

А. А. ЭРДЕДИ, Н. А. ЭРДЕДИ

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНИК

Рекомендовано

*Федеральным государственным автономным учреждением
«Федеральный институт развития образования» (ФГАУ «ФИРО»)
в качестве учебника для использования в учебном процессе
образовательных учреждений, реализующих программы СПО*

*Регистрационный номер рецензии 367
от 22 августа 2013 г. ФГАУ «ФИРО»*



Москва
Издательский центр «Академия»
2014

УДК 531.8(075.32)
ББК 30.12я723
Э75

Рецензент —
преподаватель высшей квалификационной категории ГБОУ СПО МО
«Мытищинский машиностроительный колледж»,
почетный работник СПО *В. К. Житков*

Эрдеди А. А.
Э75 Техническая механика : учебник для студ. учреждений
сред. проф. образования / А. А. Эрдеди, Н. А. Эрдеди. — М. :
Издательский центр «Академия», 2014. — 528 с.

ISBN 978-5-7695-9607-0

Изложены основы теоретической механики, сопротивления материалов, деталей машин и механизмов с применением элементов высшей математики. Даны примеры расчетов. Учебник создан на основе 13-го издания учебного пособия «Теоретическая механика. Сопротивление материалов» и 5-го издания учебника «Детали машин». Учебник переработан в соответствии с ФГОС и предназначен для изучения предмета «Техническая механика».

Учебник может быть использован при изучении общепрофессиональной дисциплины «Техническая механика» в соответствии с ФГОС СПО для специальностей укрупненной группы 150000 «Металлургия, машиностроение и материалобработка».

Для студентов учреждений среднего профессионального образования.

УДК 531.8(075.32)
ББК 30.12я723

*Оригинал-макет данного издания является собственностью
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение
любым способом без согласия правообладателя запрещается*

© Эрдеди А. А., Эрдеди Н. А., 2014
© Образовательно-издательский центр «Академия», 2014
© Оформление. Издательский центр «Академия», 2014

ISBN 978-5-7695-9607-0

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Данный учебник является частью учебно-методического комплекта по специальностям технического профиля.

Учебник предназначен для изучения общепрофессиональной дисциплины «Техническая механика».

Учебно-методические комплекты нового поколения включают в себя традиционные и инновационные учебные материалы, позволяющие обеспечить изучение общеобразовательных и общепрофессиональных дисциплин и профессиональных модулей. Каждый комплект содержит учебники и учебные пособия, средства обучения и контроля, необходимые для освоения общих и профессиональных компетенций, в том числе и с учетом требований работодателя.

Учебные издания дополняются электронными образовательными ресурсами. Электронные ресурсы содержат теоретические и практические модули с интерактивными упражнениями и тренажерами, мультимедийные объекты, ссылки на дополнительные материалы и ресурсы в Интернете. В них включен терминологический словарь и электронный журнал, в котором фиксируются основные параметры учебного процесса: время работы, результат выполнения контрольных и практических заданий. Электронные ресурсы легко встраиваются в учебный процесс и могут быть адаптированы к различным учебным программам.

Учебно-методический комплект разработан на основании Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования с учетом его профиля.

Предисловие

Предлагаемый учебник включает в себя основы теоретической механики с элементами теории механизмов, сопротивления материалов; деталей и узлов машин.

Изложение ведется с применением высшей математики. Используется правая система координат и соответствующее ей правило знаков для моментов сил и пар.

Учебник соответствует действующим стандартам, в том числе Государственным стандартам на единицы физических величин, допуски и посадки, узлы и детали машин, термины, определения и обозначения, методы расчета, графические изображения, а также рекомендациям на обозначение физических величин Международной организации по стандартизации (ИСО).

Расчетные формулы построены таким образом, что в них применяются только основные и производные единицы СИ (в формулы не входят величины в кратных, дольных и внесистемных единицах), поэтому в экспликациях к формулам не указываются единицы, в которых выражены величины.

Для облегчения самостоятельной работы студентов, закрепления умений и навыков в решении задач теоретический материал сопровождается обобщениями, выводами, примерами решений и расчетов с пояснениями.

Учебник предназначен для студентов машиностроительных специальностей учреждений среднего профессионального образования.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

I ЧАСТЬ

- Глава 1. Основные положения и аксиомы статики
- Глава 2. Плоская система сходящихся сил
- Глава 3. Плоская система параллельных сил и момент силы
- Глава 4. Плоская система пар сил
- Глава 5. Плоская система произвольно расположенных сил
- Глава 6. Трение
- Глава 7. Пространственная система сил
- Глава 8. Центр тяжести
- Глава 9. Кинематика точки
- Глава 10. Простейшие движения твердого тела
- Глава 11. Сложное движение точки
- Глава 12. Плоскопараллельное движение твердого тела
- Глава 13. Основы динамики материальной точки
- Глава 14. Основы кинетостатики
- Глава 15. Работа и мощность
- Глава 16. Энегетические теоремы динамики материальной точки
- Глава 17. Основы динамики системы материальных точек

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

Статика есть часть теоретической механики, изучающая условия, при которых тело находится в равновесии. *Абсолютным механическим равновесием* будем считать такое состояние, когда тело находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, причем все точки тела движутся одинаково.

Тело называют *абсолютно твердым* (или абсолютно жестким), если расстояние между любыми его точками не меняется при действии на него других тел. Абсолютно твердых тел в природе нет, но во многих случаях изменения формы и размеров (деформации) тел настолько незначительны, что ими можно пренебречь.

В теоретической механике полагают, что тела абсолютно твердые, и их физико-механические свойства не учитывают (за исключением вопросов, связанных с трением).

Материальной точкой называется точка, имеющая массу. Материальной точкой мы будем считать не только тело, имеющее очень малые размеры, но и любое тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Например, в астрономии звезды рассматривают как материальные точки, так как размеры звезд малы по сравнению с расстояниями между ними. Одно и то же реальное тело в зависимости от постановки задачи может рассматриваться либо как материальная точка, либо как тело, размеры которого необходимо учесть. Всякое тело можно считать взаимосвязанной совокупностью (системой) материальных точек. Абсолютно твердое тело представляет собой *неизменяемую систему* материальных точек.

Тело называется *свободным*, если никакие другие тела не препятствуют его перемещению в любом направлении, в противном случае тело называется *несвободным*, или *связанным*.

Пример свободного тела — воздушный шар в полете. Большинство окружающих нас тел являются несвободными телами. Тела в природе различным образом взаимодействуют между собой или с окружающей средой.

Механическое взаимодействие тел, т.е. взаимодействие, влияющее на их состояние покоя или движения (механическое состояние), характеризуется силой.

Сила есть мера механического взаимодействия тел. Сила характеризуется тремя элементами: числовым значением, направлением и точкой приложения. Таким образом, сила — *величина векторная*. Числовое значение силы называется *модулем вектора силы*.

Направление силы есть направление того движения, которое получила бы покоящаяся свободная материальная точка под действием этой силы. Прямая линия, по которой направлен вектор силы, называется *линией действия силы*.

В соответствии с Международной системой единиц (СИ) в качестве единицы силы принят *ньютон* (Н).

Ньютон есть сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с² в направлении действия силы.

Кратные и дольные единицы силы образуются путем умножения или деления основной единицы на 10 в некоторой степени. Их названия образуются присоединением десятичных приставок:

мега (М).....10 ⁶	деци (д) 10 ⁻¹
кило (к)10 ³	санци (с) 10 ⁻²
гекто (г)10 ²	милли (м) 10 ⁻³
дека (да).....10 ¹	микро (мк) 10 ⁻⁶

Например, 1 килоньютон (кН) = 10³ Н, 1 меганьютон (МН) = 10⁶ Н, 1 миллиньютон (мН) = 10⁻³ Н.

Графически силу изображают отрезком прямой со стрелкой; длина отрезка в определенном масштабе равна модулю вектора силы (рис. 1.1). *Масштаб силы* показывает, сколько единиц модуля силы содержится в единице длины ее вектора. Единица масштаба силы, например, [μ_F] = Н/мм или Н/см.

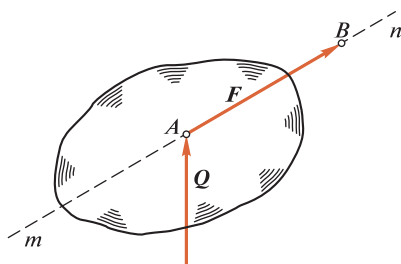


Рис. 1.1

На рис. 1.1 изображена сила, приложенная в точке A и действующая по линии mn . Вектор силы обозначим прописной латинской жирной буквой F , а модуль силы — той же буквой, но светлой F^* . Для вектора силы F точка A будет называться началом, а точка B — концом вектора. Нередко удобно изображать вектор силы так, чтобы стрелка, стоящая в конце вектора, упиралась в точку приложения силы (сила Q на рис. 1.1).

Совокупность тел (в том числе материальных точек), каким-то образом связанных между собой, назовем *системой тел*. Силы взаимодействия между телами, входящими в данную систему, называют *внутренними*, а силы, с которыми действуют на данную систему другие тела, — *внешними*. Если данную систему рассечь на части и рассматривать равновесие каждой части в отдельности, то внутренние для всей системы силы, действующие в сечениях, станут внешними силами для соответствующих частей системы. Такой метод позволяет определить внутренние силы, действующие в сечениях, и называется методом сечений. В теоретической механике он применяется весьма широко. Следует заметить, что деление сил на внешние и внутренние условно и зависит от постановки задачи и даже метода ее решения.

1.2. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ СТАТИКИ

Условия, при которых тело может находиться в равновесии, вводятся из нескольких основных положений, принимаемых без доказательств, но подтвержденных опытом и называемых *аксиомами статики*. Основные аксиомы статики сформулированы английским ученым И. Ньютоном (1642 — 1727) и поэтому названы его именем.

Аксиома I (аксиома инерции, или первый закон Ньютона).

Всякое тело сохраняет свое состояние покоя или прямолинейного равномерного движения, пока какие-нибудь силы не выведут тело из этого состояния.

Способность материального тела сохранять движение при отсутствии действующих сил или постепенно изменять это движение, когда на тело начинают действовать силы, называется *инерцией*, или *инертностью*. Инертность есть одно из основных свойств материи.

* В некоторых книгах векторы обозначают светлыми латинскими буквами со стрелочкой (или черточкой) над ними, а модули — той же буквой без стрелочки. Этот способ удобно применять при написании векторных равенств на доске или в тетради.

На основании этой аксиомы *состоянием равновесия* считаем такое состояние, когда тело находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, т. е. по инерции.

Аксиома II (аксиома взаимодействия, или третий закон Ньютона).

Силы взаимодействия между собой двух тел всегда равны по модулю и направлены по соединяющей их прямой в противоположные стороны.

Из третьего закона Ньютона вытекает, что одностороннего механического действия одного тела на другое не существует, т. е. все силы природы — силы парные.

Совокупность сил, приложенных к данному телу (или системе тел), называется *системой сил*. Сила действия какого-либо тела на данное и сила противодействия не представляют собой систему сил, так как они приложены к различным телам.

Если какая-нибудь система сил обладает таким свойством, что после приложения к свободному телу она не изменяет его механическое состояние, то такая система сил называется *уравновешенной*.

Аксиома III (условие равновесия двух сил).

Для равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием двух сил, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и действовали по одной прямой в противоположные стороны.

Условие, сформулированное в этой аксиоме, является *необходимым* для равновесия двух сил. Это значит, что если система двух сил находится в равновесии, то эти силы должны быть равны по модулю и действовать по одной прямой в противоположные стороны.

Условие, сформулированное в этой аксиоме, является *достаточным* для равновесия двух сил. Это значит, что справедлива обратная формулировка аксиомы, а именно: если две силы равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны, то такая система сил обязательно находится в равновесии.

В дальнейшем мы познакомимся с условием равновесия, которое будет необходимо, но не достаточно для равновесия.

Аксиома IV.

Равновесие (как и любое другое механическое состояние) твердого тела не нарушится, если к нему приложить или от него удалить систему уравновешенных сил.

Следствие из аксиом III и IV.

Механическое состояние твердого тела не нарушится от перенесения силы вдоль линии ее действия.

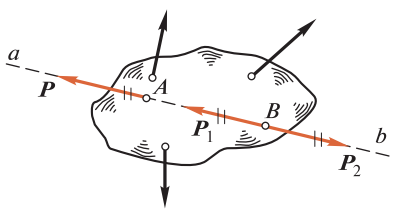


Рис. 1.2

Докажем это следствие. Пусть на твердое тело действует в числе других сила P , приложенная в точке A на линии действия ab (рис. 1.2). В произвольно взятой на линии ab точке B приложим две равные по модулю и противоположно направленные силы P_1 и P_2 , действующие по линии ab .

Согласно аксиоме III, силы P_1 и P_2 взаимно уравновешены, а на основании аксиомы IV их можно приложить к телу, не нарушая механического состояния. Возьмем силы P_1 и P_2 такими, чтобы они по модулю были равны силе P :

$$P_1 = P_2 = P.$$

На основании аксиомы IV отбросим силы P и P_2 как взаимно уравновешенные. Тогда оставшуюся силу P_1 можно рассматривать как силу P , перенесенную из точки A в точку B по линии действия, причем механическое состояние не нарушается. Следствие доказано.

Подчеркнем, что перенос силы вдоль линии ее действия можно осуществлять лишь в том случае, если рассматриваемое тело абсолютно твердое.

Две различные системы сил принято считать *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела.

Следует заметить, что эквивалентные системы сил могут вызывать различные деформации нетвердого тела.

На рис. 1.3 изображены две системы сил, порознь действующие на один и тот же стержень AB , причем $P_1 = P_2$, а $Q_1 = Q_2$. На основании аксиомы III ясно, что каждая из этих систем не выводит стержень из равновесия, т. е. они эквивалентны. Но система сил (P_1, P_2) стремится укоротить стержень, а система сил (Q_1, Q_2) — удлинить его. Эквивалентность систем сил условимся записывать так:

$$(P_1, P_2) \equiv (Q_1, Q_2).$$

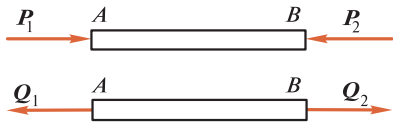


Рис. 1.3

На основании следствия из аксиом III и IV можно сказать, что *две силы эквивалентны*, если они равны по модулю и действуют по одной прямой в одну сторону. Два вектора силы (как и два лю-

бых однородных по размерности вектора) равны, если они параллельны, одинаково направлены и имеют равные модули.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется *равнодействующей*, а силы, входящие в систему сил — *составляющими* этой системы.

Сила, которая уравнивает данную систему сил, называется *уравновешивающей* этой системы.

Равнодействующая и уравновешивающая силы одной и той же системы равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны. Равнодействующая уравновешенной системы сил равна нулю, иначе говоря, *уравновешенная система сил эквивалентна нулю*.

Аксиома V (аксиома параллелограмма).

Равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, равна по модулю и совпадает по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, и приложена в той же точке.

Построение диагонали параллелограмма (рис. 1.4, а), сторонами которого являются заданные векторы, называется *векторным* или *геометрическим* сложением. Таким образом, можно сказать, что *равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, равна их векторной сумме*:

$$F_{\Sigma} = P + Q$$

и приложена в той же точке.

Равнодействующую двух сил можно найти, построив вместо параллелограмма сил *треугольник сил* (рис. 1.4, б). Из рис. 1.4, б видно, что порядок сложения векторов на величину равнодействующей не влияет, т. е.

$$F_{\Sigma} = P + Q = Q + P.$$

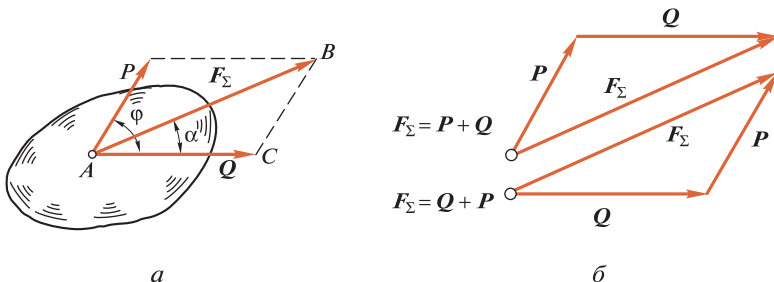


Рис. 1.4

Модуль и направление равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке, можно определить *аналитически*, для чего рассмотрим треугольник ABC (см. рис. 1.4, a).

По теореме косинусов

$$F_{\Sigma}^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos(\pi - \varphi) = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \varphi,$$

откуда модуль равнодействующей

$$F_{\Sigma} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \varphi}.$$

По теореме синусов

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{F_{\Sigma}}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{F_{\Sigma}}{\sin \varphi},$$

откуда найдем направление равнодействующей:

$$\sin \alpha = \frac{P \sin \varphi}{F_{\Sigma}}.$$

Рассмотрим частные случаи сложения двух сил:

1) $\varphi = 0$, тогда $F_{\Sigma} = P + Q$,

т.е. равнодействующая двух сил, действующих по одной прямой в одну сторону, равна их сумме и направлена по той же прямой в ту же сторону;

2) $\varphi = 180^\circ$, тогда $F_{\Sigma} = P - Q$,

т.е. равнодействующая двух сил, действующих по одной прямой в разные стороны, равна разности этих сил и направлена по той же прямой в сторону большей силы;

3) $\varphi = 90^\circ$, тогда $F_{\Sigma} = \sqrt{P^2 + Q^2}$,

т.е. равнодействующая двух сил, действующих под прямым углом, равна по величине диагонали прямоугольника, построенного на данных силах.

1.3. ТЕОРЕМА О РАВНОВЕСИИ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Теорема. Для равновесия плоской системы трех непараллельных сил необходимо, но недостаточно, чтобы линии действия этих сил пересекались в одной точке.

Пусть даны силы P , Q и F , причем линии действия сил P и Q пересекаются в точке A (рис. 1.5). На основании следствия из аксиом III и IV перенесем силы P и Q вдоль линий их действия в точку A и на основании аксиомы параллелограмма найдем равнодействующую F_{Σ} этих сил.

В результате получим систему двух сил (F_Σ, F) , эквивалентную данным трем силам:

$$(P, Q, F) \equiv (F_\Sigma, F).$$

Но, согласно аксиоме III, равновесие возможно, если силы F_Σ и F лежат на одной прямой, следовательно, линия действия силы F также пройдет через точку A .

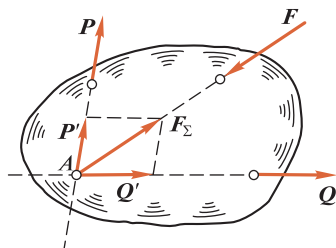


Рис. 1.5

Данная теорема дает лишь необходимое условие равновесия, но недостаточное, так как три силы могут сходиться в одной точке, но не быть в равновесии.

Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называют *сходящимися*.

1.4. СВЯЗИ И РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ. ПРИНЦИП ОСВОБОЖДАЕМОСТИ

Связями называют ограничения, налагаемые на положения и скорости точек тела в пространстве. Сила, с которой тело действует на связь, называется *силой давления*; ответная сила называется *силой реакции* или просто *реакцией*.

Согласно аксиоме взаимодействия, эти силы по модулю равны и действуют по одной прямой в противоположные стороны. Силы реакций и давлений приложены к различным телам и поэтому не представляют собой систему сил.

Силы, действующие на тело, делятся на *активные* и *реактивные*. Активные силы стремятся перемещать тело, к которому они приложены, а реактивные препятствуют этому перемещению. Принципиальное отличие активных сил от реактивных заключается в том, что значение реактивных сил, вообще говоря, зависит от значения активных сил, но не наоборот. Активные силы часто называют *нагрузками*.

При решении большинства задач статики несвободное тело условно изображают как свободное с помощью так называемого *принципа освобожденности*: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи, заменив их реакциями.

В результате применения этого принципа получаем тело, свободное от связей и находящееся под действием некоторой системы активных и реактивных сил.

Направление реакций определяется тем, в каком направлении данная связь препятствует перемещению тела. Правило для определения направления реакций можно сформулировать так: *направленные реакции связи противоположно направлению перемещения, не допускаемого данной связью.*

Если связи считать идеально гладкими, то во многих случаях можно сразу указать направление их реакций. Рассмотрим направление реакций основных видов связей, встречающихся в различных конструкциях.

1. Идеально гладкая плоскость (рис. 1.6). В этом случае реакция R направлена *перпендикулярно опорной плоскости в сторону тела*, так как такая связь не дает телу перемещаться только в сторону опорной плоскости, т.е. перпендикулярно ей.

Если тело находится на наклонной плоскости, то, разложив силу тяжести G на две составляющие G_1 и G_2 , параллельную и перпендикулярную опорной плоскости, можно видеть, что составляющая G_1 будет перемещать тело вдоль плоскости, а составляющая G_2 будет прижимать тело к плоскости и уравниваться реакцией R .

2. Идеально гладкая поверхность (рис. 1.7). В этом случае реакция R направлена перпендикулярно касательной плоскости $t-t$, т.е. *по нормали к опорной поверхности в сторону тела*, так как нормаль есть единственное направление перемещения тела, которое не допускает данная связь.

3. Закрепленная точка или ребро угла (рис. 1.8, ребро B). В этом случае реакция R_B направлена *по нормали к поверхности идеально гладкого тела в сторону тела*, так как нормаль к поверхности тела есть единственное направление перемещения, которое не допускают эти связи.

4. Гибкая связь (см. рис. 1.8). Реакция R гибкой связи не дает телу лишь удаляться от точки подвеса и поэтому направлена *вдоль связи от тела к точке подвеса*. Из рис. 1.8 видно, что гибкая связь, перекинутая через блок, изменяет направление передаваемого усилия (натяжения нити).

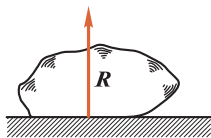


Рис. 1.6

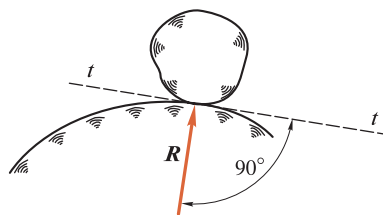
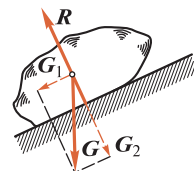


Рис. 1.7

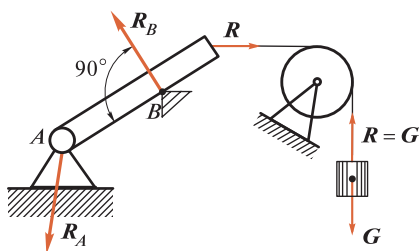


Рис. 1.8

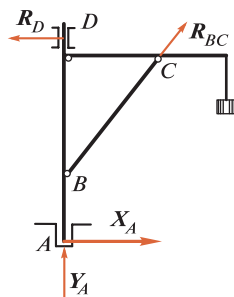


Рис. 1.9

В конструкциях широкое распространение имеют связи, которые называют шарнирами. *Шарнир* представляет собой подвижное соединение двух тел, допускающее только вращение вокруг общей оси (цилиндрический шарнир) или общей точки (шаровой шарнир).

5. Идеально гладкий цилиндрический шарнир (см. рис. 1.8, шарнир *A*; рис. 1.9, подшипник *D*). В этом случае заранее известно только, что реакция R_A *проходит через ось шарнира и перпендикулярна этой оси*, так как шарнирное соединение допускает вращение вокруг оси, но не допускает никаких перемещений тела, перпендикулярных этой оси.

6. Идеально гладкий шаровой шарнир. В этом случае заранее известно только, что *реакция проходит через центр шарнира*, так как тело, закрепленное в шаровом шарнире, может поворачиваться в любом направлении, но не может совершать никаких линейных перемещений в пространстве.

7. Идеально гладкий подпятник (рис. 1.9, подпятник *A*). Подпятник можно рассматривать как сочетание цилиндрического шарнира и опорной плоскости, поэтому будем считать реакцию подпятника состоящей из двух составляющих: X_A и Y_A . Полная реакция R_A подпятника равна векторной сумме этих составляющих:

$$R_A = X_A + Y_A.$$

8. Стержень, закрепленный двумя концами в идеально гладких шарнирах и нагруженный только по концам (рис. 1.9, стержень *BC*). В этом случае реакция стержня, согласно аксиоме III, может быть направлена только по линии *BC*, т.е. *по прямой, соединяющей оси шарниров*.

В дальнейшем мы нередко будем встречаться с элементами различных конструкций, называемыми брусками. *Брусом* принято считать твердое тело, у которого длина значительно больше поперечных размеров; множество (геометрическое место) центров тяжести всех

поперечных сечений называется *осью бруса*. Брус с прямолинейной осью, положенный на опоры и изгибаемый приложенными к нему нагрузками, называют *балкой*.

1.5. РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ НАГРУЗКИ

До сих пор мы имели дело с силами, которые условно считали приложенными в точке (в действительности они приложены к площадке, размерами которой пренебрегают); такие силы называют *сосредоточенными*. В практике часто встречаются силы, приложенные по объему или поверхности тела, например сила тяжести, давление ветра или воды и т. п. Такие силы называют *распределенными*.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее интенсивностью, обычно обозначаемой q . *Интенсивность* есть сила, приходящаяся на единицу длины нагруженного участка. Интенсивность в СИ выражается в ньютонах на метр (Н/м).

Распределенная нагрузка, имеющая постоянную интенсивность, называется *равномерно распределенной* (рис. 1.10).

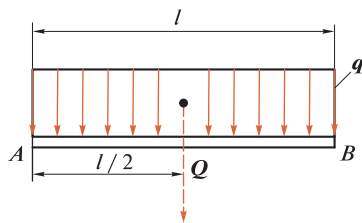


Рис. 1.10

При решении задач статики распределенную нагрузку заменяют ее равнодействующей. Модуль равнодействующей равномерно распределенной нагрузки равен

$$Q = ql.$$

Равнодействующая Q прикладывается в середине отрезка AB .

Распределенная нагрузка, имеющая переменную интенсивность, называется *неравномерно распределенной*. Примером такой нагрузки может служить меняющееся по высоте давление воды на плотину.

Нагрузки, распределенные по поверхности, характеризуются *давлением*, т.е. силой, приходящейся на единицу площади. В СИ давление выражается в паскалях (Па) или ньютонах на квадратный метр (Н/м²).

1.6. ПРИНЦИП ОТВЕРДЕВАНИЯ

Принцип отвердевания формулируется так: *механическое состояние нетвердого тела не нарушится, если оно станет абсолютно твердым.*

Приведем примеры, поясняющие данную аксиому. Если жидкость в сосуде находится в равновесии, то оно не нарушится от того, что жидкость замерзнет. Если гибкая нить находится в равновесии под действием двух растягивающих сил, то равновесие не нарушится, если нить станет абсолютно твердой.

Обратная формулировка принципа в общем случае несправедлива. Если твердое тело находится в равновесии, то, превратившись в нетвердое, оно может и не быть в равновесии. Это означает, что условия равновесия твердого тела являются необходимыми, но не достаточными для равновесия нетвердого тела и требуются дополнительные условия, учитывающие те или иные физические свойства тел. Так, например, при растяжении гибкой невесомой нити необходимо обеспечить условия равновесия двух сил, но нужно помнить, что нить может сопротивляться растяжению, но не может сопротивляться сжатию (дополнительное условие равновесия гибкой нити).

Во второй части учебника — «Сопротивление материалов» — мы будем рассматривать равновесие нетвердых, но уже деформированных тел. На основании принципа отвердевания будем принимать эти тела за абсолютно твердые и применять к ним любые законы статики твердого тела.

Глава 2

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

2.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости и все пересекаются в одной точке, называется *плоской системой сходящихся сил*.

Теорема. Плоская система сходящихся сил в общем случае эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих.

Пусть дана плоская система трех сил F_1 , F_2 и F_3 , линии действия которых сходятся в точке A . На основании следствия из аксиом III и IV перенесем эти силы вдоль линий их действия в точку A . Сложив первые две силы F_1 и F_2 по правилу параллелограмма, получим их равнодействующую R (рис. 2.1, а):

$$R = F_1 + F_2.$$

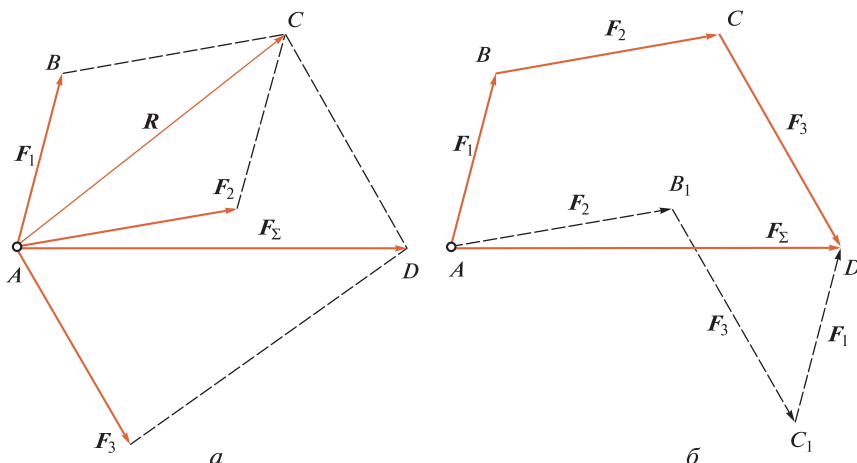


Рис. 2.1

Пользуясь той же аксиомой параллелограмма, сложим равнодействующую \mathbf{R} с силой \mathbf{F}_3 :

$$\mathbf{F}_\Sigma = \mathbf{R} + \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3,$$

где \mathbf{F}_Σ — равнодействующая данной системы трех сил.

Аналогичные действия можно провести для любого количества сходящихся сил, в результате чего получим

$$\mathbf{F}_\Sigma = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n.$$

Сокращенно это равенство запишем так:

$$\mathbf{F}_\Sigma = \sum \mathbf{F}_i,$$

где i — все целые числа от 1 до n .

Очевидно, что построение, выполненное на рис. 2.1, *а*, можно заменить более простым (рис. 2.1, *б*). Многоугольник $ABCD$ называется *силовым многоугольником*. Сторона AD , соединяющая начало первого с концом последнего вектора, называется *закрывающей стороной*.

Необходимо помнить, что стрелки векторов слагаемых сил образуют определенное направление обхода по контуру силового многоугольника, а замыкающая сторона, определяющая модуль и направление равнодействующей, имеет стрелку, направленную против обхода (см. рис. 2.1, *б*).

Если определить равнодействующую из силового многоугольника с помощью геометрии и тригонометрии, то такой способ будет называться *геометрическим*. Если сделать чертеж силового многоугольника в определенном масштабе, то равнодействующая определится простым измерением замыкающей стороны с последующим умножением на масштаб. Такой способ нахождения равнодействующей называется *графическим*.

Порядок сложения векторов при построении силового многоугольника на величину равнодействующей не влияет, так как векторная сумма от перемены мест слагаемых не меняется (см. рис. 2.1, *б*, многоугольник AB_1C_1D).

При построении силового многоугольника возможен случай, когда конец последнего вектора совпадает с началом первого. В этом случае замыкающей стороны не будет, и такой силовой многоугольник называется *замкнутым*.

Очевидно, что равнодействующая \mathbf{F}_Σ системы сходящихся сил, дающих замкнутый силовой многоугольник, равна нулю, и, следовательно, эта система эквивалентна нулю, т.е. *находится в равновесии*. Отсюда вытекает условие, при котором плоская система сходя-

дящихся сил будет находиться в равновесии. Это условие выражается равенством

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = \sum F_i = 0$$

и формулируется так: *для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник был замкнут.*

Условия равновесия, записанные в виде равенств, содержащих неизвестные величины, называются *уравнениями равновесия.*

Применяя геометрическое условие равновесия, удобно решать задачи, в которых на тело действуют три силы, так как в этом случае замкнутый силовой многоугольник представляет собой треугольник.

Решение большинства задач статики проводят в три этапа:

- 1) выбирают тело, равновесие которого будет рассматриваться;
- 2) отбрасывают связи, заменяя их реакциями, и устанавливают, какая система сил действует на тело;
- 3) пользуясь условиями равновесия, находят неизвестные величины.

При решении задач технической механики необходимо строго соблюдать правило: *размерности и единицы величин всех слагаемых и обеих частей равенства должны быть одинаковыми.*

В сомнительных случаях целесообразно использовать это правило для проверки правильности хода решения задач, для чего следует подставить в слагаемые проверяемого равенства единицы всех входящих в них величин и, произведя возможные сокращения, сравнить полученные единицы правой и левой частей.

Проверим таким способом приведенную в подразд. 1.5 формулу $Q = ql$:

$$[Q] = [q][l], \text{ Н} = (\text{Н/м}) \cdot \text{м} = \text{Н}.$$

Единицы правой и левой частей равенства одинаковы, следовательно, формула по размерности верна.

Следует заметить, что такая проверка ничего не говорит о правильности нередко входящих в формулы числовых коэффициентов.

Пример 2.1. К вертикальной гладкой стене на веревке, составляющей со стеной угол α , подвешен однородный шар (рис. 2.2). Определить натяжение веревки F и силу давления шара P на стену, если сила тяжести шара G .

Решение. Рассмотрим равновесие шара. Применив принцип освобождаемости, отбросим связи и заменим их реакциями. Реакция N гладкой стены перпендикулярна стене и проходит через центр шара. Так как шар

однородный, то сила тяжести G приложена в его геометрическом центре. Реакция R направлена вдоль веревки и согласно теореме о равновесии трех непараллельных сил ее линия действия также должна проходить через центр шара.

К системе трех сходящихся сил, приложенных к шару, применим геометрическое условие равновесия:

$$\sum F_i = 0; \quad G + N + R = 0.$$

Строим замкнутый силовой многоугольник, начиная с изображения в принятом масштабе вектора известной силы G .

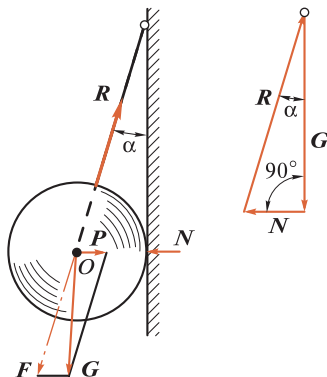


Рис. 2.2

Направление обхода треугольника (т.е. направление стрелок) определяется этой силой. Из треугольника получим соотношения:

$$N = G \operatorname{tg} \alpha; \quad R = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Искомая сила давления P шара на стену, согласно аксиоме взаимодействия, по модулю равна реакции N стены, но направлена в противоположную сторону:

$$P = N = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Натяжение F веревки по модулю равно ее реакции R :

$$F = R = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Эту же задачу можно решить, разложив силу тяжести G по реальным направлениям (направлениям реакций) на составляющие P (сила давления шара на стену) и F (натяжение веревки), причем согласно аксиоме взаимодействия $F = R$, $P = N$.

Из построенного параллелограмма (см. рис. 2.2) легко определяем искомые величины. Такой метод решения задачи называют *методом разложения*.

2.2. ПРОЕКЦИИ СИЛЫ НА ОСИ КООРДИНАТ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

В тех случаях, когда на тело действует более трех сил, а также когда неизвестны направления некоторых сил, удобнее при решении задач пользоваться не геометрическим, а *аналитическим* условием равновесия, которое основано на *методе проекций*.

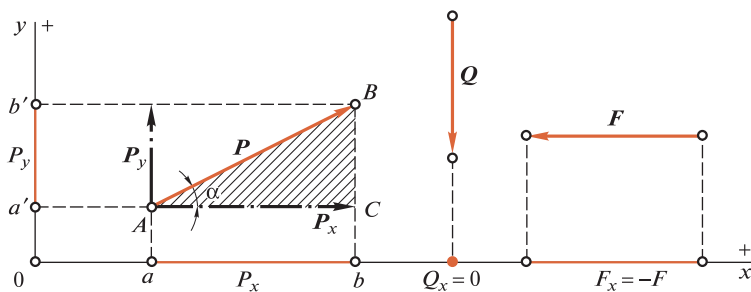


Рис. 2.3

Проекцией силы на ось называется отрезок оси, заключенный между двумя перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора силы.

Пусть даны координатные оси x , y , сила \mathbf{P} , приложенная в точке A и расположенная в плоскости координатных осей (рис. 2.3).

Проекциями силы \mathbf{P} на оси будут отрезки ab и $a'b'$. Обозначим эти проекции соответственно P_x и P_y . Тогда

$$P_x = P \cos \alpha; \quad P_y = P \sin \alpha.$$

Проекция силы на ось есть величина алгебраическая, которая может быть положительной или отрицательной, что устанавливается по направлению проекции. За *направление проекции* примем направление от проекции начала к проекции конца вектора силы.

Установим следующее правило знаков:

если направление проекции силы на ось совпадает с положительным направлением оси, то эта проекция считается положительной, и наоборот.

Если вектор силы параллелен оси, то он проецируется на эту ось в натуральную величину (см. рис. 2.3, сила \mathbf{F}).

Если вектор силы перпендикулярен оси, то его проекция на эту ось равна нулю (см. рис. 2.3, сила \mathbf{Q}).

Зная две проекции P_x и P_y , из треугольника ABC определяем модуль и направление вектора силы \mathbf{P} по следующим формулам:
модуль силы

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2};$$

направляющий тангенс угла между вектором силы \mathbf{P} и осью x

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_y}{P_x}.$$

Силу P можно представить как равнодействующую двух составляющих сил P_x и P_y , параллельных осям координат (см. рис. 2.3). Составляющие P_x и P_y и проекции P_x и P_y принципиально отличны друг от друга, так как составляющая есть величина векторная, а проекция — величина алгебраическая; но проекции силы на две взаимно-перпендикулярные оси x и y и модули составляющих той же силы соответственно численно равны, когда сила раскладывается по двум взаимно-перпендикулярным направлениям, параллельным осям x и y . Пусть дана плоская система n сходящихся сил

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n.$$

Равнодействующая этой системы

$$F_{\Sigma} = \sum F_i.$$

В плоскости действия данной системы выберем ось координат и спроецируем данные силы и их равнодействующую на эту ось.

Проекция равнодействующей на ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось, т. е.

$$F_{\Sigma x} = \sum F_{ix}.$$

Правую часть этого равенства записываем упрощенно:

$$F_{\Sigma x} = \sum X.$$

Для того чтобы определить равнодействующую любой плоской системы сходящихся сил, спроецируем их на оси координат x и y , алгебраически сложим проекции всех сил и найдем таким образом проекции равнодействующей:

$$F_{\Sigma x} = \sum X; \quad F_{\Sigma y} = \sum Y.$$

Зная проекции, определим модуль и направление равнодействующей:

модуль равнодействующей

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2};$$

направляющий тангенс угла между вектором F_{Σ} и осью x

$$\operatorname{tg}(F_{\Sigma}, x) = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma x}}.$$

Линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.

Если данная плоская система сходящихся сил находится в равновесии, то равнодействующая такой системы, а значит, и проекции равнодействующей на оси координат равны нулю:

$$F_{\Sigma} = 0; \quad F_{\Sigma x} = 0; \quad F_{\Sigma y} = 0.$$

Учитывая, что

$$F_{\Sigma x} = \sum X; \quad F_{\Sigma y} = \sum Y,$$

получаем равенства, выражающие аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Формулируются эти условия следующим образом: для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций этих сил на каждую из двух координатных осей равнялась нулю.

С помощью уравнений равновесия можно определить *два неизвестных* элемента данной системы сил, например модуль и направление одной силы или модули двух сил, направления которых известны, и т. п.

Выведенные условия равновесия справедливы *для любых осей координат*, но для упрощения решения задач рекомендуется оси координат по возможности выбирать *перпендикулярными неизвестным силам*, чтобы каждое уравнение равновесия содержало одно неизвестное.

Когда направление искомой силы неизвестно, ее можно разложить на две составляющие по заданным направлениям, обычно по направлениям координатных осей; по найденным двум взаимно-перпендикулярным составляющим легко определяется неизвестная сила.

Если при решении задач аналитическим способом искомая реакция получится отрицательной, то это значит, что действительное ее направление противоположно направлению, принятому на рисунке.

Пример 2.2. Однородная прямоугольная пластинка силой тяжести $G = 5$ Н подвешена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей вдоль одной из ее сторон. Равномерно дующий ветер удерживает ее в наклонном положении под углом $\alpha = 18^\circ$ к вертикальной плоскости. Определить равнодействующую P давлений, производимых ветром на пластинку перпендикулярно ее плоскости (рис. 2.4, а).

Решение. Рассмотрим равновесие пластинки. Отбросим шарнир O . Так как пластинка однородная и прямоугольной формы, то равнодействующая P давлений ветра и сила тяжести G пересекаются в геометрическом центре C пластинки; линия действия реакции R_0 шарнира на основании теоремы о равновесии трех непараллельных сил также пройдет через точку C .

Для системы трех сходящихся сил, действующих на пластинку, применим аналитическое условие равновесия $\sum Y = 0$, направив ось y перпендикулярно пластинке (чтобы реакция R_0 , которую не требуется определять, не вошла в уравнение равновесия). Составим уравнение равновесия

$$\sum Y = 0; \quad P - G \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$P = G \sin \alpha = 5 \sin 18^\circ = 5 \cdot 0,309 \approx 1,55 \text{ Н.}$$

Проведем проверку решения задачи с помощью геометрического условия равновесия:

$$\sum \mathbf{F}_i = 0; \quad \mathbf{G} + \mathbf{P} + \mathbf{R} = 0.$$

Построим замкнутый силовой треугольник (рис. 2.4, б). Решая его, получаем

$$P = G \sin \alpha = 5 \sin 18^\circ \approx 1,55 \text{ Н.}$$

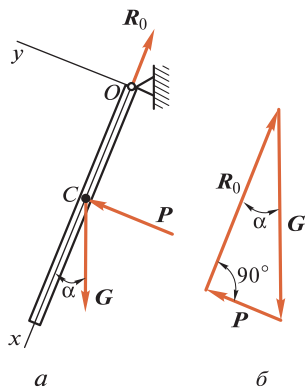


Рис. 2.4

Глава 3

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И МОМЕНТ СИЛЫ

3.1. СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ, НАПРАВЛЕННЫХ В ОДНУ СТОРОНУ

Система сил, линии действия которых параллельны и лежат в одной плоскости, называется *плоской системой параллельных сил*.

