на пути волны решетку из параллельных медных проволок, Герц обнаружил, что вращение решетки изменяет интенсивность стоячей волны, что доказывает поперечность волн.

### §4. Энергия и импульс электромагнитных волн.

Электромагнитные волны переносят энергию, плотность которой в вакууме равна

$$w = w_E + w_H = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

Ранее было показано, что  $E\sqrt{\epsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}$ , т.е.  $\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}$ , откуда следует

$$w = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} EH = \frac{EH}{c}$$

Плотность потока энергии  $S = w \cdot c = EH$ . Ранее было показано, что в волне  $\vec{E} \perp \vec{H}$  и оба перпендикулярны направлению распространения. Поэтому вектор плотности потока энергии запишется в виде  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  - это так называемый вектор Пойнтинга.

Можно показать, что эта формула верна и для постоянного поля.

Рассмотрим, например, проводник с постоянным током:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{j} / \sigma = \rho \vec{j}.$$

Из взаимного расположения  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  видно, что  $\vec{S}$  направлен внутрь проводника.

Найдем напряженность поля у поверхности провода  $H = j \cdot r / 2$

(из теоремы о циркуляции  $H$  имеем  $H \cdot 2\pi r = j\pi r^2$ ). Тогда

$S = EH \sin \frac{\pi}{2} = Ejr / 2$ . Полный поток энергии внутрь проводника равен

$\Phi = S \cdot 2\pi r l = Ej \underbrace{\pi r^2 l}_V = EjV = \rho j^2 V$ . Значит, поток энергии внутрь равен выделяемому

джоулевому теплу, т.е. энергия, выделяющаяся в проводнике, поступает не по проводу, а через поверхность в виде энергии электромагнитного поля. Можно показать, что в поле эта энергия поступает на участке, где действуют сторонние силы.

В следующем семестре мы узнаем, что электромагнитная волна – это поток фотонов с энергиями  $\hbar\omega$  и импульсами  $\hbar\omega/c$ . Поэтому импульс единицы объема волны равен

$$K_{ед.об.} = \frac{w}{\hbar\omega} \cdot \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{w}{c} = \frac{S}{c^2}.$$

Импульс, переданный за 1 секунду 1 квадратному метру поверхности, - это давление.

Для полностью поглощающей поверхности этот импульс равен

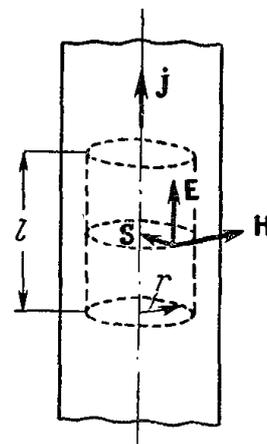
$$K_{ед.об.} \cdot c = \frac{S}{c^2} \cdot c = \frac{S}{c} = w.$$

Эта величина пульсирует с очень большой частотой, поэтому имеют в виду среднее значение:  $p = \langle w \rangle$ . Для зеркальной поверхности  $p = 2\langle w \rangle$ .

Это давление очень мало. На расстоянии 1 метр от источника света 1 миллион кандел давление равно  $10^{-7}$  Па. В 1900 году русский физик Лебедев его измерил и подтвердил полученную формулу.

### §5. Излучение движущегося заряда.

Можно показать, что заряд, движущийся с ускорением  $w$ , излучает электромагнитные волны, причем общая мощность излучения во всех направлениях пропорциональна квадрату заряда и квадрату ускорения ( $q^2 w^2$ ). Например, при движении по окружности в ускорителе ( $w = v^2 / R$ ) с ростом скорости излучаемая мощность резко увеличивается. При некоторой скорости эта мощность становится равной энергии, сообщаемой электрону вихревым



электрическим полем – это определяет максимальную скорость частиц в этом ускорителе. Излучение называется синхротронным.