Из физики известно (рис. 3.1), что две параллельные силы, направленные в одну сторону, эквивалентны равнодействующей, которая равна сумме этих сил, параллельна им и направлена в ту же сторону; линия действия равнодействующей делит отрезок, соединяющий точки приложения данных сил, на части, обратно пропорциональные этим силам:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Применяя производную пропорцию, можно записать:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_1 + F_2}{BC + AC},$$

тогда

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_{\Sigma}}{AB}.$$

Разложение данной силы на две параллельные составляющие производится с помощью формул сложения двух параллельных сил.

Разложение силы на две параллельные составляющие есть задача неопределенная, имеющая бесчисленное множество решений. Для того чтобы задача имела определенное решение, необходимо иметь два дополнительных условия, например модуль одной составляющей и длину одного плеча, длины двух плеч и т. п.

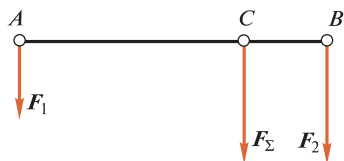


Рис. 3.1

3.2. СЛОЖЕНИЕ ДВУХ НЕРАВНЫХ АНТИПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Рассмотрим случай сложения двух не равных по модулю антипараллельных сил. Случай, когда такие силы равны по модулю, особый, он будет рассмотрен в гл. 4.

Теорема. Две неравные антипараллельные силы эквивалентны равнодействующей, которая равна разности данных сил, параллельна им и направлена в сторону большей силы; линия действия равнодействующей делит отрезок, соединяющий точки приложения данных сил, внешним образом на части, обратно пропорциональные этим силам.

Рассмотрим две параллельные силы F_1 и F_2 , причем $F_1 > F_2$ (рис. 3.2). Разложим силу F_1 на две параллельные составляющие F_Σ и F'_2 так, чтобы составляющая F'_2 была приложена в точке B и $F'_2 = F_2$. Тогда на основании теоремы о сложении двух параллельных сил, направленных в одну сторону, получим

$$F_1 = F_\Sigma + F'_2;$$

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F'_2}{AC} = \frac{F_\Sigma}{AB}.$$

Из этих равенств найдем модуль второй составляющей F_Σ и расстояние AC до точки ее приложения (известно, что $F'_2 = F_2$).

Данная система сил (F_1, F_2) заменена системой трех сил:

$$(F_1, F_2) \equiv (F_\Sigma, F'_2, F_2).$$

Отбросив на основании аксиомы IV две взаимно уравновешенные силы F_2 и F'_2 , получим, что данная система эквивалентна одной силе, т. е. равнодействующей F_Σ :

$$(F_1, F_2) \equiv F_\Sigma.$$

Модуль и точка приложения равнодействующей определяются по формулам

$$F_\Sigma = F_1 - F_2; \quad AC = \frac{F_2}{F_\Sigma} AB.$$

Отметим, что равнодействующая двух параллельных сил равна их алгебраической сумме.

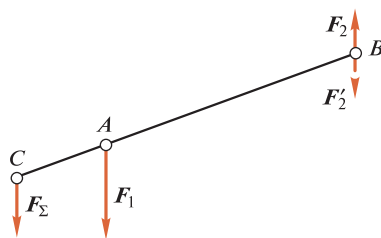


Рис. 3.2

Если на тело действует система n параллельных сил, то, производя последовательное сложение сначала двух сил, их равнодействующей с третьей силой, новой равнодействующей с четвертой силой и т.д., найдем модуль и линию действия равнодействующей всей системы параллельных сил.

Очевидно, что равнодействующая системы параллельных сил определится в результате алгебраического сложения сил данной системы:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

Таким образом, *равнодействующая системы параллельных сил равна их алгебраической сумме*:

$$F_{\Sigma} = \sum F_i.$$

3.3. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Рассмотрим гайку, которую затягивают гаечным ключом определенной длины, прикладывая к концу ключа мускульное усилие.

Если взять гаечный ключ в несколько раз длиннее, то прилагая то же усилие, гайку можно затянуть значительно сильнее. Из этого следует, что одна и та же сила может оказывать различное вращательное действие. Вращательное действие силы характеризуется *моментом силы*.

Понятие момента силы относительно точки ввел итальянский ученый и художник эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452 — 1519).

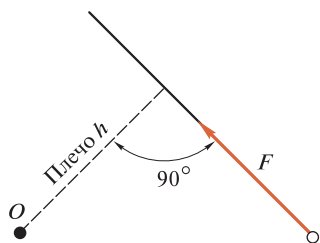


Рис. 3.3

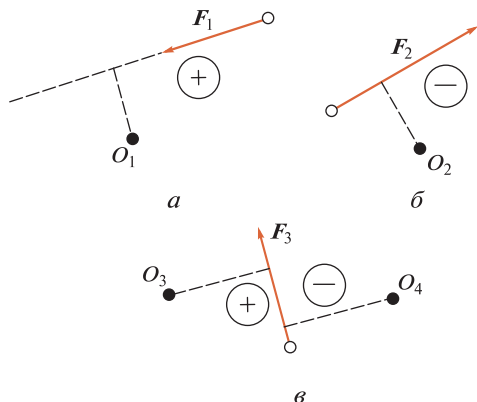


Рис. 3.4

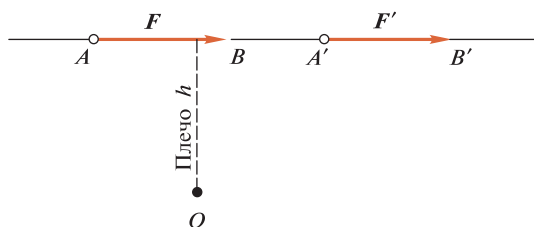


Рис. 3.5

Моментом силы относительно точки называется произведение модуля силы на ее плечо (рис. 3.3):

$$M_0(\mathbf{F}) = Fh.$$

Точка, относительно которой берется момент, называется *центром момента*. Кратчайшее расстояние от центра момента до линии действия силы называется *плечом силы* относительно точки.

Размерность момента силы

$$[M] = [F][h] = \text{сила} \times \text{длина} = \text{ньютон} \times \text{метр} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Условимся считать момент силы *положительным*, если сила *стремится вращать свое плечо вокруг центра момента против часовой стрелки*, и *наоборот* (рис. 3.4, а, б).

Одна и та же сила относительно разных точек может давать и положительный, и отрицательный момент (рис. 3.4, в).

Момент силы относительно точки, лежащей на линии действия этой силы, *равен нулю*, так как в этом случае плечо равно нулю.

Из рис. 3.5 видно, что момент силы относительно точки не меняется при переносе силы вдоль линии ее действия, так как модуль силы и плечо остаются неизменными.

Глава 4

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПАР СИЛ

4.1. ПАРА СИЛ И МОМЕНТ ПАРЫ

В подразд. 3.2 был исключен из рассмотрения случай сложения двух антипараллельных сил, равных по модулю. Такая система сил называется *парой сил*, или просто парой (рис. 4.1).

Понятие пары сил введено в механику в начале XIX в. французским ученым Л. Пуансо (1777 — 1859), который разработал теорию пар.

Плоскость, в которой расположена пара, называется *плоскостью действия пары*. Расстояние между линиями действия сил есть *плечо пары*. Эффект действия пары состоит в том, что она стремится вращать тело, к которому приложена. Ее вращательное действие определяется *моментом пары*.

Моментом пары называется произведение модуля одной из сил, составляющих пару, на плечо:

$$M(F_1, F_2) = F_1 h = F_2 h = m.$$

Момент пары и момент силы имеют одинаковую размерность. Условимся считать *момент пары положительным, если она стремится вращать свое плечо против часовой стрелки, и наоборот*.

Момент пары *численно* равен удвоенной площади треугольника, у которого основанием является вектор одной из сил пары, а высотой — плечо.

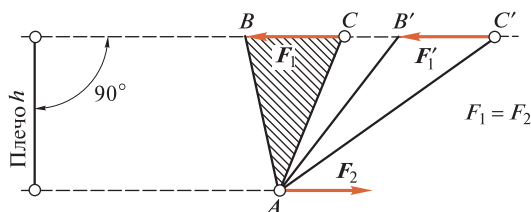


Рис. 4.1

Из рис. 4.1 видно, что момент пары не меняется при переносе сил вдоль линий их действия, так как треугольники ABC и $AB'C'$ — равновеликие.

4.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПАРЫ СИЛ

Основные свойства пары сил характеризуются следующими тремя теоремами.

Теорема I. Пара сил не имеет равнодействующей.

Дана система антипараллельных сил (F_1, F_2) с плечом h (рис. 4.2).

Предположим, что $F_2 > F_1$. Тогда равнодействующая этих сил $F_\Sigma = F_2 - F_1$, а точка ее приложения определяется из пропорции

$$\frac{F_\Sigma}{F_1} = \frac{h}{x}, \text{ откуда } x = \frac{F_1 h}{F_\Sigma}.$$

Пусть теперь сила F_2 уменьшается и приближается по модулю к силе F_1 , тогда в пределе при $F_1 = F_2$

$$F_\Sigma = F_2 - F_1 = 0.$$

Это значит, что при $F_1 = F_2$ *равнодействующая не существует.*

Теорема доказана. Из этой теоремы следует, что *пара сил не может быть уравновешена одной силой, пара сил может быть уравновешена только парой.*

Теорема II. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару, относительно любой точки плоскости действия пары есть величина постоянная, равная моменту пары.

Дана пара (F_1, F_2) с плечом h (рис. 4.3) и моментом $m = F_1 h = F_2 h$.

Выберем в плоскости действия пары произвольную точку A и примем ее за центр моментов:

$$M_A(F_1) = -F_1 a;$$

$$M_A(F_2) = F_2(a + h).$$

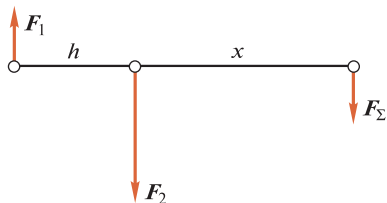


Рис. 4.2

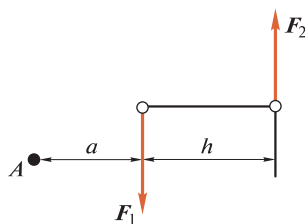


Рис. 4.3

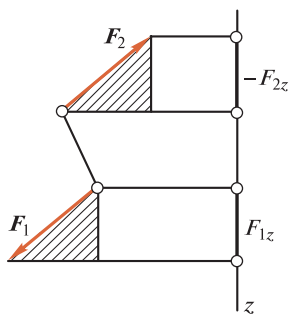


Рис. 4.4

Сложим правые и левые части этих равенств: $M_A(F_1) + M_A(F_2) = -F_1a + F_2 \times (a + h) = F_2h$, или $M_A(F_1) + M_A(F_2) = m$; теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что *при любом центре моментов пара сил войдет в уравнение моментов с одним и тем же знаком и одной и той же величиной.*

Теорема III. Алгебраическая сумма проекций сил пары на ось всегда равна нулю.

Дана пара сил (F_1, F_2) и ось z , лежащая в плоскости действия пары (рис. 4.4). Из равенства заштрихованных треугольников видно, что $F_{1z} = F_{2z}$. Проекция F_{1z} — положительная, проекция F_{2z} — отрицательная, следовательно, их алгебраическая сумма всегда равна нулю.

Из этой теоремы следует, что *пара сил не входит ни в уравнение сил, ни в уравнение проекций сил.*

4.3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПАРЫ

Две пары называются *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела.

Теорема об эквивалентных парах: если моменты двух пар алгебраически равны, то эти пары эквивалентны.

Даны две пары (F, F_1) и (Q, Q_1) , моменты которых алгебраически равны (рис. 4.5), т.е.

$$M(F, F_1) = M(Q, Q_1), \text{ или } Fa = Qb.$$

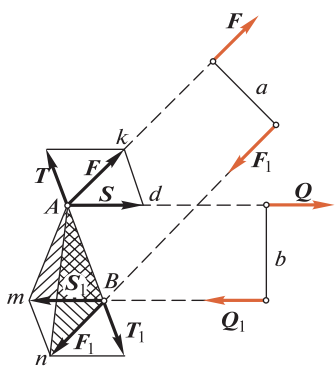


Рис. 4.5

Продолжим линии действия сил пары до их взаимного пересечения в точках A и B . На основании следствия из аксиом III и IV перенесем силы F и F_1 вдоль линий их действия в точки A и B . Соединим эти точки прямой линией и разложим силы F и F_1 по направлению AB и вдоль линий действия сил Q и Q_1 . Из равенства треугольников Akd и Bmn вытекает, что $T = T_1$ и $S = S_1$.

Силы T и T_1 представляют собой уравновешенную систему, так как они равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны. На основании аксиомы IV такую систему можно отбросить.

Силы S и S_1 представляют собой пару сил с плечом b . Таким образом, пара $(F, F_1) \equiv$ паре (S, S_1) .

Рассмотрим треугольники AmB и AnB . Они имеют общее основание AB , а высоты их равны, следовательно, площадь ΔAmB равна площади ΔAnB .

Но удвоенная площадь ΔAnB численно равна моменту пары (F, F_1) , а удвоенная площадь ΔAmB численно равна моменту пары (S, S_1) , следовательно, $M(F, F_1) = M(S, S_1)$ или $Fa = Sb$.

По условиям теоремы $Fa = Qb$, следовательно, $Sb = Qb$, отсюда $S = Q, S_1 = Q_1$.

Силы S и Q равны по модулю, действуют по одной прямой в одну сторону, следовательно, они эквивалентны друг другу; на этом же основании эквивалентны друг другу силы S_1 и Q_1 . Следовательно, пара $(Q, Q_1) \equiv$ паре (S, S_1) .

Но выше доказано, что пара $(F, F_1) \equiv$ паре (S, S_1) .

Так как две пары порознь эквивалентны одной и той же третьей паре, то эти пары эквивалентны между собой, т.е.

$$\text{пара } (F, F_1) \equiv \text{ паре } (Q, Q_1),$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы об эквивалентных парах вытекает четыре следствия:

1) не изменяя механического состояния тела, пару можно перемещать как угодно в плоскости ее действия;

2) не изменяя механического состояния тела, можно менять силы и плечо пары, но так, чтобы ее момент оставался неизменным;

3) чтобы задать пару, достаточно задать ее момент, поэтому иногда слово «пара» заменяют словом «момент» и условно изображают его так, как показано на рис. 4.6;

4) условия равновесия плоской системы параллельных сил будут справедливы, если вместе с такой системой действуют и пары сил, так как их можно повернуть в плоскости действия и поставить силы пары параллельно другим силам системы.

Нередко момент силы и пары представляются в виде вектора, перпендикулярного плоскости действия момента. Глядя со стороны конца этого вектора, действие момента должно быть направлено против часовой стрелки.



Рис. 4.6

4.4. ОПОРЫ И ОПОРНЫЕ РЕАКЦИИ БАЛОК

Опоры балок по их устройству могут быть разделены на три основных типа (рис. 4.7): шарнирно-подвижная (опора A); шарнирно-неподвижная (опора B); жесткая заделка (опора C). На рис. 4.7 показаны два способа условного изображения шарнирно-подвижной опоры (опора A).

Применим правило для определения направления реакций связью (см. подразд. 1.4).

Шарнирно-подвижная опора допускает поворот вокруг оси шарнира и линейное перемещение параллельно опорной плоскости. Если пренебречь трением на опоре и в шарнире, то реакция такой связи будет направлена перпендикулярно опорной плоскости и неизвестна только по модулю (одно неизвестное).

Шарнирно-неподвижная опора допускает только поворот вокруг оси шарнира и не допускает никаких линейных перемещений. Реакция такой опоры будет направлена перпендикулярно оси шарнира; модуль и направление ее заранее не известны (два неизвестных). Обычно при решении задач такую реакцию раскладывают на две взаимно-перпендикулярные составляющие, не известные по модулю, но известные по направлению.

Жесткая заделка (зашемление) не допускает ни линейных перемещений, ни поворотов зашечленного конца балки. Жесткую заделку заменяют реактивной силой, не известной по модулю и направлению, и реактивным моментом (три неизвестных). Реактивную силу, не известную по направлению, раскладывают на две взаимно-перпендикулярные составляющие.

Если при решении задачи реактивная сила или реактивный момент получатся отрицательными, то их действительное направление будет противоположно принятому.

Кроме перечисленных ранее трех основных типов опор балок в конструкциях нередко балка *свободно опирается* на плоскость (поверхность) или ребро призмы. В этих случаях направление реакций определяют по правилам, изложенным в подразд. 1.4.

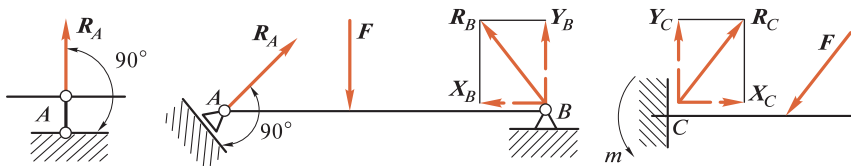


Рис. 4.7

Пример 4.1. Горизонтальная балка длиной $l = 4$ м закреплена на опорах (рис. 4.8) и нагружена парой сил с моментом $m = 420$ Н·м. Не учитывая силу тяжести балки, определить реакции опор A и B .

Решение. Отбросим опоры, заменив их реакциями, и рассмотрим равновесие балки. Так как пару сил можно уравновесить только парой, то реакции R опор A и B должны образовывать пару сил, причем реакция шарнирно-подвижной опоры B перпендикулярна опорной плоскости.

Применим условие равновесия плоской системы пар и составим уравнение равновесия:

$$\sum m_i = 0; \quad -m + Rh = 0,$$

где $h = l \cos 30^\circ$.

Отсюда

$$R = \frac{m}{h} = \frac{m}{l \cos 30^\circ} = \frac{420}{4 \cdot 0,866} \approx 120 \text{ Н.}$$

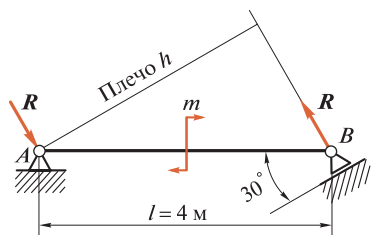
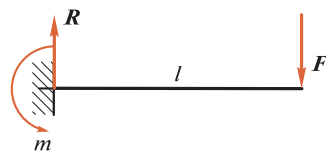


Рис. 4.8

Пример 4.2. Консольная балка (рис. 4.9) длиной $l = 2$ м нагружена на конце силой $F = 3000$ Н. Не учитывая силу тяжести балки, определить реакции заделки.

Решение. Отбросим заделку, заменив ее реакциями, и рассмотрим равновесие балки. Реакции заделки представляют собой реактивную силу R и реактивный момент m .

Так как реактивный момент m может быть уравновешен только парой сил, то нагрузка F и реакция R должны образовывать пару, следовательно,



$$R = F = 3000 \text{ Н.}$$

Рис. 4.9

Далее применим условие равновесия плоской системы пар и составим уравнение равновесия:

$$\sum m_i = 0; \quad m - Fl = 0,$$

откуда

$$m = Fl = 3000 \cdot 2 = 6000 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Глава 5

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

5.1. ЛЕММА О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ СИЛЫ

Лемма. Механическое состояние твердого тела не нарушится, если данную силу перенести параллельно первоначальному положению в произвольную точку тела, добавив при этом пару, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

Возьмем тело, находящееся под действием некоторой системы сил, в числе которых есть сила F , приложенная в точке A (рис. 5.1). Выберем произвольную точку O , которую назовем *центром приведения*, и на основании аксиомы IV приложим в этой точке две равные силы F' и F'' , параллельные данной силе F , причем

$$F' = F'' = F.$$

Систему сил (F, F', F'') , эквивалентную силе F , представим как силу F' , перенесенную параллельно первоначальному положению в произвольно выбранный центр приведения O , и пару (F, F'') , момент которой равен моменту данной силы относительно центра приведения O , являющегося новой точкой приложения силы:

$$M(F, F'') = Fa = M_O(F).$$

Лемма доказана.

Описанный ранее перенос силы можно показать на примере.

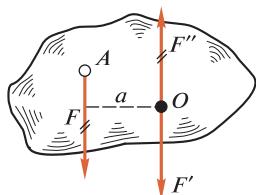


Рис. 5.1

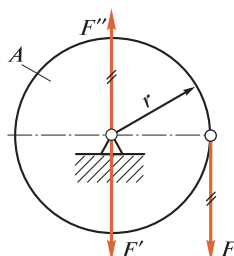


Рис. 5.2

Рассмотрим колесо A радиусом r , вращающееся на оси в подшипниках (рис. 5.2). Пусть к ободу колеса по касательной приложена сила F (такую силу называют окружной).

Для определения действия силы F на колесо и подшипники применим доказанную лемму и перенесем эту силу параллельно на ось колеса. В результате получим силу $F' = F$, оказывающую давление на подшипники, и пару сил (F, F') с моментом, равным Fr , которая будет вращать колесо.

5.2. ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ

Приведением системы сил называется замена ее другой системой, эквивалентной первой, но более простой.

Теорема. Плоская система произвольно расположенных сил в общем случае эквивалентна одной силе, приложенной в центре приведения, и одной паре.

Пусть дана плоская система n произвольно расположенных сил $(F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1}, F_n)$. Перенесем параллельно все силы в произвольно выбранный в плоскости действия сил центр приведения O , добавив при этом n пар (рис. 5.3). Моменты этих пар $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ равны моментам данных сил относительно центра приведения O .

Вместо заданной системы n произвольно расположенных сил мы получили систему n сил, приложенных в центре приведения, равных данным силам по модулю и одинаковых с ними по направлению, и систему n присоединенных пар:

$$F'_1 = F_1, F'_2 = F_2, F'_3 = F_3, \dots, F'_n = F_n;$$

$$m_1 = M_O(F_1), m_2 = M_O(F_2),$$

$$m_3 = M_O(F_3), \dots, m_n = M_O(F_n).$$

Эта новая система эквивалентна данной.

Плоская система сил, приложенных в одной точке, эквивалентна одной силе, которая равна векторной сумме этих сил и приложена в той же точке, следовательно,

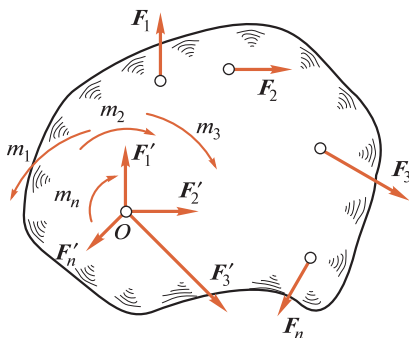


Рис. 5.3

$$\mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 + \mathbf{F}'_3 + \dots + \mathbf{F}'_n = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{\text{гл}},$$

или

$$\mathbf{F}_{\text{гл}} = \sum \mathbf{F}_i.$$

Эту силу назовем *главным вектором* данной системы. Главный вектор плоской системы произвольно расположенных сил равен векторной сумме всех сил системы и приложен в центре приведения.

Графически главный вектор выражается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на данных силах. Аналитически модуль главного вектора можно вычислить по формуле

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2},$$

а направляющий косинус — по формуле

$$\cos(\mathbf{F}_{\text{гл}}, x) = \frac{F_{\text{гл}x}}{F_{\text{гл}}}.$$

Плоская система пар эквивалентна одной паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов данных пар, следовательно,

$$M_{\text{гл}} = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = M_O(\mathbf{F}_1) + M_O(\mathbf{F}_2) + M_O(\mathbf{F}_3) + \dots + M_O(\mathbf{F}_n),$$

или

$$M_{\text{гл}} = \sum M_O(\mathbf{F}_i).$$

Эту пару с моментом $M_{\text{гл}}$ назовем *главным моментом* заданной системы сил.

Главный момент плоской системы произвольно расположенных сил равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения.

Таким образом, всякая плоская система сил в общем случае эквивалентна системе, состоящей из силы и пары сил, следовательно, теорема доказана.

Не следует считать, что главный вектор и главный момент имеют чисто формальное значение, введенное для удобства доказательства, и что их можно найти только с помощью вычислений. Нередко отдельно действующие на тело силы определить трудно или невозможно, а главный вектор или главный момент этих сил найти сравнительно легко. Так, например, число точек контакта и модули сил трения между вращающимся валом и подшипником скольжения, как правило, неизвестны, но главный момент этих сил можно определить простым измерением; еще один пример: в характеристику электродвигателя входит не сила, с которой статор действует на ротор, а вращающий момент.

5.3. СВОЙСТВА ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И ГЛАВНОГО МОМЕНТА

Свойства главного вектора и главного момента заключаются в следующем:

1) *модуль и направление главного вектора данной системы не зависят от выбора центра приведения*, так как при любом центре приведения силовой многоугольник, построенный на данных силах, будет один и тот же;

2) *величина и знак главного момента в общем случае зависят от выбора центра приведения* (кроме одного случая, о котором будет сказано в подразд. 5.4), так как при перемене центра приведения меняются плечи сил, а модули их остаются неизменными;

3) *главный вектор и равнодействующая системы сил векторно равны, но в общем случае не эквивалентны*. Пусть известны главный вектор $F_{\text{гл}}$ и главный момент $M_{\text{гл}}$ какой-то плоской системы сил (рис. 5.4, а). Определим равнодействующую этой системы.

Пользуясь известным свойством пары сил, преобразуем главный момент $M_{\text{гл}}$ так, чтобы силы пары F и F_{Σ} (рис. 5.4, б) были параллельны и по модулю равны главному вектору $F_{\text{гл}}$:

$$F_{\Sigma} = F = F_{\text{гл}}; \quad M_{\text{гл}} = M(F_{\Sigma}, F),$$

причем сила F приложена к точке O противоположно $F_{\text{гл}}$.

Далее систему $(F_{\text{гл}}, F)$, как взаимно уравновешенную, отбросим:

$$(F_{\text{гл}}, M_{\text{гл}}) = (F_{\text{гл}}, F, F_{\Sigma}) \equiv F_{\Sigma}.$$

В результате получим одну силу F_{Σ} , эквивалентную главному вектору и главному моменту, т. е. равнодействующую системы, причем

$$F_{\Sigma} = F_{\text{гл}}.$$

Модуль равнодействующей

$$F_{\Sigma} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} = F_{\text{гл}},$$

а положение линии действия равнодействующей определяется плечом d по формуле

$$d = \frac{M_{\text{гл}}}{F_{\text{гл}}}.$$

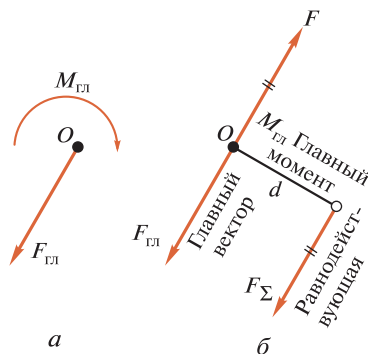


Рис. 5.4

В результате можно считать установленным, что главный вектор и равнодействующая векторно равны, но не эквивалентны;

4) *главный вектор и равнодействующая эквивалентны лишь в частном случае, когда главный момент системы равен нулю*; это возможно в случае, когда центр приведения находится на линии действия равнодействующей.

Из рис 5.4 видно, что момент равнодействующей F_{Σ} относительно центра приведения O равен моменту $M_{\text{пл}}$ пары (F_{Σ}, F) , т. е. главному моменту данной системы:

$$M_O(F_{\Sigma}) = M(F_{\Sigma}, F) = M_{\text{пл}}.$$

Так как $M_{\text{пл}} = \sum M_O(F_i)$, а за центр приведения можно взять любую точку плоскости действия сил данной системы, то всегда имеем

$$M(F_{\Sigma}) = \sum M(F_i).$$

Полученная формула является математическим выражением теоремы о моменте равнодействующей.

Теорема. Момент равнодействующей силы относительно какой-либо точки, расположенной в плоскости действия сил, равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

Теорему о моменте равнодействующей впервые доказал французский ученый П. Вариньон (1654—1722), поэтому ее называют теоремой Вариньона.

Применим доказанную теорему для определения положения линии действия равнодействующей F_{Σ} плоской системы n параллельных сил:

$$(F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n) \equiv F_{\Sigma}.$$

Выберем какую-либо точку O плоскости действия сил за центр моментов и согласно теореме Вариньона запишем

$$\sum M_O(F_i) = M_O(F_{\Sigma}) = F_{\Sigma}d,$$

где d — плечо равнодействующей F_{Σ} относительно точки O .

Из последнего равенства определяем плечо d :

$$d = \frac{\sum M_O(F_i)}{F_{\Sigma}} = \frac{\sum M_O(F_i)}{\sum F_i},$$

так как $F_{\Sigma} = \sum F_i$.

Чтобы установить, в какую сторону от точки O следует на перпендикуляре к линиям действия сил отложить плечо d , следует учесть направление вектора F_{Σ} и знак $\sum M_O(F_i)$.

5.4. РАЗЛИЧНЫЕ СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

Изучив свойства главного вектора и главного момента, укажем четыре возможных случая приведения плоской системы произвольно расположенных сил.

1. $F_{\text{гл}} \neq 0$, $M_{\text{гл}} \neq 0$. В этом случае система сил эквивалентна равнодействующей, которая равна по модулю главному вектору, параллельна ему, направлена в ту же сторону, но по другой линии действия.

2. $F_{\text{гл}} \neq 0$, $M_{\text{гл}} = 0$. В этом случае система сил эквивалентна равнодействующей, линия действия которой проходит через центр приведения и совпадает с главным вектором.

3. $F_{\text{гл}} = 0$, $M_{\text{гл}} \neq 0$. В этом случае система эквивалентна паре сил.

Так как модуль и направление главного вектора во всех случаях не зависят от выбора центра приведения, то в рассматриваемом случае величина и знак главного момента тоже не зависят от центра приведения, ибо одна и та же система сил не может быть эквивалентна различным парам.

4. $F_{\text{гл}} = 0$, $M_{\text{гл}} = 0$. В этом случае система сил эквивалентна нулю, т. е. находится в равновесии.

5.5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

Как известно, плоская система произвольно расположенных сил находится в равновесии, когда и главный вектор, и главный момент равны нулю:

$$F_{\text{гл}} = 0; \quad M_{\text{гл}} = 0.$$

Но $F_{\text{гл}} = \sum F_i$ и равенство $F_{\text{гл}} = 0$ означает, что силовой многоугольник, построенный на силах данной системы, должен быть зам-

кнут, следовательно, алгебраическая сумма проекций сил на каждую из двух осей координат x и y должна равняться нулю, т. е.

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Главный момент $M_{\text{гл}} = \sum M_O(F_i)$ и равенство $M_{\text{гл}} = 0$ означают, что алгебраическая сумма моментов сил данной системы относительно любого центра приведения равняется нулю, следовательно,

$$\sum M(F_i) = 0.$$

Итак, для равновесия плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат x и y равнялись нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки плоскости также равнялась нулю.

Условия равновесия упрощенно запишем в виде равенств:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M = 0.$$

Отметим, что выведенные ранее условия равновесия системы сходящихся сил, системы параллельных сил и системы пар являются частными случаями условий равновесия, полученных в этом подразделе.

При решении некоторых задач бывает целесообразно вместо одного или двух уравнений проекций составлять уравнения моментов.

Если заменить одно уравнение проекций, то условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил будут выглядеть так:

$$\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0.$$

Однако следует помнить, что эти условия становятся *недостаточными* для равновесия, когда центры моментов A и B лежат на одном перпендикуляре к оси x : в этом случае даже при выполнении указанных условий система сил может иметь равнодействующую, проходящую через эти точки, и, следовательно, не быть в равновесии.

Если заменить два уравнения проекций, то условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил будут выглядеть так:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C = 0.$$

Эти условия становятся *недостаточными* для равновесия, когда центры моментов A , B и C лежат на одной прямой; в этом случае

даже при выполнении указанных условий система сил может иметь равнодействующую, проходящую через эти точки, и, следовательно, не быть в равновесии.

Условия равновесия плоской системы параллельных сил являются частным случаем условий равновесия, полученных в этом подразделе. Если ось y расположить параллельно линиям действия системы параллельных сил, то уравнение равновесия $\sum X = 0$ обратится в тождество, а $\sum Y = \sum F_i$, т. е. алгебраическая сумма проекций сил системы на ось y будет равна алгебраической сумме этих сил. Тогда условия равновесия плоской системы параллельных сил запишутся следующим образом:

$$\sum F_i = 0; \quad \sum M = 0$$

и сформулируются так: для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма всех сил равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки плоскости также равнялась нулю.

Так как все виды аналитических условий равновесия действительны для любых прямоугольных осей координат, то в процессе решения одной задачи или при проверке решения оси координат можно изменить, т. е. одни уравнения проекций сил составить для одной системы координат, а другие — для новой системы координат. Этот прием в некоторых случаях упрощает решение или проверку решения задач. При этом следует помнить, что число уравнений равновесия, составляемых для решения (но не для проверки решения), не должно быть больше числа условий равновесия, соответствующих системе сил, рассматриваемых в задаче.

При решении задач статики аналитическим способом целесообразно составлять уравнения равновесия так, чтобы в каждом из них была только одна неизвестная величина. Во многих случаях этого можно достигнуть, если рационально выбрать оси координат и центры моментов.

Пример 5.1. Горизонтальная балка, поддерживающая балкон, подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q = 2$ кН/м (рис. 5.5). На балку у свободного конца C передается нагрузка от колонны $P = 2$ кН. Расстояние от оси колонны до стены $l = 1,5$ м. Определить реакции заделки A .

Решение. Отбросим заделку, заменим ее реакциями и рассмотрим равновесие балки. Реакции стены представляют собой реактивную силу R и реактивный момент m . Реактивная сила вертикальна, так как активные силы, действующие на балку, горизонтальных составляющих не имеют.

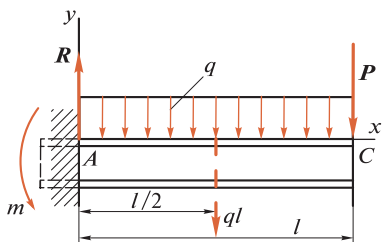


Рис. 5.5

Распределенную нагрузку заменим ее равнодействующей ql .

Применим условия равновесия плоской системы параллельных сил и составим два уравнения равновесия:

$$\sum Y = \sum F_i = 0; \quad R - ql - P = 0,$$

откуда

$$R = ql + P = 2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$\sum M_A = 0; \quad +m - ql^2/2 - Pl = 0,$$

откуда

$$m = Pl + ql^2/2 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 10^3 \cdot 2,25/2 = 5,25 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Проверим решение, составив контрольное уравнение моментов относительно точки C:

$$\sum M_C = 0; \quad m - Rl + ql^2/2 = 0.$$

Подставив значения, получим

$$5,25 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 10^3 \cdot 2,25/2 = 0.$$

Полученное тождество $0 = 0$ свидетельствует, что решение верное.

Глава 6

ТРЕНИЕ

6.1. ПОНЯТИЕ О ТРЕНИИ

Абсолютно гладких и абсолютно твердых тел в природе не существует, и поэтому при перемещении одного тела по поверхности другого возникает сопротивление, которое называется трением.

Трение — явление сопротивления относительно перемещению, возникающее между двумя телами в зонах соприкосновения поверхностей по касательной к ним.

Трение — явление, чрезвычайно распространенное в природе и имеющее большое значение. На трении основана работа ременных и фрикционных передач, тормозных устройств, прокатных станов, наклонных транспортеров, фрикционных муфт и т. п. Трение обеспечивает сцепление с землей и, следовательно, работу автомобилей, тракторов и других транспортных машин. При отсутствии трения человек не мог бы ходить. Наряду с этим трение во многих случаях является вредным сопротивлением, на преодоление которого нередко затрачивается весьма большое количество энергии. Эти затраты энергии бесполезны и их стремятся уменьшить.

На рис. 6.1 приведена схема классификации трения по наличию и характеру движения.

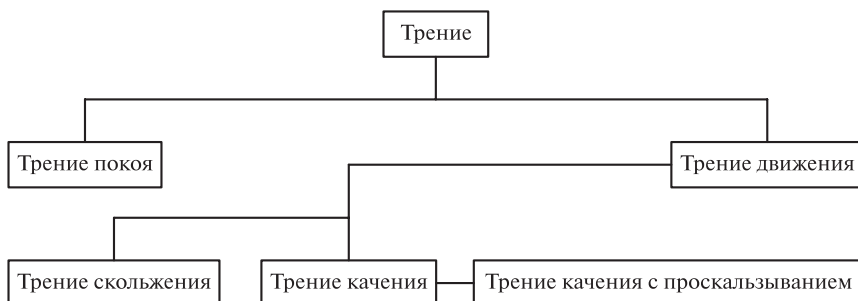


Рис. 6.1

Трением покоя называется трение двух тел при микросмещениях без макросмещения (т.е. при малом относительном перемещении тел в пределах перехода от покоя к относительному движению).

Трением движения называется трение двух тел, находящихся в относительном движении.

Далее рассмотрим виды трения в зависимости от наличия и характера относительного движения.

6.2. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

Трением скольжения называется трение движения, при котором скорости тел в точке касания различны по значению и (или) направлению. Трение скольжения, как и трение покоя, обусловлено прежде всего шероховатостью и деформацией поверхностей, а также наличием молекулярного сцепления у прижатых друг к другу тел. Трение скольжения сопровождается изнашиванием, т.е. отделением или остаточной деформацией материала, а также нагревом трущихся поверхностей тел (остаточной называется деформация, не исчезающая после прекращения действия внешних сил). Трение характеризуется силой трения.

Сила трения есть сила сопротивления относительному перемещению двух тел.

Возьмем тело, лежащее на горизонтальной шероховатой плоскости (рис. 6.2). Сила тяжести G уравновешивается нормальной реакцией N . Если к телу приложить небольшую движущую силу P , то оно не придет в движение, так как эта сила будет уравновешиваться силой трения $F_{\text{тр}}$, которая является, таким образом, *реакцией* опорной плоскости, направленной вдоль плоскости.

Если постепенно увеличивать сдвигающую силу P , то до определенного ее значения тело будет оставаться в покое; при дальнейшем увеличении силы P тело придет в движение.

Отсюда видно, что сила трения в состоянии покоя в зависимости от степени микросмещения может изменяться от нуля до какого-то максимального значения $F_{\text{тр}}^{\text{max}}$, причем по модулю сила трения $F_{\text{тр}}$ всегда равна сдвигающей силе P (если P не больше $F_{\text{тр}}^{\text{max}}$).

Максимальное значение сила трения покоя имеет в момент начала относительного движения.

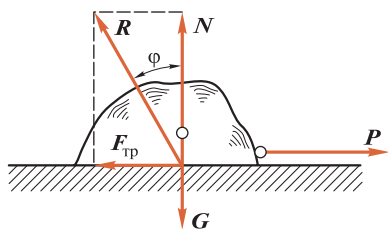


Рис. 6.2

Это значение называется наибольшей силой трения покоя или просто силой трения покоя.

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную направлению относительного движения тела.

В XVIII в. французские ученые Г.Амонтон, а затем Ш.Кулон провели серьезные исследования в области трения и на основе их сформулировали три основных закона трения скольжения, обычно называемых законами Кулона:

1. *Сила трения не зависит от величины площади трущихся поверхностей.*

2. *Максимальная сила трения прямо пропорциональна нормальной составляющей внешних сил, действующих на поверхности тела.*

3. *Сила трения зависит от материала тел, состояния трущихся поверхностей, наличия и рода смазки.*

Первый закон можно подтвердить следующими соображениями. Если площадь трущихся поверхностей увеличится, то увеличится и количество сцепляющихся неровностей, но уменьшится давление (на единицу площади) и сопротивление относительно перемещению останется прежним.

Второй закон говорит о том, что если увеличится нормальная составляющая внешних сил, действующих на поверхности тела (иначе говоря, увеличится сила нормального давления или реакции), то во столько же раз возрастет максимальная сила трения.

Отношение силы трения $F_{\text{тр}}$ к нормальной составляющей N внешних сил, действующих на поверхности тела, называется коэффициентом трения скольжения, и обозначается f (при наибольшей силе трения покоя это отношение называется коэффициентом сцепления).

Таким образом,

$$f = \frac{F_{\text{тр}}}{N} \quad \text{или} \quad F_{\text{тр}} = fN. \quad (6.1)$$

В результате второй закон трения скольжения можно сформулировать так: *сила трения равна коэффициенту трения скольжения, умноженному на силу нормального давления или реакции.*

Очевидно, что коэффициент трения скольжения — величина безразмерная.

Нормальная реакция N опорной поверхности и сила трения $F_{\text{тр}}$ дают равнодействующую R , которая называется *полной реакцией* опорной поверхности (см. рис. 6.2):

$$R = N + F_{\text{тр}}.$$

Полная реакция R составляет с нормалью к опорной поверхности какой-то угол. Максимальное значение этого угла (что будет в момент начала движения) называется *углом трения* и обозначается φ . Из рис. 6.2 очевидно, что

$$F_{\text{тр}} = N \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.2)$$

Сравнивая равенства (6.1) и (6.2), получим

$$f = \operatorname{tg} \varphi,$$

т.е. коэффициент трения скольжения равен тангенсу угла трения.

Если коэффициент трения скольжения одинаков для всех направлений движения, то множество (геометрическое место) полных реакций образует круговой конус, который называется *конусом трения* (рис. 6.3). Если для разных направлений движения коэффициент трения неодинаков (например, при скольжении по дереву вдоль и поперек волокон), то конус трения будет некруговым.

Свойство конуса трения заключается в том, что для равновесия тела, лежащего на шероховатой поверхности, равнодействующая приложенных к нему активных сил должна проходить *внутри* конуса трения.

Действительно, если равнодействующую P активных сил, приложенных к телу, разложить на составляющие P_1 (движущая сила) и P_2 (сила нормального давления), то

$$P_1 = P_2 \operatorname{tg} \alpha.$$

По второму закону трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = f P_2 = P_2 \operatorname{tg} \varphi.$$

Следовательно, при $\alpha < \varphi$ будет

$$P_1 < F_{\text{тр}}$$

и движение окажется невозможным.

Согласно третьему закону трения скольжения, коэффициент трения скольжения зависит от материалов трущихся тел, качества обработки поверхностей, рода и температуры смазки.

В зависимости от наличия между сопрягаемыми поверхностями слоя смазки трение подразделяется на два вида: *трение без смазочного материала* и *трение в условиях смазки*.