Заряд, совершающий гармонические колебания, излучает монохроматическую волну (одной частоты) с частотой, равной частоте колебаний. Если движение не гармоническое, то излучаются волны нескольких частот. Если ускорение равно нулю, т.е. движение равномерное, то излучения нет. Но, если заряженная частица движется в среде со скоростью, большей скорости света в этой среде ( $v > c / \sqrt{\mu\epsilon}$ ), то наблюдается излучение Вавилова-Черенкова. За это открытие в 1958 году Черенков, открывший это явление вместе с Вавиловым в 1934 году, и объяснившие его в 1937 году советские физики Тамм и Франк получили нобелевскую премию. Вавилов к этому моменту, к сожалению, уже умер, а нобелевские премии присуждают только живым.

## Список вопросов к экзамену

1. Электростатическое поле в вакууме.  
Основные факты.
2. Электростатическое поле. Напряженность поля.
3. Потенциал.
4. Электрическая энергия системы зарядов.
5. Связь между напряженностью и потенциалом.
6. Диполь.
7. Поле системы зарядов на больших расстояниях от нее.
8. Градиент.
9. Поток вектора.
10. Дивергенция.
11. Теорема Остроградского-Гаусса.
12. Циркуляция и ротор.
13. Теорема Стокса.
14. Оператор набла.
15. Циркуляция и ротор электростатического поля.
16. Теорема Гаусса и дивергенция электростатического поля.
17. Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса.
18. Полярные и неполярные молекулы.
19. Поляризация диэлектрика.
20. Поле внутри диэлектрика.
21. Объемные и поверхностные связанные заряды.
22. Вектор электрического смещения.
23. Поле внутри плоской диэлектрической пластины.
24. Условия на границе двух диэлектриков.
25. Сегнетоэлектрики.
26. Электрическое поле в проводниках.
27. Напряженность поля у поверхности проводника.
28. Потенциал уединенного проводящего шара.
29. Метод зеркального отображения.
30. Метод зеркального отображения в случае шара.
31. Емкость уединенного проводника.
32. Конденсаторы.
33. Энергия электрического поля.
34. Электрический ток.
35. Уравнение непрерывности.
36. Электродвижущая сила (ЭДС).
37. Закон Ома. Сопротивление.
38. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа.  
Метод контурных токов.
39. Мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.
40. Магнитное поле. Основные факты.
41. Вектор магнитной индукции.
42. Закон Био-Савара-Лапласа.
43. Поле бесконечного прямолинейного тока.
44. Линии магнитной индукции и их свойства.
45. Принцип суперпозиции.
46. Поле движущегося заряда.
47. Закон Ампера.
48. Сила Лоренца.
49. Контур с током в магнитном поле.
50. Энергия контура с током в магнитном поле.
51. Магнитное поле кругового контура с током.
52. Примеры анализа магнитных взаимодействий.
53. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле.
54. Дивергенция и ротор магнитного поля.
55. Поле внутри соленоида.
56. Намагничивание магнетика.
57. Напряженность магнитного поля.
58. Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля.
59. Вычисление поля в магнетике.
60. Условия на границе двух магнетиков.
61. Виды магнетиков.
62. Явление электромагнитной индукции.
63. ЭДС индукции.
64. Примеры анализа явления электромагнитной индукции.
65. Явление самоиндукции.
66. Ток при замыкании и размыкании контура.
67. Взаимная индукция.
68. Энергия магнитного поля.
69. Вихревое электрическое поле.
70. Ток смещения.
71. Уравнения Максвелла.
72. Свободные незатухающие колебания в колебательном контуре.
73. Свободные затухающие колебания.
74. Вынужденные электрические колебания.  
Резонанс.
75. Распространение волн в упругой среде.
76. Уравнения плоской и сферической волн.
77. Волновое уравнение.
78. Стоячие волны.
79. Колебание струны.
80. Звук.
81. Эффект Доплера для звуковых волн.
82. Волновое уравнение для электромагнитных волн.
83. Плоская электромагнитная волна.
84. Экспериментальное исследование электромагнитных волн.
85. Энергия и импульс электромагнитных волн.
86. Излучение движущегося заряда.