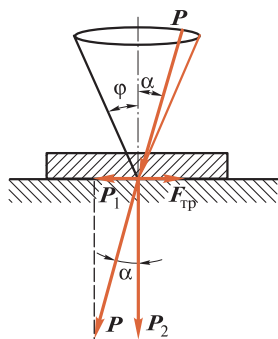


Рис. 6.3

Коэффициент трения скольжения определяют опытным путем; значения его для различных условий приведены в справочниках.

Приведем ориентировочные значения коэффициентов f трения скольжения (при покое):

Металл по металлу без смазки	0,15 ... 0,30
То же, со смазкой	0,10 ... 0,18
Дерево по дереву без смазки	0,40 ... 0,60
Кожа по чугуну без смазки	0,30 ... 0,50
То же, со смазкой	0,15
Сталь по льду	0,02

Коэффициент трения скольжения при движении обычно меньше, чем при покое, и в первом приближении не зависит от скорости относительного перемещения тел.

Методы решения задач статики при наличии трения остаются такими же, как и при отсутствии его, причем в уравнения равновесия обычно вводят максимальные значения сил трения.

6.3. ТРЕНИЕ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим тело, лежащее на шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтальной плоскостью (рис. 6.4).

Разложим силу G на составляющие G_1 и G_2 , параллельную и перпендикулярную наклонной плоскости. Модули этих составляющих определим по следующим формулам:

$$G_1 = G \sin \alpha; \quad G_2 = G \cos \alpha.$$

Составляющая G_2 уравнивается реакцией N наклонной плоскости. Таким образом,

$$G_2 = N = G \cos \alpha.$$

Составляющая G_1 стремится сдвинуть тело вдоль наклонной плоскости. Полностью или частично эта составляющая уравнивается силой трения; согласно второму закону трения скольжения, ее максимальное значение равно

$$F_{\text{тр}} = fN = fG \cos \alpha,$$

где f — коэффициент трения скольжения тела по наклонной плоскости.

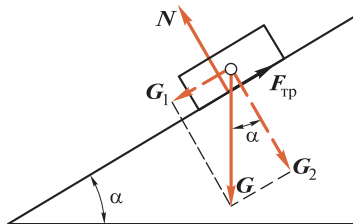


Рис. 6.4

Для того чтобы тело, лежащее на наклонной плоскости, находилось в равновесии, движущая сила G_1 должна быть по модулю равна силе трения $F_{тр}$, т. е.

$$G \sin \alpha = fG \cos \alpha \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = f = \operatorname{tg} \varphi,$$

откуда $\alpha = \varphi$.

Если угол, который наклонная плоскость составляет с горизонтом, равен углу трения, то тело, лежащее на наклонной плоскости, будет под действием собственной силы тяжести либо равномерно скользить вниз, либо находиться в покое.

Для того чтобы тело, лежащее на наклонной плоскости, заведомо не скользило вниз под действием собственной силы тяжести, должно быть соблюдено условие $\alpha < \varphi$.

Наклонной плоскостью с переменным углом наклона к горизонту пользуются для экспериментального определения угла трения φ и коэффициента трения f (рис. 6.5).

Определим модуль силы P , параллельной наклонной плоскости, в случае равномерного перемещения тела вверх по шероховатой наклонной плоскости (рис. 6.6).

Спроецируем силы, действующие на тело, на ось x . Составим уравнение равновесия:

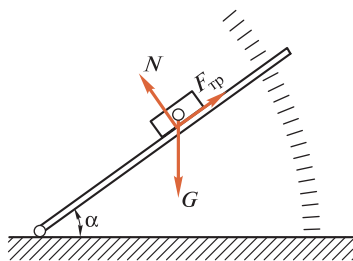
$$\sum X = 0; \quad P - G \sin \alpha - F_{тр} = 0.$$

Так как

$$F_{тр} = fG \cos \alpha,$$

то

$$P = G \sin \alpha + fG \cos \alpha.$$



При $\alpha = \varphi$ $f = \operatorname{tg} \alpha$

Рис. 6.5

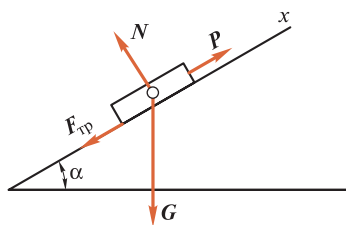


Рис. 6.6

Определим модуль *горизонтальной силы* P , которую нужно приложить к телу для равномерного перемещения его вверх по шероховатой наклонной плоскости (рис. 6.7).

Применим геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил (размерами тела пренебрегаем) и построим замкнутый силовой многоугольник, соответствующий уравнению равновесия

$$G + P + N + F_{\text{тр}} = 0.$$

Из треугольника abc

$$P = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Этот случай движения имеет место при взаимном перемещении винта и гайки с прямоугольной резьбой, так как резьбу винта можно рассматривать как наклонную плоскость, угол наклона которой равен углу подъема винтовой линии.

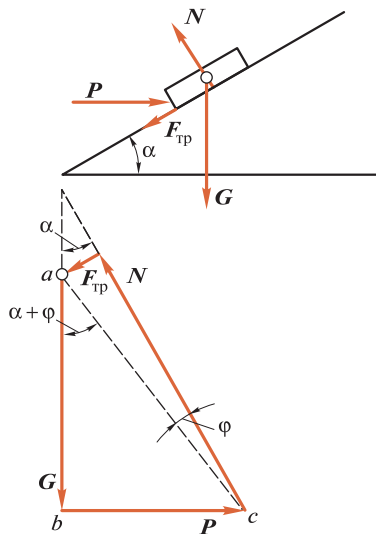


Рис. 6.7

Трение в резьбе, имеющей треугольный или трапецидальный профиль, подобно *трению в клинчатом ползуне*. Поэтому рассмотрим клинчатый ползун с углом заострения 2β , нагруженный вертикальной силой Q (рис. 6.8). Определим силу P , необходимую для равномерного перемещения ползуна вдоль горизонтальных направляющих, если коэффициент трения скольжения равен f .

Составим два уравнения равновесия ползуна:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad P - 2F_{\text{тр}} &= 0; \\ \sum Y = 0; \quad 2N \sin \beta - Q &= 0, \end{aligned}$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения на каждой грани ползуна; N — нормальная реакция направляющей.

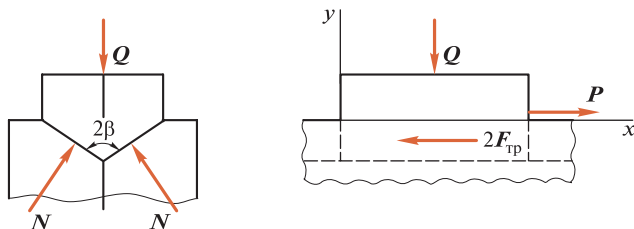


Рис. 6.8

Решая эту систему уравнений и учитывая, что $F_{\text{тр}} = fN$, получим

$$P = \frac{f}{\sin\beta} Q = f' Q,$$

где $f' = f/\sin\beta$ — приведенный коэффициент трения.

Соответствующий этому приведенному коэффициенту угол трения обозначим φ' и назовем приведенным углом трения, тогда

$$f' = \text{tg}\varphi'.$$

Очевидно, что $f' > f$, следовательно, при прочих равных условиях *трение в клинчатом ползуне больше трения на плоскости*.

Понятие приведенного коэффициента трения условно, так как он изменяется в зависимости от угла заострения клинчатого ползуна.

По аналогии с движением тела вверх по наклонной плоскости под действием горизонтальной силы для равномерного перемещения клинчатого ползуна по направляющим, наклоненным к горизонту под углом α , нужно приложить горизонтальную силу, равную

$$P = Q \text{tg}(\alpha + \varphi').$$

Трение в крепежной метрической резьбе подобно трению клинчатого ползуна с углом заострения $2\beta = 120^\circ$, для трапецеидальной резьбы угол $2\beta = 150^\circ$.

Расчеты с учетом трения в резьбе рассматриваются при изучении предмета «Детали машин».

Наибольший угол, который составляет с горизонтом наклонная плоскость, образованная сыпучим телом, называется *углом естественного откоса*. Угол естественного откоса сыпучего тела равен углу трения между его частицами. Этот угол приходится принимать во внимание, например при различных земляных работах.

6.4. ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

Трением качения называется трение движения, при котором скорости соприкасающихся тел в точках касания одинаковы по значению и направлению.

Если движение двух соприкасающихся тел происходит при одновременном качении и скольжении, то в этом случае возникает *трение качения с проскальзыванием*.

Рассмотрим качение без скольжения цилиндра весом G и радиусом r по горизонтальной опорной плоскости (рис. 6.9). Под

давлением силы G произойдет деформация цилиндра и опорной плоскости в месте их соприкосновения. Если сила P не действует, то сила G будет уравниваться реакцией R опорной плоскости и цилиндр будет находиться в покое (реакция R будет вертикальна).

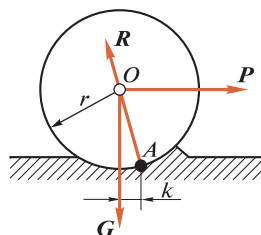


Рис. 6.9

Если к цилиндру приложить небольшую силу P , то он по-прежнему будет находиться в покое. При этом произойдет перераспределение давлений на опорную поверхность и полная реакция R пройдет через какую-то точку A и через точку O (согласно теореме о равновесии трех непараллельных сил).

При каком-то критическом значении силы P цилиндр придет в движение и будет равномерно перекатываться по опорной плоскости, а точка A займет крайнее правое положение. Отсюда видно, что трение качения в состоянии покоя может изменяться от нуля до какого-то максимального значения, причем максимальным оно будет в момент начала движения.

Обозначим k максимальное значение плеча силы G относительно точки A . Тогда в случае равномерного перекатывания цилиндра (т. е. равновесия)

$$\sum M_A = 0$$

или

$$-Pr + Gk = 0,$$

причем плечо силы P вследствие незначительности деформаций тел считаем равным радиусу r цилиндра (сила P — горизонтальная). Из последнего равенства определим силу, необходимую для равномерного качения цилиндра:

$$P = \frac{kG}{r}.$$

Максимальное значение плеча k называется коэффициентом трения качения; он имеет размерность длины и выражается в сантиметрах или миллиметрах.

Из полученной формулы видно, что усилие, необходимое для перекатывания катка, прямо пропорционально его весу и обратно пропорционально радиусу катка.

Коэффициент трения качения определяется опытным путем, его значения для различных условий приводятся в справочниках.

Приведем ориентировочные значения коэффициентов k трения качения для катка по плоскости (см):

Мягкая сталь по мягкой стали	0,005
Закаленная сталь по закаленной стали	0,001
Чугун по чугуну	0,005
Дерево по стали	0,03...0,04
Дерево по дереву	0,05...0,08
Резиновая шина по шоссе	0,24

Коэффициент трения качения практически не зависит от скорости движения тела.

В ряде случаев при изучении трения качения активные и реактивные силы, действующие на каток, удобно представлять в ином виде (рис. 6.10, *a*, *б*).

Разложим полную реакцию R опорной поверхности на составляющие N и $F_{тр}$, тогда

$$R = N + F_{тр},$$

где $F_{тр}$ — сила трения качения; N — реакция, нормальная к недеформированной опорной плоскости.

Составим три уравнения равновесия катка:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad P - F_{тр} = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad N - G = 0; \\ \sum M_A = 0; & \quad -Pr + Gk = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений получаем

$$P = F_{тр}; \quad N = G; \quad Pr = Gk.$$

Введем обозначения $Pr = M$, $Gk = M_{тр}$, где M — момент качения, $M_{тр}$ — момент трения.

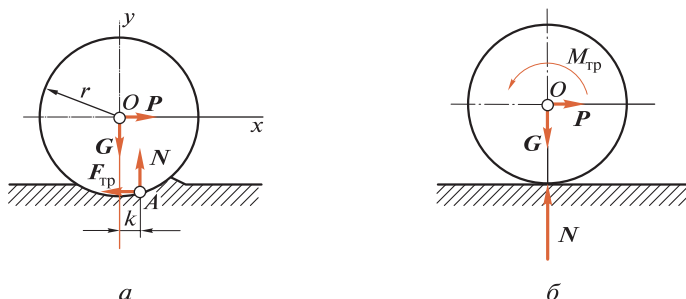


Рис. 6.10

Возможны следующие частные случаи движения катка:

- а) $M \geq M_{\text{тр}}$, но $P < F_{\text{тр}}$ — только качение;
- б) $M < M_{\text{тр}}$, но $P > F_{\text{тр}}$ — только скольжение;
- в) $M > M_{\text{тр}}$, но $P > F_{\text{тр}}$ — качение с проскальзыванием;
- г) $M < M_{\text{тр}}$, но $P < F_{\text{тр}}$ — состояние покоя.

Трение качения в большинстве случаев меньше трения скольжения, поэтому вместо подшипников скольжения широко применяют шариковые и роликовые подшипники качения.

На практике нередки случаи сочетания трения скольжения с трением качения, например в зубчатых зацеплениях или игольчатых подшипниках.

6.5. УСТОЙЧИВОСТЬ К ОПРОКИДЫВАНИЮ

Рассмотрим твердое тело весом G , опирающееся на плоскость и способное опрокидываться вокруг какого-то ребра под действием горизонтальной силы P (рис. 6.11). Допустим, что силы P и G лежат в одной плоскости, пересекающейся с ребром в точке A . В момент начала опрокидывания на тело будут действовать также нормальная реакция N_A и сила трения $F_{\text{тр}}$, приложенные в точке A , причем в случае равновесия системы всех четырех сил можно записать два уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0; \quad N_A - G = 0, \text{ откуда } N_A = G; \\ \sum X = 0; \quad F_{\text{тр}} - P = 0, \text{ откуда } P = F_{\text{тр}}. \end{aligned}$$

Таким образом, в момент начала опрокидывания на рассматриваемое тело действуют пара сил $(P, F_{\text{тр}})$, стремящаяся опрокинуть тело, и пара сил (G, N_A) , противодействующая опрокидыванию.

Очевидно, что опрокидывания не произойдет, если

$$M(G, N_A) > M(P, F_{\text{тр}}) \text{ или } Gb > Pa.$$

Произведение Gb равно моменту силы G относительно точки A и называется *моментом устойчивости*. Момент силы P относительно той же точки, равный произведению Pa , называется *опрокидывающим моментом*.

Условие устойчивости против опрокидывания запишется в виде неравенства

$$M_{\text{уст}} > M_{\text{опр}}$$

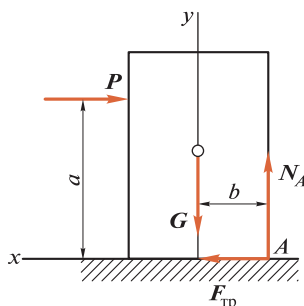


Рис. 6.11

и формулируется так: для устойчивости твердого тела против опрокидывания необходимо и достаточно, чтобы момент устойчивости был больше опрокидывающего момента.

Если на тело действуют несколько сил, стремящихся его опрокинуть, то опрокидывающий момент равен сумме моментов этих сил относительно точки, вокруг которой может произойти опрокидывание. То же относится и к моменту устойчивости.

Отношение момента устойчивости к опрокидывающему моменту называется *коэффициентом устойчивости*:

$$\frac{M_{\text{уст}}}{M_{\text{опр}}} = k_{\text{уст}}.$$

Очевидно, что в сооружениях коэффициент устойчивости $k_{\text{уст}}$ должен быть больше единицы.

Расчет на устойчивость особенно важен для высоких сооружений, таких как дымовые трубы, мачты, краны, высокие стены и т. п. Заметим, что в случае, когда $P > F_{\text{тр}}$, а опрокидывающий момент меньше момента устойчивости $M_{\text{опр}} < M_{\text{уст}}$, тело будет скользить по опорной плоскости, конечно, если конструкция допускает такое движение.

Глава 7

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

7.1. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ И ПРОЕКЦИИ СИЛЫ НА ОСИ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Система сил, линии действия которых расположены в различных плоскостях, называется *пространственной*.

Пространственная система сил называется *сходящейся*, если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке.

Теорема. Пространственная система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.

Пусть дана пространственная система n сходящихся сил ($F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$). На основании следствия из аксиом III и IV перенесем все силы системы вдоль линий действия в точку их пересечения. Затем на основании аксиомы параллелограмма сложим силы F_1 и F_2 , в результате чего получим их равнодействующую:

$$F_{\Sigma 1} = F_1 + F_2.$$

Сложив эту равнодействующую с силой F_3 , получим равнодействующую трех сил:

$$F_{\Sigma 2} = F_{\Sigma 1} + F_3 = F_1 + F_2 + F_3.$$

Повторив указанную операцию $n - 1$ раз, получим равнодействующую системы n сил, которая будет равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей будет проходить через точку пересечения линий действия составляющих:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n, \text{ или } F_{\Sigma} = \sum F_i.$$

Силовой многоугольник пространственной системы сил не лежит в одной плоскости, поэтому геометрический и графический способы нахождения равнодействующей неприемлемы, а применяется аналитический способ (метод проекций).

Определение проекции силы на ось остается прежним (см. подразд. 2.2). Если сила и ось не лежат в одной плоскости, то проеци-

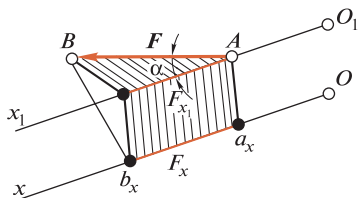


Рис. 7.1

рующие перпендикуляры также не лежат в одной плоскости (рис. 7.1).

Для того чтобы определить, чему равна проекция силы F на ось Ox , следует мысленно провести через начало или конец силы ось O_1x_1 , параллельную данной оси Ox , тогда $F_x = F \cos \alpha$, так как $F_x = F_{x1}$.

Правило знаков для проекции остается прежним.

Если вектор силы *параллелен оси*, то он проецируется на эту ось в *натуральную величину*.

Если вектор силы *лежит в плоскости, перпендикулярной оси*, то его проекция на эту ось *равна нулю*.

7.2. РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛЫ ПО ТРЕМ ОСЯМ КООРДИНАТ И УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Пусть дана сила F (рис. 7.2). Возьмем систему координат так, чтобы начало координат совпадало с началом вектора силы F . Из конца этого вектора опустим перпендикуляр на плоскость xu и разложим силу F на составляющие F_{xy} и F_z , а составляющую F_{xy} — на составляющие F_x и F_y . Тогда

$$F = F_x + F_y + F_z.$$

Достроим полученное изображение до параллелепипеда, у которого составляющие F_x , F_y , F_z являются ребрами, а сила F — диагональю.

Из изложенного можно сделать вывод: *равнодействующая трех взаимно-перпендикулярных сил выражается по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах.*

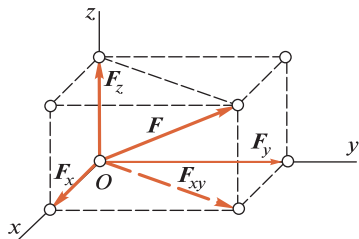


Рис. 7.2

Из рис. 7.2 видно, что в случаях разложения силы F по трем взаимно-перпендикулярным направлениям x , y , z составляющие F_x , F_y , F_z равны по модулю проекциям силы F на эти оси. Эти проекции обозначим F_x , F_y , F_z .

Зная проекции силы на три взаимно-перпендикулярные оси координат, можно определить модуль вектора силы по формуле

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Дана пространственная система n сходящихся сил. Поместим начало координат в точке пересечения линий их действия и разложим каждую силу данной системы на три взаимно-перпендикулярные составляющие, направленные по осям координат, предварительно перенеся все силы вдоль линий их действия в одну точку.

Вместо данной системы n сходящихся сил мы получим эквивалентную ей систему $3n$ сил, из которых n сил действуют по оси x , n сил — по оси y и n сил — по оси z .

Равнодействующая сил, направленных по оси x , равна их алгебраической сумме; то же можно сказать о силах, направленных по осям y и z . Таким образом, систему $3n$ сил заменим эквивалентной ей системой трех сил.

Проекции силы на три взаимно-перпендикулярные оси и составляющие силы, направленные по этим осям, равны по модулю, следовательно, проекции равнодействующей равны

$$F_{\Sigma x} = \sum X; \quad F_{\Sigma y} = \sum Y; \quad F_{\Sigma z} = \sum Z.$$

Равнодействующая трех взаимно-перпендикулярных сил выражается по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах, и по известным проекциям равнодействующей можно определить модуль и направление вектора равнодействующей.

Известно, что пространственная система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей. Если такая система находится в равновесии, т. е. эквивалентна нулю, то равнодействующая этой системы равна нулю, а следовательно, и проекции равнодействующей равны нулю, причем эти проекции равны сумме проекций составляющих.

Отсюда вытекают условия равновесия пространственной системы сходящихся сил:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0.$$

Эти условия формулируются следующим образом: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из трех координатных осей равнялась нулю.

Пример 7.1. Груз весом $G = 200$ Н удерживается в равновесии горизонтальной веревкой AO и двумя веревками BO и CO , плоскость которых наклонена к горизонтальной плоскости под углом $\alpha = 45^\circ$ и образует с вер-

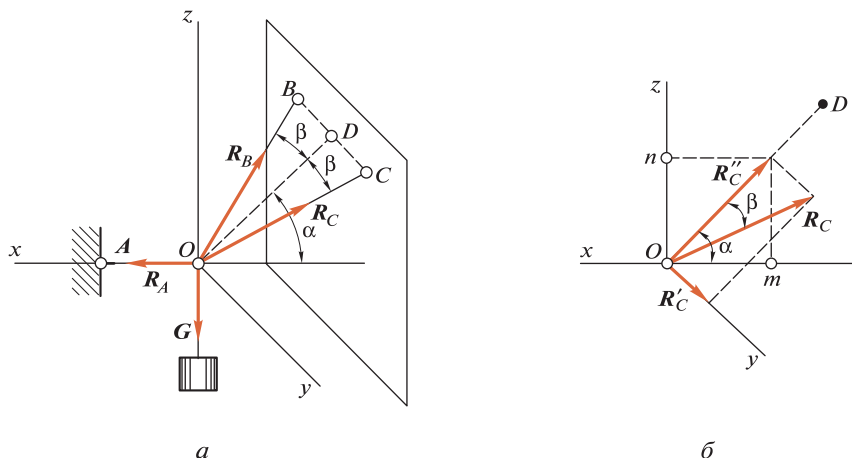


Рис. 7.3

тикальной плоскостью, проходящей через AO , прямой угол (рис. 7.3, а). Веревки BO и CO образуют с этой вертикальной плоскостью углы $\beta = 30^\circ$. Определить натяжение веревок.

Решение. Рассмотрим равновесие узла O , к которому приложены четыре силы: G , R_A , R_B , R_C . К пространственной системе четырех сходящихся сил применим аналитические условия равновесия и составим три уравнения равновесия:

$$1) \sum Y = 0; R_C \sin \beta - R_B \sin \beta = 0, \text{ откуда}$$

$$R_C = R_B.$$

Так как углы между реакциями R_B , R_C и осями координат x и z неизвестны, то для удобства проецирования каждую из этих сил разложим на две составляющие, как показано на рис. 7.3, б. Тогда

$$R_{C_x} = Om = R_C'' \cos \alpha = R_C \cos \beta \cos \alpha;$$

$$R_{C_z} = On = R_C'' \sin \alpha = R_C \cos \beta \sin \alpha.$$

Проекция составляющей R_C' на оси x и z равны нулю, так как эта составляющая перпендикулярна указанным осям;

$$2) \sum Z = 0; R_C \cos \beta \sin \alpha + R_B \cos \beta \sin \alpha - G = 0.$$

Учитывая, что $R_B = R_C$, получаем

$$R_B = R_C = \frac{G}{2 \cos \beta \sin \alpha} = \frac{G}{2 \cos 30^\circ \sin 45^\circ} = \frac{200}{2 \cdot 0,866 \cdot 0,707} = 163 \text{ Н};$$

$$3) \sum X = 0; R_A - R_C \cos \beta \cos \alpha - R_B \cos \beta \cos \alpha = 0, \text{ откуда}$$

$$R_A = 2 R_B \cos \beta \cos \alpha = \frac{2G \cos \beta \cos \alpha}{2 \cos \beta \sin \alpha} = G = 200 \text{ Н}.$$

7.3. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Рассмотрим колесо червячной передачи, закрепленное на валу, вращающемся в подшипниках (рис. 7.4). Червяк действует на червячное колесо силой F , не лежащей в плоскости, перпендикулярной оси.

Разложим силу F на три взаимно-перпендикулярные составляющие F_1 , F_2 и F_3 . Составляющую F_1 назовем окружной силой, составляющую F_2 — осевой силой, а составляющую F_3 — радиальной силой.

Составляющая F_1 вызывает вращательное действие, которое измеряется произведением $F_1 r$; составляющая F_2 стремится сдвинуть колесо вдоль оси; составляющая F_3 стремится изогнуть ось колеса, а вращательное действие этих сил относительно оси равно нулю.

Таким образом, если нужно найти момент силы относительно оси, то следует принимать в расчет только составляющую F_1 , лежащую в плоскости, перпендикулярной оси, и не пересекающую ось.

Ранее было установлено, что проекция вектора силы на ось есть скалярная алгебраическая величина. В отличие от проекции на ось проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как эта проекция характеризуется не только числовым значением, но и положением на плоскости, т.е. направлением. Поэтому моменту силы относительно оси можно дать такое определение: *моментом силы относительно оси называется величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.*

Это определение поясняет рис. 7.5. Момент силы относительно оси условимся записывать следующим образом:

$$M_z(F) = F_H a.$$

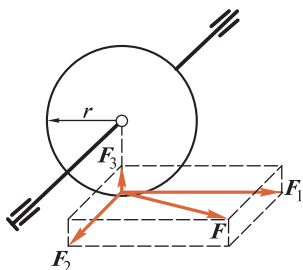


Рис. 7.4

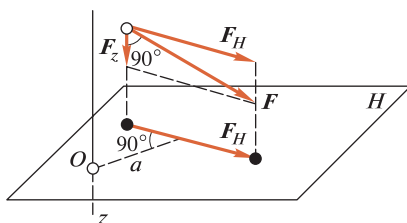


Рис. 7.5

Условимся считать момент силы положительным, если смотреть с положительного конца оси и сила стремится вызвать вращение против часовой стрелки, момент силы считаем отрицательным, если она стремится вызвать вращение по часовой стрелке.

Момент силы относительно оси *не* меняется при перемещении силы вдоль линии ее действия.

Момент силы относительно оси *равен нулю* в двух случаях (не считая случаев, когда сила равна нулю или действует вдоль оси):

1) если *вектор силы параллелен оси*, так как при этом проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю (см. рис. 7.5, сила F_2);

2) если *линия действия силы пересекает ось*, так как при этом плечо равно нулю (см. рис 7.4, сила F_3).

7.4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

Для равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из трех осей координат была равна нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно каждой из этих осей была равна нулю.

Запишем условия равновесия:

$$\sum X = 0; \quad \sum M_x(F_i) = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad \sum M_y(F_i) = 0;$$

$$\sum Z = 0; \quad \sum M_z(F_i) = 0.$$

Поясним смысл этих условий, для чего применим три условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M(F_i) = 0.$$

Тело, лежащее на плоскости, имеет три степени свободы, а именно: возможность перемещения в направлениях двух взаимно-перпендикулярных осей, лежащих в этой плоскости, и возможность вращения вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. Если к телу приложена плоская система сил и выполнено условие $\sum X = 0$, то тело не будет перемещаться в направлении оси x , так как равнодействующая системы не имеет составляющей, параллельной оси x .

Если выполнено условие $\sum Y = 0$, то тело не будет перемещаться и в направлении оси y , так как равнодействующая системы не имеет составляющей, параллельной оси y . Наконец, если выполнено условие $\sum M(F_i) = 0$, т.е. сумма моментов относительно любой точки плоскости равна нулю, то тело не будет под действием этой системы сил вращаться, так как нет пары сил, которая может осуществить это вращение.

Таким образом, *трем степеням свободы тела на плоскости соответствуют три условия равновесия.*

Свободное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы, а именно: возможность перемещаться в направлениях трех взаимно-перпендикулярных осей координат и возможность вращаться вокруг этих осей.

Таким образом, *шести степеням свободы тела в пространстве соответствуют шесть условий равновесия.*

Пример 7.2. На горизонтальном валу AB (рис. 7.6) насажены зубчатое колесо 1 диаметром $D = 2$ м и шестерня 2 диаметром $d = 20$ см. Остальные размеры указаны на рисунке. К колесу 1 по касательной приложена горизонтальная сила $P = 100$ Н, а к шестерне 2 также по касательной приложена вертикальная сила Q .

Определить силу Q и реакции подшипников A и B в положении равновесия. Массой деталей пренебречь.

Решение. Отбросим подшипники и рассмотрим равновесие вала с зубчатым колесом и шестерней. Реакции подшипников A и B перпендикулярны оси вала. Поэтому разложим каждую из этих реакций на две взаимно-перпендикулярные составляющие, параллельные осям координат x и z . В результате получена приложенная к заданной системе тел пространственная система шести сил, пять из которых, т.е. X_A, Z_A, X_B, Z_B, Q , не известны по модулю.

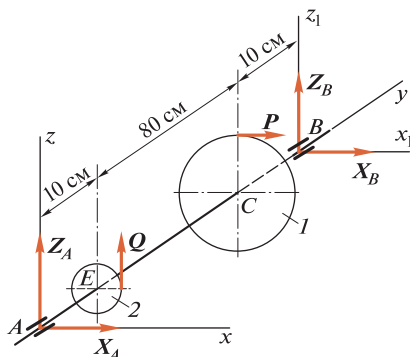


Рис. 7.6

Применим условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил и составим пять уравнений равновесия:

$$1) \sum M_y = 0; \quad -Qd/2 + PD/2 = 0.$$

Из этого уравнения

$$Q = PD/d = 100 \cdot 2/0,2 = 1\,000 \text{ Н} = 1 \text{ кН};$$

$$2) \sum M_z = 0; \quad -X_B \cdot AB - P \cdot AC = 0.$$

Из этого уравнения

$$X_B = -P \cdot AC/AB = -100 \cdot 0,9/1,0 = -90 \text{ Н};$$

$$3) \sum M_x = 0; \quad Q \cdot AE + Z_B \cdot AB = 0.$$

Из этого уравнения

$$Z_B = -Q \cdot AE/AB = -1\,000 \cdot 0,1/1,0 = -100 \text{ Н};$$

$$4) \sum X = 0; \quad X_A + P + X_B = 0.$$

Из этого уравнения

$$X_A = -P - X_B = -100 - (-90) = -10 \text{ Н};$$

$$5) \sum Z = 0; \quad Z_A + Q + Z_B = 0.$$

Из этого уравнения

$$Z_A = -Q - Z_B = -1\,000 - (-100) = -900 \text{ Н}.$$

Знак « \rightarrow » перед значениями реакций X_A , X_B , Z_A и Z_B показывает, что эти реакции направлены в стороны, противоположные показанным на рис. 7.6.

Шестое условие равновесия $\sum Y = 0$ обращается в тождество, так как проекции на ось y всех сил рассматриваемой системы равны нулю.

Для проверки решения составим дополнительное, контрольное, уравнение моментов относительно оси x_1 , проходящей через точку B :

$$\sum M_{x_1} = 0; \quad -Z_A \cdot AB - Q \cdot BE = 0.$$

Подставив значения, получим $-(-900) \cdot 1,0 - 1\,000 \cdot 0,9 = 0$.

Контрольное уравнение обращается в тождество, что свидетельствует о правильности полученных ответов.

На этом примере покажем возможность изменения при решении системы координатных осей и замены уравнения проекций уравнением моментов.

Определим реакцию X_A , составив вместо уравнения проекций сил на ось x уравнение моментов сил относительно новой оси z_1 , проходящей через точку B :

$$\sum M_{z_1} = 0; \quad X_A \cdot AB + P \cdot CB = 0.$$

Из этого уравнения

$$X_A = -P \cdot CB/AB = -100 \cdot 0,1/1,0 = -10 \text{ Н}.$$

Как видим, ответ получен тот же.

7.5. ТЕОРЕМА О МОМЕНТЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ (ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА)

Теорема. Момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси.

Пусть даны пространственная система n произвольно расположенных сил, приложенных к телу, и равнодействующая этой системы F_{Σ} :

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \equiv F_{\Sigma}.$$

Приложим к телу другую систему сил, равнодействующая которой F'_{Σ} по модулю равна силе F_{Σ} и направлена по той же линии действия в противоположную сторону.

Сила F'_{Σ} для данной системы является уравновешивающей силой и вместе с данными силами образует уравновешенную систему:

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, F'_{\Sigma}) \equiv 0,$$

также

$$(F_{\Sigma}, F'_{\Sigma}) \equiv 0.$$

Так как обе записанные выше системы эквивалентны нулю, т.е. уравновешены, то к ним можно применить любое условие равновесия, например

$$\sum M_x(F_i) = 0.$$

Запишем это условие для обеих систем:

$$M_x(F_1) + M_x(F_2) + M_x(F_3) + \dots + M_x(F_n) + M_x(F'_{\Sigma}) = 0;$$

$$M_x(F_{\Sigma}) + M_x(F'_{\Sigma}) = 0.$$

Так как правые части этих равенств равны, то будут равны и левые:

$$M_x(F_1) + M_x(F_2) + M_x(F_3) + \dots + M_x(F_n) = M_x(F_{\Sigma}),$$

поскольку члены $M_x(F'_{\Sigma})$ взаимно уничтожились.

Итак,

$$\sum M_x(F_i) = M_x(F_{\Sigma});$$

теорема доказана.

Глава 8 ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

8.1. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Центром параллельных сил называется такая точка на линии действия равнодействующей системы параллельных сил, через которую проходит равнодействующая и в том случае, если все силы системы повернуть вокруг их точек приложения на один и тот же угол, сохраняя параллельность сил.

Покажем существование центра параллельных сил на системе двух сил F_1 и F_2 (рис. 8.1). На основании теоремы о сложении двух параллельных сил, направленных в одну сторону, определим равнодействующую этих сил и положение линии ее действия по формулам

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Нетрудно увидеть, что точка C , лежащая на линии AB , соединяющей точки приложения данных сил, является центром двух параллельных сил F_1 и F_2 , так как при повороте их на один и тот же угол α отношение плеч BC и CA не изменится и равнодействующая также пройдет через точку C .

Если дана система n параллельных сил, то равнодействующую этой системы можно найти, последовательно попарно складывая

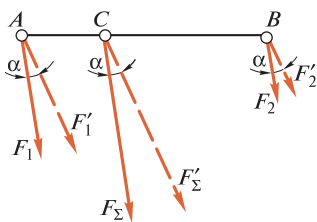


Рис. 8.1

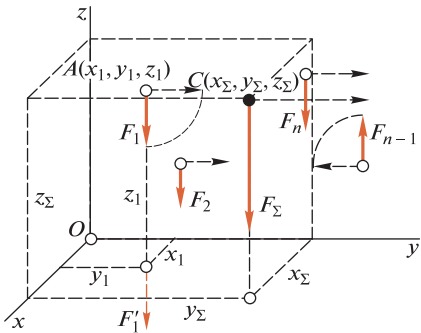


Рис. 8.2

все силы. На линии действия равнодействующей системы параллельных сил также будет существовать точка, обладающая свойством центра параллельных сил. Выведем формулы для определения координат центра системы n параллельных сил.

Пусть даны пространственная система n параллельных сил и равнодействующая этой системы. Выберем систему осей координат и обозначим координаты точек приложения сил данной системы и координаты точки приложения равнодействующей (рис. 8.2).

Запишем моменты сил данной системы относительно оси $у$. Для того чтобы легче представить, чему равен момент силы относительно оси, следует мысленно перенести силу вдоль линии действия до положения, когда точка приложения силы окажется в плоскости координатных осей (рис. 8.2, сила F_1'):

$$M_y(F_1) = F_1x_1,$$

$$M_y(F_2) = F_2x_2,$$

.....

$$M_y(F_n) = F_nx_n,$$

$$M_y(F_\Sigma) = F_\Sigma x_C.$$

Применим теорему о моменте равнодействующей относительно оси. Тогда

$$F_\Sigma x_C = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \dots + F_nx_n,$$

откуда

$$x_C = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \dots + F_nx_n}{F_\Sigma}.$$

Записав моменты сил относительно оси x и вновь применив теорему о моменте равнодействующей, получим

$$y_C = \frac{F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3 + \dots + F_ny_n}{F_\Sigma}.$$

Для определения координаты z_C повернем все силы системы вокруг их точек приложения в одну сторону так, чтобы силы стали параллельны оси $у$. При этом точка C не изменит своего положения, так как она является центром параллельных сил данной системы.

Запишем моменты всех сил относительно оси x и применим теорему о моменте равнодействующей, в результате чего получим

$$z_C = \frac{F_1z_1 + F_2z_2 + F_3z_3 + \dots + F_nz_n}{F_\Sigma}.$$

Равнодействующая системы параллельных сил равна их алгебраической сумме, т.е. $F_{\Sigma} = \sum F_i$. Применяв сокращенную форму записи, получим формулы для определения координат центра параллельных сил в следующем виде:

$$x_C = \frac{\sum(F_i x_i)}{\sum F_i}; \quad y_C = \frac{\sum(F_i y_i)}{\sum F_i}; \quad z_C = \frac{\sum(F_i z_i)}{\sum F_i}.$$

Заметим, что в полученных формулах силы и моменты сил берут со знаком согласно ранее установленным правилам.

8.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется *силой тяжести*.

Элементарной частицей тела называется такая малая частица, положение которой в пространстве определяется координатами одной точки. Рассмотрим тело, состоящее из большого количества элементарных частиц. Силы тяжести каждой частицы, направленные к центру Земли, образуют систему сходящихся сил, но для тел, размеры которых малы по сравнению с размерами Земли, с достаточной степенью точности можно считать эти силы *системой параллельных сил*.

Центром тяжести тела называется центр параллельных сил тяжести всех элементарных частиц тела.

Центр тяжести есть геометрическая точка, которая может лежать вне тела (например, кольцо, цилиндр с отверстием). Центр тяжести будем обозначать точкой C .

Координаты центра тяжести тела находят по тем же формулам, что и координаты центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i}; \quad y_C = \frac{\sum(G_i y_i)}{\sum G_i}; \quad z_C = \frac{\sum(G_i z_i)}{\sum G_i},$$

где G_i — сила тяжести каждой элементарной частицы тела; x_i, y_i, z_i — координаты частицы; $\sum G_i$ — сила тяжести всего тела.

В случае *однородных тел* по таким же формулам можно определять координаты центра **тяжести объемов, площадей и линий**. Например, для абсциссы x_C получим следующие формулы:

1) сила тяжести элементарной частицы, выраженная через ее объем V_i , равна

$$G_i = \gamma V_i,$$

где γ — удельная сила тяжести (для однородного тела — величина постоянная). Тогда

$$x_C = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma \sum(V_i x_i)}{\gamma \sum V_i},$$

следовательно, для объема

$$x_C = \frac{\sum(V_i x_i)}{\sum V_i};$$

2) если тело представляет собой однородную пластинку толщиной h , то сила тяжести элементарной частицы, выраженная через площадь A_i , равна

$$G_i = \gamma h A_i,$$

тогда

$$x_C = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma h \sum(A_i x_i)}{\gamma h \sum A_i},$$

следовательно, для площади

$$x_C = \frac{\sum(A_i x_i)}{\sum A_i};$$

3) если тело представляет собой однородную проволоку постоянного поперечного сечения A , то сила тяжести элементарной частицы, выраженная через длину l_i , равна

$$G_i = A l_i,$$

тогда

$$x_C = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma A \sum(l_i x_i)}{\gamma A \sum l_i},$$

следовательно, для линии

$$x_C = \frac{\sum(l_i x_i)}{\sum l_i}.$$

8.3. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

Рассмотрим три метода нахождения центра тяжести: метод симметрии, метод разбиения и метод отрицательных масс.

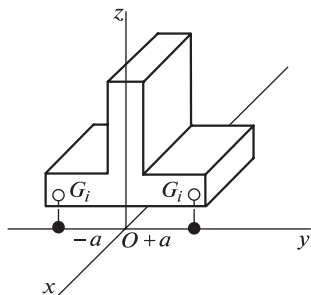


Рис. 8.3

Метод симметрии. Представим себе однородное тело, которое имеет плоскость симметрии. Выберем такую систему координат, чтобы оси x и z лежали в плоскости симметрии (рис. 8.3).

В этом случае каждой элементарной частице силой тяжести G_i с абсциссой $y_i = +a$ соответствует такая же элементарная частица с абсциссой $y_i = -a$, тогда

$$y_c = \frac{\sum(G_i y_i)}{\sum G_i} = 0.$$

Отсюда следует вывод: *если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости.*

Аналогично можно доказать и следующие положения:

если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела лежит на этой оси;

если однородное тело имеет две оси симметрии, то центр тяжести находится в точке их пересечения;

центр тяжести однородного тела вращения лежит на оси вращения.

Метод разбиения. Этот метод заключается в том, что тело разбивают на наименьшее число частей, силы тяжести положение центров тяжести которых известны, после чего применяют приведенные ранее формулы.

Допустим, что мы разбили тело силой тяжести G на три части G' , G'' , G''' , абсциссы центров тяжести этих частей x'_c , x''_c , x'''_c известны. Формула для определения абсциссы центра тяжести всего тела

$$x_c = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i}.$$

Перепишем ее в следующем виде:

$$x_c \sum G_i = \sum(G_i x_i)$$

или

$$G x_c = \sum(G_i x_i).$$

Последнее равенство запишем для каждой из трех частей тела отдельно:

$$G' x'_c = \sum(G'_i x'_i); \quad G'' x''_c = \sum(G''_i x''_i);$$

$$G''' x'''_c = \sum(G'''_i x'''_i).$$

Сложив правые и левые части этих трех равенств, получим

$$G'x'_C + G''x''_C + G'''x'''_C = \sum(G'_i x'_i) + \sum(G''_i x''_i) + \sum(G'''_i x'''_i) = \sum(G_i x_i).$$

Но правая часть последнего равенства представляет собой произведение Gx_C , так как

$$Gx_C = \sum(G_i x_i),$$

следовательно,

$$x_C = \frac{G'x'_C + G''x''_C + G'''x'''_C}{G},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично,

$$y_C = \frac{G'y'_C + G''y''_C + G'''y'''_C}{G},$$

$$z_C = \frac{G'z'_C + G''z''_C + G'''z'''_C}{G}.$$

Полученные формулы аналогичны формулам для определения координат центров тяжести, выведенным в подразд. 8.2. Поэтому в исходные формулы можно подставлять не силы тяжести элементарных частиц G_i , а силы тяжести конечных частей; под координатами x_i, y_i, z_i понимают координаты центров тяжести частей, на которые тело разбито.

Метод отрицательных масс. Этот метод заключается в том, что тело, имеющее свободные полости, считают сплошным, а массу свободных полостей — отрицательной. Вид формул для определения координат центра тяжести тела при этом не меняется.

Таким образом, *при определении центра тяжести тела, имеющего свободные полости, следует применять метод разбиения, но считать массу свободных полостей отрицательной.*

8.4. ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ НЕКОТОРЫХ ФИГУР

Прямоугольник. Так как прямоугольник имеет две оси симметрии, то центр тяжести его площади находится в точке пересечения этих осей, иначе говоря, *в точке пересечения диагоналей* прямоугольника.

Треугольник. Пусть дан треугольник ABD (рис. 8.4). Разобьем его на элементарные (бесконечно узкие) полоски, параллельные стороне AD . Центр тяжести каждой полоски будет лежать на медиане

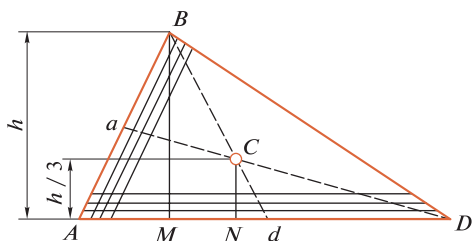


Рис. 8.4

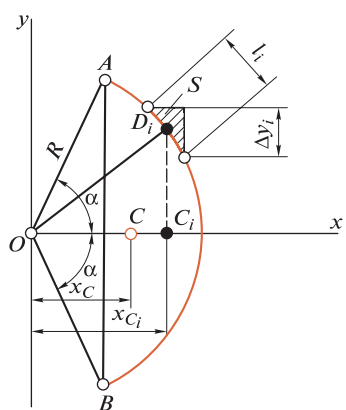


Рис. 8.5

не Bd , следовательно, на этой медиане будет лежать центр тяжести всей площади треугольника. Разбив треугольник на элементарные полоски, параллельные стороне AB , увидим, что искомый центр тяжести лежит и на медиане aD , следовательно, центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.

Из геометрии известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в соотношении 1:2 от основания. Из подобия треугольников CNd и BMd получим

$$CN = \frac{h}{3}.$$

Следовательно, центр тяжести площади треугольника лежит на расстоянии *одной трети высоты от каждого основания*.

Дуга окружности. Возьмем дугу AB окружности радиусом R с центральным углом 2α (рис. 8.5). Систему координат выберем так, чтобы начало координат было в центре окружности, а ось x делила дугу пополам, тогда $y_C = 0$ вследствие симметрии дуги относительно оси x . Определим x_C .

Разобьем дугу AB на элементарные части l_i , одна из которых изображена на рисунке. Тогда, согласно подразд. 8.2,

$$x_C = \frac{\sum (l_i x_{C_i})}{\sum l_i}.$$

Дугу l_i вследствие малости примем за отрезок прямой. Из подобия $\Delta OD_i C_i$ и элементарного ΔS (на рисунке заштрихован) получим

$$\frac{l_i}{\Delta y_i} = \frac{R}{x_{C_i}} \quad \text{или} \quad l_i x_{C_i} = R \Delta y_i.$$

Тогда

$$x_C = \frac{\sum(l_i x_{C_i})}{\sum l_i} = \frac{\sum(R \Delta y_i)}{l} = R \frac{\sum \Delta y_i}{l} = R \frac{AB}{l},$$

так как $\sum \Delta y_i = AB$, а $\sum l_i = l$ — длина дуги AB . Но $AB = 2R \sin \alpha$, а $l = 2R\alpha$, следовательно,

$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

При $\alpha = \pi/2$ рад (полуокружность)

$$x_C = \frac{2R}{\pi}.$$

Круговой сектор. Возьмем сектор радиусом R с центральным углом 2α (рис. 8.6). Проведем оси координат, как показано на рисунке, тогда $y_C = 0$. Определим x_C , для чего разобьем сектор на ряд элементарных секторов, каждый из которых вследствие малости дуги l_i примем за равнобедренный треугольник с высотой R . Тогда центр тяжести каждого элементарного сектора будет лежать на дуге радиуса $2R/3$ и задача определения центра тяжести сектора сведется к определению центра тяжести дуги окружности радиуса $2R/3$, следовательно,

$$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}.$$

При $\alpha = \pi/2$ рад (полукруг)

$$x_C = \frac{4R}{3\pi}.$$

Пример 8.1. Определить положение центра тяжести сечения, составленного из двутавра № 22 и швеллера № 20У, как показано на рис. 8.7.

Решение. Из курса инженерной графики известно, что номер профиля проката соответствует наибольшему габаритному размеру его сечения, выраженному в сантиметрах.

Так как сечение, составленное из двутавра и швеллера, представляет собой фигуру, симметричную относительно оси y , то центр тяжести такого сечения лежит на этой оси, т.е. $x_C = 0$. По справочнику [1] определим площади координаты центров тяжести двутавра 1 и швеллера 2.

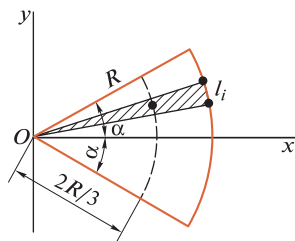


Рис. 8.6

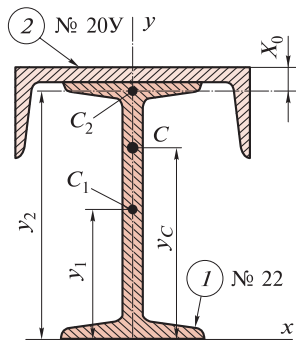


Рис. 8.7

Для двутаврового сечения

$$A_1 = 30,6 \text{ см}^2; \quad y_1 = 22/2 = 11 \text{ см};$$

для швеллерного сечения

$$A_2 = 23,4 \text{ см}^2; \quad y_2 = 22 + s - X_0 = 22 + 5,2 - 2,07 = 25,13 \text{ см},$$

где s — толщина стенки швеллера; X_0 — размер, определяющий положение центра тяжести швеллера.

Применим формулу для определения ординаты центра тяжести всего сечения

$$y_C = \frac{\sum(A_i y_i)}{\sum A_i},$$

тогда

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{30,6 \cdot 11 + 23,4 \cdot 25,13}{30,6 + 23,4} = 17,1 \text{ см}.$$

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

КИНЕМАТИКА

Глава 9

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

9.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ И НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Кинематика — часть теоретической механики, в которой изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

Когда в механике говорят о движении тела, то подразумевают под этим изменение с течением времени его положения в пространстве по отношению к другим телам. Обычно с телом, по отношению к которому изучают движение, связывают какую-нибудь систему координат, которую вместе с выбранным способом измерения времени называют *системой отсчета*. Если координаты всех точек тела в выбранной системе отсчета остаются все время неизменными, то тело находится в покое. Если рассматривается движение тела по отношению к условно неподвижной системе отсчета, то движение называют *абсолютным*; движение тела по отношению к подвижной системе отсчета называют *относительным*. В мире все находится в непрерывном движении, поэтому все движения являются относительными, однако условно можно представить себе и абсолютное движение, например движение по отношению к Земле.

Итак, движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство и время, как и движение, согласно учению диалектического материализма, суть формы существования материи.

Классическая механика полагает, что пространство и время имеют абсолютный, независимый друг от друга характер и что их свойства не зависят от распределения и движения материи.

К началу XX в. значительно расширились познания людей о свойствах материи, в результате чего возникли новые представления о формах существования материи, а в 1905—1916 гг. А. Эйнштейном (1879—1955) была создана теория относительности.

Теория относительности — это современная физическая теория пространства и времени; с ней тесно связаны такие понятия, как движение, масса, энергия и др. В основу теории относительности положен принцип постоянства скорости света, согласно которому скорость света в вакууме постоянна и не зависит от скорости источника света. Теория относительности, к настоящему времени подтвержденная громадным количеством опытных фактов и применяющаяся на практике, устанавливает, что пространство и время связаны между собой в единую пространственно-временную форму существования материи, имеющую абсолютный характер, не зависящую от системы отсчета; пространство и время в отдельности являются понятиями относительными, зависящими от системы отсчета, например от скорости ее движения.

Таким образом, в теории относительности понятия длины тела и промежутка времени являются понятиями относительными, зависящими от скорости движения тела. Эти зависимости выражаются следующими формулами:

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad t = t_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где l — продольный размер движущегося тела; l_0 — продольный размер покоящегося тела; v — скорость движения тела; c — скорость света в вакууме (300 000 км/с); t — промежуток времени при движении по земным часам; t_0 — промежуток времени в покое.

Итак, у движущегося тела продольные размеры сокращаются, а промежутки времени между двумя событиями удлиняются, т. е. происходит замедление времени.

Из теории относительности следует, что на Земле и на космической ракете время течет по-разному, т. е. ход любых часов и протекание любых биологических процессов на ракете происходит медленнее, чем на Земле.

В 1958 г. немецкий физик Р. Л. Мёссбауэр открыл способ изготовления «ядерных часов», отмеряющих время с погрешностью 10^{-12} с. В 1964 г. профессор А. Туликов (МГУ) открыл новое физическое явление, названное «эффект теней». Если до этого открытия экспериментаторы умели измерять время с погрешностью от 10^{-12} до 10^{-13} с, то с помощью «эффекта теней» можно измерять время с погрешностью до 10^{-18} с. Опыты показали, что при быстром движении ход «ядерных часов» несколько замедляется.

Несмотря на возникновение теории относительности, классическая механика не потеряла своего значения, так как при скоростях движения, далеких от скорости света, результаты, даваемые классической механикой, мало отличаются от результатов механики теории относительности и вполне пригодны для практики. Классическая механика является частным (предельным) случаем механики теории относительности.

9.2. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

При дальнейшем изучении предмета теоретической механики, в особенности при решении задач, мы столкнемся с новыми понятиями, относящимися к науке, которая называется теорией механизмов и машин.

Теория механизмов и машин занимается приложением законов теоретической механики к механизмам и машинам.

Теория механизмов и машин как наука возникла сравнительно недавно, в XVIII в. Этот и последующий век ознаменовались многими замечательными изобретениями, как, например, паровая машина, паровоз, двигатель внутреннего сгорания, самолет. Широкое применение механизмов и машин в практической деятельности людей привело к необходимости создания новой науки. Основоположником русской школы теории механизмов и машин был П.Л. Чебышев (1821 — 1894).

Ознакомимся с основными определениями теории механизмов и машин.

Механизмом называется совокупность связанных между собой тел, имеющих определенные движения. Механизмы служат для передачи или преобразования движения.

Машина есть механизм или сочетание механизмов, осуществляющих определенные целесообразные движения для преобразования энергии (энергетические машины), изменения формы, свойств, состояния и положения предмета труда (рабочие машины) или для сбора, переработки и использования информации (информационные машины).

Таким образом, всякая машина состоит из одного или нескольких механизмов, но не всякий механизм является машиной.

Работа механизма или машины обязательно сопровождается тем или иным движением ее органов. Это основной фактор, отличающий механизмы и машины от *сооружений* — мостов, зданий и т. д.

Простейшей частью механизма является звено. *Звено* — это одно тело или неизменяемое сочетание тел.

Два звена, соединенные между собой и допускающие относительное движение, называются *кинематической парой*. Кинематические пары бывают *нижние* и *высшие*. Звенья низших пар соприкасаются по поверхностям (поступательные, вращательные и винтовые пары), звенья высших пар соприкасаются по линиям и точкам (зубчатые пары, подшипники качения).

Совокупность кинематических пар называется *кинематической цепью*. Кинематические пары и цепи могут быть *плоскими* и *пространственными*.

Механизм получается из кинематической цепи путем закрепления одного из звеньев. Это неподвижное звено называется *станинной*, или *стойкой*.

Звено, вращающееся вокруг неподвижной оси, называется *кривошипом*. Звено, качающееся вокруг неподвижной оси, называется *балансиром*, или *коромыслом*. Звено, совершающее сложное движение параллельно какой-то плоскости, называется *шатуном*. Звено, движущееся возвратно-поступательно по станине, называется *ползуном*.

Подвижное звено, выполненное, например, в виде рейки с пазом и совершающее вращательное или иное движение, называется *кулисой*, в пазу скользит *камень кулисы*.

Звено, которому извне сообщается определенное движение, называется *ведущим*. Остальные подвижные звенья называются *ведомыми*.

Различные звенья и кинематические пары механизмов имеют свои условные стандартные обозначения, которые и применяются в этой книге.

В качестве примера рассмотрим широко распространенный кривошипно-ползунный механизм, схематически изображенный на рис. 9.1.

Этот механизм служит для преобразования вращательного движения в возвратно-поступательное (например, в компрессорах, поршневых насосах, эксцентриковых и кривошипных прессах) или, наоборот, для преобразования возвратно-поступательного движения во вращательное (например, в паровых машинах, двигателях внутреннего сгорания).

Кривошипно-ползунный механизм состоит из четырех звеньев: кривошипа *OA*, шатуна *AB*, ползуна *B*, станины и четырех кинематических пар: кривошипной пары в точке *O*, шарнирной пары в точке *A*, шарнирной пары в точке *B* и пары скользящего контакта между ползуном и станиной.

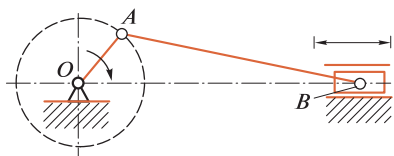


Рис. 9.1

матических пар: вращательной пары станина — кривошип, вращательной пары кривошип — шатун, вращательной пары шатун — ползун и поступательной пары ползун — станина.

Кривошипно-ползунный механизм — плоский, его ведущим звеном является либо кривошип, либо ползун.

9.3. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Знание законов движения тела означает знание законов движения каждой его точки, поэтому изучение кинематики начнем с изучения движения геометрической точки.

Траекторией точки называется множество (геометрическое место) положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета.

В зависимости от формы траектории движение точки бывает двух видов: *прямолинейное* и *криволинейное*. Рассмотрим два способа задания движения точки: естественный и координатный.

Естественный способ заключается в том, что движение точки задается ее траекторией, началом отсчета и уравнением движения по этой траектории (законом движения).

Уравнение движения в общем виде записывается следующим образом:

$$s = f(t),$$

где s — расстояние точки от начального положения, являющееся функцией времени; t — время движения точки от начального момента.

Зная траекторию точки и уравнение движения по этой траектории, можно определить положение точки в любой момент времени, для чего следует в равенство $s = f(t)$ подставить время.

При своем движении точка проходит некоторый путь, также являющийся функцией времени. Следует подчеркнуть, что путь, пройденный точкой, совпадает с расстоянием от начала отсчета лишь тогда, когда точка все время движется в одном направлении и начало ее движения совпадает с началом отсчета.

Координатный способ заключается в том, что движение точки задается движением ее проекций вдоль осей координат.

Уравнения плоского движения точки в координатной форме записываются следующим образом:

$$x = f(t); \quad y = f_1(t).$$

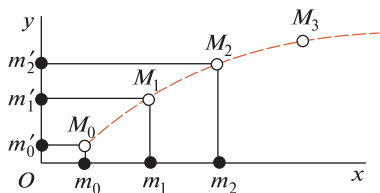


Рис. 9.2

Зная уравнения движения точки в координатной форме, можно, подставив в эти уравнения время, определить положение проекций точки, а следовательно, и самой точки в любой момент времени (рис. 9.2).

Для того чтобы при координатном способе задания движения точки определить уравнение траектории $y = f(t)$, необходимо из уравнений движения исключить время.

Международная система единиц (СИ) устанавливает в качестве единицы длины *метр* (м), а в качестве единицы времени — *секунду* (с).

Пример 9.1. Кривошип OA вращается около неподвижной оси так, что угол $\varphi = 10t$ рад. Длина $OA = AB = 0,8$ м. Найти уравнения движения и траекторию средней точки M шатуна, а также уравнение движения ползуна B , если в начальный момент ползун находится в крайнем положении; оси координат указаны на рис. 9.3.

Решение. Определим координаты точки M в зависимости от угла φ :

$$x_M = OA \cos \varphi + AM \cos \varphi = 0,8 \cos \varphi + 0,4 \cos \varphi = 1,2 \cos \varphi;$$

$$y_M = MB \sin \varphi = 0,4 \sin \varphi.$$

Таким образом, уравнения движения точки M запишутся так:

$$x_M = 1,2 \cos 10t; \quad y_M = 0,4 \sin 10t.$$

Чтобы определить уравнение траектории точки M , исключим из уравнений движения время. Преобразуем уравнения движения и возведем их в квадрат:

$$\frac{x_M^2}{1,2^2} = \cos^2 10t; \quad \frac{y_M^2}{0,4^2} = \sin^2 10t.$$

Сложив правые и левые части этих равенств, получим уравнение траектории точки M :

$$\frac{x_M^2}{1,2^2} + \frac{y_M^2}{0,4^2} = 1.$$

Точка M движется по эллипсу с полуосями длиной 1,2 и 0,4 м. Так как ползун B движется прямолинейно вдоль оси x , то $y_B = 0$.

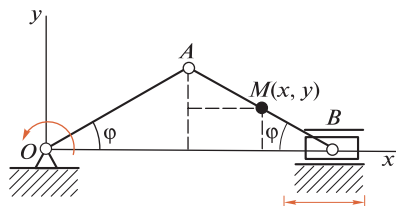


Рис. 9.3

Для получения уравнения движения ползуна определим абсциссу точки B в зависимости от угла φ :

$$\begin{aligned} x_B &= OA \cos \varphi + AB \cos \varphi = \\ &= 0,8 \cos \varphi + 0,8 \cos \varphi = 1,6 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Тогда уравнение движения ползуна запишется так:

$$x_B = 1,6 \cos 10t \text{ [м]}.$$

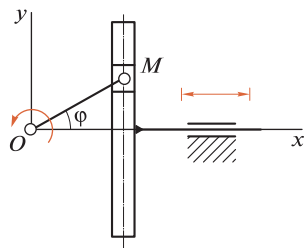


Рис. 9.4

Пример 9.2. Кривошип OM кулисы Вольфа равномерно вращается около неподвижной оси O так, что угол $\varphi = (\pi/4)t$ рад (рис. 9.4). Длина стержня $OM = 0,2$ м. В начальный момент стержень OM составил с осью Ox угол $\varphi_0 = 0$.

Составить уравнение движения кулисы.

Решение. Из конструкции механизма видно, что кулиса движется возвратно-поступательно вдоль оси x . Очевидно, что кулиса будет двигаться по тому же закону, по которому движется проекция точки M на ось x , следовательно,

$$x = x_M = OM \cos \varphi = 0,2 \cos(\pi/4)t \text{ [м]}.$$

9.4. СКОРОСТЬ ТОЧКИ

Скорость есть кинематическая мера движения точки, характеризующая быстроту изменения ее положения.

Как известно из физики, при равномерном движении скорость измеряется длиной пути, пройденного за единицу времени:

$$v = \frac{s}{t} = \text{const}$$

(предполагается, что начала отсчета пути и времени совпадают).

Размерность скорости

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{длина}}{\text{время}} = \text{метр в секунду} = \text{м/с}.$$

Скорость есть величина векторная. При прямолинейном равномерном движении скорость постоянна и по модулю, и по направлению, а вектор ее совпадает с траекторией (рис. 9.5, а).

При криволинейном движении скорость точки по направлению меняется. Для того чтобы установить направление вектора скорости

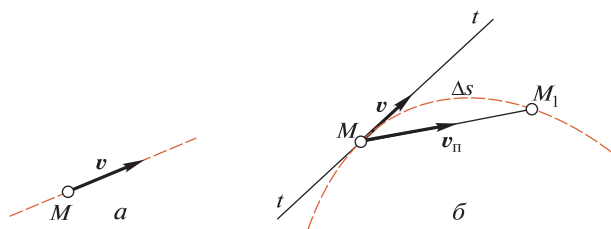


Рис. 9.5

при криволинейном движении, разобьем траекторию на бесконечно малые участки пути, которые можно считать вследствие их малости прямолинейными. Тогда на каждом участке условная скорость v_n такого прямолинейного движения будет направлена по хорде. В пределе при Δs , стремящемся к нулю, хорда совпадает с касательной, следовательно, *скорость в каждый момент времени направлена по касательной к траектории в сторону движения* (рис. 9.5, б).

При неравномерном движении точки модуль ее скорости меняется. Представим себе точку, движение которой задано естественным способом уравнением

$$s = f(t).$$

Если за небольшой промежуток времени Δt точка прошла путь Δs , то ее средняя скорость равна

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Средняя скорость не дает представления об истинной скорости в каждый данный момент времени (истинную скорость иначе называют мгновенной). Чем меньше промежуток времени, за который определяется средняя скорость, тем ближе она к истинной.

Истинная скорость есть предел, к которому стремится средняя скорость при Δt , стремящемся к нулю:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, числовое значение скорости равно

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Истинная скорость при любом движении точки равна первой производной координаты (т. е. расстояния от начала отсчета перемещения) по времени.

Движение, в котором скорость с течением времени возрастает, называют *ускоренным*; движение, в котором скорость с течением времени уменьшается, — *замедленным*.

Пример 9.3. Поезд движется согласно уравнению

$$s = 0,1t^2 + t,$$

где t — в секундах, s — в метрах.

Определить среднюю скорость поезда за промежуток времени между концом 10-й и 20-й секунд и истинную скорость в конце 20-й секунды.

Решение. Для определения средней скорости поезда найдем приращения времени и пути за указанный промежуток времени:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 10 = 10 \text{ с};$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = (0,1t_2^2 + t_2) - (0,1t_1^2 + t_1) = 0,1 \cdot 20^2 + 20 - 0,1 \cdot 10^2 - 10 = 40 \text{ м}.$$

Средняя скорость поезда определится так:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40}{10} = 4 \text{ м/с}.$$

Для определения истинной скорости поезда про дифференцируем уравнение движения по времени, в результате чего получим формулу, выражающую зависимость истинной скорости от времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(0,1t^2 + t) = 0,2t + 1.$$

Подставив в это выражение время t_2 , получим значение истинной скорости в конце 20-й секунды:

$$v_{20} = 0,2t_2 + 1 = 0,2 \cdot 20 + 1 = 5 \text{ м/с}.$$

Пусть точка из положения M , двигаясь неравномерно, за время Δt перешла в положение M_1 (см. рис. 9.5, б). Дугу MM_1 обозначим Δs . Отрезок MM_1 назовем вектором перемещения точки M . Допустим, что точка M перешла за время Δt в положение M_1 , двигаясь по хорде и притом равномерно, тогда скорость такого прямолинейного движения будет

$$v_{\text{п}} = \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

Перейдем к пределу, умножив предварительно числитель и знаменатель правой части на Δs , и представим предел произведения как произведение пределов:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{п}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta s} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Так как при Δt , стремящемся к нулю, Δs также стремится к нулю, то первый предел (предел отношения хорды к соответствующей дуге) равен единице. Второй предел дает первую производную пути по времени, т. е. истинную скорость, причем вектор \mathbf{v}_n в пределе будет направлен по касательной, т. е. совпадет с вектором истинной скорости \mathbf{v} . Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = \mathbf{v}.$$

Следовательно, *предел вектора условной скорости \mathbf{v}_n* , равный пределу отношения вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени, когда последний стремится к нулю, равен вектору истинной скорости точки.

В дальнейшем использование этого вывода позволяет упростить математическую часть доказательств некоторых теорем.

9.5. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ В ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

Ускорение есть кинематическая мера изменения вектора скорости точки.

Ускорение есть величина векторная. При прямолинейном движении точки вектор скорости всегда совпадает с траекторией и поэтому вектор изменения скорости также совпадает с траекторией.

Из курса физики известно, что ускорение представляет собой изменение скорости в единицу времени. Если за небольшой промежуток времени Δt скорость точки изменилась на Δv , то среднее ускорение

$$a_{\text{cp}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Среднее ускорение не дает представления об истинном ускорении в каждый данный момент времени (истинное ускорение иначе называют мгновенным). Чем меньше промежуток времени, за который определяют среднее ускорение, тем ближе оно к истинному. Истинное ускорение есть предел, к которому стремится среднее ускорение при Δt , стремящемся к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом, учитывая, что $v = \frac{ds}{dt}$, получаем

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Истинное ускорение в прямолинейном движении равно первой производной скорости или второй производной координаты (расстояния от начала отсчета перемещения) по времени.

Размерность ускорения

$$[a] = \frac{[s]}{[t]^2} = \frac{\text{длина}}{\text{время в квадрате}} = \text{метр на секунду в квадрате} = \text{м/с}^2.$$

Пример 9.4. Точка движется прямолинейно по закону $s = t^4 + 2t$, где s — в метрах, t — в секундах. Найти ее среднее ускорение в промежутке между моментами $t_1 = 5$ с, $t_2 = 7$ с, а также ее истинное ускорение в момент $t_3 = 6$ с.

Решение. Сначала определяем скорость точки:

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 2.$$

Подставляя в формулу вместо t его значения $t_1 = 5$ с и $t_2 = 7$, находим:

$$v_5 = 4 \cdot 5^3 + 2 = 502 \text{ м/с};$$

$$v_7 = 4 \cdot 7^3 + 2 = 1374 \text{ м/с}.$$

Следовательно, приращение скорости за данный промежуток времени $\Delta t = 7 - 5 = 2$ с будет равно

$$\Delta v = v_7 - v_5 = 1374 - 502 = 872 \text{ м/с}.$$

Среднее ускорение точки

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{872}{2} = 436 \text{ м/с}^2.$$

Чтобы определить истинное ускорение точки, находим производную от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t^2.$$

Подставляя в формулу вместо t значение $t_3 = 6$, получаем

$$a_6 = 12 \cdot 6^2 = 432 \text{ м/с}^2.$$

9.6. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ В КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

При движении точки по криволинейной траектории скорость меняет свое направление. Представим себе точку M , которая за время

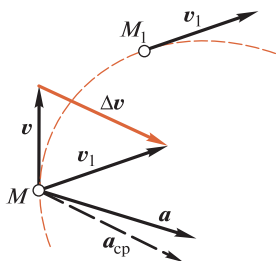


Рис. 9.6

Δt , двигаясь по криволинейной траектории, переместилась в положение M_1 (рис. 9.6).

Вектор приращения (изменения) скорости обозначим Δv , тогда

$$\Delta v = v_1 - v.$$

Для нахождения вектора Δv перенесем вектор v_1 в точку M и построим треугольник скоростей. Определим вектор среднего ускорения:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Вектор $a_{\text{ср}}$ параллелен вектору Δv , так как от деления векторной величины на скалярную направление вектора не меняется.

Вектор истинного ускорения есть предел, к которому стремится отношение вектора приращения скорости к соответствующему промежутку времени, когда последний стремится к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Таким образом, *истинное ускорение точки в криволинейном движении равно векторной производной скорости по времени*. Из рис. 9.6 видно, что вектор ускорения в криволинейном движении всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

9.7. ПОНЯТИЕ О КРИВИЗНЕ КРИВЫХ ЛИНИЙ

В подразд. 9.8 будет доказано, что *ускорение точки в криволинейном движении зависит от степени изогнутости ее траектории, т. е. от кривизны траектории*.

Рассмотрим криволинейную траекторию точки M (рис. 9.7, а).

Угол $\Delta\varphi$ между касательными к кривой в двух соседних точках называется *углом смежности*.

Кривизной кривой в данной точке называется предел отношения угла смежности к соответствующей длине Δs дуги, когда последняя стремится к нулю. Обозначим кривизну буквой k , тогда

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Рассмотрим окружность радиуса R (рис. 9.7, б). Так как

$$\Delta s = R\Delta\varphi,$$

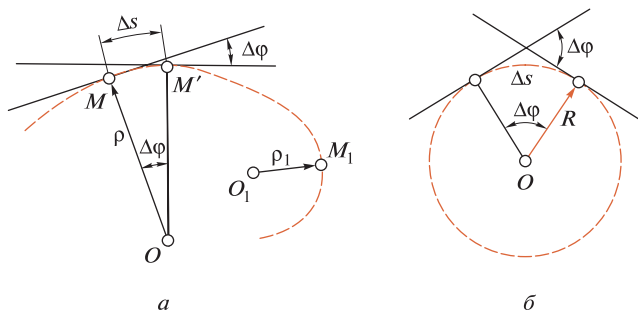


Рис. 9.7

то

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{R \Delta \varphi} = \frac{1}{R}.$$

Следовательно, кривизна окружности во всех точках одинакова и равна

$$k = \frac{1}{R}.$$

Для каждой точки данной кривой можно подобрать такую окружность, кривизна которой равна кривизне кривой в данной точке. Радиус ρ такой окружности называется *радиусом кривизны* кривой в данной точке, а центр этой окружности называется *центром кривизны*.

Итак, кривизна кривой в данной точке есть величина, обратная радиусу кривизны в этой же точке:

$$k = \frac{1}{\rho}.$$

Очевидно, что кривизна прямой линии равна нулю, а радиус кривизны равен бесконечности:

$$k = 0; \quad \rho = \frac{1}{k} = \infty.$$

9.8. ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИИ УСКОРЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНУЮ И НОРМАЛЬ

Проекция полного ускорения на нормаль к траектории называется *нормальным ускорением*; проекция полного ускорения на касательную к траектории называется *касательным ускорением*. Касательное ускорение иногда называют тангенциальным (рис. 9.8).

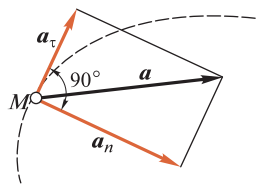


Рис. 9.8

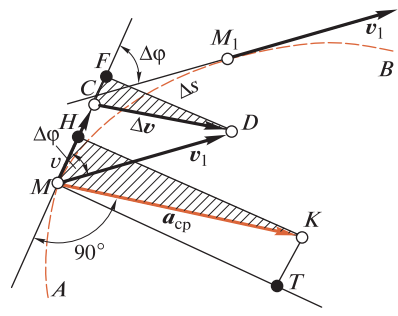


Рис. 9.9

Теорема. Нормальное ускорение равно квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке, касательное ускорение — первой производной скорости по времени.

Пусть задано плоское движение точки M по траектории AB (рис. 9.9). За время Δt точка перешла из положения M в положение M_1 , пройдя при этом путь $\Delta s = \cup MM_1$.

Вектор приращения скорости за время Δt равен

$$\Delta v = v_1 - v.$$

Определим вектор среднего ускорения:

$$a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

отложим этот вектор из точки M параллельно вектору Δv .

Спроецируем вектор a_{cp} на касательную и нормаль, точку D также спроецируем на касательную.

Рассмотрим подобные треугольники CDF и MKH .

Из подобия этих треугольников имеем

$$\frac{HK}{FD} = \frac{MH}{CF} = \frac{a_{cp}}{\Delta v} = \frac{\Delta v}{\Delta t \Delta v} = \frac{1}{\Delta t},$$

откуда

$$HK = \frac{FD}{\Delta t}; \quad MH = \frac{CF}{\Delta t}.$$

Перейдем к пределу при Δt , стремящемся к нулю (при этом $\Delta \varphi$ и Δs также стремятся к нулю):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} HK = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{FD}{\Delta t} = a_n \text{ (нормальное ускорение);}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} MH = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CF}{\Delta t} = a_\tau \text{ (касательное ускорение).}$$

Вычислим первый предел при Δt , стремящемся к нулю:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{FD}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v_1 \sin \Delta \varphi}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{\rho},$$

так как

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 = v; \quad \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} = 1; \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

Вычислим второй предел при Δt , стремящемся к нулю:

$$\begin{aligned} a_\tau &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CF}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta \varphi - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \right) - v}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v_1 - v}{\Delta t} - 2 \frac{v_1 \sin^2 \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \frac{\Delta \varphi}{2} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

так как

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 = v; \quad \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} = 1;$$

$$\lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \varphi}{2} = 0; \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

(предел второго слагаемого равен нулю, так как он представляет собой произведение конечных величин, умноженных на нуль).

Итак,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt};$$

и теорема доказана.

Анализируя формулы касательного и нормального ускорений, можно увидеть, что если нет изменения скорости по модулю, то $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$; если нет изменения скорости по направлению (прямолинейное движение), то $a_n = v^2/\infty = 0$. Отсюда следует, что *касательное ускорение характеризует изменение скорости только по модулю, а нормальное — только по направлению.*

Зная касательное и нормальное ускорения, можно вычислить модуль полного ускорения по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

Если $a_\tau = \frac{dv}{dt} > 0$, то векторы касательного ускорения и скорости направлены в одну сторону и движение будет ускоренным. Если $a_\tau = \frac{dv}{dt} < 0$, то вектор касательного ускорения направлен в сторону, противоположную вектору скорости, и движение будет замедленным.

Вектор нормального ускорения всегда направлен к центру кривизны, поэтому это ускорение иначе называют *центростремительным*.

Пример 9.5. Точка обода маховика в период разгона движется согласно уравнению $s = 0,1t^3$, t — в секундах, s — в метрах. Радиус маховика равен 2 м. Определить нормальное и касательное ускорения точки в момент, когда ее скорость $v = 30$ м/с.

Решение. Для определения скорости вычислим производную пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = 0,3t^2,$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{v}{0,3}} = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10 \text{ с.}$$

Для этого момента следует определить нормальное и касательное ускорения точки. Находим касательное ускорение как производную скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,6t.$$

Подставляем в выражение для касательного ускорения значение $t = 10$ с:

$$a_\tau = 0,6 \cdot 10 = 6 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки определяем по формуле

$$a_n = v^2/\rho.$$

Для момента времени $t = 10$ с находим

$$a_n = 30^2/2 = 450 \text{ м/с}^2.$$

9.9. ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ УСКОРЕНИЙ

Анализируя полученные формулы касательного и нормального ускорений, можно установить следующие виды движения точки:

$$1) a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \neq 0; a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0,$$

в этом случае движение *неравномерное* ($v \neq \text{const}$) *криволинейное* ($\rho \neq \infty$);

$$2) a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0; a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

в этом случае движение *равномерное* ($v = \text{const}$) *криволинейное* ($\rho \neq \infty$);

$$3) a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \neq 0; a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

в этом случае движение *неравномерное* ($v \neq \text{const}$) *прямолинейное* ($\rho = \infty$);

$$4) a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \text{const} \neq 0,$$

в этом случае движение *равнопеременное* (*криволинейное*, если $a_n \neq 0$, *прямолинейное*, если $a_n = 0$);

$$5) a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0, a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

в этом случае движение *равнопеременное прямолинейное*, которое является единственным видом движения без ускорения.

9.10. ТЕОРЕМЫ О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ НА КООРДИНАТНЫЕ ОСИ

Если движение точки задано естественным способом, то скорость ее находят как первую производную перемещения по времени; если движение точки задано в координатной форме, то с помощью теоремы о проекции скорости на координатную ось.

Теорема. Проекция скорости на координатную ось равна первой производной от соответствующей координаты по времени.

Мысленно разложим вектор скорости точки на две взаимно-перпендикулярные составляющие v_x и v_y , параллельные осям координат. По модулю эти составляющие равны проекциям вектора скорости точки на координатные оси и представляют собой скорость движения проекции точки вдоль осей координат. Таким образом

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Зная две проекции скорости, можно найти ее модуль по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Теорема доказана.

Теорема. Проекция ускорения на координатную ось равна второй производной от соответствующей координаты по времени.

Так как проекции точек на оси движутся прямолинейно, то

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Зная две проекции ускорения, можно найти модуль полного ускорения по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Глава 10

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

10.1. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Различают два вида простейших движений твердого тела: поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

Движение тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению, называется *поступательным*. Представление о поступательном движении можно получить, наблюдая движение кузова вагона трамвая на прямолинейном участке пути, поступательно движется стол продольно-строгального станка, поршень стационарного двигателя внутреннего сгорания и т. п.

Теорема. При поступательном движении все точки твердого тела имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения.

Пусть за время Δt тело, двигаясь поступательно, переместилось из положения AB в положение A_1B_1 , причем произвольная точка A прошла путь Δs_A , а другая произвольная точка B прошла путь Δs_B (рис. 10.1):

$$\cup AA_1 = \Delta s_A; \quad \cup BB_1 = \Delta s_B.$$

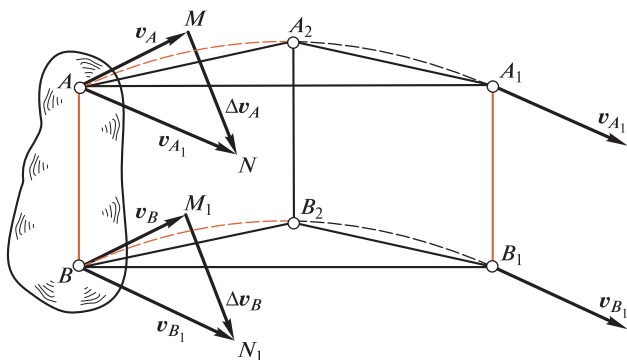


Рис. 10.1

Соединим точки A и A_1 , B и B_1 хордами. Так как $AB = A_1B_1$ (тело твердое) и $AB \parallel A_1B_1$ (движение поступательное), то фигура ABB_1A_1 — параллелограмм. Следовательно, хорда AA_1 равна и параллельна хорде BB_1 .

Возьмем промежуточное положение прямой A_2B_2 и соединим концы этого отрезка с точками A и A_1 , B и B_1 , как показано на рисунке.

Аналогично предыдущему можно доказать, что вписанные ломаные линии AA_2A_1 и BB_2B_1 имеют попарно равные и параллельные стороны. Если бесконечное число раз удваивать число сторон этих ломаных линий, то в пределе они дадут дуги Δs_A и Δs_B . Но так как эти ломаные линии всегда одинаковы, то они одинаковы и в пределе, следовательно, траектории произвольных точек A и B будут одинаковы:

$$\cup \Delta s_A = \cup \Delta s_B.$$

Так как точки A и B выбраны произвольно, то, следовательно, *траектории всех точек тела будут одинаковы.*

Докажем теперь, что скорости и ускорения точек A и B , а следовательно, и всех точек тела в каждый данный момент времени равны. Так как векторы перемещений точек A и B равны между собой:

$$AA_1 = BB_1,$$

то, разделив обе части этого векторного равенства на Δt и перейдя к пределу при Δt , стремящемся к нулю, получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BB_1}{\Delta t}.$$

Эти пределы дают векторы скоростей точек (см. подразд. 9.4), следовательно,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B.$$

Перенесем векторы скоростей \mathbf{v}_{A_1} и \mathbf{v}_{B_1} в точки A и B и найдем векторы приращения скоростей $\Delta \mathbf{v}_A$ и $\Delta \mathbf{v}_B$. Рассмотрим треугольники AMN и BM_1N_1 . Эти треугольники конгруэнтны (равны), и их равные стороны попарно параллельны, следовательно,

$$\Delta \mathbf{v}_A = \Delta \mathbf{v}_B.$$

Разделим обе части этого векторного равенства на Δt и перейдем к пределу при Δt , стремящемся к нулю, в результате чего получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_B}{\Delta t},$$

или

$$a_A = a_B;$$

теорема доказана.

Таким образом, поступательное движение твердого тела вполне определяется движением одной из его точек, следовательно, все формулы кинематики точки применимы для тела, движущегося поступательно.

Пример 10.1. Звенья 1 и 2 механизма чертежного приспособления (рис. 10.2) могут поворачиваться относительно опор A и C и шарнирно соединены с диском 3, диск и линейка 6 шарнирно соединены звеньями 4 и 5. Доказать, что диск 3 и линейка 6 будут совершать поступательное движение, если $AB = CD$, $AC = BD$, $EF = GH$, $EG = FH$.

Решение. Рассмотрим четырехугольник $ABDC$. Так как противоположные стороны этого четырехугольника по условию попарно равны, то он представляет собой параллелограмм. Отсюда следует, что при любом перемещении звеньев 1 и 2 сторона BD остается параллельной неподвижной стороне AC . Таким образом, согласно определению поступательного движения, сторона BD и жестко связанный с ней диск могут перемещаться только поступательно. Так же, только поступательно, может перемещаться и отрезок EG , жестко связанный с диском 3.

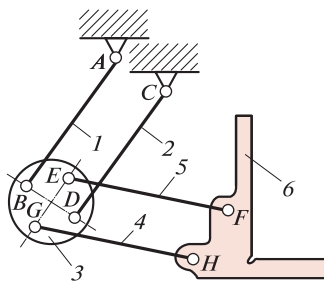


Рис. 10.2

Далее рассмотрим четырехугольник $EFHG$, который по условию является параллелограммом при любом положении механизма. Следовательно, сторона FH движется так же, как и сторона EG , т.е. поступательно. Очевидно, что линейка 6, жестко связанная со стороной FH , также может двигаться только поступательно.

В приведенном примере предполагалось, что звенья механизма представляют собой абсолютно твердые тела.

10.2. ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Движение, при котором по крайней мере две точки твердого тела или неизменяемой системы остаются неподвижными, называется *вращательным*; прямая линия, соединяющая эти две точки, называется *осью вращения*. В определении вращательного движения

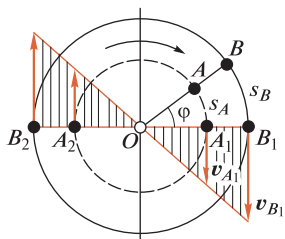


Рис. 10.3

говорится о неизменяемой системе, потому что ось вращения может лежать и вне тела.

Вращательное движение в технике встречается весьма часто. В подавляющем большинстве механизмов и машин имеются звенья, которые совершают вращательное движение, например валы, зубчатые колеса, кривошпы и т.д. Заметим, что понятие вращательного движения может относиться только к телу, но не к точке; так,

например, движение точки по окружности есть не вращательное движение, а криволинейное.

Рассмотрим диск, вращающийся вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа (рис. 10.3). Точка O — след этой оси. Очевидно, что траектории точек вращающегося тела есть окружности различных радиусов, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, с центрами, лежащими на этой оси.

Пусть за время t диск повернулся на угол φ . При этом точка A прошла путь s_A , а точка B — путь s_B . Так как точки, находящиеся на различном расстоянии от оси вращения, за один и тот же промежуток времени проходят разные пути, то, следовательно, они имеют разные скорости и ускорения.

Итак, при вращательном движении тела его точки, находящиеся на различном расстоянии от оси вращения, имеют неодинаковые траектории, скорости и ускорения.

Отсюда следует, что линейное перемещение (путь), линейные скорость и ускорение точек не могут характеризовать вращательное движение тела в целом. Вращательное движение тела можно характеризовать углом φ , на который повернулось тело за данный промежуток времени. Этот угол называется *угловым перемещением тела*. Угловое перемещение выражается в радианах (рад) или оборотах (об); в последнем случае угловое перемещение обозначают N . Для установления зависимости между φ и N составим пропорцию:

$$1 \text{ об} — 2\pi \text{ рад},$$

$$N \text{ об} — \varphi \text{ рад},$$

откуда

$$\varphi = 2\pi N \text{ рад},$$

где N — число оборотов тела.

Угловое перемещение тела есть функция времени, следовательно, закон *вращательного движения* в самом общем виде выглядит так:

$$\varphi = f(t).$$

Из рис. 10.3 видно, что путь любой точки вращающегося тела

$$s = r\varphi,$$

где r — расстояние точки от оси вращения.

Скорость любой точки тела определяется так:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}$$

(r вынесли за знак производной, так как для данной точки твердого тела эта величина постоянна).

Выражение $\frac{d\varphi}{dt}$ обозначим ω и назовем угловой скоростью. *Угловая скорость* есть кинематическая мера движения вращающегося тела, характеризующая быстроту его углового перемещения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловая скорость равна первой производной углового перемещения по времени.

Размерность угловой скорости

$$[\omega] = \frac{[\varphi]}{[t]} = \frac{\text{плоский угол}}{\text{время}} = \text{радиан в секунду} = \text{рад/с} = \text{с}^{-1}.$$

Формула для определения скорости любой точки вращающегося тела имеет следующий вид:

$$v = \omega r.$$

Скорость точки в каждый момент времени прямо пропорциональна ее расстоянию от оси вращения, следовательно, график скоростей точек, например диаметра B_1B_2 , будет представлять собой два треугольника (см. рис 10.3). Очевидно, что *вектор скорости точки вращающегося тела направлен перпендикулярно радиусу*, соединяющему эту точку с осью вращения. Если точка лежит на поверхности вращающегося тела, то ее скорость называют *окружной*.

В технике часто скорость вращения выражают в оборотах в минуту, обозначают буквой n и называют *частотой вращения*. Установим зависимость между угловой скоростью и частотой вращения, выраженными соответственно в рад/с и мин⁻¹. Запишем пропорцию:

$$\omega \text{ рад} - 1 \text{ с},$$

$$2\pi \text{ рад} - 60 \text{ с}.$$

Из пропорции найдем

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с},$$

где n — частота вращения тела, об/мин или мин^{-1} .

Нередко угловую скорость представляют в виде вектора, направленного вдоль оси вращения. Глядя со стороны конца этого вектора, вращательное движение должно быть направлено против часовой стрелки.

Пример 10.2. Проект создания мировой ретрансляционной системы телевидения заключается в запуске трех искусственных спутников Земли таким образом, чтобы они образовали равносторонний треугольник, неподвижный по отношению к Земле. С какой скоростью должны двигаться спутники по круговой орбите, расположенной в плоскости экватора, если известно, что они будут летать на высоте $h = 35\,800$ км? Радиус Земли на экваторе $R = 6\,370$ км (рис. 10.4). Определить также окружную скорость точки на экваторе.

Решение. Если спутники будут неподвижны по отношению к Земле, то можно считать, что вместе с Землей они составляют неизменяемую систему. Определим окружную скорость v_A точки A , находящейся на экваторе Земли, по формуле

$$v_A = \omega R.$$

Угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси равна

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0,727 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}.$$

Тогда скорость точки A будет равна

$$v_A = 0,727 \cdot 10^{-4} \cdot 6\,370 \cdot 10^3 = 463 \text{ м/с}.$$

Так как спутники составляют вместе с Землей неизменяемую систему, вращающуюся вокруг земной оси, то скорости точек этой системы прямо пропорциональны их расстояниям от оси вращения:

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{R+h}{R}.$$

Следовательно, искомая скорость спутников:

$$v_C = \frac{v_A(R+h)}{R} = \frac{463(6\,370+35\,800)10^3}{6\,370 \cdot 10^3} = 3\,065 \text{ м/с}.$$

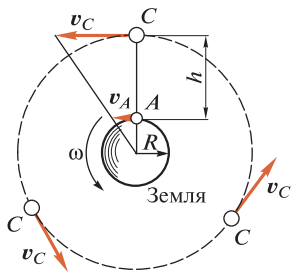


Рис. 10.4

10.3. РАЗЛИЧНЫЕ СЛУЧАИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Равномерное вращательное движение. Если тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью, то движение называется *равномерным*. Формулы равномерного вращательного движения

$$\omega = \text{const}; \quad \varphi = \omega t.$$

Касательное, нормальное и полное ускорения любой точки равномерно вращающегося тела определяют так:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = 0;$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r;$$

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = a_n = \omega^2 r.$$

Неравномерное вращательное движение. Если угловая скорость вращающегося тела с течением времени меняется, то движение называется *неравномерным*. В самом общем виде формулы неравномерного вращательного движения выглядят так:

$$\varphi = f(t); \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Касательное ускорение любой точки неравномерного вращающегося тела определяют следующим образом:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}.$$

Выражение $\frac{d\omega}{dt}$ обозначают α и называют угловым ускорением.

Угловое ускорение есть кинематическая мера изменения угловой скорости вращающегося тела:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Угловое ускорение равно первой производной угловой скорости или второй производной углового перемещения по времени.

Размерность углового ускорения

$$[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{[\varphi]}{[t]^2};$$

$$[\alpha] = \frac{\text{плоский угол}}{\text{время в квадрате}} = \text{радиан на секунду в квадрате} = \text{рад}/\text{с}^2 = \text{с}^{-2}.$$

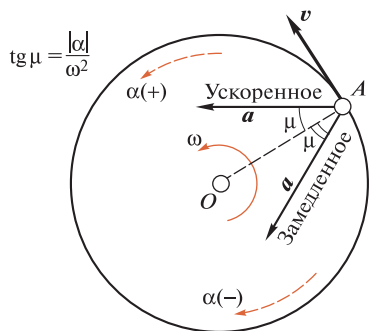


Рис. 10.5

Теперь можно записать формулу для определения касательного ускорения любой точки неравномерно вращающегося тела a_τ в таком виде:

$$a_\tau = \alpha r.$$

Нормальное ускорение определяется по такой же формуле, как и в случае равномерного вращения, т. е.

$$a_n = \omega^2 r.$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\alpha r)^2 + (\omega^2 r)^2},$$

откуда

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}.$$

Если направление углового ускорения совпадает с направлением вращения, то вращательное движение является ускоренным, и наоборот (рис. 10.5).

Равнопеременное вращательное движение. Если тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением, то движение называется *равнопеременным*. Формулы этого вида вращательного движения могут быть получены таким же способом, каким были выведены формулы равнопеременного движения точки, т. е. с помощью интегрального исчисления.

Итак, если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси равнопеременно, то

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{const},$$

откуда

$$d\omega = \alpha dt.$$

Интегрируя это равенство по t , получим

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt,$$

где ω_0 — начальная угловая скорость.

Получим окончательную формулу угловой скорости в следующем виде:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

Далее выведем формулу углового перемещения. Так как при любом вращательном движении

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega; \quad d\varphi = \omega dt,$$

то, интегрируя это равенство по t , получим

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t) dt = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \alpha t dt; \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \alpha t^2/2,$$

где φ_0 — начальное угловое перемещение.

Если $\varphi_0 = 0$, то формула углового перемещения примет вид

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}.$$

Итак, формулы равнопеременного вращательного движения твердого тела записываются следующим образом:

$$\alpha = \text{const};$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t;$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}.$$

Из этих формул можно получить формулы углового перемещения в виде

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t.$$

10.4. СРАВНЕНИЕ ФОРМУЛ КИНЕМАТИКИ ДЛЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

Сравнивая формулы кинематики точки или поступательно движущегося тела с формулами вращательного движения тела, легко заметить, что основные из этих формул аналогичны. Чтобы из формул поступательного движения получить формулы вращательного движения, необходимо вместо линейного перемещения s подставить угловое перемещение φ , вместо линейной скорости v — угловую скорость ω , вместо линейного ускорения a — угловое ускорение α .

Сравнение формул поступательного и вращательного движения удобно провести с помощью табл. 10.1.

Таблица 10.1.

Кинематическая мера движения	Характер движения	Вид движения	
		поступательное	вращательное
Перемещение	Неравномерное	$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
	Равномерное	$s = vt$	$\varphi = \omega t$
	Равнопеременное	$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$
Скорость	Неравномерное	$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
	Равномерное	$v = \text{const}$	$\omega = \text{const}$
	Равнопеременное	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
Ускорение касательное	Неравномерное	$a_\tau = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
	Равномерное	$a_\tau = 0$	$\alpha = 0$
	Равнопеременное	$a_\tau = \text{const}$	$\alpha = \text{const}$
Ускорение нормальное	Любое	$a_n = \frac{v^2}{\rho}$	$a_n = \omega^2 r$

10.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Преобразование вращательных движений осуществляется разнообразными механизмами, которые называются *передачами*. Наиболее распространенные виды таких механизмов — зубчатые, фрикционные передачи и передачи гибкой связью (например, ременные, канатные, ленточные и цепные). С помощью этих механизмов осуществляется передача вращательного движения от источника движения (ведущего вала) к приемнику движения (ведомому валу).

Передачи характеризуются передаточным отношением или передаточным числом.

Передаточным отношением (i) называется отношение угловой скорости ведущего звена к угловой скорости ведомого звена.

Передаточное отношение может быть больше, меньше или равно единице.

Передаточным числом (u) двух сопряженных звеньев называется отношение большей угловой скорости к меньшей.

Передаточное число передачи всегда больше или равно единице. В целях унификации обозначений передаточные отношения и передаточные числа всех передач мы будем обозначать u , в некоторых случаях с двойным индексом, соответствующим индексам звеньев передачи. Итак, передаточное отношение

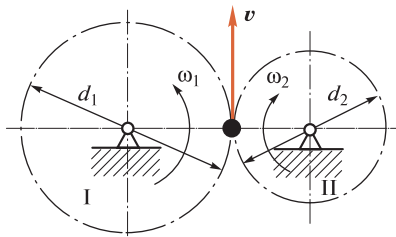


Рис. 10.6

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Заметим, что индекс 1 приписывают параметрам ведущего звена передачи, а индекс 2 — ведомого.

Передача, у которой угловая скорость ведомого звена меньше угловой скорости ведущего, называется *понижающей*; в противном случае передача называется *повышающей*.

В технике наиболее распространены зубчатые, ременные и цепные передачи. Общие сведения о простейших зубчатых передачах, их основных видах, а также конструктивных элементах зубчатых колес, реек и червяков известны из курса инженерной графики. Рассмотрим зубчатую передачу, схематически изображенную на рис. 10.6.

В месте соприкосновения зубчатых колес I и II скорости точек первого и второго колеса одинаковы. Обозначив модуль этой скорости v , получим

$$v = \frac{\omega_1 d_1}{2} = \frac{\omega_2 d_2}{2},$$

следовательно,

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Известно, что диаметр делительной окружности зубчатого колеса равен произведению его модуля на число зубьев $d = mz$, тогда для пары зубчатых колес

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Рассмотрим ременную передачу, схематически изображенную на рис. 10.7. При отсутствии проскальзывания ремня по шкивам

$$v = \frac{\omega_1 d_1}{2} = \frac{\omega_2 d_2}{2},$$

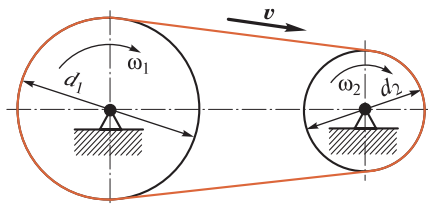


Рис. 10.7

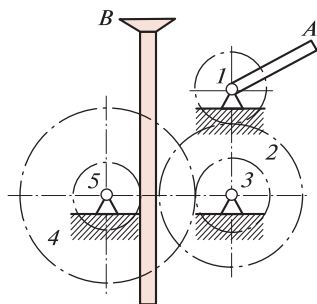


Рис. 10.8

тогда для ременной передачи

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Для цепных передач

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

где z_1, z_2 — числа зубьев ведущей и ведомой звездочек передачи.

Различные виды передач подробно изучают в курсе деталей машин.

Пример 10.3. В механизме домкрата при вращении рукоятки A вращаются зубчатые колеса $1, 2, 3$ и 4 и 5 , которые приводят в движение зубчатую рейку B домкрата (рис. 10.8). Определить скорость последней, если частота вращения рукоятки A $n = 30$ об/мин, число зубьев колес $z_1 = 6, z_2 = 24, z_3 = 8, z_4 = 32$; радиус пятого колеса $r = 4$ см.

Решение. Для пары зубчатых колес 1 и 2 передаточное отношение

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Передаточное отношение для пары колес 3 и 4

$$u_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}.$$

Перемножив правые и левые части двух последних равенств, получим

$$u_{12}u_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3}.$$

Так как зубчатые колеса 2 и 3 жестко сидят на одном валу, то $\omega_2 = \omega_3$ и, следовательно,

$$u_{12}u_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_4}.$$

Отношение ω_1/ω_4 есть передаточное отношение двух пар зубчатых колес, изображенных на рис. 10.8, а именно:

$$u_{14} = u_{12}u_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3},$$

т.е. передаточное отношение двух пар зубчатых колес равно произведению передаточных отношений этих пар колес.

Пользуясь последней формулой, определим угловую скорость колес 4 и 5, жестко сидящих на одном валу ($\omega_4 = \omega_5$):

$$\omega_4 = \omega_5 = \omega_1 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}.$$

Так как $\omega_1 = \pi n/30 = \pi \cdot 30/30 = \pi$, рад/с, то

$$\omega_4 = \omega_5 = \pi \frac{6}{24} \frac{8}{32} = \frac{\pi}{16} \text{ рад/с.}$$

Определим скорость рейки B :

$$v = \omega_5 r_5 = \frac{\pi}{16} 4 \cdot 10^{-2} = 0,78 \cdot 10^{-2} \text{ м/с} = 0,78 \text{ см/с.}$$

Глава 11

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

11.1. ПОНЯТИЕ О СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ

До сих пор рассматривалось движение точки по отношению к одной системе координат, которую полагали неподвижной. В мире все находится в непрерывном движении, и неподвижная система координат в действительности не существует. Поэтому нередко возникает необходимость рассматривать движение точек одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых условно считается неподвижной, а вторая определенным образом движется по отношению к первой. Движение точки в этом случае называется *сложным*.

Движение точки по отношению к неподвижной системе координат называется *абсолютным*. Движение точки по отношению к подвижной системе координат называется *относительным*. Движение подвижной системы координат по отношению к неподвижной называется *переносным*.

Абсолютное движение точки является сложным и состоит из относительного и переносного движений.

Поясним изложенное с помощью рис. 11.1.

Пусть xOy — подвижная система координат, перемещающаяся в плоскости чертежа равномерно поступательно вдоль оси x ; точка A равномерно перемещается вверх по оси y . Если будет совершаться только относительное движение, то точка перейдет из положения A в положение A_1 . Если будет совершаться только переносное движение, то точка из положения A попадет в положение A_2 . Если же одно-

временно совершаются и относительное и переносное движения, то точка за этот же промежуток времени перейдет из положения A в положение A_3 .

Пользуясь определением переносного и относительного движений, а также рассмотренным выше примером, можно указать

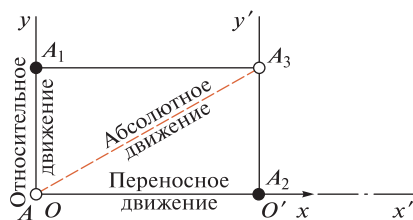


Рис. 11.1

на следующий метод изучения этих движений. Если необходимо изучить относительное движение точки, то следует мысленно остановить переносное движение, если необходимо изучить переносное движение точки, то следует мысленно остановить относительное движение.

11.2. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ

Скорость точки в абсолютном движении называется *абсолютной*. Скорость точки в относительном движении называется *относительной*. Скорость рассматриваемой точки, мысленно закрепленной в данный момент на подвижной системе координат, называется *переносной*. Связь между этими скоростями устанавливает теорема о сложении скоростей.

Теорема. Абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей.

Пусть за время Δt точка перешла из положения A в положение A_3 , двигаясь по траектории абсолютного движения, т. е. по дуге AA_3 (рис. 11.2). Если бы имело место только относительное движение, то точка перешла бы в положение A_1 ; если бы только переносное, то точка перешла бы в положение A_2 . Можно представить, что точка A перешла в положение A_3 , двигаясь сначала только по траектории переносного движения (дуга AA_2), а затем только по траектории относительного движения (дуга A_2A_3 , равная дуге AA_1).

Соединив точки A , A_2 и A_3 хордами, получим следующую зависимость между векторами перемещений точки A :

$$\overline{AA_3} = \overline{AA_2} + \overline{A_2A_3}.$$

Разделим все члены равенства на Δt и перейдем к пределу при Δt , стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AA_3}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AA_2}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{A_2A_3}}{\Delta t},$$

что дает

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r,$$

где \mathbf{v} — вектор абсолютной скорости; \mathbf{v}_e — вектор переносной скорости; \mathbf{v}_r — вектор относительной скорости.

Теорема доказана.

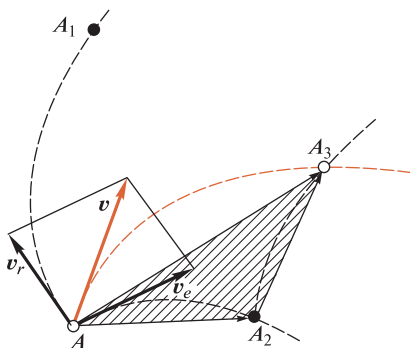


Рис. 11.2

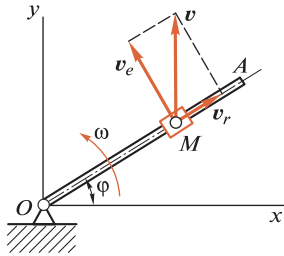


Рис. 11.3

Пример 11.1. Стержень OA (рис. 11.3) вращается в плоскости чертежа вокруг неподвижной точки O по закону $\varphi = t^2$. По стержню равноускоренно движется ползун M , удаляясь от точки O . Движение ползуна определяется уравнением

$$s = OM = 2 + 2t^2,$$

где s — в метрах, t — в секундах.

Найти абсолютную скорость ползуна в момент $t = 1$ с.

Решение. Выберем неподвижную систему координат xOy ; подвижной системой будем считать стержень. В этом случае относительным движением является движение ползуна M по стержню. Следовательно, относительная скорость направлена вдоль стержня и равна

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 4t.$$

В момент $t = 1$ с относительная скорость по модулю будет равна $v_{r1} = 4$ м/с.

Переносным движением является вращательное движение стержня OA с мысленно закрепленным на нем в данный момент ползунком, поэтому переносная скорость v_e ползуна направлена перпендикулярно стержню, причем ее значение определяется по формуле

$$v_e = \omega OM = \frac{d\varphi}{dt} OM.$$

Так как $OM = s = 2 + 2t^2$, а $\frac{d\varphi}{dt} = 2t$, то $v_e = 2t(2 + 2t^2)$.

Полагая $t = 1$ с, получим $v_{e1} = 8$ м/с.

Так как относительная и переносная скорости взаимно-перпендикулярны, а на основании теоремы о сложении скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$, то

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}.$$

Подставляя значения скоростей при $t = 1$ с, получим

$$v = \sqrt{v_{r1}^2 + v_{e1}^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8,94 \text{ м/с.}$$

Глава 12

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

12.1. ПОНЯТИЕ О ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Плоскопараллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных какой-то одной плоскости, называемой *основной*.

Примерами плоскопараллельного движения могут служить движение колеса на прямолинейном участке пути, движение шатуна кривошипно-ползунного механизма.

Из определения плоскопараллельного движения следует, что любая прямая AB , проведенная в теле перпендикулярно основной плоскости, движется поступательно (рис. 12.1). Для определения движения тела на каждой прямой, перпендикулярной основной плоскости, нужно знать движение только одной точки. Взяв эти точки в одной плоскости Q , параллельной основной, получим сечение S , движение которого определяет движение тела. Но плоское движение сечения S вполне определяется движением двух любых его точек C и D или отрезка CD . Таким образом, *вопрос о плоскопараллельном движении тел сводится к вопросу о движении отрезка прямой в плоскости, параллельной основной*.

Плоскопараллельное движение изучается двумя методами: методом мгновенных центров скоростей и методом разложения плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное.

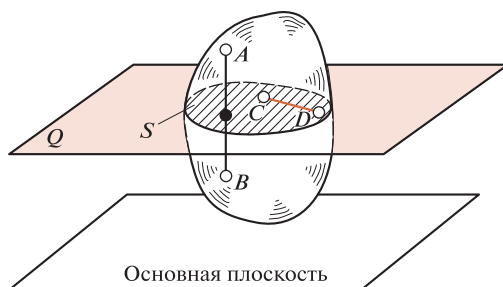


Рис. 12.1

12.2. МЕТОД МГНОВЕННЫХ ЦЕНТРОВ СКОРОСТЕЙ

В основе этого метода лежит следующая теорема: *всякое плоскопараллельное перемещение твердого тела может быть получено одним вращением около оси, перпендикулярной основной плоскости.*

Пусть отрезок, определяющий плоскопараллельное движение тела, за конечный промежуток времени переместился из положения AB в положение A_1B_1 (рис. 12.2).

Соединим точки A и A_1 , B и B_1 прямыми линиями и из середин полученных отрезков (точек M и N) восставим перпендикуляры до их взаимного пересечения в точке O . Эту точку соединим прямыми линиями с концами отрезков AB и A_1B_1 и получим два конгруэнтных (равных) треугольника, имеющих общую вершину O :

$$\triangle AOB = \triangle A_1OB_1.$$

Треугольник AOB совмещается с треугольником A_1OB_1 путем поворота на угол φ вокруг точки O , называемой *центром конечного поворота*. Точка O есть след оси конечного поворота, перпендикулярной основной плоскости. Таким образом, отрезок AB , определяющий плоскопараллельное движение тела, перемещается в любое новое положение путем одного вращения вокруг оси конечного поворота. Теорема доказана.

Приведенное доказательство будет справедливо и в том случае, если перемещение тела произойдет за бесконечно малый промежуток времени Δt . В пределе при Δt , стремящемся к нулю, вращение будет происходить вокруг *мгновенной оси*. След мгновенной оси вращения на плоскости фигуры называют *мгновенным центром скоростей*. Очевидно, что скорость точки, являющейся в данный

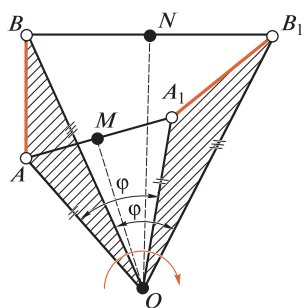


Рис. 12.2

момент мгновенным центром скоростей, равна нулю. Угловая скорость ω , с которой происходит мгновенное вращение, называется мгновенной угловой скоростью.

Точка неподвижной плоскости, совпадающая в данный момент времени с мгновенным центром скоростей плоской фигуры, называется *мгновенным центром вращения*.

Если прямая AB движется параллельно первоначальному положению, то мож-

но полагать, что тело вращается вокруг оси, удаленной в бесконечность, иначе говоря, поступательное движение можно рассматривать как вращательное по кругу бесконечно большого радиуса.

Таким образом, плоскопараллельное движение тела может осуществляться путем последовательных мгновенных непрерывных поворотов вокруг мгновенных осей вращения.

Заметим, что методом мгновенных центров скоростей можно пользоваться *только при определении скоростей* точек плоской фигуры, но не при определении траекторий и ускорений этих точек.

12.3. СВОЙСТВА МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА СКОРОСТЕЙ

Рассматривая в каждый момент времени сложное плоскопараллельное движение как простейшее — вращательное, можно для вычисления скоростей точек твердого тела применять все выведенные ранее формулы вращательного движения.

Установим следующие три свойства мгновенного центра скоростей, вытекающие из закона распределения скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси: 1) скорость мгновенного центра равна нулю; 2) мгновенный центр лежит на перпендикуляре, восстановленном из точки к направлению ее скорости; 3) скорость точки равна произведению мгновенной угловой скорости на расстояние точки от мгновенного центра скоростей (рис. 12.3):

$$v_A = \omega OA.$$

На основании перечисленных выше свойств можно установить следующие пять способов определения положения мгновенного центра скоростей плоской фигуры, определяющей плоскопараллельное движение тела.

1. Известны мгновенная угловая скорость ω и скорость v_A какой-то точки A плоской фигуры (см. рис. 12.3).

В этом случае мгновенный центр скоростей O находится на перпендикуляре, восстановленном из точки A к вектору скорости v_A на расстоянии $OA = v_A/\omega$.

2. Известны направления скоростей двух точек A и B плоской фигуры (рис. 12.4).

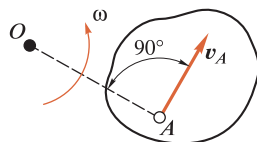


Рис. 12.3

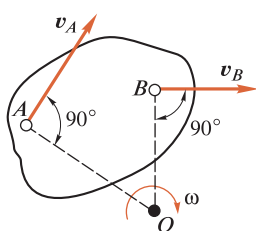


Рис. 12.4

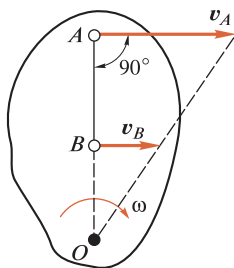


Рис. 12.5

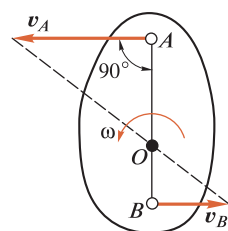


Рис. 12.6

В этом случае мгновенный центр O лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к направлениям их скоростей, причем

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega OA}{\omega OB} = \frac{OA}{OB},$$

т.е. скорости точек плоской фигуры прямо пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

3. Известно, что скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, направлены в одну сторону, перпендикулярны отрезку AB и по модулю не равны (рис. 12.5).

В этом случае мгновенный центр скоростей O находится в точке пересечения прямой, соединяющей начала векторов v_A и v_B с прямой, соединяющей концы этих векторов.

Если векторы скоростей точек A и B равны между собой, то мгновенный центр скоростей в данный момент находится в бесконечности, мгновенная угловая скорость равна нулю, скорости всех точек плоской фигуры будут одинаковы и движение будет мгновенно поступательным.

4. Известно, что скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, направлены в противоположные стороны и перпендикулярны отрезку AB (рис. 12.6).

В этом случае мгновенный центр скоростей O находится в точке пересечения отрезка AB с прямой, соединяющей концы векторов v_A и v_B .

5. Известно, что плоская фигура катится без скольжения по неподвижной кривой.

В этом случае мгновенный центр скоростей O находится в точке соприкосновения фигуры с кривой, так как скорость этой точки фигуры в данный момент равна нулю.

В заключение рассмотрим качение колеса по прямолинейному рельсу при различных условиях трения.

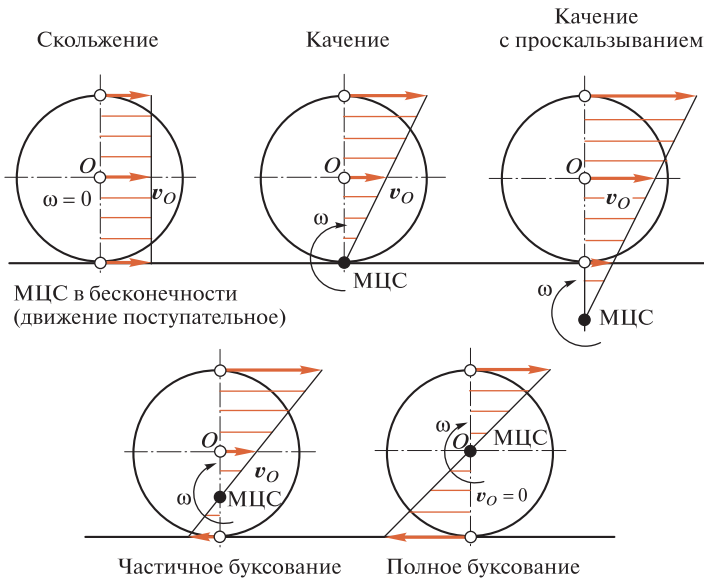


Рис. 12.7

На рис. 12.7 показаны положения мгновенного центра скоростей (МЦС) и графики скоростей точек вертикального диаметра в случаях трения скольжения, трения качения, трения качения с проскальзыванием, частичного и полного буксования колеса.

Пример 12.1. Колесо радиуса R катится без скольжения по прямолинейному рельсу, причем скорость его центра O равна $v_O = 2$ м/с (рис. 12.8). Найти скорость концов вертикального и горизонтального диаметров колеса.

Решение. По условию колесо катится без скольжения, поэтому скорость точки D касания колеса с рельсом равна нулю, следовательно, точка D — мгновенный центр скоростей колеса.

Зная скорость точки O , находим угловую скорость ω колеса:

$$\omega = \frac{v_O}{OD} = \frac{v_O}{R}.$$

На основании свойств мгновенного центра скоростей определим модули скоростей точек A , B и C колеса:

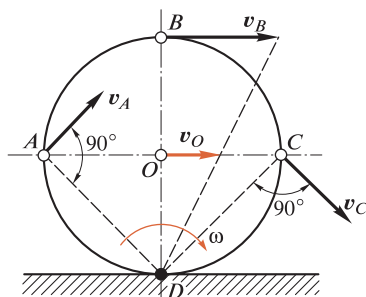


Рис. 12.8

$$v_A = \omega \cdot AD = \frac{v_O}{R} R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с};$$

$$v_B = \omega \cdot BD = \frac{v_O}{R} 2R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с};$$

$$v_C = \omega \cdot CD = \frac{v_O}{R} R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с}.$$

Направления векторов скоростей точек A , B и C перпендикулярны прямой, соединяющим эти точки с мгновенным центром скоростей.

12.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ

Теорема. Всякое плоскопараллельное перемещение твердого тела может быть получено с помощью одного поступательного и одного вращательного движений.

Пусть за время Δt отрезок AB , определяющий плоскопараллельное движение тела, переместился в положение A_1B_1 (рис. 12.9).

Предположим, что отрезок AB вначале перемещался только поступательно, причем все его точки двигались одинаково, как точка A . Таким образом, отрезок перешел в положение A_1B_2 , после чего его можно переместить в положение A_1B_1 посредством только вращательного движения вокруг точки A_1 . Отсюда видно, что сложное плоскопараллельное движение состоит из *двух* простейших движений: поступательного и вращательного, причем можно считать, что эти движения происходят *одновременно*.

Установим зависимость между векторами скоростей точек A и B . Для этого соединим прямыми точки A , A_1 и B , B_1 , B_2 , в результате чего получим следующую зависимость между векторами перемещений точки B :

$$\mathbf{BB}_1 = \mathbf{BB}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1.$$

Так как $\mathbf{BB}_2 = \mathbf{AA}_1$, то можно записать, что

$$\mathbf{BB}_1 = \mathbf{AA}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1.$$

Разделим все члены равенства на Δt и перейдем к пределу при Δt , стремящемся к нулю:

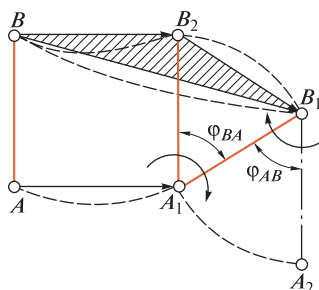


Рис. 12.9

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{BB}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{AA}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1}{\Delta t},$$

получим

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA},$$

где \mathbf{v}_B — вектор абсолютной скорости точки B ; \mathbf{v}_A — вектор абсолютной скорости точки A ; \mathbf{v}_{BA} — вектор скорости точки B в относительном вращательном движении отрезка AB вокруг точки A , направленный перпендикулярно отрезку AB .

Таким образом, плоскопараллельное движение тела может осуществляться путем одновременно происходящих вращательного и поступательного движений; поступательное движение можно считать переносным, а вращательное — относительным. Вектор абсолютной скорости какой-то точки B равен вектору абсолютной скорости любой другой точки A плюс вектор скорости точки B в относительном вращательном движении отрезка AB вокруг точки A .

Точку, вокруг которой происходит относительное вращательное движение, будем называть *полюсом*.

Если за полюс вместо точки A принять точку B , то, рассуждая аналогично, получим

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{AB}.$$

Сравнивая это векторное равенство с предыдущим, видим, что векторы относительных скоростей \mathbf{v}_{BA} и \mathbf{v}_{AB} по модулю равны между собой, т. е.

$$v_{BA} = v_{AB}.$$

Из рис. 12.9 видно, что направление относительного вращения и угол поворота отрезка AB за какой-то промежуток времени не зависят от выбора полюса, т. е.

$$\varphi_{BA} = \varphi_{AB}.$$

Продифференцировав это равенство по времени, получим

$$\frac{d\varphi_{BA}}{dt} = \frac{d\varphi_{AB}}{dt} \quad \text{или} \quad \omega_{BA} = \omega_{AB}.$$

Следовательно, относительная угловая скорость от выбора полюса не зависит. Аналогично,

$$\frac{d\omega_{BA}}{dt} = \frac{d\omega_{AB}}{dt} \quad \text{или} \quad \alpha_{BA} = \alpha_{AB}.$$

Следовательно, и относительное угловое ускорение от выбора полюса не зависит.

Из рассмотренного следует, что при разложении плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное *поступательная часть движения в общем случае зависит от выбора полюса, а вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.*

Так как за полюс может быть выбрана любая точка плоскости, в том числе и мгновенный центр скоростей, то при разложении плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное *угловая скорость относительного вращательного движения всегда равна абсолютной угловой скорости.*

Если векторное равенство $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{AB}$ спроецировать на направление прямой AB , то получим, что проекция \mathbf{v}_A равна проекции \mathbf{v}_B , так как проекция \mathbf{v}_{AB} равна 0.

Следовательно, при плоскопараллельном движении *проекции скоростей двух точек плоской фигуры на направление прямой, соединяющей эти точки, равны между собой.*

Пример 12.2. Кривошипный механизм связан шарнирно в середине C шатуна со стержнем CD , а последний со стержнем DE , который может вращаться вокруг точки E . Определить угловую скорость ω_{DE} стержня DE в указанном на рис. 12.10 положении кривошипного механизма, если точки B и E расположены на одной вертикали; угловая скорость ω кривошипа OA равна 8 рад/с, $OA = 25$ см, $DE = 100$ см, $\angle CDE = \pi/2$ рад и $\angle BED = \pi/6$ рад.

Решение. Прежде всего определим скорость точки A кривошипа OA :

$$v_A = \omega \cdot OA = 8 \cdot 25 \cdot 10^{-2} = 2 \text{ м/с.}$$

В заданном положении механизма ползун B занимает крайнее правое положение и его скорость в этот момент равна нулю. Следовательно, точка B в данный момент — мгновенный центр скоростей шатуна AB . Так как скорости точек шатуна прямо пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей, то запишем пропорцию

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{CB}{AB},$$

из которой определим модуль скорости точки C :

$$v_C = v_A \frac{CB}{AB} = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с.}$$

Вектор скорости \mathbf{v}_C перпендикулярен шатуну AB . Вектор скорости точки D перпендикулярен стержню DE , т. е. направлен вдоль стержня DC .

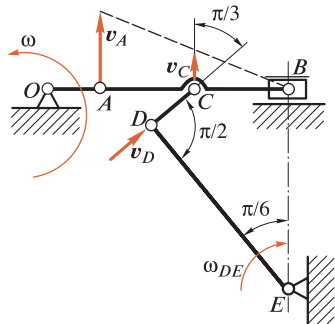


Рис. 12.10

Скорость точки D определим, разложив сложное плоскопараллельное движение звена DC на поступательное и вращательное по формуле

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{DC},$$

где вектор относительной скорости \mathbf{v}_{DC} перпендикулярен звену DC .

Спроецировав это векторное равенство на направление прямой DC , получим

$$v_D = v_C \cos \frac{\pi}{3} = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с.}$$

Выразив скорость точки D через угловую скорость стержня DE , получим

$$v_D = \omega_{DE} \cdot DE,$$

откуда, подставив числовые значения, найдем

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{DE} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \text{ рад/с.}$$

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА

Глава 13

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

13.1. АКСИОМЫ ДИНАМИКИ

Динамика есть часть теоретической механики, изучающая механическое движение тел в зависимости от сил, влияющих на это движение.

Основы динамики заложил итальянский ученый Г. Галилей (1564—1642), который опроверг неверное воззрение, существовавшее в науке со времен Аристотеля, о том, что из двух тел, падающих на Землю, более тяжелое тело движется быстрее. Галилей установил, что сила есть причина изменения скорости, т. е. причина возникновения ускорения. И. Ньютон, развив учение Галилея, дал определения основным понятиям механики и сформулировал аксиомы, или законы, движения, которые до сих пор являются фундаментом, на котором построены современные физические представления.

Динамика основывается на ряде положений, которые являются аксиомами и называются *законами динамики*. Прежде чем перейти к рассмотрению этих законов, введем новое для нас понятие *изолированной материальной точки*, т. е. точки, на которую не действуют другие материальные точки. В действительности изолированные тела в природе не существуют и понятие изолированной материальной точки условно.

Первый закон динамики, называемый **аксиомой инерции**, или **первым законом Ньютона**, формулируется в применении к материальной точке так: *изолированная материальная точка либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.*

В кинематике было установлено, что прямолинейное равномерное движение есть единственный вид движения, при котором ускорение равно нулю, поэтому аксиому инерции можно сформулировать так: *ускорение изолированной материальной точки равно нулю*.

Итак, изолированная от влияния окружающих тел материальная точка не может сама себе сообщить ускорение. Это свойство тел называется *инерцией*, или *инертностью*.

Можно сказать, что инерция, или инертность, есть способность тела сохранять свою скорость по модулю и направлению неизменной (в том числе и скорость, равную нулю).

Изменить скорость, т.е. сообщить ускорение, может лишь приложенная к телу сила.

Зависимость между силой и сообщаемым ею ускорением устанавливает второй закон динамики, или **второй закон Ньютона**, который формулируется так: *ускорение, сообщаемое материальной точке силой, имеет направление силы и пропорционально ее модулю*.

Если сила F_1 сообщает материальной точке ускорение a_1 , а сила F_2 — ускорение a_2 , то на основании второго закона Ньютона можно записать

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{или} \quad \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2}.$$

Следовательно, для данной материальной точки отношение силы к ускорению есть величина постоянная. Это отношение обозначим m и назовем *массой* данной материальной точки:

$$\frac{F}{a} = m = \text{const}.$$

Это равенство означает, что две материальные точки имеют одинаковые массы, если от одной и той же силы они получают одинаковые ускорения; чем больше масса точки, тем большую силу нужно приложить, чтобы сообщить точке заданное ускорение.

Масса — одна из основных характеристик любого материального объекта, определяющая его инертные и гравитационные свойства. Ньютон называл массой количество материи, заключенное в теле, и считал массу величиной постоянной.

С современной точки зрения масса тела (отношение силы к ускорению) не является неизменной и зависит от скорости движения. Так, например, при наблюдениях за движением в ускорителях заряженных частиц доказано, что инертность частицы, т.е. способность сохранять свою скорость, возрастает с увеличением ее скорости. Те-

ория относительности устанавливает следующую зависимость между массой тела, находящегося в покое, и массой движущегося тела:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m — масса движущегося тела; m_0 — масса тела в состоянии покоя; v — скорость движения тела; c — скорость света.

Из этой формулы видно, что чем больше скорость движения тела, тем больше его масса и, следовательно, тем труднее сообщить ему дальнейшее ускорение.

На основании теории относительности современная наука дает массе такое определение: *масса есть мера инертности тела*.

Однако заметно масса тела меняется лишь при очень больших скоростях, близких к скорости света, поэтому в дальнейшем этим изменением пренебрегаем и считаем массу величиной постоянной.

Второй закон Ньютона выражается равенством

$$F = ma,$$

которое называется **основным уравнением динамики** и читается так: *сила есть вектор, равный произведению массы точки на ее ускорение*.

Основное уравнение динамики есть уравнение движения материальной точки в векторной форме.

Из опыта известно, что под действием притяжения Земли в пустоте тела падают в данном месте с одинаковым ускорением, которое называется *ускорением свободного падения*. Сила тяжести тела равна его массе, умноженной на ускорение свободного падения. Если сила тяжести одного тела $G_1 = m_1g$, а второго $G_2 = m_2g$, то

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{m_1g}{m_2g} = \frac{m_1}{m_2},$$

т.е. силы тяжести тел пропорциональны их массам, что позволяет сравнивать массы тел путем их взвешивания.

Ускорение свободного падения g в различных местах земной поверхности различно и уменьшается от полюсов к экватору, так как земной шар сплюснут в направлении полюсов. Другой причиной уменьшения ускорения свободного падения при перемещении от полюсов к экватору является существование центробежной силы инерции, о которой будет идти речь в подразд. 14.2.

Для Москвы $g = 9,8156 \text{ м/с}^2$, на полюсах $g = 9,83 \text{ м/с}^2$, на экваторе $g = 9,78 \text{ м/с}^2$. Очевидно, что сила тяжести тела зависит от места, где производится взвешивание.

Из второго закона Ньютона следует, что *под действием постоянной силы находившаяся в покое свободная материальная точка движется прямолинейно равнопеременно.*

Движение под действием постоянной силы может быть и прямолинейным, и криволинейным (в последнем случае материальная точка имеет начальную скорость, вектор которой не совпадает с линией действия силы). Пример движения под действием постоянной силы — свободное падение тел.

К основным законам динамики относится известная из статики *аксиома взаимодействия*, или *третий закон Ньютона*. Применительно к материальной точке закон формулируется так: *силы взаимодействия двух материальных точек по модулю равны между собой и направлены в противоположные стороны.*

13.2. ПРИНЦИП НЕЗАВИСИМОСТИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Принцип независимости действия сил формулируется так: *при одновременном действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение равно векторной сумме ускорений, которые эта точка получила бы от действия каждой силы в отдельности.*

Пусть к материальной точке A приложены силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , равнодействующая которых равна \mathbf{F} . На основании аксиомы параллелограмма запишем

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}.$$

Разделив обе части равенства на массу точки, получим

$$\frac{\mathbf{F}_1}{m} + \frac{\mathbf{F}_2}{m} = \frac{\mathbf{F}}{m},$$

откуда

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}.$$

Применяя последовательно аксиому параллелограмма, можно показать, что при одновременном действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение будет таким, как если бы действовала одна равнодействующая сила:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i.$$

Пользуясь принципом независимости действия сил, выведем уравнение движения материальной точки в дифференциальной форме.

Пусть материальная точка A массой m движется в плоскости чертежа под действием силы $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ с ускорением \mathbf{a} , тогда

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Спроецируем это векторное равенство на две взаимно-перпендикулярные оси координат x и y (оси и вектор силы \mathbf{F} лежат в одной плоскости) и получим *уравнение плоского движения материальной точки в координатной форме*:

$$F_x = \sum X = ma_x; \quad F_y = \sum Y = ma_y.$$

Применяя теорему о проекции ускорения на координатную ось, эти уравнения можно записать в виде *дифференциальных уравнений плоского движения материальной точки*:

$$\sum X = m \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \sum Y = m \frac{d^2y}{dt^2},$$

где $\sum X$, $\sum Y$ — алгебраические суммы проекций сил, действующих на точку, на соответствующие координатные оси; x и y — текущие координаты точки.

С помощью полученных в этом подразделе уравнений решаются *две основные задачи динамики*: 1) по заданному движению точки определить действующие на нее силы; 2) зная действующие на точку силы, определить ее движение.

В тех случаях, когда при решении задач имеем дело с несвободной материальной точкой, необходимо применять принцип освобождаемости, т.е. отбросить связи и заменить их реакциями, учитывая последние в уравнениях движения наравне с действующими на точку активными силами.

Пример 13.1. Движение тела массой 0,5 кг выражается уравнениями

$$x = 2t; \quad y = 3 + t - 5t^2,$$

где x и y — в сантиметрах, t — в секундах. Определить силу, действующую на тело.

Решение. Данный пример относится к первой задаче динамики. Прежде всего, пользуясь теоремой о проекции ускорения на координатную ось, определим проекции ускорения на оси x и y :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -10 \text{ см/с}^2 = -0,1 \text{ м/с}^2.$$

Подставив эти значения в уравнения движения материальной точки, получим:

$$X = ma_x = 0,5 \cdot 0 = 0;$$

$$Y = ma_y = 0,5(-0,1) = -0,05 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 = -0,05 \text{ Н}.$$

По проекциям силы, действующей на тело, видно, что она параллельна оси ординат, направлена в сторону отрицательных ординат и по модулю равна

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = |Y| = 0,05 \text{ Н}.$$

Пример 13.2. Кривошип OA длиной l , вращаясь равномерно с угловой скоростью ω , перемещает кулису, движущуюся поступательно вдоль направляющих $I-I$ (рис. 13.1). Найти, пренебрегая трением, чему при этом равна сила давления F камня A на кулису, если ее сила тяжести равна G .

Решение. Данный пример относится к первой задаче динамики.

Применим принцип освобожденности, отбросим связи кулисы и заменим их реакциями. Реакция N перпендикулярна направляющим кулисы, а сила давления F перпендикулярна кулисе, так как по условию трением пренебрегаем.

Кулиса движется возвратно-поступательно, следовательно, все ее точки движутся одинаково.

Составим уравнение движения проекции точки A на ось x , которое и будет кинематическим уравнением движения кулисы:

$$x = l \cos \varphi = l \cos \omega t.$$

Применив теорему о проекции ускорения на координатную ось, определим ускорение кулисы

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = -l\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

Составим уравнение движения кулисы в координатной форме:

$$\sum X = ma_x.$$

Спроецировав действующие на кулису силы на ось x и подставив значения массы и ускорения, получим

$$F_x = -F = -\frac{G}{g} \omega^2 x,$$

откуда

$$F = \frac{G}{g} \omega^2 x.$$

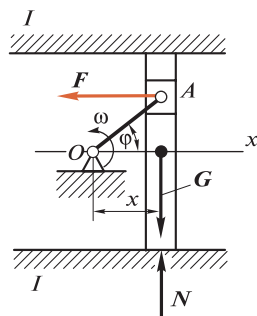


Рис. 13.1

Следовательно, сила давления ползуна на кулису изменяется пропорционально расстоянию кулисы от оси кривошипа.

13.3. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, БРОШЕННОЙ ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

Рассмотрим материальную точку M массой m , брошенную из точки O поверхности Земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту (рис. 13.2).

Определим движение точки M , считая, что на нее действует только сила тяжести G (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Возьмем начало координат в точке O , ось x направим по горизонтали вправо, а ось y — по вертикали вверх. Составим дифференциальные уравнения движения точки:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg.$$

Сокращая равенства на m , получаем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad (13.1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g. \quad (13.2)$$

Интегрируя уравнение (13.1), находим

$$\frac{dx}{dt} = C_1.$$

По теореме о проекции скорости на координатную ось

$$v_x = \frac{dx}{dt} = C_1. \quad (13.3)$$

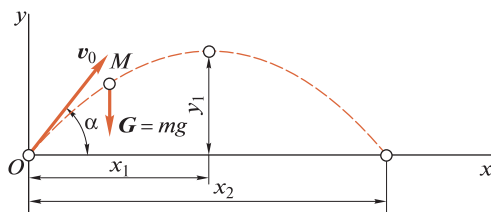


Рис. 13.2

Следовательно, проекция скорости точки M на ось x все время остается величиной постоянной, равной

$$v_x = v_0 \cos \alpha. \quad (13.4)$$

Из равенств (13.3), (13.4) имеем

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$x = v_0 t \cos \alpha + C_2.$$

По условию при $t = 0$ $x = 0$, следовательно, произвольная постоянная $C_2 = 0$.

Окончательно

$$x = v_0 t \cos \alpha.$$

Интегрируя уравнение (13.2), находим

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + C_3.$$

Подставив в это уравнение значение $t = 0$, найдем произвольную постоянную

$$C_3 = v_y = v_0 \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} + C_4.$$

По условию при $t = 0$ $y = 0$, следовательно, произвольная постоянная $C_4 = 0$.

Окончательно

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Таким образом, материальная точка M , брошенная со скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется согласно уравнениям

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad (13.5)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (13.6)$$

Для определения траектории точки M исключаем из полученных уравнений движения время. Определим время из первого уравнения движения (13.5)

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

и подставим его выражение во второе уравнение (13.6), в результате чего получим уравнение траектории

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Траектория точки M представляет собой параболу с вертикальной осью симметрии.

Определим время полета точки M , для чего во второе уравнение движения подставим значение $y = 0$. Тогда это уравнение примет вид

$$v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = 0.$$

Отсюда находим два значения времени, при которых ордината равна нулю:

$$t_0 = 0; t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Первое значение времени соответствует началу полета, второе — его концу. Продолжительность полета

$$t_2 - t_0 = t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Определим дальность полета, для чего в уравнение движения (13.5) подставим значение времени t_2 :

$$x_2 = v_0 t_2 \cos \alpha = v_0 \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \cos \alpha$$

или

$$x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Из этого уравнения видно, что максимальная дальность полета x_{\max} имеет место при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = \pi/4$ рад:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Определим наибольшую высоту подъема точки M , т.е. в тот момент, когда проекция ее скорости на ось ординат окажется равной нулю:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0.$$

Из равенства определим t_1 :

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{t_2}{2}.$$

Следовательно, наибольший подъем точки имеет место в середине пути полета, т.е. при

$$x_1 = \frac{x_2}{2}.$$

Подставив значение t_1 в уравнение (13.6), получим

$$y_1 = \frac{v_0 \sin \alpha v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2},$$

откуда

$$y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Из этого уравнения видно, что максимальной высоты точка достигает при $\sin \alpha = 1$ или при $\alpha = \pi/2$ рад, т.е. когда точка брошена вертикально вверх:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Пример 13.3. При аварии обод маховика паровой машины разорвался на несколько частей, которые отлетели от места аварии на разные расстояния, оставаясь в плоскости вращения маховика. Наибольшее расстояние, на которое отлетели найденные куски, оказалось равным 280 м.

Диаметр маховика $D = 3,5$ м. Определить угловую скорость маховика в момент разрыва.

Решение. При рассмотрении вопроса о движении тела, брошенного под углом к горизонту, была получена формула, определяющая максимальную дальность полета:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Из этой формулы определим окружную скорость маховика в момент разрыва:

$$v_0 = \sqrt{gx_{\max}} = \sqrt{9,8 \cdot 280} = 52,4 \text{ м/с}.$$

При диаметре маховика $D = 3,5$ м его угловая скорость в момент разрыва была равна

$$\omega = \frac{v_0}{0,5D} = \frac{52,4}{0,5 \cdot 3,5} \approx 30 \text{ рад/с.}$$

Следует заметить, что в действительности угловая скорость маховика в момент разрыва была несколько больше, потому что в расчетах сопротивлением воздуха пренебрегали.

Глава 14

ОСНОВЫ КИНЕТОСТАТИКИ

14.1. МЕТОД КИНЕТОСТАТИКИ

Представим себе материальную точку массой m , движущуюся с ускорением \mathbf{a} под действием какой-то системы активных и реактивных сил, равнодействующая которых равна \mathbf{F} .

Воспользуемся одной из известных нам формул (основным уравнением динамики) для того, чтобы уравнения движения записать в форме уравнений равновесия (метод кинетостатики):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\mathbf{F} + (-m\mathbf{a}) = 0.$$

Выражение, стоящее в скобках, обозначается $\mathbf{F}^{\text{ин}}$ и называется *силой инерции*:

$$\mathbf{F}^{\text{ин}} = -m\mathbf{a}.$$

Сила инерции есть вектор, равный произведению массы точки на ее ускорение и направленный в сторону, противоположную ускорению. Тогда

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^{\text{ин}} = 0 \text{ или } \sum (\mathbf{F}, \mathbf{F}^{\text{ин}}) = 0.$$

Это равенство, являющееся математическим выражением принципа, который носит имя французского ученого Ж. Д'Аламбера (1717 — 1783), можно рассматривать как уравнение равновесия материальной точки. Следует подчеркнуть, что полученное равенство, хотя и названо уравнением равновесия, в действительности является видоизмененным уравнением движения материальной точки.

Следует отметить, что до Д'Аламбера над общим методом, с помощью которого уравнения динамики придается форма уравнений статики, работали члены Петербургской Академии наук Я. Герман (1716) и Л. Эйлер (1737).

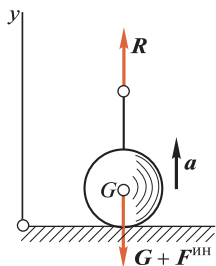


Рис. 14.1

Принцип Д'Аламбера формулируется так: активные и реактивные силы, действующие на материальную точку, вместе с силами инерции образуют систему взаимно уравновешенных сил, удовлетворяющую всем условиям равновесия.

Такое состояние точки (или тела) называется *относительным механическим равновесием*.

Следует помнить, что сила инерции приложена к рассматриваемой материальной точке *условно*, но для связи, вызывающей ускорение, она в определенном смысле является *реальной*. Обладая свойством инерции, всякое тело стремится сохранять свою скорость по модулю и направлению неизменной, в результате чего оно будет действовать на связь, вызывающую ускорение, с силой, равной силе инерции. В качестве примера действия сил инерции можно привести случаи разрушения маховиков при достижении ими критической угловой скорости. Во всяком вращающемся теле действуют силы инерции, так как каждая частица этого тела имеет ускорение, а соседние частицы являются для нее связями.

Поясним это на примере. Пусть к телу (рис. 14.1), лежащему на горизонтальной плоскости, привязана нить, способная выдерживать силу тяжести G этого тела. Если к нити приложить силу R статически (постепенно), то тело будет поднято вверх и нить не оборвется; если силу R приложить динамически (внезапно, рывком), то нить оборвется. Это явление объясняется следующим образом.

Чтобы поднять груз, нужно сообщить ему какое-то ускорение a . Для определения величины натяжения нити применим принцип Д'Аламбера и составим уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad R - G - F^{ин} = 0,$$

откуда

$$R = G + F^{ин} = G + ma.$$

В первом случае грузу сообщается небольшое ускорение и сила инерции, увеличивающая натяжение нити, невелика; во втором случае ускорение, сообщаемое телу, значительное и сила инерции соответственно возрастает. В обоих случаях сила инерции не увеличивает давление на опору, так как приложена к телу условно.

Отметим, что *весом тела* называется сила, с которой тело вследствие притяжения Земли действует на опору (или подвес), удерживающую его от свободного падения. *Если тело и опора неподвижны, то вес тела равен его силе тяжести*.

Пример 14.1. В поднимающейся кабине лифта взвешивается тело на пружинных весах (сила тяжести тела $G = 50$ Н), натяжение R пружины весов (т.е. вес тела) равно 51 Н. Найти ускорение кабины.

Решение. Применим к телу принцип освобождаемости, отбросим пружинные весы и заменим их реакцией R , равной натяжению пружины.

Для решения задачи применим метод кинестатики, т.е. приложим к телу силу инерции $F^{\text{ин}}$. Составим уравнение равновесия взвешиваемого тела, спроецировав все силы на вертикальную ось y ; предполагаем, что ускорение a кабины направлено вверх и, следовательно, сила инерции направлена вниз (расположение векторов сил см. на рис. 14.1):

$$\sum Y = 0; R - G - F^{\text{ин}} = 0.$$

Модуль силы инерции определяем по формуле

$$F^{\text{ин}} = ma = \frac{G}{g}a.$$

Подставив это выражение в уравнение, определим ускорение

$$a = (R - G) \frac{g}{G} = (51 - 50) \frac{9,8}{50} = 0,196 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение получилось положительным, следовательно, как и предполагалось, оно направлено вверх.

14.2. СИЛЫ ИНЕРЦИИ В КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

В криволинейном движении точки полное ускорение равно векторной сумме касательного и нормального ускорений (рис. 14.2).

Касательное ускорение $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Каждому ускорению соответствует своя сила инерции:

$$F_\tau^{\text{ин}} = m \frac{dv}{dt} \text{ — касательная, или тангенциальная;}$$

$$F_n^{\text{ин}} = \frac{mv^2}{\rho} \text{ — нормальная, или центробежная;}$$

$F^{\text{ин}}$ — полная.

$$F^{\text{ин}} = ma \text{ — полная.}$$

В качестве примера рассмотрим равномерное движение по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, камня силой тяжести G , привязанно-

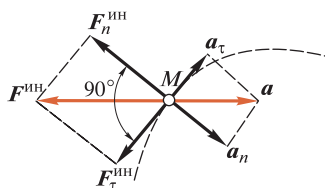


Рис. 14.2

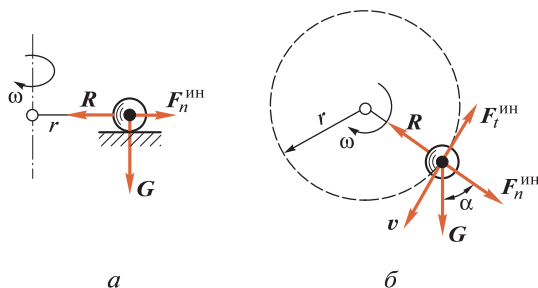


Рис. 14.3

го к невесомой нити длиной r , расположенной в той же плоскости (рис. 14.3, *a*). Чтобы нить оставалась в плоскости движения камня, предполагается, что он скользит по идеальной гладкой горизонтальной плоскости. Скорость камня обозначим v . Тогда $F_n^{\text{ин}} = mv^2/r$ — центробежная сила инерции (эта сила натягивает нить); $R = mv^2/r$ — центростремительная сила, приложенная к камню (эта сила удерживает камень на окружности).

Центробежная и центростремительная силы (действие и противодействие) по третьему закону Ньютона равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Очевидно, что касательная сила инерции $F_\tau^{\text{ин}}$ в этом случае равна нулю, так как $v = \text{const}$.

Из опыта известно, что при достаточной скорости нить может разорваться и камень полетит по касательной к окружности, т.е. по направлению имеющейся в момент разрыва скорости. Это доказывает, что центробежная сила инерции есть реальная сила для связи, но к телу она приложена условно.

Внутри тел, движущихся с ускорением, также возникают внутренние силы инерции, так как для каждой частицы тела соседние частицы являются связями.

Найдем, чему равно натяжение нити, если камень движется по окружности, лежащей в вертикальной плоскости (рис. 14.3, *б*). Для определения натяжения R нити применим принцип Д'Аламбера, т.е. приложим к камню нормальную силу инерции $F_n^{\text{ин}}$ и касательную силу инерции $F_\tau^{\text{ин}}$.

Спроецируем все силы на направление нити, в результате чего получим

$$R - G \cos \alpha - F_n^{\text{ин}} = 0,$$

откуда

$$R = F_n^{\text{ин}} + G \cos \alpha = \frac{mv^2}{r} + G \cos \alpha.$$

Натяжение нити максимальное при $\alpha = 0$, т.е. когда камень находится в нижнем положении:

$$R_{\max} = \frac{mv^2}{r} + G.$$

Натяжение нити минимальное при $\alpha = \pi$ рад, т.е. когда камень находится в верхнем положении:

$$R_{\min} = \frac{mv^2}{r} - G.$$

Заметим, что под влиянием силы тяжести камня модуль его скорости v будет меняться и достигать наименьшего значения в верхнем положении и наибольшего — в нижнем.

Если выразить линейную скорость камня через угловую скорость нити $v = \omega r$, то формула центростремительной силы инерции примет вид

$$F_n^{\text{ин}} = m\omega^2 r.$$

Пример 14.2. Груз весом $G = 10$ Н, подвешенный на нити длиной $l = 0,3$ м в неподвижной точке O , представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60° (рис. 14.4). Определить скорость v груза и натяжение R нити.

Решение. Так как нить составляет с вертикалью постоянный угол, то скорость груза постоянна, касательное ускорение груза и касательная сила инерции равны нулю. Применим принцип Д'Аламбера, т.е. приложим к грузу центростремительную силу инерции $F_n^{\text{ин}}$, реакцию R нити и составим два уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; -R \sin 60^\circ + F_n^{\text{ин}} = 0;$$

$$\sum Y = 0; R \cos 60^\circ - G = 0,$$

где

$$F_n^{\text{ин}} = ma_n = \frac{Gv^2}{gr} = \frac{G}{g} \frac{v^2}{l \sin 60^\circ}.$$

Из второго уравнения определим

$$R = \frac{G}{\cos 60^\circ} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ Н}$$

и подставим в первое уравнение

$$-\frac{G}{\cos 60^\circ} \sin 60^\circ + \frac{G}{g} \frac{v^2}{l \sin 60^\circ} = 0;$$

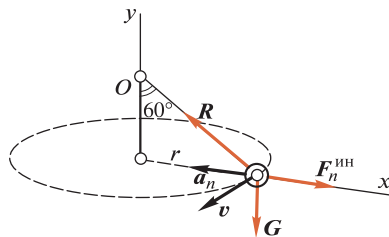


Рис. 14.4

откуда

$$v^2 = g \frac{\sin^2 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 9,8 \cdot 0,3 \frac{0,866^2}{0,5}; \quad v = 2,1 \text{ м/с.}$$

Пример 14.3. Определить скорость v искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите на высоте $h = 230$ км от поверхности Земли. Изменением ускорения свободного падения и сопротивлением воздуха пренебречь. Радиус Земли считать равным $R = 6\,370$ км.

Решение. После того как ракета-носитель вывела спутник массой m на заданную орбиту и сообщила ему скорость v , касательную к орбите, спутник продолжает движение под действием одной лишь силы притяжения Земли. Для определения скорости v спутника применим принцип Д'Аламбера, т.е. приложим к спутнику центробежную силу инерции и составим уравнение равновесия, спроецировав силы на ось, проходящую через спутник и центр Земли:

$$mg - F_n^{\text{ин}} = 0.$$

Так как $F_n^{\text{ин}} = \frac{mv^2}{R+h}$, то

$$mg - \frac{mv^2}{R+h} = 0.$$

Сократив равенство на m , определим скорость спутника:

$$v = \sqrt{g(R+h)}.$$

Подставив значения, получим

$$v = \sqrt{9,81(6\,370 + 230)1\,000} \approx 8\,000 \text{ м/с} = 8 \text{ км/ч.}$$

Эта скорость, при которой спутник Земли удерживается на круговой орбите на относительно небольшой высоте, называется первой *космической скоростью*.

Пример 14.4. На какую высоту h нужно запустить искусственный спутник Земли, предназначенный для сверхдальних телепередач, чтобы он казался неподвижным по отношению к Земле? Орбиту спутника приближенно считать окружностью, концентричной экватору.

Радиус R Земли принять равным $6\,370$ км, а угловую скорость вращения Земли вокруг своей оси — $\omega = 0,7 \cdot 10^{-4}$ рад/с (рис. 14.5).

Решение. Введем следующие обозначения: m — масса спутника; G — сила тяжести спутника на поверхности Земли; M — масса Земли; v — скорость движения спутника.

На основании закона всемирного тяготения сила F , с которой спутник притягивается к Земле, на высоте h равна

$$F = \frac{\gamma m M}{(R+h)^2},$$

где γ — гравитационная постоянная.

При $h = 0$

$$F_1 = G = \frac{\gamma m M}{R^2}.$$

Центробежная сила инерции $F_n^{ин}$ спутника на высоте h равна

$$F_n^{ин} = \frac{mv^2}{R+h}.$$

На основании принципа Д'Аламбера

$$\sum Y = 0; F_n^{ин} - F = 0,$$

следовательно,

$$F_n^{ин} = F \quad \text{или} \quad \frac{mv^2}{R+h} = \frac{\gamma m M}{(R+h)^2}.$$

Так как $v = \omega(R+h)$, то после подстановки и сокращений получим

$$\omega^2(R+h)^3 = \gamma M. \tag{14.1}$$

Если бы спутник летел на небольшом расстоянии от поверхности Земли, то этим расстоянием можно было бы пренебречь и тогда $G = F_1$ или $mg = \gamma m M / R^2$. Отсюда

$$gR^2 = \gamma M. \tag{14.2}$$

Из равенств (14.1) и (14.2) получим

$$\omega^2(R+h)^3 = gR^2,$$

откуда

$$h = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{9,81 \cdot 6370^2 \cdot 10^6}{(0,7 \cdot 10^{-4})^2}} - 6370 \cdot 10^3 \approx 36912 \cdot 10^3 \text{ м} = 36912 \text{ км}.$$

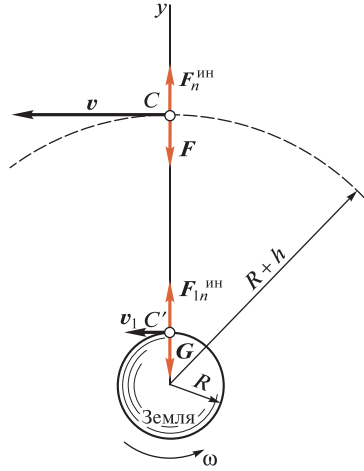


Рис. 14.5

Глава 15

РАБОТА И МОЩНОСТЬ

15.1. РАБОТА ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОМ УЧАСТКЕ ПУТИ

Рассмотрим материальную точку M , к которой приложена сила F . Пусть точка переместилась прямолинейно из положения M_0 в положение M_1 , пройдя путь s (рис. 15.1).

Чтобы установить количественную меру действия силы F на пути s , разложим эту силу на составляющие N и R , направленные соответственно перпендикулярно направлению перемещения и вдоль него. Так как составляющая N не может двигать точку или сопротивляться ее движению в направлении s , то действие силы F на пути s можно определить произведением Rs . Эта новая величина называется работой и обозначается W . Следовательно,

$$W = Rs = Fs \cos \alpha,$$

т. е. *работа силы равна произведению ее модуля на путь и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения.*

Таким образом, работа является мерой действия силы, приложенной к материальной точке при некотором ее перемещении.

Работа — величина скалярная.

Рассмотрим три частных случая вычисления работы: 1) $\alpha = 0$, в этом случае $W = Fs$; 2) $\alpha = 90^\circ$, в этом случае $W = 0$; 3) $\alpha = 180^\circ$, в этом случае $W = -Fs$.

Итак, работа *положительна*, если направление силы и направление перемещения совпадают (или $\alpha < 90^\circ$); работа *отрицательна*, если направление силы и направление перемещения противоположны (или $\alpha > 90^\circ$); работа *равна нулю*, когда направление силы и направление перемещения взаимно-перпендикулярны.

Так, например, при подъеме тела вверх работа силы тяжести отрицательна, при движении вниз — положительна, а при движении по горизонтальной плоскости работа силы тяжести равна нулю.

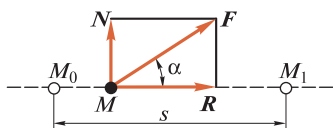


Рис. 15.1

Силы, совершающие положительную работу, называются *движущими силами*, силы, совершающие отрицательную работу, — *силами сопротивления*.

Размерность работы

$$[W] = [F][s] = \text{сила} \times \text{длина} = \text{ньютон} \times \text{метр} = \text{джоуль (Дж)}.$$

Джоуль — это работа силы в один ньютон на пути в один метр (при совпадении направлений силы и перемещения точки ее приложения).

15.2. РАБОТА ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ НА КРИВОЛИНЕЙНОМ УЧАСТКЕ ПУТИ

На бесконечно малом участке ds криволинейный путь можно считать прямолинейным, а силу — постоянной. Тогда элементарная работа dW на пути ds равна

$$dW = F ds \cos(F, v).$$

Работа на конечном перемещении равна сумме элементарных работ:

$$W = \int_0^s F \cos(F, v) ds.$$

Построим график, выражающий зависимость между $F \cos(F, v)$ и пройденным расстоянием s (рис. 15.2, а).

Площадь заштрихованной полоски, которую можно принять за прямоугольник, равна элементарной работе на пути ds :

$$dW = F \cos(F, v) ds,$$

а работа силы F на конечном пути s графически выражается площадью фигуры $OABC$, ограниченной осью абсцисс, двумя ординатами и кривой AB , которая называется *кривой сил*.

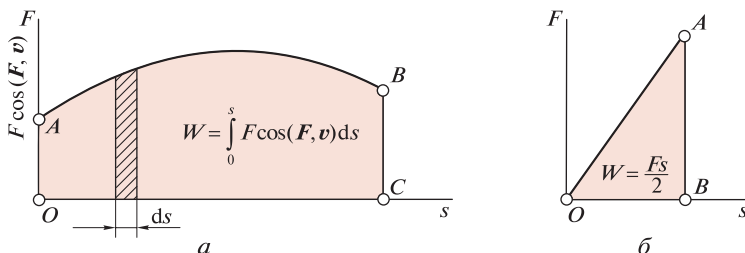


Рис. 15.2

Если сила совпадает с направлением перемещения и возрастает от нуля пропорционально пути, то работа графически выражается площадью треугольника OAB (рис. 15.2, б) и равняется половине произведения силы на путь:

$$W = \frac{Fs}{2}.$$

Далее приведем без доказательства теорему о работе равнодействующей.

Теорема. Работа равнодействующей системы сил на каком-то участке пути равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же участке.

$$W_z = \sum F_i.$$

15.3. ТЕОРЕМА О РАБОТЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Теорема. Работа силы тяжести не зависит от вида траектории и равна произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения.

Пусть материальная точка M движется под действием одной лишь силы тяжести G и за какой-то промежуток времени перемещается из положения M_1 в положение M_2 , пройдя путь s (рис. 15.3).

На траектории точки M выделим бесконечно малый участок ds , который можно считать прямолинейным, и из его концов проведем прямые, параллельные осям координат, одна из которых вертикальна, а другая горизонтальна. Из заштрихованного треугольника получим, что

$$dy = ds \cos \alpha.$$

Элементарная работа силы G на пути ds равна

$$dW = G ds \cos \alpha.$$

Полная работа на пути s равна

$$W = \int_0^s G ds \cos \alpha = \int_0^h G dy = G \int_0^h dy = Gh,$$

теорема доказана.

Силы, работа которых не зависит от вида траектории, называются *потенциальными*.

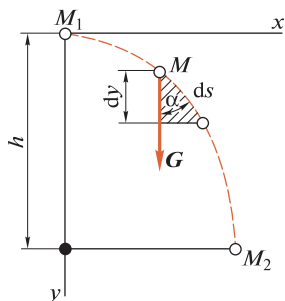


Рис. 15.3

К числу таких сил относятся, например, силы тяжести, силы всемирного тяготения, натяжение пружины.

15.4. РАБОТА ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ, ПРИЛОЖЕННОЙ К ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ТЕЛУ

Представим себе диск, вращающийся вокруг неподвижной оси под действием постоянной силы F (рис. 15.4), точка приложения которой перемещается вместе с диском. Разложим силу F на три взаимно-перпендикулярные составляющие: F_1 — окружная сила, F_2 — осевая сила, F_3 — радиальная сила. При повороте диска на бесконечно малый угол $d\varphi$ сила F совершит элементарную работу, которая на основании теоремы о работе равнодействующей будет равна сумме работ составляющих. Работа составляющих F_2 и F_3 равна нулю, так как векторы этих сил перпендикулярны бесконечно малому перемещению ds точки приложения M , поэтому элементарная работа силы F равна работе составляющей F_1 :

$$dW = F_1 ds = F_1 R d\varphi.$$

При повороте диска на конечный угол φ работа силы F равна

$$W = \int_0^{\varphi} F_1 R d\varphi = F_1 R \int_0^{\varphi} d\varphi = F_1 R \varphi,$$

где угол φ выражается в радианах.

Так как моменты составляющих F_2 и F_3 относительно оси z равны нулю, то на основании теоремы Вариньона момент силы F относительно оси z равен

$$M_z(F) = F_1 R.$$

Момент силы, приложенной к диску, относительно оси вращения называется *вращающим моментом* и, согласно стандарту ИСО, обозначается T :

$$T = M_z(F),$$

следовательно,

$$W = T\varphi.$$

Работа постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на угловое перемещение.

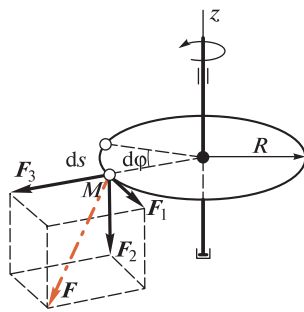


Рис. 15.4

15.5. МОЩНОСТЬ

Работа, совершаемая какой-то силой, может быть осуществлена за различные промежутки времени. Чтобы охарактеризовать, на сколько быстро совершается работа, в механике существует понятие мощности, обозначаемой P .

Мощностью силы называется работа, совершаемая в единицу времени.

Если работа совершается равномерно, то мощность определяют по формуле

$$P = \frac{W}{t}.$$

Если направление силы и направление перемещения совпадают, то эту формулу можно записать в иной форме:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} \quad \text{или} \quad P = Fv.$$

Мощность силы равна произведению модуля силы на скорость точки ее приложения.

Размерность мощности

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{\text{работа}}{\text{время}} = \text{джоуль в секунду} = \text{ватт (Вт)}.$$

Если работа совершается силой, приложенной к вращающемуся телу, и при том равномерно, то мощность в этом случае определяют по формуле

$$P = \frac{W}{t} = \frac{T\varphi}{t} \quad \text{или} \quad P = T\omega.$$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на угловую скорость.

15.6. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ

Способность тела при переходе из одного состояния в другое совершать работу называется *энергией*.

Энергия есть общая мера различных форм движения материи.

При передаче или преобразовании энергии, а также при совершении работы имеют место потери энергии. В процессе передачи движения или выполнения работы движущие силы механизмов и машин преодолевают силы сопротивления, которые подразделя-

ются на *силы полезного сопротивления* и *силы вредного сопротивления*. Потери на преодоление сил вредного сопротивления имеют место во всех механизмах и машинах и вызываются силами трения и силами сопротивления окружающей среды.

Относительное количество энергии, используемой в машине по прямому назначению, характеризуется *коэффициентом полезного действия* (КПД), который обозначается η .

Коэффициентом полезного действия называется отношение полезной работы (или мощности) к затраченной:

$$\eta = \frac{W_{\text{п}}}{W_3} = \frac{P_{\text{п}}}{P_3}.$$

Если коэффициент полезного действия учитывает только механические потери, то он называется *механическим КПД*.

КПД — всегда правильная дробь, иногда его выражают в процентах:

$$\eta \% = \frac{W_{\text{п}}}{W_3} 100.$$

Чем ближе КПД к единице, тем экономичнее машина.

Приведем ориентировочные значения КПД для наиболее распространенных механизмов и машин:

Металлообрабатывающие станки	0,8
Кривошипно-ползунный механизм	0,95
Червячная передача	До 0,92
Тепловые двигатели	До 0,40
Турбины	0,95
Электродвигатели	0,92

Если ряд механизмов соединен *последовательно*, т.е. каждый последующий механизм получает движение от ведомого звена предыдущего механизма, то тогда *общий КПД η равен произведению КПД всех механизмов:*

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n,$$

где $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ — КПД каждого механизма в отдельности.

В качестве примера определим КПД шероховатой наклонной плоскости с углом подъема α , когда тело силой тяжести G равномерно поднимается по этой плоскости на высоту h под действием горизонтальной силы F .

Если путь, пройденный телом, обозначить s , то полезная работа $W_{\text{п}} = Gh = Gs \sin \alpha$, а затраченная работа $W_3 = Fs \cos \alpha = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \times s \cos \alpha$ (так как из подразд. 6.3 известно, что $F = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$), тогда

$$\eta = \frac{W_{\text{п}}}{W_3} = \frac{Gs \sin \alpha}{G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) s \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Итак, КПД наклонной плоскости, когда движущая сила горизонтальна, равен

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)},$$

где α — угол, который составляет наклонная плоскость с горизонтом; φ — угол трения.

Нетрудно убедиться, что КПД наклонной плоскости растет с увеличением угла ее наклона.

По такой же формуле определяется КПД при работе винта и гайки с прямоугольной резьбой (например, в домкрате). КПД винтовой пары с трапецеидальной или треугольной резьбой

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg}(\psi + \varphi')},$$

где ψ — угол подъема винтовой линии резьбы; φ' — приведенный угол трения.

Глава 16

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

16.1. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Энергетические теоремы динамики материальной точки устанавливают зависимость между изменением динамических мер движения материальной точки и мерами действия сил, приложенных к этой точке.

Количеством движения mv материальной точки называется вектор, равный произведению массы точки на ее скорость и имеющий направление скорости. Количество движения есть динамическая мера движения материальной точки.

Размерность количества движения

$$[mv] = [m][v] = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Импульсом Ft постоянной силы F называется вектор, равный произведению силы на время ее действия. Импульс силы есть мера ее действия во времени.

Размерность импульса силы

$$[Ft] = [F][t] = [m][a][t] = (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2)\text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Количество движения и импульс силы выражаются в одинаковых единицах, связь между ними устанавливает следующая теорема.

Теорема (об изменении количества движения). Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу приложенной к ней силы за тот же промежуток времени.

Докажем эту теорему для случая прямолинейного движения материальной точки под действием постоянной силы F , в этом случае движение будет равнопеременным, формула скорости которого записывается так:

$$v = v_0 + at.$$

Перенесем v_0 в левую часть и умножим обе части равенства на массу m материальной точки:

$$mv - mv_0 = mat.$$

Но произведение массы точки на ее ускорение есть сила, под действием которой точка движется, следовательно,

$$mv - mv_0 = Ft.$$

В левой части равенства имеем изменение количества движения за время t , а в правой — импульс силы за тот же промежуток времени, что и требовалось доказать.

Если движение замедленное ($v < v_0$), то вектор силы направлен в сторону, противоположную вектору скорости, и, следовательно, в последнюю формулу силу нужно подставлять с отрицательным знаком.

В случае криволинейного движения материальной точки под действием переменной по модулю и направлению силы весь промежуток времени t можно разбить на бесконечно малые промежутки, в пределах которых вектор силы можно считать постоянным, а путь — прямолинейным, тогда импульс силы за конечный промежуток времени t будет равен сумме элементарных импульсов. В этом случае математическое выражение теоремы об изменении количества движения приобретает следующий вид:

$$mv - mv_0 = \int_0^t \mathbf{F} dt.$$

Если к материальной точке приложено несколько постоянных сил, то изменение количества движения будет равно сумме (алгебраической, если силы действуют по одной прямой, или векторной, если силы действуют под углом друг к другу) импульсов данных сил:

$$mv - mv_0 = \sum (\mathbf{F}_i t).$$

16.2. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Механической энергией называют энергию перемещения и взаимодействия тел. Механическая энергия бывает двух видов: кинетическая и потенциальная.

Кинетической энергией, или энергией движения, называется энергия, которой обладает всякая материальная точка при движении. Кинетическая энергия есть динамическая мера движения материальной точки.

Кинетическая энергия материальной точки равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия — величина скалярная и всегда положительная.

Размерность кинетической энергии:

$$[K] = [mv^2] = [m][v^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = (\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2)\text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Кинетическая энергия имеет размерность работы. Связь между кинетической энергией и работой устанавливает следующая теорема.

Теорема (об изменении кинетической энергии). Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором пути равно работе силы, приложенной к точке, на том же пути.

Докажем эту теорему для самого общего случая движения материальной точки, т.е. для случая криволинейного движения под действием переменной силы (рис. 16.1). Запишем для этой точки основное уравнение динамики:

$$ma = F,$$

где m — масса точки; a — полное ускорение точки; F — действующая на точку сила.

Спроецируем это векторное равенство на направление скорости v точки:

$$ma \cos \alpha = F_{\tau} = F \cos \alpha.$$

Как известно из кинематики,

$$a \cos \alpha = a_{\tau} = \frac{dv}{dt},$$

следовательно,

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos \alpha.$$

Умножив обе части равенства на бесконечно малое перемещение ds , получим

$$m \frac{dv}{dt} ds = F \cos \alpha ds.$$

Выражение, стоящее в левой части равенства, преобразуем следующим образом:

$$m \frac{dv}{dt} ds = m dv \frac{ds}{dt} = m v dv,$$

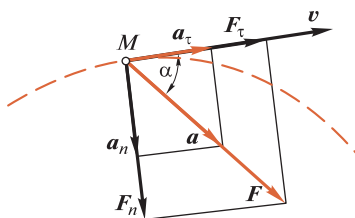


Рис. 16.1

следовательно,

$$mvdv = F \cos \alpha ds.$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах для скорости от v_0 до v и для пути от 0 до s :

$$m \int_{v_0}^v v dv = \int_0^s F \cos \alpha ds,$$

получаем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W,$$

где W — работа силы F на пути s .

Теорема доказана.

При замедленном движении ($v < v_0$) составляющая F_t , вызывающая касательное ускорение a_t , будет направлена в сторону, противоположную направлению вектора скорости v , и работа силы F будет отрицательной.

Составляющая F_n , вызывающая нормальное ускорение a_n , работы не совершает, так как эта составляющая в каждый данный момент перпендикулярна элементарному перемещению точки приложения силы F .

Если к материальной точке приложено несколько сил, то изменение кинетической энергии равно алгебраической сумме работ этих сил:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum W_i.$$

Пример 16.1. Главную часть прибора для испытания материалов ударом составляет стальная тяжелая отливка M , прикрепленная к стержню, который может вращаться почти без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис. 16.2). Пренебрегая массой стержня,

рассматриваем отливку M как материальную точку, для которой расстояние $MO = 0,918$ м. Определить скорость v этой точки в наини́зшем положении B , если она падает из наивысшего положения A с ничтожно малой начальной скоростью.

Решение. Обозначим силу тяжести отливки G . Применяв принцип освобожденности и теорему об изменении кинетической энергии и рассматривая отливку как материальную точку, на которую действуют сила тяжести G и реакция N стержня, направленная вдоль стержня, получим

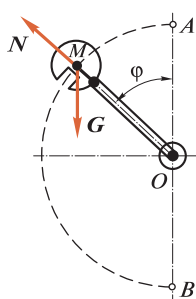


Рис. 16.2

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W_G + W_N.$$

Согласно теореме о работе силы тяжести, имеем

$$W_G = G \cdot AB = G \cdot 2MO.$$

Работа реакции N равна нулю, так как момент этой силы относительно оси вращения стержня равен нулю. Силой трения, по условию, пренебрегаем.

Подставим это выражение работы в первую формулу и, учитывая, что $v_0 = 0$, получим

$$\frac{Gv^2}{2g} = G \cdot 2MO.$$

Сократим обе части равенства на G и подставим числовые значения, тогда

$$v = \sqrt{2MO \cdot 2g} = 2\sqrt{0,981 \cdot 9,81} = 6,2 \text{ м/с}.$$

Пример 16.2. По рельсам, проложенным по пути AB и образующим затем петлю радиусом r , катится вагонетка M силой тяжести G (рис. 16.3). С какой высоты H нужно пустить вагонетку без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю окружность кольца, не отделяясь от него?

Решение. Рассмотрим вагонетку как материальную точку. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии на пути ABC :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W_G + W_N,$$

причем работа W_N нормальной реакции N рельсов равна нулю.

На основании теоремы о работе силы тяжести

$$W_G = G(H - 2r).$$

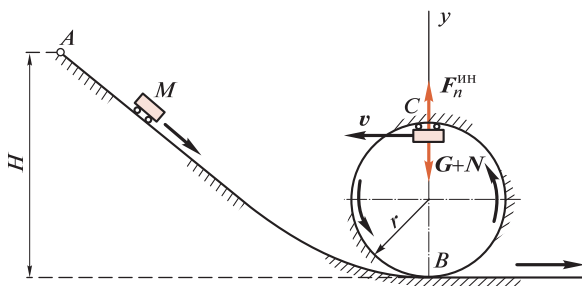


Рис. 16.3

Так как по условию $v_0 = 0$, а $m = G/g$, то, подставив эти выражения в первую формулу, получим

$$\frac{Gv^2}{2g} = (H - 2r)G,$$

откуда

$$v^2 = 2g(H - 2r). \quad (16.1)$$

Далее применим принцип Д'Аламбера. Приложим к вагонетке центробежную силу инерции $F_n^{\text{ин}} = \frac{Gv^2}{g r}$, спроецируем действующие на вагонетку силы на ось y и составим уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; F_n^{\text{ин}} - G - N = 0,$$

где N — реакция рельсов.

Очевидно, что наименьшее значение центробежной силы $F_n^{\text{ин}}$, при котором вагонетка не отделится от рельсов, будет при $N = 0$. При этом

$$F_n^{\text{ин}} - G = 0 \quad \text{или} \quad \frac{Gv^2}{g r} = G,$$

откуда

$$v^2 = gr. \quad (16.2)$$

Сравнивая выражения (16.1) и (16.2) и приравняв их правые части, получим

$$2g(H - 2r) = gr,$$

откуда

$$H = 2,5r.$$

Очевидно, что значение высоты H , найденное из этого выражения, минимально.

Обратим внимание на то, что при решении не учитываются силы трения и сопротивления воздуха. Поэтому для выполнения мертвой петли практически необходимо, чтобы $H > 2,5r$.

16.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Энергию взаимодействия между телами называют *потенциальной*. Потенциальной энергией обладают, например, натянутый лук со стрелой или сжатая пружина.

Всякая материальная точка, поднятая на определенную высоту h , также обладает некоторой энергией, которая называется энергией положения и является потенциальной энергией. Мерой потенциальной энергии в этом случае служит работа, которую произведет точка при свободном падении.

Полагая величину h небольшой по сравнению с размерами Земли, а поэтому считая постоянной силу тяжести G , получим выражение для потенциальной энергии Π :

$$\Pi = Gh.$$

Потенциальная энергия тела, поднятого на определенную высоту, есть величина относительная, зависящая от системы отсчета, по отношению к которой вычисляется эта энергия. Пусть материальная точка массой m , падая под действием одной лишь силы тяжести G , в положении M_1 находилась на высоте h_1 , имела скорость v_1 и обладала потенциальной энергией Π_1 (рис. 16.4). В положении M_2 точка оказалась на высоте h_2 , причем ее скорость стала v_2 , а потенциальная энергия Π_2 .

При падении точки под действием одной лишь силы тяжести совершается работа

$$W = G(h_1 - h_2) = Gh_1 - Gh_2 = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Согласно теореме, доказанной ранее, эта работа равна изменению кинетической энергии:

$$W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = K_2 - K_1$$

или

$$\Pi_1 - \Pi_2 = K_2 - K_1,$$

следовательно,

$$\Pi_1 + K_1 = \Pi_2 + K_2$$

или

$$\Pi + K = \text{const.}$$

Это равенство является математическим выражением закона сохранения механической энергии, который формулируется так: при движении материальной точки под действием одной лишь силы тяже-

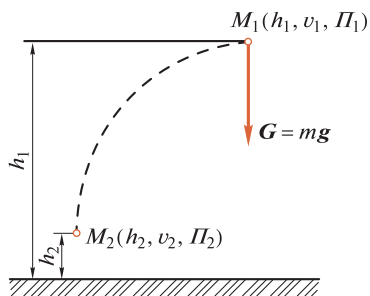


Рис. 16.4

сти сумма потенциальной и кинетической энергий есть величина постоянная.

На основании закона сохранения механической энергии нетрудно доказать, что если тело бросить с поверхности Земли вертикально вверх, то его кинетическая энергия в нижнем положении будет равна потенциальной энергии в наивысшем положении.

Этот закон справедлив при движении под действием любой потенциальной силы; при действии же непотенциальных сил (например, силы трения) механическая энергия переходит в другие виды энергии.

Закон сохранения механической энергии является частным случаем общего закона сохранения материи и энергии, сформулированного М. В. Ломоносовым (1711 — 1765). Установление этого закона — одно из величайших для своего времени открытий Ломоносова.

Ранее говорилось о теории относительности, созданной в начале XX в. А. Эйнштейном. Одним из важнейших выводов теории относительности является *закон пропорциональности энергии массы тела*. Математическое выражение этого закона имеет следующий вид:

$$E = mc^2,$$

где E — полный запас энергии тела (включающий в себя механическую, тепловую, химическую, электромагнитную, ядерную энергию, а также энергию частиц, входящих в состав атома); m — масса тела; c — скорость света.

На основании приведенного выше равенства, называемого формулой Эйнштейна, нетрудно подсчитать, что одному грамму массы соответствует 25 млн кВт·ч энергии ($1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}$).

Формула Эйнштейна имеет самое непосредственное отношение к открытию и использованию ядерной (атомной) энергии. Именно на основании этой формулы было установлено существование огромных запасов новых видов энергии и найдены пути ее использования. В 1954 г. в нашей стране была введена в строй первая в мире электростанция на атомной энергии мощностью 5 000 кВт.

Глава 17

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

17.1. УРАВНЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Механической системой материальных точек называется совокупность материальных точек, каким-то образом связанных между собой. Всякое твердое тело можно считать неизменяемой механической системой материальных точек.

Силы взаимодействия точек данной системы называются *внутренними*; силы, с которыми действуют на данную систему другие точки, не входящие в эту систему, — *внешними*.

Пусть твердое тело массой m движется под действием силы F поступательно с ускорением a (рис. 17.1).

Разобьем тело на ряд материальных точек с массами m_i и применим принцип Д'Аламбера (заметим, что внутренние силы в уравнения равновесия не входят, так как на основании третьего закона Ньютона их сумма для системы в целом равна нулю). К каждой материальной точке приложим силу инерции $F_i^{\text{ин}} = -m_i a$ и составим уравнение равновесия:

$$\sum X = 0; \quad F - \sum F_i^{\text{ин}} = 0,$$

откуда

$$F = \sum F_i^{\text{ин}} = \sum (m_i a).$$

Так как при поступательном движении все точки тела имеют одинаковые ускорения, то a можно вынести за знак суммы, т. е.

$$F = a \sum m_i = am.$$

Согласно второму закону Ньютона векторы силы F и ускорения a совпадают по направлению, поэтому можно записать

$$F = ma.$$

Это и есть *уравнение поступательного движения твердого тела*.

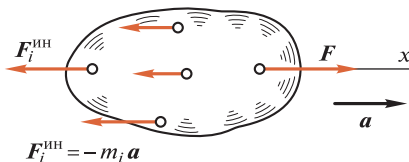


Рис. 17.1

Это уравнение ничем не отличается от основного уравнения динамики точки, следовательно, *все формулы динамики точки применимы для тела, движущегося поступательно.*

17.2. УРАВНЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Пусть твердое тело под действием системы сил вращается вокруг неподвижной оси z с угловым ускорением α (рис. 17.2).

Разобьем тело на ряд материальных точек с массами m_i и применим принцип Д'Аламбера.

К каждой материальной точке приложены касательная и нормальная силы инерции. Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_z = 0;$$

$$\sum M_z(F_i) - \sum M_z(F_{ti}^{ин}) = 0.$$

Моменты реакций подшипника и подпятника, а также сил $F_{ni}^{ин}$ относительно оси z равны нулю, так как линии действия этих сил пересекают ось; сумма моментов внешних сил относительно оси вращения называется вращающим моментом. Тогда

$$\sum M_z(F_i) = T = \sum M_z(F_{ti}^{ин}) = \sum (m_i r_i^2 \alpha) = \alpha \sum (m_i r_i^2).$$

Выражение $\sum (m_i r_i^2)$ называют *моментом инерции тела относительно оси* и обозначают J :

$$J = \sum (m_i r_i^2).$$

Момент инерции тела относительно оси есть сумма произведений масс материальных точек, составляющих это тело, на квадрат расстояний от них до этой оси. В результате получаем *уравнение вращательного движения твердого тела*

$$T = J\alpha.$$

Размерность момента инерции

$$[J] = [mr^2] = [m][r^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Поясним более подробно новое понятие момента инерции тела. Рассмотрим следующий пример.

Пусть требуется сообщить двум одинаковым шарам (рис. 17.3) оди-

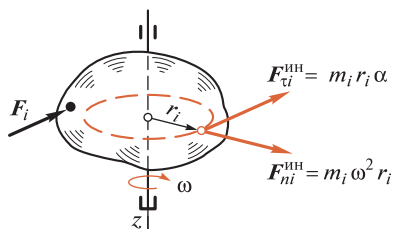


Рис. 17.2



Рис. 17.3

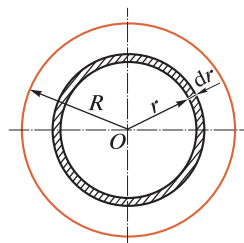


Рис. 17.4

наковое угловое ускорение α . Так как $r_1 > r_2$, то $J_1 > J_2$. Опытным путем, а также с помощью уравнения вращательного движения можно убедиться в том, что для сообщения этим системам одинакового углового ускорения α потребуется приложить разные вращающие моменты:

$$T' = J_1\alpha; \quad T'' = J_2\alpha.$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{T'}{T''} = \frac{J_1}{J_2}.$$

Следовательно, чем больше момент инерции тела, тем больший вращающий момент нужно приложить, чтобы сообщить телу заданное угловое ускорение.

Из изложенного ясно, что момент инерции играет во вращательном движении такую же роль, какую масса играет в поступательном движении, следовательно, *момент инерции есть мера инертности вращающегося тела*.

В качестве примера определим момент инерции тонкого однородного сплошного диска, радиус которого R , толщина s , масса m , относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр O (рис. 17.4).

Разобьем диск на элементарные кольца переменного радиуса r , шириной dr и толщиной s . Согласно определению момент инерции такого кольца равен

$$dJ = d \sum (m_i r^2) = r^2 d \sum m_i = r^2 dm = r^2 \cdot 2\pi r dr s \rho = 2\pi s \rho r^3 dr,$$

где ρ — плотность материала диска.

Просуммировав моменты инерции всех элементарных колец, получим момент инерции всего диска:

$$J = \int_0^R 2\pi s \rho r^3 dr = 2\pi s \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi s \rho \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \pi s \rho \frac{R^4}{2}.$$

Так как масса диска $m = \pi R^2 \rho$, то

$$J = \frac{mR^2}{2}.$$

Нетрудно понять, что момент инерции однородного сплошного прямого кругового цилиндра радиусом R и массой m любой высоты определяют по такой же формуле. Чтобы убедиться в этом, достаточно мысленно разбить весь цилиндр плоскостями, параллельными основанию, на тонкие диски и просуммировать моменты инерции всех дисков.

Моменты инерции для некоторых других однородных тел определяются по формулам, которые приведем без выводов:

1) шар массой m , радиусом R относительно диаметра

$$J = \frac{2}{5}mR^2;$$

2) тонкий стержень массой m , длиной l относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец,

$$J = \frac{ml^2}{3};$$

3) тонкая сферическая оболочка массой m , радиусом R относительно диаметра

$$J = \frac{2mR^2}{3};$$

4) пустотелый вал массой m , наружным радиусом R и радиусом отверстия r относительно оси

$$J = \frac{m(R^2 + r^2)}{2}.$$

Момент инерции J_z тела относительно какой-либо оси z , параллельной центральной (т.е. проходящей через центр тяжести C тела), равен сумме центрального момента инерции J_C и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между этими осями:

$$J_z = J_C + ma^2.$$

Из этой формулы следует, что из всех моментов инерции тела относительно параллельных осей наименьшим будет момент инерции относительно центральной оси, т.е. центральный момент инерции. Иногда момент инерции определяют по формуле

$$J = mr_{и}^2,$$

где $r_{и}$ — радиус инерции тела;

$$r_{\text{и}} = \sqrt{\frac{J}{m}}.$$

Физический смысл радиуса инерции следующий: если массу тела сосредоточить в одной точке (такая масса называется приведенной) и разместить ее от оси вращения на расстоянии, равном радиусу инерции, то момент инерции приведенной массы будет равен моменту инерции данного тела относительно той же оси.

Удвоенный радиус инерции называется диаметром инерции:

$$D_{\text{и}} = 2r_{\text{и}}.$$

В практике иногда вместо момента инерции пользуются понятием *махового момента* $GD_{\text{и}}^2$.

Маховым моментом называется произведение силы тяжести G вращающегося тела на квадрат его диаметра инерции.

Размерность махового момента

$$[GD_{\text{и}}^2] = [G][D_{\text{и}}^2] = \text{Н} \cdot \text{м}^2.$$

Между маховым моментом и моментом инерции существует простая зависимость:

$$GD_{\text{и}}^2 = mg(2r_{\text{и}})^2 = 4gmr_{\text{и}}^2$$

или

$$GD_{\text{и}}^2 = 4gJ = 39,24J.$$

Пример 17.1. Тонкий однородный стержень силой тяжести G , длиной $l = 150$ мм совершает колебательное движение в вертикальной плоскости под действием силы тяжести; точка подвеса совпадает с концом стержня (рис. 17.5). Определить угловое ускорение стержня в тот момент, когда он составляет с вертикалью угол $\gamma = \pi/6$ рад.

Решение. По условию задачи стержень однородный, следовательно, его центр тяжести находится посередине. Применим уравнение вращательного движения тела

$$T = J\alpha.$$

Вращающий момент равен моменту силы тяжести относительно оси вращения стержня:

$$T = \frac{Gl}{2} \sin \gamma.$$

Момент инерции стержня вычислим по формуле

$$J = \frac{ml^2}{3} = \frac{G l^2}{g 3}.$$

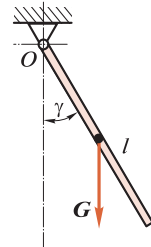


Рис. 17.5

Подставим выражения вращающего момента и момента инерции в уравнение вращательного движения:

$$\frac{Gl}{2} \sin \gamma = \frac{G l^2}{g \cdot 3} \alpha$$

и определим угловое ускорение:

$$\alpha = \frac{3g \sin \gamma}{2l} = \frac{3 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,15} = 49,05 \text{ рад/с}^2.$$

Пример 17.2. Маховой момент ротора электродвигателя равен $2,7 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$. Вращающий момент $T = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Определить время разгона, если конечная скорость вращения ротора $\omega = 30\pi \text{ рад/с}$.

Решение. Так как на ротор действует постоянный вращающий момент, то движение ротора будет равноускоренным. Запишем уравнение угловой скорости этого движения, учитывая, что $\omega_0 = 0$:

$$\omega = \alpha t = 30\pi,$$

откуда

$$\alpha = \frac{30\pi}{t} \text{ [рад/с}^2\text{]}.$$

Далее применим уравнение вращательного движения ротора

$$T = J\alpha = J \frac{30\pi}{t}.$$

Из этого равенства определим время разгона, выразив момент инерции ротора через маховой момент, который равен $4gJ$:

$$t = J \frac{30\pi}{T} = \frac{4gJ}{4gT} 30\pi = \frac{2,7}{4 \cdot 9,81 \cdot 40} 30\pi = 0,162 \text{ с}.$$

17.3. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетических энергий материальных точек, составляющих это тело:

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Определим выражения для кинетической энергии твердого тела для трех случаев движения.

1. Тело движется поступательно. Учитывая, что в случае поступательного движения все точки тела имеют одинаковые скорости, запишем

$$K_{\text{пост}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_i \quad \text{или} \quad K_{\text{пост}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Следовательно, в случае поступательного движения твердого тела его кинетическая энергия вычисляется по той же формуле, что и кинетическая энергия материальной точки.

2. Тело движется вокруг неподвижной оси.
Запишем

$$K_{\text{вр}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2$$

или

$$K_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

3. Тело движется плоскопараллельно. Как известно из кинематики, сложное плоскопараллельное движение твердого тела в каждый данный момент можно считать простейшим вращательным движением вокруг мгновенной оси (метод мгновенных центров скоростей). Допустим, что известна скорость v_C центра тяжести тела, тогда мгновенная угловая скорость

$$\omega = \frac{v_C}{OC},$$

где OC — расстояние центра тяжести C тела от мгновенной оси вращения O .

Момент инерции J_O относительно мгновенной оси вращения определяют по формуле

$$J_O = J_C + mOC^2,$$

где J_C — момент инерции относительно центральной оси, или центральный момент инерции.

Кинетическую энергию тела, движущегося плоскопараллельно, определяют следующим образом:

$$K_{\text{мн}} = \frac{J_O \omega^2}{2} = (J_C + mOC^2) \frac{\omega^2}{2} = \frac{J_C \omega^2}{2} + \frac{mOC^2}{2} \frac{v_C^2}{OC^2}$$

или

$$K_{\text{мн}} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия твердого тела, движущегося плоскопараллельно, равна сумме кинетических энергий в поступательном дви-

жении вместе с центром тяжести и вращательном движении вокруг центральной оси, перпендикулярной основной плоскости.

В заключение сформулируем **теорему об изменении кинетической энергии системы тел**: *изменение кинетической энергии системы тел при некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех внешних (активных и реактивных) и внутренних сил, действовавших на систему при указанном перемещении*:

$$\sum K - \sum K_0 = \sum W.$$

Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий каждого тела в отдельности. Если тело твердое, то сумма работ его внутренних сил равна нулю. При некоторых связях, называемых идеальными, работа реактивных сил равна нулю.

17.4. СРАВНЕНИЕ ФОРМУЛ ДИНАМИКИ ДЛЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Сравнивая формулы динамики точки или поступательно движущегося тела с формулами вращательного движения тела, легко заметить, что эти формулы по структуре аналогичны. Чтобы из формул поступательного движения получить формулы вращательного движения, необходимо вместо силы подставить вращающий момент, вместо линейного перемещения — угловое перемещение, вместо линейной скорости — угловую скорость, вместо линейного ускорения — угловое ускорение, а вместо массы — момент инерции тела относительно оси вращения.

Сравнение формул поступательного и вращательного движений удобно провести с помощью табл. 17.1.

Таблица 17.1

Сравнительные уравнения и динамические меры	Виды движения	
	Поступательное	Вращательное
Уравнение движения	$F = ma$	$T = J\alpha$
Работа	$W = Fs$	$W = T\varphi$
Мощность	$P = Fv$	$P = T\omega$
Кинетическая энергия	$K = \frac{mv^2}{2}$	$K = \frac{J\omega^2}{2}$

Пример 17.3. Определить кинетическую энергию колеса радиусом r , массой m , катящегося по прямолинейному рельсу без скольжения, если скорость центра тяжести C колеса равна v_C . Колесо считать сплошным однородным цилиндром (рис. 17.6).

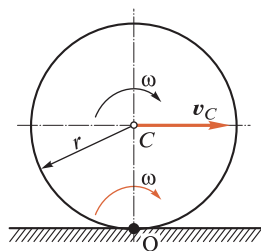


Рис. 17.6

Решение. Решим данный пример двумя способами. Как известно из кинематики, сложное плоскопараллельное движение колеса можно рассматривать либо как простейшее вращательное движение вокруг мгновенной оси O с угловой скоростью ω (метод мгновенных центров скоростей), либо как сложное движение, состоящее из поступательного движения со скоростью v_C и относительного вращательного движения вокруг оси C (метод разложения плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное). Напомним, что абсолютная (мгновенная) и относительные угловые скорости колеса всегда равны между собой.

1. Метод мгновенных центров скоростей. В этом случае кинетическую энергию колеса определяют по формуле

$$K = \frac{J_O \omega^2}{2},$$

где J_O — момент инерции колеса относительно мгновенной оси вращения O .

Момент инерции относительно оси O

$$J_O = J_C + mr^2.$$

Момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно его геометрической оси вычисляют по формуле

$$J_C = \frac{mr^2}{2},$$

следовательно,

$$J_O = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

Теперь определим кинетическую энергию колеса:

$$K = \frac{J_O \omega^2}{2} = \frac{3}{2}mr^2 \frac{1}{2} \left(\frac{v_C}{r} \right)^2 = \frac{3}{4}mv_C^2.$$

2. Метод разложения плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное. В этом случае кинетическая энергия колеса равна сумме кинетических энергий в поступательном и вращательном движениях:

$$K = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \frac{1}{r} \left(\frac{v_C}{r} \right)^2 = \frac{3}{4} mv_C^2.$$

Отметим, что если при наличии движения возникает трение, то силу трения можно отнести к числу активно действующих сил, либо считать реактивной силой.

Пример 17.4. Груз Q , опускаясь, вращает однородный цилиндр, сила тяжести которого G , а радиус r (рис. 17.7). Пренебрегая трением на оси цилиндра, найти натяжение S нити, угловую скорость ω и ускорение α цилиндра, когда груз Q опустится на расстояние h . Вначале система находилась в покое.

Решение. Для решения задачи расчленим систему на две части и рассмотрим отдельно поступательное движение груза и вращательное движение цилиндра. Так как на систему действуют постоянные силы, то груз и цилиндр будут двигаться с постоянными ускорениями a (груз) и α (цилиндр).

Линейное ускорение a груза равно касательному ускорению точек, лежащих на поверхности цилиндра:

$$a = \alpha r = \text{const},$$

где α — угловое ускорение цилиндра.

По условию начальная скорость $v_0 = 0$, а конечную скорость груза, прошедшего путь h с постоянным ускорением a , определим из формулы кинематики:

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},$$

откуда

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2\alpha rh}.$$

Далее воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки и применим ее к грузу, движущемуся поступательно:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W.$$

Подставив выражения массы, скорости и работы, получим

$$\frac{Q}{g} \frac{2\alpha rh}{2} = (Q - S)h,$$

откуда реакция S нити

$$S = Q - \frac{Q\alpha r}{g}.$$

Далее запишем уравнение вращательного движения цилиндра:

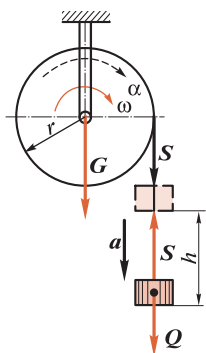


Рис. 17.7

$$T = J\alpha.$$

Вращающий момент

$$T = Sr = \left(Q - \frac{Q\alpha r}{g} \right) r,$$

а момент инерции цилиндра определим по формуле

$$J = \frac{mr^2}{2} = \frac{Gr^2}{2g}.$$

Подставив эти выражения в уравнение вращательного движения, получим

$$\left(Q - \frac{Q\alpha r}{g} \right) r = \frac{Gr^2}{2g} \alpha,$$

откуда определим угловое ускорение цилиндра:

$$\alpha = \frac{2Qg}{r(G + 2Q)}.$$

Теперь можно определить угловую скорость цилиндра:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\sqrt{2\alpha rh}}{r}.$$

Подставив значение углового ускорения, получим

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{2rh \frac{2Qg}{r(G + 2Q)}},$$

откуда

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{Qgh}{G + 2Q}}.$$

В заключение определим угловую скорость цилиндра с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы тел. Учитывая, что вначале система находилась в покое и работа силы тяжести цилиндра равна нулю (точка ее приложения не перемещается), пренебрегая трением, будем иметь

$$K_G + K_Q = W_Q,$$

где

$$K_G = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{Gr^2}{g \cdot 2} \frac{\omega^2}{2}; \quad K_Q = \frac{Q(\omega r)^2}{g \cdot 2}; \quad W_Q = Qh.$$

Подставив значения, получим

$$\frac{Gr^2\omega^2}{4g} + \frac{Qr^2\omega^2}{2g} = Qh,$$

откуда

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{Qgh}{G + 2Q}}.$$

17.5. ПОНЯТИЕ О БАЛАНСИРОВКЕ ВРАЦАЮЩИХСЯ ТЕЛ

Балансировкой называется уравнивание вращающихся или поступательно движущихся масс механизмов, с тем чтобы устранить влияние сил инерции. В настоящем подразделе рассматривается только балансировка вращающихся деталей машин.

Термины, применяемые в данном подразделе, соответствуют ГОСТ «Балансировка вращающихся тел. Термины».

Неуравновешенностью ротора (вращающегося в опорах тела) называется его состояние, характеризующееся таким распределением масс, которое за время вращения вызывает переменные нагрузки на опорах. Эти нагрузки являются причиной сотрясений и вибраций, преждевременного износа, снижают КПД и экономичность машин. Особо нежелательна неуравновешенность в быстроходных машинах.

Рассмотрим случай *статической* неуравновешенности, когда центр тяжести тела не лежит на оси вращения.

Представим себе маховик массой m , вращающийся с постоянной угловой скоростью ω . Допустим, что центр тяжести C маховика не лежит на оси вращения, а смещен на величину $e_{ст}$, называемую *эксцентриситетом массы* (рис. 17.8, а).

Силу тяжести маховика обозначим G , массой оси пренебрежем. Разобьем маховик на ряд материальных точек с массами m_i и определим равнодействующую центробежных сил инерции $F_{ni}^{ин}$. Проекция этой равнодействующей на ось x вследствие симметрии маховика относительно оси y равна нулю, т. е.

$$F_{nx}^{ин} = \sum (F_{ni}^{ин} \sin \alpha_i) = 0.$$

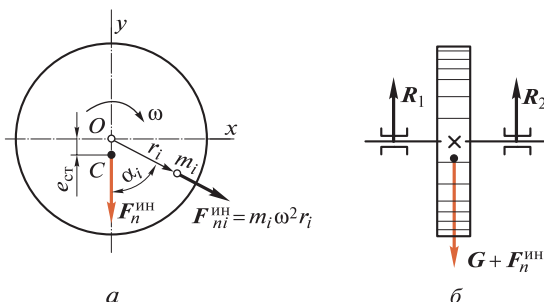


Рис. 17.8

Следовательно, равнодействующая $F_n^{\text{ин}}$ сил $F_{ni}^{\text{ин}}$ проецируется на ось y в натуральную величину. Тогда

$$F_n^{\text{ин}} = F_{ny}^{\text{ин}} \sum (F_{ni}^{\text{ин}} \cos \alpha_i) = \sum (m_i \omega^2 r_i \cos \alpha_i) = \omega^2 \sum (m_i y_i) = \omega^2 m e_{\text{ст}},$$

так как из статики известно, что

$$\sum (m_i y_i) = m y_C = m e_{\text{ст}}$$

Таким образом, равнодействующая сил инерции всего маховика направлена по линии OC и равна

$$F_n^{\text{ин}} = \omega^2 m e_{\text{ст}}$$

$$(F_{\tau}^{\text{ин}} = 0, \text{ так как } \omega = \text{const}).$$

Применим принцип Д'Аламбера и составим уравнение равновесия (рис. 17.8, б):

$$\sum Y = 0; \quad R_1 + R_2 - G - F_n^{\text{ин}} = 0.$$

Так как сила инерции $F_n^{\text{ин}}$ во время вращения меняет свое положение, то максимальная сила давления на подшипники будет при нижнем положении центра тяжести:

$$F_{\text{max}} = R_1 + R_2 = G + F_n^{\text{ин}}.$$

Определим силу давления F_{max} на подшипники, если масса маховика $m = 102$ кг, его частота вращения 3000 мин^{-1} , а эксцентриситет массы $e_{\text{ст}} = 1$ мм.

При $\omega = \pi n / 30 = \pi \cdot 3000 / 30 = 100\pi$ рад/с

$$F_n^{\text{ин}} = m \omega^2 e_{\text{ст}} = 102(100\pi)^2 \cdot 0,001 \approx 10\,000 \text{ Н};$$

$$F_{\text{max}} = mg + F_n^{\text{ин}} = 102 \cdot 9,8 + 10\,000 = 11\,000 \text{ Н}.$$

Как видно из примера, динамические нагрузки могут во много раз превосходить силу тяжести движущихся частей машины. Из рассмотренного можно сделать вывод: *для уравновешивания вращающегося тела необходимо, чтобы его центр тяжести лежал на оси вращения.*

Статическую неуравновешенность легко обнаружить путем статической балансировки на двух горизонтальных параллельных балансировочных ножках. Деталь, не имеющая статической неуравновешенности, будет находиться на ножках в состоянии безразличного равновесия.

Неуравновешенность ротора характеризуется величиной *дисбаланса*. Произведение неуравновешенной массы на ее эксцентриситет называется *значением дисбаланса* и выражается в г·мм.

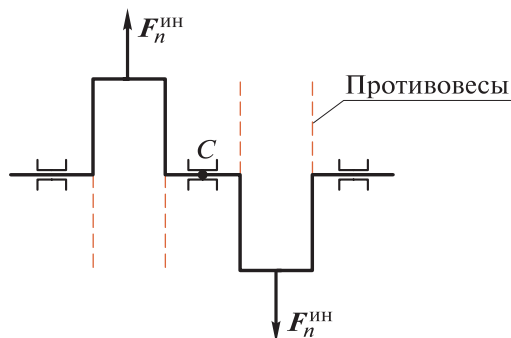


Рис. 17.9

Сформулированное условие уравнивания вращающегося тела *не является достаточным*, так как динамические нагрузки могут возникать и в том случае, когда центр тяжести лежит на оси вращения. Рассмотрим коленчатый вал двухцилиндрового двигателя (рис. 17.9).

В этом случае, даже если центр тяжести C лежит на оси вращения, возникает пара сил инерции $F_n^{ин}$, вызывающая изгиб вала и добавочные давления на опоры, меняющиеся по направлению.

Такая неуравновешенность называется *моментной*, и ее можно обнаружить при достаточно быстром вращении, но не в покое. Если статическая и моментная неуравновешенности существуют одновременно, то такая неуравновешенность называется *динамической*.

Причинами неуравновешенности могут быть неточности в изготовлении и сборке деталей, неравномерность распределения материала, деформация деталей, большие зазоры во вращательных парах и т.д. Устраняют неуравновешенность, удаляя (например, высверливая) избыток материала в более тяжелой части детали или добавляя корректирующую массу в более легкой его части. При значительной неуравновешенности ставят *противовесы* (см. рис. 17.9). В машиностроении статическая и динамическая балансировка производится на *балансировочных станках*.

17.6. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИЗМАХ

Законы и методы теоретической механики находят свое практическое приложение прежде всего в теории механизмов, так как *механизмы являются кинематической основой всех машин, механических приборов и промышленных роботов*.

Основные определения теории механизмов и машин изложены в подразд. 9.2, из которого видно, что кинематические пары и цепи могут быть плоскими и пространственными. Звенья плоских механизмов совершают плоскопараллельное движение.

Основные плоские механизмы с низшими парами. Как известно, звенья низших пар соприкасаются по поверхностям (поступательные, вращательные и винтовые пары).

Основным типом плоского механизма является *шарнирный четырехзвенник*, принципиальная схема которого изображена на рис. 17.10, а. В этом механизме четыре вращательные кинематические пары и четыре звена: 1 — кривошип, 2 — шатун, 3 — коромысло, 4 — стойка. Такой механизм называется *кривошипно-коромысловым* и является *однокривошипным*; крайние положения звеньев показаны на рисунке.

Кривошипно-коромысловый механизм встречается в металло-режущих станках, прессах, ковочных, полиграфических, сельскохозяйственных и других машинах, а также во многих приборах.

Если стойка шарнирного четырехзвенника — самое короткое звено или если звенья 1 и 3 равной длины, то механизм становится *двухкривошипным*, так как звено 3 так же, как и кривошип 1, получит возможность совершать полный оборот.

На рис. 17.10, б показана схема *шарнирного параллелограмма*; у такого механизма оба кривошипа вращаются в одном направлении с одинаковой угловой скоростью, а шатун 2 движется поступательно. Шарнирный параллелограмм применяется, например, в локомотивах в качестве спарника, передающего вращение ведомым колесам, или в механизме чертежного приспособления, изображенного на рис. 10.2. На рис. 17.10, б показан *шарнирный антипараллелограмм* $O_1AB_1O_2$, кривошипы которого вращаются в противоположных направлениях.

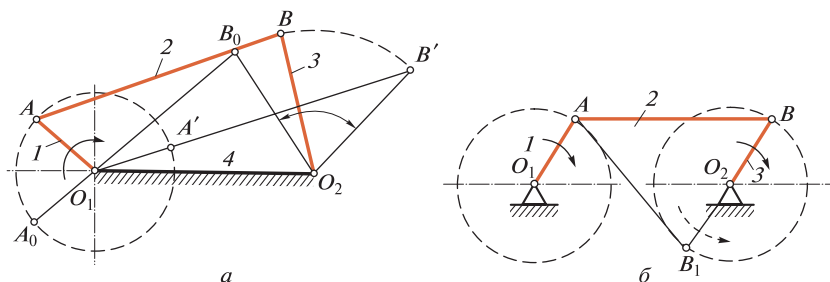


Рис. 17.10

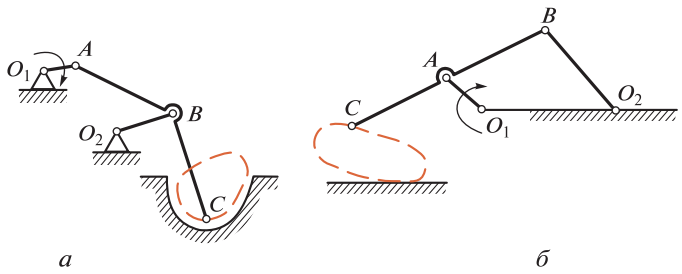


Рис. 17.11

На рис. 17.11 показаны схемы применения шарнирного четырехзвенника в тестосмесительной машине (а) и машине для ворошения сена (б).

Если в шарнирном четырехзвеннике преобразовать одну вращательную пару в поступательную, то получится широко распространенный *кривошипно-ползунный механизм* (см. рис. 9.1). Такой механизм является *центральный*, так как ось ползуна пересекает ось кривошипа. Если ось ползуна смещена от оси кривошипа на величину эксцентриситета e (рис. 17.12), то кривошипно-ползунный механизм называется *нецентральным*. На этом рисунке тонкими линиями показаны крайние положения звеньев механизма и видно, что угол поворота кривошипа при прямом (обычно рабочем) ходе больше, чем при обратном (обычно холостом) ходе. Следовательно, в нецентральном механизме холостой ход совершается с большей скоростью, чем рабочий.

За счет эксцентриситета угол давления α шатуна на ползун (а следовательно, и давление ползуна на направляющие) во время рабочего хода будет меньше, чем при холостом. Это благоприятно сказывается на КПД и долговечности машины, так как обычно нагрузка на механизм при рабочем ходе значительно больше, чем при холостом.

На рис. 9.4 показана схема четырехзвенного *кривошипно-кулисного* механизма с поступательно движущейся кулисой. Этот механизм преобразует вращательное движение кривошипа OM в возвратно-поступательное движение кулисы с помощью камня кулисы M , шарнирно соединенного с пальцем кривошипа.

На рис. 17.13 изображена схема шестизвенного кривошипно-кулисного механизма, применяемо

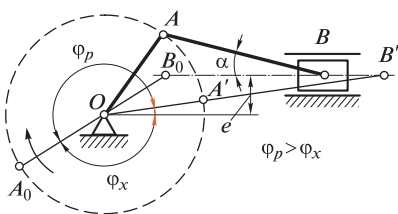


Рис. 17.12

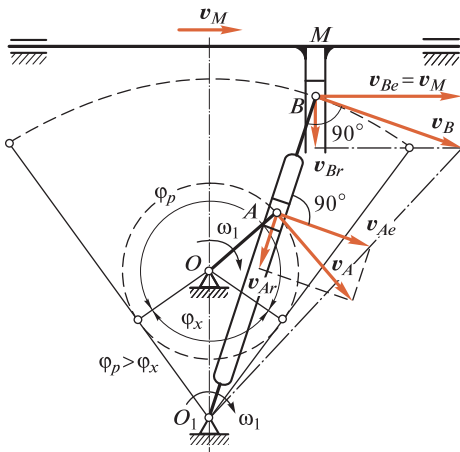


Рис. 17.13

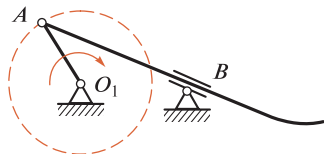


Рис. 17.14

го, например, в поперечно-строгальных станках. Такой механизм преобразует непрерывное вращательное движение кривошипа OA в возвратно-поступательное движение ползуна M с помощью качающейся кулисы O_1B и поступательно движущейся кулисы MB . Из рисунка видно, что угол поворота кривошипа при рабочем ходе заметно больше, чем при холостом, следовательно, скорость рабочего хода будет меньше скорости холостого хода.

Скорость движения ползуна M при любом положении механизма легко определяется с помощью теоремы о сложении скоростей, согласно которой абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей. Прямоугольники скоростей точек A и B показаны на рисунке.

На рис. 17.14 представлена схема кулисного кривошипно-коромыслового механизма с качающимся ползуном. Такой механизм применяется, например, в снегоуборочных машинах.

Некоторые механизмы с высшими парами. Как известно, звенья высших пар соприкасаются по линиям и точкам. Высшие кинематические пары имеются, например, в механизмах прерывистого движения и кулачковых механизмах.

На рис. 17.15, *a* изображен *мальтийский механизм*, преобразующий непрерывное вращение ведущего звена — кривошипа 1 с пальцем или роликом B на конце в прерывистое вращение ведомого звена — мальтийского креста 2 , имеющего радиальные пазы (название механизма возникло от сходства ведомого звена с эмблемой рыцарского религиозного Мальтийского ордена).

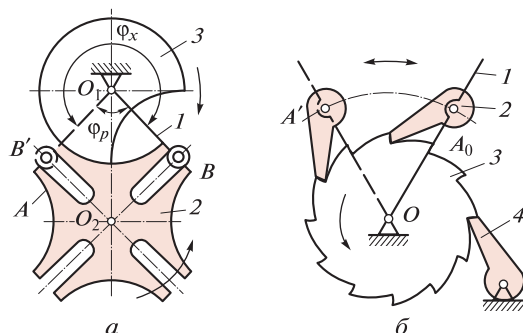


Рис. 17.15

Вращение мальтийского креста происходит при повороте кривошипа на угол φ_p ; остальная часть оборота кривошипа на угол φ_x соответствует остановке ведомого звена 2. Неподвижное положение мальтийского креста фиксируется его сегментными вырезами A , по которым скользит диск 3, жестко связанный с кривошипом 1.

Число пазов мальтийского креста — от 3 до 12. При бесконечно большом числе пазов и радиусе мальтийский крест превратится в рейку, которая будет совершать поступательное движение.

На рис. 17.15, *a* изображен мальтийский механизм внешнего зацепления, когда ведущее и ведомое звенья вращаются в противоположных направлениях. Для передачи вращения в одном направлении применяют механизмы с внутренним зацеплением.

Мальтийские механизмы применяют в металлообрабатывающих станках, пилющих машинах, кинопроекторных аппаратах и приборах точной механики.

На рис. 17.15, *б* показан один из видов *храпового механизма*. Такой механизм преобразует возвратно-качательное движение ведущего звена — рычага 1 с рабочей собачкой 2 в прерывистое одно-стороннее вращательное движение ведомого звена 3, называемое *храповым колесом*. При вращении рычага и рабочей собачки в исходное положение храповое колесо остается неподвижным. Для предотвращения его поворота в обратном направлении предусмотрена стопорная собачка 4.

При бесконечно большом числе зубьев храпового колеса оно превратится в рейку, которая будет совершать прерывистое поступательное движение.

Храповые механизмы применяют, например, в грузоподъемных машинах, механизмах подачи автоматических линий, механизмах завода пружин, пилющих машинах и др.

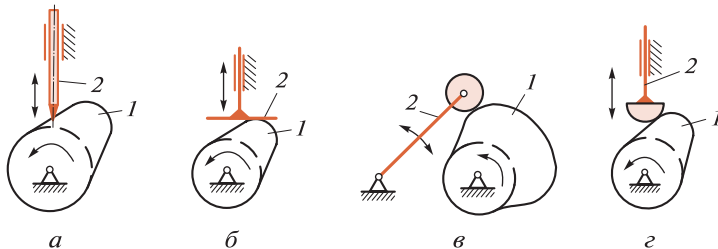


Рис. 17.16

В технике весьма широкое применение имеют *кулачковые механизмы*, с помощью которых можно осуществить почти любой заранее заданный закон движения ведомого звена.

Простейший кулачковый механизм — трехзвенный (рис. 17.16), состоит из кулачка *1*, толкателя *2* и стойки. Механизм преобразует вращательное движение кулачка в возвратно-поступательное или качательное движение толкателя.

На рис. 17.16 показаны плоские кулачковые механизмы с толкателями различной конструкции: игольчатым (*а*), тарельчатым (*б*), роликовым (*в*) и сферическим (*г*).

Существуют механизмы с поступательно движущимися кулачками; такие кулачки называют *копирами*.

Кулачковые механизмы применяют, например, в двигателях внутреннего сгорания, металлорежущих станках, приборостроении и т.д.

На рис. 17.17 показана сложная разветвленная кинематическая цепь одноцилиндрового двигателя внутреннего сгорания. Цепь состоит из кривошипно-ползунного механизма *1—2—3* и двух кулачковых механизмов *4—5* клапанного газораспределения. Колен-

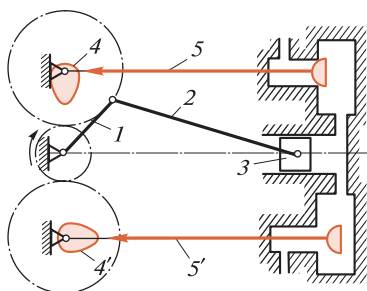


Рис. 17.17

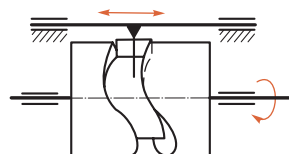


Рис. 17.18

чатый вал (кривошип I) и распределительный вал с кулачками 4 связаны между собой зубчатыми колесами.

Все рассмотренные ранее механизмы являются плоскими. На рис. 17.18 изображена схема *пространственного кулачкового механизма* с цилиндрическим кулачком (барабаном). Такой механизм применяется, например, в металлорежущих автоматах и полуавтоматах.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

II ЧАСТЬ

Глава 18. Теоретические основы сопротивления материалов

Глава 19. Растяжение и сжатие

Глава 20. Сдвиг (срез)

Глава 21. Геометрические характеристики плоских сечений

Глава 22. Кручение

Глава 23. Изгиб

Глава 24. Сочетание основных деформаций (сложное сопротивление)

Глава 25. Прочность и жесткость при динамических нагрузках

Глава 26. Продольный изгиб

Глава 18

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

18.1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

В сопротивлении материалов рассматривают методы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочностью называется способность материала конструкций и их элементов сопротивляться действию внешних сил, не разрушаясь. Расчеты на прочность дают возможность определить размеры и форму деталей, выдерживающих заданную нагрузку, при наименьшей затрате материала.

Под *жесткостью* понимается способность тела или конструкции сопротивляться образованию деформации. Расчеты на жесткость гарантируют, что изменения формы и размеров конструкций и их элементов не превысят допустимых норм.

Под *устойчивостью* понимается способность конструкции сопротивляться усилиям, стремящимся вывести ее из исходного состояния равновесия. Расчеты на устойчивость предотвращают возможность внезапной потери устойчивости и искривления длинных или тонких деталей.

На практике в большинстве случаев приходится иметь дело с конструкциями сложной формы, но их можно представить себе состоящими из отдельных элементов, например, брусьев, пластин, оболочек и массивов.

Основным расчетным элементом в сопротивлении материалов является *брус*, т.е. тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. Брусья бывают *прямолинейные* и *криволинейные*, *постоянного* и *переменного* сечения. В зависимости от их назначения в конструкции брусья называют *колоннами*, *балками*, *стержнями*.

Плоское сечение, перпендикулярное оси бруса, называется *поперечным*; сечение, параллельное оси бруса (прямолинейного), — *продольным*; остальные плоские сечения — *наклонными*.

Кроме расчета брусьев сопротивление материалов занимается расчетом *пластин* и *оболочек*, т.е. тел, имеющих малую толщину

по сравнению с другими размерами (например, резервуары, трубы, обшивка кораблей и самолетов). Тела, у которых все три измерения одинакового порядка, называются *массивами* (например, фундаменты, станины станков). Расчеты пластин, оболочек и массивов в настоящем учебнике не рассматриваются.

При деформации тела под действием внешних сил внутри него возникают *силы упругости*, которые препятствуют деформации стремятся вернуть частицы тела в первоначальное положение. Появление сил упругости обусловлено существованием в теле внутренних сил молекулярного взаимодействия.

В сопротивлении материалов изучают *деформации тел* и возникающие при этих деформациях *внутренние силы*.

После прекращения действия внешних сил вызванная ими деформация может полностью или частично исчезнуть. Способность материала устранять деформацию после прекращения действия внешних сил называется *упругостью*. Деформация, исчезающая после прекращения действия внешних сил, называется упругой; деформация, не исчезающая после прекращения действия внешних сил, называется *остаточной*, или *пластической*. Способность материала иметь значительные остаточные деформации, не разрушаясь при этом, называют *пластичностью*, а сами материалы называются *пластичными*. К числу таких материалов относятся низкоуглеродистая сталь, алюминий, медь, латунь и др.

Подчеркнем, что *возникновение значительных остаточных деформаций* в большинстве случаев приводит к нарушению нормальной работы конструкции, поэтому *считается нарушением прочности* (как и разрушение).

Материалы, обладающие весьма малой пластичностью, называются *хрупкими*. В отличие от пластичных хрупкие материалы разрушаются без заметных остаточных деформаций. К хрупким материалам относят чугун, твердые сплавы, стекло, кирпич и др.

Наука о сопротивлении материалов опирается на законы теоретической механики, в которой тела полагались абсолютно жесткими, т.е. неспособными деформироваться. Пользуясь рассмотренным в теоретической механике принципом отвердевания, в сопротивлении материалов мы будем применять к деформированным телам условия равновесия статики для определения реакций связей и действующих в сечениях деталей внутренних сил.

При расчетах на прочность и жесткость некоторые положения теоретической механики оказываются неприменимы, в частности: 1) действующие на тело внешние силы нельзя заменять их равнодействующей или эквивалентной системой сил; 2) силу нельзя

переносить вдоль линии ее действия; 3) пару сил нельзя перемещать в плоскости действия пары.

Эти правила имеют исключение. Так, например, силы, приложенные к небольшой поверхности тела, как и в теоретической механике, мы будем считать сосредоточенными, т.е. приложенными в точке; распределенные реактивные силы, приложенные к заземленному концу балки, мы по-прежнему будем заменять реактивной силой и реактивным моментом. Такие замены не вносят существенных изменений в условия деформации тела. Это положение называют *принципом смягченных граничных условий*, или принципом Сен-Венана, по имени французского ученого А. Сен-Венана (1797 — 1886).

Принцип Сен-Венана можно сформулировать следующим образом: *в точках тела, достаточно удаленных от мест приложения внешних сил, модуль внутренних сил мало зависит от конкретного способа приложения сил.*

В дальнейшем при изучении отдельных видов деформаций мы на основании принципа Сен-Венана не будем интересоваться конкретными способами приложения внешних сил, а будем считать, что в местах их приложения внутренние силы меняются скачкообразно.

18.2. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И ДОПУЩЕНИЯ

Конструкционные материалы, из которых изготавливают детали машин и сооружений, не являются, строго говоря, *непрерывными, однородными* во всех точках и *изотропными* (имеющими одинаковые свойства во всех направлениях).

В процессе изготовления заготовок и получения из них готовых деталей в материале появляются различные, не поддающиеся учету поверхностные и внутренние дефекты, например раковины, трещины и неоднородность структуры в литых деталях, волосовины у катаных или кованных деталей, первоначальные внутренние усилия, вызванные неравномерностью остывания литых и кованных деталей, неравномерностью высыхания и неоднородностью древесины, неравномерностью затвердевания и неоднородностью бетона и т.д.

Так как закономерности возникновения указанных явлений установить невозможно, то в сопротивлении материалов принимается ряд гипотез и допущений, которые позволяют исключить из рассмотрения эти явления. В результате объектом изучения в сопротивлении материалов становится не само реальное тело, а его приближенная модель. Экспериментальная проверка выводов, по-

лученных на основании приведенных ниже гипотез и допущений, показывает, что эти выводы вполне пригодны для применения в практике инженерных расчетов.

Перейдем к рассмотрению основных гипотез и допущений, касающихся *физико-механических свойств материалов*.

1. **Гипотеза об отсутствии первоначальных внутренних усилий.** Согласно этой гипотезе предполагается, что если нет причин, вызывающих деформацию тела (нагружение, изменение температуры), то во всех его точках *внутренние усилия равны нулю*. Таким образом, не принимаются во внимание силы взаимодействия между частицами ненагруженного тела.

2. **Допущение об однородности материала.** Физико-механические свойства тела могут быть неодинаковыми в разных точках. В сопротивлении материалов этими различиями пренебрегают, полагая, что материал во всех точках тела обладает *одинаковыми свойствами*.

3. **Допущение непрерывности материала.** Согласно этому допущению материал любого тела имеет *непрерывное строение* и представляет собой *сплошную среду*. Допущение о непрерывном строении материала позволяет применять при расчетах методы высшей математики (дифференциальное и интегральное исчисления).

4. **Допущение об изотропности материала.** Это допущение предполагает, что материал тела обладает во всех направлениях *одинаковыми свойствами*.

Многие материалы состоят из кристаллов, у которых физико-механические свойства в различных направлениях существенно различны. Однако благодаря наличию в теле большого количества беспорядочно расположенных кристаллов свойства всей массы материала в различных направлениях выравниваются.

Допущение об изотропности хорошо подтверждается практикой для большинства материалов и лишь приближенно для таких материалов, как камень, пластмассы, железобетон.

Материалы, имеющие неодинаковые свойства в разных направлениях, называются анизотропными, например древесина.

5. **Допущение об идеальной упругости.** Это допущение предполагает, что в известных пределах нагружения материал обладает *идеальной упругостью*, т.е. после снятия нагрузки деформации полностью исчезают.

Рассмотрим теперь гипотезы и допущения, связанные с *деформациями* элементов конструкций.

Изменение линейных и угловых размеров тела называется соответственно *линейной* и *угловой деформацией*. Изменение положе-

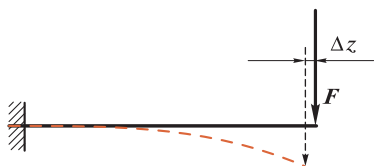


Рис. 18.1

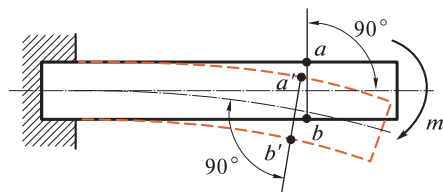


Рис. 18.2

ния (координат) точек тела, вызванное деформацией, называется *перемещением*.

1. **Допущение о малости перемещений**, или **принцип начальных размеров**. Согласно этому допущению деформации тела и связанные с ними перемещения точек и сечений малы по сравнению с размерами тела. На основании этого мы будем пренебрегать изменениями в расположении внешних сил, вызванными деформацией. Так, например, не будем принимать во внимание смещение Δz линии действия силы F , показанное на рис. 18.1.

2. **Допущение о линейной деформируемости тел**. Согласно этому допущению перемещения точек и сечений упругого тела в известных пределах нагружения *прямо пропорциональны* силам, вызывающим эти перемещения.

3. **Гипотеза плоских сечений**, или **гипотеза Бернулли**. Согласно этой гипотезе плоские поперечные сечения, проведенные в теле до деформации, остаются при деформации *плоскими и нормальными к оси* (рис. 18.2). Эта гипотеза была впервые высказана швейцарским ученым Якобом Бернулли (1654—1705) и положена в основу при изучении большинства основных деформаций бруса.

К основным гипотезам сопротивления материалов относится также принцип независимости действия сил, который будет сформулирован в конце этой главы (аналогичный принцип был рассмотрен в динамике).

18.3. ВИДЫ НАГРУЗОК И ОСНОВНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В процессе работы машин и сооружений их узлы и детали воспринимают и передают друг другу различные *нагрузки*, т.е. силовые воздействия, вызывающие изменение внутренних сил и деформации узлов и деталей.

Силы, воспринимаемые элементами конструкций, являются либо *массовыми*, или *объемными* (силы тяжести, силы инерции),

либо поверхностными силами контактного взаимодействия рассматриваемого элемента с соседними элементами или прилегающей к нему средой (например, пар, воздух, жидкость).

Из теоретической механики известно, что поверхностные нагрузки бывают *сосредоточенными* или *распределенными*. В зависимости от характера действия нагрузки во времени их подразделяют на статические и динамические.

Статическими называются нагрузки, числовое значение, направление и место приложения которых остаются постоянными или меняются медленно и незначительно. Таким образом, можно полагать, что при передаче статических нагрузок все части конструкции находятся в равновесии. Пример статической нагрузки — сила тяжести сооружений.

Динамическими называются нагрузки, характеризующиеся быстрым изменением во времени их значения, направления или места приложения. К динамическим относятся *ударные*, *внезапно приложенные* и *повторно-переменные* нагрузки. Ударные нагрузки возникают, например, при ковке металла или забивке свай; примером внезапно прилагаемой нагрузки является давление колеса, катящегося по рельсу; повторно-переменные нагрузки испытывают, например, детали кривошипно-ползунного механизма паровой машины. К динамическим относятся также *инерционные* нагрузки, например силы инерции в ободе вращающегося маховика.

Следует помнить, что в число внешних сил, принимаемых во внимание при расчете конструкций, входят *не только* активные силы, *но также* реакции связей и силы инерции (при движении с достаточно большим ускорением).

Перейдем к рассмотрению *основных деформаций*. Из практики известно, что в процессе эксплуатации элементы конструкций испытывают следующие *основные деформации*:

- 1) *растяжение* — эту деформацию испытывают, например, канаты, тросы, цепи, шток протяжного станка;
- 2) *сжатие* — на сжатие работают, например, колонны, кирпичная кладка, пуансоны штампов;
- 3) *сдвиг* — деформацию сдвига испытывают заклепки, болты, шпонки, швы сварных соединений. Деформацию сдвига, доведенную до разрушения материала, называют *срезом*. Срез возникает, например, при резке ножницами или штамповке деталей из листового материала;
- 4) *кручение* — на кручение работают валы, передающие мощность при вращательном движении. Обычно деформация кручения сопровождается другими деформациями, например изгибом;

5) *изгиб* — на изгиб работают балки, оси, зубья зубчатых колес и другие элементы конструкций.

Очень часто элементы конструкций подвергаются действию нагрузок, вызывающих одновременно несколько основных деформаций.

18.4. МЕТОД СЕЧЕНИЙ. НАПРЯЖЕНИЕ

Для расчетов деталей машин и сооружений на прочность необходимо знать внутренние силы упругости, возникающие в результате действия приложенных к деталям внешних сил.

В теоретической механике мы познакомились с понятием метода сечений. Этот метод широко применяется в сопротивлении материалов для определения внутренних сил, поэтому рассмотрим его подробно. Напомним, что всякое тело, в том числе деталь машины или сооружения, можно полагать системой материальных точек.

В теоретической механике мы имели дело с неизменяемыми системами; в сопротивлении материалов рассматриваются изменяемые (деформируемые) системы материальных точек.

Метод сечений заключается в том, что тело мысленно рассекается плоскостью на две части, любая из которых отбрасывается и взамен нее к сечению оставшейся части прикладываются внутренние силы, действовавшие до разреза; оставленная часть рассматривается как самостоятельное тело, находящееся в равновесии под действием внешних и приложенных к сечению внутренних сил.

Согласно третьему закону Ньютона (аксиома взаимодействия), внутренние силы, действующие в сечении оставшейся и отброшенной частей тела, равны по модулю, но противоположны по направлению. Таким образом, рассматривая равновесие любой из двух частей рассеченного тела, мы получим одно и то же значение внутренних сил, однако выгоднее рассматривать ту часть тела, для которой уравнения равновесия проще.

В соответствии с принятым допущением о непрерывности материала тела мы можем утверждать, что внутренние силы, возникающие в теле, представляют собой силы, равномерно или неравномерно распределенные по сечению.

Применяя к оставленной части тела условия равновесия, мы не сможем найти закон распределения внутренних сил по сечению, но сможем определить *статические эквиваленты* этих сил.

Так как основным расчетным объектом в сопротивлении материалов является брус и чаще всего нас будут интересовать внутрен-

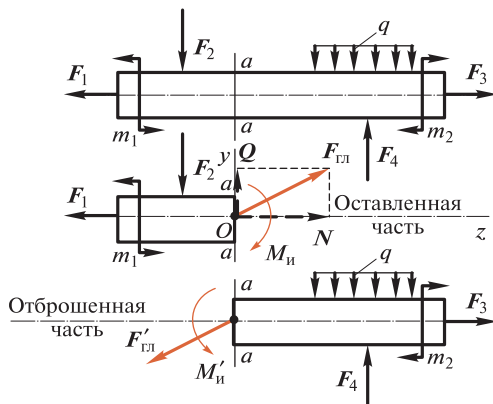


Рис. 18.3

ние силы в его поперечном сечении, то рассмотрим, каковы будут статические эквиваленты внутренних сил в поперечном сечении бруса. Разсечем брус (рис. 18.3) поперечным сечением $a-a$ и рассмотрим равновесие его левой части.

Если внешние силы, действующие на брус, лежат в одной плоскости, то в общем случае статическим эквивалентом внутренних сил, действующих в сечении $a-a$, будут *главный вектор* $F_{\text{гл}}$, приложенный в центре тяжести сечения, и *главный момент* $M_{\text{и}} = M_{\text{и}}$, уравновешивающие плоскую систему внешних сил, приложенных к оставленной части бруса.

Разложим главный вектор на составляющую N , направленную вдоль оси бруса, и составляющую Q , перпендикулярную этой оси, т. е. лежащую в плоскости поперечного сечения.

Эти составляющие главного вектора вместе с главным моментом назовем *внутренними силовыми факторами*, действующими в сечении бруса. Составляющую N назовем *продольной силой*, составляющую Q — *поперечной силой*, пару сил с моментом $M_{\text{и}}$ — *изгибающим моментом*.

Для определения указанных трех внутренних силовых факторов применим известные из статики три уравнения равновесия оставленной части бруса, а именно:

$$\sum Z = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0$$

(ось z всегда направляем по оси бруса).

Если внешние силы, действующие на брус, не лежат в одной плоскости, т. е. представляют собой пространственную систему сил, то в общем случае в поперечном сечении бруса возникают *шесть*

внутренних силовых факторов (рис. 18.4), для определения которых применим известные из статики *шесть уравнений равновесия* оставленной части бруса, а именно:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0.$$

Шесть внутренних силовых факторов, возникающих в поперечном сечении бруса в самом общем случае, носят следующие названия: N — продольная сила, Q_x, Q_y — поперечные силы, M_k — крутящий момент, M_{ix}, M_{iy} — изгибающие моменты.

При разных деформациях в поперечном сечении бруса возникают различные внутренние силовые факторы. Рассмотрим частные случаи:

1. **В сечении возникает только продольная сила N .** Это деформация *растяжения* (если сила N направлена от сечения) или деформация *сжатия* (если сила N направлена к сечению).

2. **В сечении возникает только поперечная сила Q .** Это деформация *сдвига*.

3. **В сечении возникает только крутящий момент M_k .** Это деформация *кручения*.

4. **В сечении возникает только изгибающий момент M_{ix} .** В этом случае это деформация *чистого изгиба*. Если в сечении одновременно возникают изгибающий момент M_{ix} и поперечная сила Q_x , то изгиб называют *поперечным*.

5. **В сечении одновременно возникает несколько внутренних силовых факторов** (например, изгибающий и крутящий моменты или изгибающий момент и продольная сила). Имеет место *сочетание основных деформаций (сложное сопротивление)*.

Наряду с понятием деформации одним из основных понятий сопротивления материалов является *напряжение*. *Напряжение ха-*

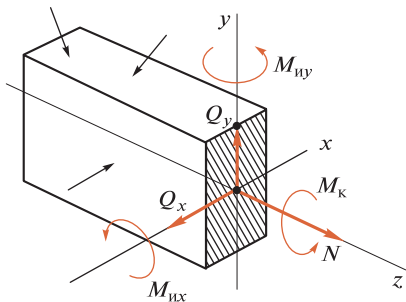


Рис. 18.4

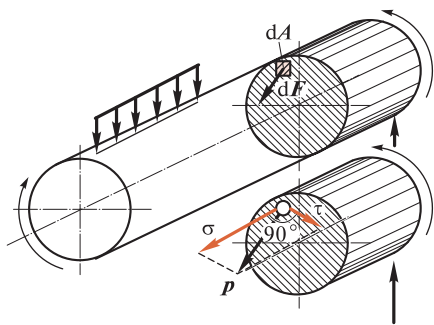


Рис. 18.5

характеризует интенсивность внутренних сил, действующих в сечении.

Рассмотрим какой-либо произвольно нагруженный брус и применим к нему метод сечений (рис. 18.5). Выделим в сечении бесконечно малый элемент площади dA (что мы имеем право делать, так как считаем материал непрерывным). Ввиду малости этого элемента можно считать, что в его пределах внутренние силы, приложенные в различных точках, одинаковы по модулю и направлению и, следовательно, представляют собой систему параллельных сил. Равнодействующую этой системы обозначим dF . Разделив dF на площадь элементарной площадки dA , определим интенсивность внутренних сил, т. е. напряжение p в точках элементарной площадки dA :

$$p = \frac{dF}{dA}.$$

Таким образом, *напряжение есть внутренняя сила, отнесенная к единице площади сечения*. Напряжение — величина векторная.

Размерность напряжения:

$$\begin{aligned} [p] &= \frac{[F]}{[A]} = \frac{\text{сила}}{\text{площадь}} = \\ &= \text{ньютон на квадратный метр} = \text{Н/м}^2 = \text{паскаль (Па)}. \end{aligned}$$

Поскольку эта единица напряжения очень мала, то мы будем применять более крупную кратную единицу — мегапаскаль (МПа):

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2.$$

Числовые значения напряжения, выраженного в мегапаскалях и ньютонах на квадратный миллиметр, совпадают.

Разложим вектор напряжения p на две составляющие: σ — перпендикулярную плоскости сечения и τ — лежащую в плоскости сечения (см. рис. 18.5). Эти составляющие назовем: σ — *нормальное* напряжение, τ — *касательное* напряжение.

Так как угол между нормальным и касательным напряжениями всегда равен 90° , то модуль полного напряжения p определим по формуле

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет вполне определенный физический смысл. Как мы убедимся в дальнейшем, в поперечном сечении бруса при растяжении, сжатии и чистом изгибе действуют только *нормальные напряжения*, а при сдвиге и кручении — *только касательные напряжения*.

В заключение рассмотрим гипотезу, которая называется *принципом независимости действия сил* и формулируется так: *при действии на тело нескольких нагрузок внутренние силы, напряжения, перемещения и деформации в любом месте могут быть определены как сумма этих величин, найденных от каждой нагрузки в отдельности.*

Пользуясь принципом независимости действия сил, мы, начав с изучения простейших основных деформаций, когда в поперечных сечениях бруса действуют только нормальные или только касательные напряжения, в дальнейшем перейдем к изучению более сложных основных деформаций, когда в поперечном сечении действуют и те, и другие напряжения, а затем рассмотрим случаи сочетания основных деформаций, что иногда называют сложным сопротивлением.

Заметим, что принцип независимости действия сил применим только для конструкций, деформации которых малы по сравнению с размерами и пропорциональны действующим нагрузкам.

Глава 19

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

19.1. НАПРЯЖЕНИЯ И ПРОДОЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Растяжением или *сжатием* называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только продольная сила. Брусья с прямолинейной осью (прямые брусья), работающие на растяжение или сжатие, часто называют *стержнями*.

Рассмотрим невесомый, защемленный левым концом прямой брус, вдоль оси которого действуют активные силы F и $2F$ (рис. 19.1). В дальнейшем все векторные величины будем обозначать их модулями.

Части бруса постоянного сечения, заключенные между поперечными плоскостями, в которых приложены активные или реактивные силы, будем называть *участками*. Изображенный на рис. 19.1 брус состоит из двух участков.

Применив метод сечений, определим продольные силы N_1 и N_2 на участках. Рассечем брус на первом участке поперечным сечением $I-I$. Во всех точках бруса будут действовать внутренние распределенные силы, равнодействующая которых определится из условия равновесия одной из частей бруса (например, правой от сечения): $\sum Z = 0$; $2F - F - N_1 = 0$, откуда $N_1 = 2F - F = F$.

Мы видим, что для равновесия оставленной части бруса в сечении $I-I$ необходимо приложить только силу N_1 , направленную вдоль оси, т.е. продольную силу.

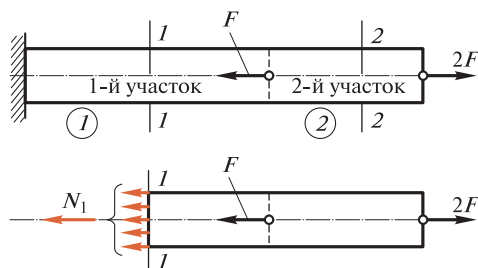


Рис. 19.1

Продольная сила есть равнодействующая внутренних нормальных сил, возникающих в поперечном сечении бруса. Нетрудно понять, что в сечении 2—2 на втором участке продольная сила будет иметь другое значение: $N_2 = 2F$. Таким образом, продольная сила в поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме внешних сил, расположенных по одну сторону сечения (имеется в виду, что все силы направлены вдоль оси бруса).

Очевидно, что в пределах одного участка продольная сила будет иметь постоянное значение. Следует помнить, что, рассматривая равновесие части бруса, расположенной не справа, а слева от сечения, мы должны были ввести в уравнение равновесия реакцию заземленного конца, определенную путем рассмотрения равновесия всего бруса.

В дальнейшем растягивающие (направленные от сечения) продольные силы мы будем считать *положительными*, а сжимающие (направленные к сечению) — *отрицательными*.

Иначе говоря, если равнодействующая внешних сил, приложенных к левой части бруса, направлена влево, а приложенных к правой части — вправо, то продольная сила в данном сечении будет *положительной*, и наоборот.

При изучении ряда деформаций мы будем мысленно представлять себе брусья состоящими из бесчисленного количества волокон, параллельных оси, и предполагать, что при деформации растяжения и сжатия волокна *не надавливают друг на друга* (это предположение называется *гипотезой о ненадавливании волокон*).

Если изготовить прямой брус из резины (для большей наглядности), нанести на его поверхности сетку продольных и поперечных линий и подвергнуть брус деформации растяжения, то можно отметить следующее: 1) поперечные линии останутся в плоскостях, перпендикулярных оси, а расстояния между ними увеличатся; 2) продольные линии останутся прямыми, а расстояния между ними уменьшатся.

Из этого опыта можно сделать вывод, что при растяжении справедлива гипотеза плоских сечений и, следовательно, все волокна бруса удлиняются на одну и ту же величину.

Все сказанное выше позволяет сделать вывод, что при растяжении и сжатии в поперечных сечениях бруса возникают только *нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению* и определяемые по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N — продольная сила; A — площадь поперечного сечения.

Очевидно, что при растяжении и сжатии форма сечения на напряжение не влияет.

В сечениях, близких к точкам приложения растягивающих или сжимающих сил, закон распределения напряжений по сечению будет более сложным, но, пользуясь принципом смягченных граничных условий, мы будем этими отклонениями пренебрегать и считать, что во всех сечениях бруса напряжения распределены равномерно и что в сечении, где к брусу приложена вдоль оси сосредоточенная сила, значения продольной силы и напряжений меняются скачкообразно.

Для наглядного изображения распределения вдоль оси бруса продольных сил и нормальных напряжений строят графики, называемые *эпюрами*, причем для нормальных напряжений применяется то же правило знаков, что и для продольных сил.

Пример 19.1. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений для ступенчатого бруса, изображенного на рис. 19.2.

Решение. Разобьем брус на три участка. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы, и места изменения размеров поперечного сечения.

Для построения эпюры продольных сил N под чертежом бруса проводим ось эпюры, параллельную оси бруса. Величины продольных сил в произвольном масштабе откладываем перпендикулярно оси эпюры, причем положительные значения N (растяжение) откладываются вверх, а отрицательные (сжатие) — вниз от оси. Эпюру заштриховывают перпендикулярно оси. В точках приложения сил на эпюре N получаются скачкообразные изменения, причем величина «скачка» равна модулю приложенной в сечении бруса силы.

Применяя метод сечений, находим, что во всех поперечных сечениях первого и второго участков действует продольная сила $N_1 = -2F = N_2$.

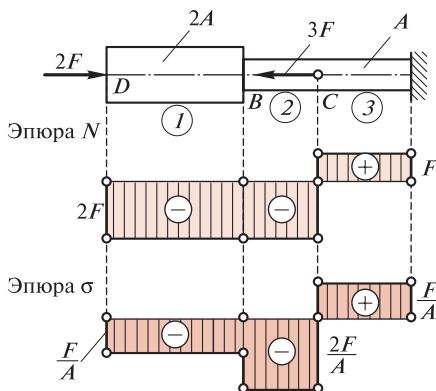


Рис. 19.2

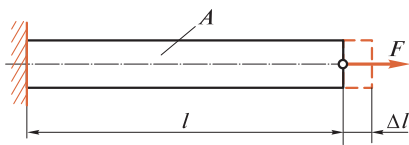


Рис. 19.3

Откладываем вниз от оси эпюры N величину $2F$ в произвольном масштабе и проводим прямую, параллельную оси эпюры. В сечении C бруса приложена сила $3F$. Применяя метод сечений, устанавливаем, что во всех поперечных сечениях

третьего участка действует продольная сила $N_3 = F$. Очевидно, что значение ординаты эпюры продольных сил под заделкой равно реакции заделки. Применяя метод сечений, выгоднее рассматривать равновесие части бруса, расположенной со стороны его свободного конца, в противном случае необходимо заранее определять и вводить в уравнение равновесия реакцию заделки.

Для построения эпюры σ определим нормальные напряжения на участках бруса. Тогда на первом участке нормальные напряжения будут $\sigma_1 = -2F/(2A) = -F/A$, на втором $-\sigma_2 = -2F/A$, на третьем $-\sigma_3 = F/A$.

Правила построения эпюры σ те же, что и для эпюры N .

Для расчетов на прочность особый интерес представляют те сечения бруса, в которых напряжения являются по абсолютному значению максимальными. Эти сечения являются предположительно опасными. В нашем примере такими будут сечения бруса на втором участке.

Перейдем к рассмотрению деформаций. Представим себе прямой брус постоянного поперечного сечения A , длиной l , жестко зашпеленный одним концом и нагруженный на другом конце растягивающей силой F (рис. 19.3). Под действием этой силы брус удлинится на некоторую величину Δl , которую назовем *абсолютным удлинением*. Отношение абсолютного удлинения Δl к первоначальной длине l назовем *относительным удлинением* и обозначим ε : $\varepsilon = \Delta l/l$. Относительное удлинение ε — число отвлеченное, иногда его выражают в процентах: $\varepsilon = (\Delta l/l)100$.

Вследствие деформации поперечные сечения бруса перемещаются в направлении оси. Взаимное перемещение двух сечений равно изменению длины части бруса, заключенной между этими сечениями.

19.2. ЗАКОН ГУКА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Напряжения и деформации при растяжении и сжатии связаны между собой зависимостью, которая называется законом Гука, по имени установившего этот закон английского физика Роберта Гука (1635 — 1703).

Закон Гука при растяжении и сжатии *справедлив* лишь в *определенных пределах нагружения* и формулируется так: *нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению или укорочению*.

Математически закон Гука можно записать в виде равенства:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности E характеризует жесткость материала, т.е. его способность сопротивляться упругим деформациям растяжения или сжатия, и называется *модулем продольной упругости, или модулем упругости первого рода*.

Модуль упругости и напряжение имеют одинаковую размерность:

$$[E] = \frac{[\sigma]}{[\varepsilon]} = \text{Па}.$$

Значения E , МПа, для некоторых материалов:

Чугун	$(1,50 \dots 1,60) \cdot 10^5$
Сталь	$(1,96 \dots 2,16) \cdot 10^5$
Медь	$(1,00 \dots 1,30) \cdot 10^5$
Сплавы алюминия	$(0,69 \dots 0,71) \cdot 10^5$
Дерево (вдоль волокон)	$(0,10 \dots 0,16) \cdot 10^5$
Текстолит	$(0,06 \dots 0,10) \cdot 10^5$
Капрон	$(0,01 \dots 0,02) \cdot 10^5$

Если в формулу закона Гука подставить выражения

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

то получим

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Произведение EA , стоящее в знаменателе, называется *жесткостью сечения* при растяжении и сжатии; оно характеризует одновременно физико-механические свойства материала и геометрические размеры поперечного сечения бруса.

Эта формула читается так: абсолютное удлинение или укорочение прямо пропорционально продольной силе, длине и обратно пропорционально жесткости сечения бруса.

Приведенные формулы закона Гука применимы только для брусев или их участков постоянного поперечного сечения, изготовленных из одного материала и при постоянной продольной силе.

Для бруса, имеющего несколько участков, отличающихся материалом, размерами поперечного сечения, продольной силой, изменение длины всего бруса равно алгебраической сумме удлинений и укорочений отдельных участков:

$$\Delta l = \sum (\Delta l_i).$$

Пример 19.2. На стальной ступенчатый брус действуют силы $F = 40$ кН и $R = 60$ кН. Площади поперечных сечений равны $A_1 = 800$ мм², $A_2 = 1600$ мм². Длины участков указаны на рис. 19.4; $a = 0,2$ м. Определить изменение длины бруса двумя способами: 1) с помощью эпюры продольных сил; 2) с помощью принципа независимости действия сил. Принять $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Решение. 1-й способ. Разобьем брус на три участка и, применяя метод сечений, определим значения продольных сил на каждом из них: $N_1 = N_2 = F = -40$ кН (сжатие), $N_3 = R - F = 20$ кН (растяжение). Строим эпюру продольных сил.

Для бруса, состоящего из нескольких участков, $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$, где по закону Гука $\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot 3a}{EA_1}$ — изменение длины первого участка; аналогично, $\Delta l_2 = \frac{N_2 a}{EA_2}$, $\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot 2a}{EA_2}$ — изменение длин второго и третьего участков.

Следовательно,

$$\Delta l = \frac{N_1 \cdot 3a}{EA_2} + \frac{N_2 a}{EA_2} + \frac{N_3 \cdot 3a}{EA_2}.$$

Подставив числовые значения с учетом знаков продольных сил, получим

$$\Delta l = \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 800 \cdot 10^{-6}} - \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1600 \cdot 10^{-6}} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1600 \cdot 10^{-6}},$$

откуда

$$\Delta l = -0,15 - 0,025 + 0,025 = -0,15 \text{ мм.}$$

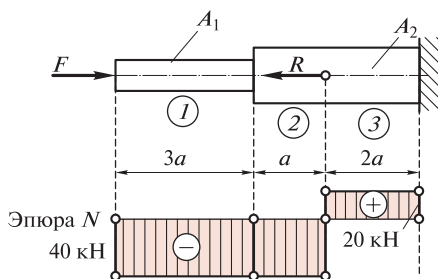


Рис. 19.4

Следовательно, брус укоротился на 0,15 мм.

2-й способ. Решим этот пример с помощью принципа независимости действия сил. Изменение длины бруса Δl будет складываться из укорочения Δl_F всего бруса под действием силы F и удлинения Δl_R третьего участка под действием силы R :

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_R.$$

Определим каждое из этих слагаемых:

$$\Delta l_F = \frac{F \cdot 3a}{EA_1} - \frac{F(a+2a)}{EA_2}.$$

Подставляя числовые значения, получим $\Delta l_F = -0,225$ мм.

Аналогично найдем $\Delta l_R = \frac{R \cdot 2a}{EA_2}$; $\Delta l_R = 0,075$ мм, откуда $\Delta l = -0,225 + 0,075 = -0,15$ мм.

Решая задачу двумя способами, мы получили один и тот же результат, что свидетельствует о правильности решения.

19.3. ПОПЕРЕЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Описанный в подразд. 19.1 опыт с резиновым брусом показывает, что *поперечные размеры сечения при растяжении уменьшаются, а при сжатии увеличиваются*. Это характерно для растяжения и сжатия всех материалов. Опытным путем установлено, что при одноосном растяжении или сжатии отношение относительных поперечной и продольной деформаций для данного материала — величина постоянная.

Впервые зависимость между относительной поперечной ε и относительной продольной ε' деформациями была установлена французским ученым С. Пуассоном (1781 — 1840). Эта зависимость имеет следующий вид:

$$|\varepsilon'| = \nu |\varepsilon|,$$

где ν — коэффициент поперечной деформации, называемый *коэффициентом Пуассона*.

Нетрудно понять, что ν — величина безразмерная.

Коэффициент Пуассона, как и модуль упругости первого рода, зависит только от материала и характеризует его упругие свойства. При растяжении и сжатии коэффициент Пуассона полагают одинаковым.

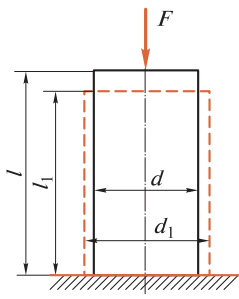


Рис. 19.5

Приведем значения ν для некоторых материалов:

Пробка	0,00	Латунь, 32	0,42
Чугун	0,23	Свинец	0,42
Сталь	0,24	Каучук	0,47
Медь	0,31	Парафин	0,5

Пример 19.3. Стальной цилиндр (рис. 19.5) длиной $l = 100$ мм и диаметром $d = 40$ мм при сжатии укорачивается до размера $l_1 = 99,9$ мм, а диаметр его увеличивается до размера $d_1 = 40,01$ мм.

Найти коэффициент Пуассона ν .

Решение. Определим относительную продольную и поперечную деформации $|\varepsilon|$ и $|\varepsilon'|$, если $\Delta l = l - l_1 = 0,1$ мм, а $\Delta d = d_1 - d = 0,01$ мм, тогда

$$\frac{\Delta l}{l} = |\varepsilon|; \quad \frac{\Delta d}{d} = |\varepsilon'|.$$

Отсюда коэффициент Пуассона

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = \frac{l \Delta d}{d \Delta l}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\nu = \frac{100 \cdot 0,01}{40 \cdot 0,1} = 0,25.$$

19.4. ДИАГРАММА РАСТЯЖЕНИЯ НИЗКОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

Механические характеристики материалов, т.е. величины, характеризующие их прочность, пластичность, упругость, твердость, а также упругие постоянные E и ν , необходимые конструктору для выбора материалов и расчетов проектируемых деталей, определяют путем механических испытаний стандартных образцов, изготовленных из исследуемого материала.

Большая заслуга в установлении единообразных во всем мире методов испытания материалов принадлежит русскому профессору Н. А. Белелюбскому (1845—1922) — президенту Международного общества испытания материалов.

Вопросы проведения лабораторных испытаний материалов в настоящей книге не излагаются, с ними читатель может ознакомиться в специальных учебных пособиях.

В данном подразделе мы подробно рассмотрим диаграмму, полученную в процессе наиболее распространенного и важного механического испытания — испытания на растяжение низкоуглеродистой стали (например, стали Ст3) при статическом нагружении.

В процессе этого испытания специальное устройство испытательной машины автоматически вычерчивает диаграмму, выражающую зависимость между растягивающей силой и абсолютным удлинением, т. е. в координатах $(F, \Delta l)$. Для изучения механических свойств материала независимо от размеров образца применяется диаграмма в координатах «напряжение — относительное удлинение» (σ, ϵ) . Эти диаграммы отличаются друг от друга лишь масштабами.

Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали представлена на рис. 19.6. Эта диаграмма имеет следующие характерные точки.

Точка А соответствует пределу пропорциональности. *Пределом пропорциональности* $\sigma_{\text{пц}}$ называется то наибольшее напряжение, до которого деформации растут пропорционально нагрузке, т. е. справедлив закон Гука (для стали Ст3 $\sigma_{\text{пц}} \approx 200$ МПа).

Точка А практически соответствует и другому пределу, который называется пределом упругости. *Пределом упругости* $\sigma_{\text{уп}}$ называется то наибольшее напряжение, до которого деформации практически остаются упругими.

Точка С соответствует пределу текучести. *Пределом текучести* $\sigma_{\text{т}}$ называется такое напряжение, при котором в образце появляется заметное удлинение без увеличения нагрузки (для стали Ст3 $\sigma_{\text{т}} \approx 240$ МПа). При достижении предела текучести поверхность образца становится матовой, так как на ней появляется сетка линий Людерса — Чернова, наклоненных к оси под углом 45° . Линии Лю-

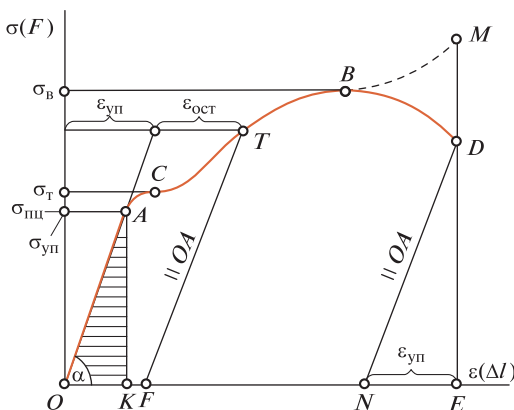


Рис. 19.6

дерса — Чернова впервые были описаны в 1859 г. немецким металлургом Л. Людерсом и независимо от него в 1884 г. русским металлургом Д. К. Черновым (1839—1921), предложившим использовать их при экспериментальном изучении напряжений в сложных деталях. Предел текучести является *основной механической характеристикой при оценке прочности пластичных материалов*.

Точка В соответствует временному сопротивлению разрыву, или пределу прочности. *Временным сопротивлением* $\sigma_{\text{в}}$ называется условное напряжение, равное отношению максимальной силы, которую выдерживает образец, к первоначальной площади его поперечного сечения (для стали Ст3 $\sigma_{\text{в}} \approx 400$ МПа). При достижении временного сопротивления на растягиваемом образце образуется местное сужение — шейка, т.е. начинается разрушение образца. В определении временного сопротивления говорится об условном напряжении, так как в сечениях шейки напряжения будут больше.

Пределом прочности $\sigma_{\text{пч}}$ называется временное сопротивление образца, разрушающегося без образования шейки. Предел прочности является *основной механической характеристикой* при оценке прочности *хрупких материалов*.

Точка D соответствует напряжению, возникающему в образце в момент разрыва во всех поперечных сечениях, кроме сечений шейки.

Точка M соответствует напряжению, возникающему в наименьшем поперечном сечении шейки в момент разрыва. Это напряжение можно назвать *напряжением разрыва*.

С помощью диаграммы растяжения в координатах (σ , ε) определим модуль упругости первого рода:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{AK\mu_{\sigma}}{OK\mu_{\varepsilon}} = \frac{\mu_{\sigma}}{\mu_{\varepsilon}} \operatorname{tg} \alpha,$$

где μ_{σ} — масштаб напряжений; μ_{ε} — масштаб относительных удлинений; α — угол, который составляет с осью абсцисс прямая линия диаграммы до предела пропорциональности.

Для большинства углеродистых сталей предел пропорциональности можно приблизительно считать равным половине временного сопротивления.

Деформация образца за пределом упругости состоит из *упругой* и *остаточной*, причем упругая часть деформации подчиняется закону Гука и за пределом пропорциональности (см. рис. 19.6).

Если нагрузку снять, то образец укоротится в соответствии с прямой *TF* диаграммы. При повторном нагружении того же образца его деформация будет соответствовать диаграмме *FTBD*. Та-

ким образом, *при повторном растяжении* образца, ранее нагруженного выше предела упругости, механические свойства материала меняются: повышается прочность (предел упругости и пропорциональности) и уменьшается пластичность. Это явление называется *наклепом*.

В некоторых случаях наклеп нежелателен (например, при пробивке отверстий под заклепки увеличивается возможность появления трещин возле отверстий), в других случаях наклеп создается специально (например, цепи подъемных машин, арматура железобетонных конструкций, провода, тросы подвергаются предварительной вытяжке за предел текучести). Проволока, полученная волочением, в результате наклепа имеет значительно большую прочность, чем точеный образец из того же материала.

Степень пластичности материала может быть охарактеризована (в процентах) *остаточным относительным удлинением* δ , %, и *остаточным относительным сужением* ψ , %, шейки образца после разрыва:

$$\delta = \frac{l_p - l_0}{l_0} 100; \quad \psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} 100,$$

где l_0 — первоначальная длина образца; l_p — длина образца после разрыва; A_0 — первоначальная площадь поперечного сечения образца; $A_{ш}$ — площадь, наименьшего поперечного сечения шейки образца после разрыва.

Чем больше δ и ψ , тем пластичнее материал. Материалы, обладающие очень малой пластичностью, называют *хрупкими*. Диаграмма растяжения хрупких материалов не имеет площадки текучести, у них при разрушении не образуется шейка.

Диаграмма сжатия стали до предела текучести совпадает с диаграммой растяжения, причем результаты испытаний сталей на растяжение и сжатие равноценны.

Результаты испытаний на растяжение и сжатие чугуна значительно отличаются друг от друга; предел прочности при растяжении в 3—5 раз ниже, чем при сжатии. Иными словами, *чугун значительно хуже работает на растяжение, чем на сжатие*.

Отметим, что ярко выраженную площадку текучести имеют только диаграммы растяжения низкоуглеродистой стали и некоторых сплавов цветных металлов. На рис. 19.7 показан для сравнения вид диаграмм растяжения сталей с различным содержанием углерода; из рисунка видно, что *с повышением процента содержания углерода увеличивается прочность стали и уменьшается ее пластичность*.

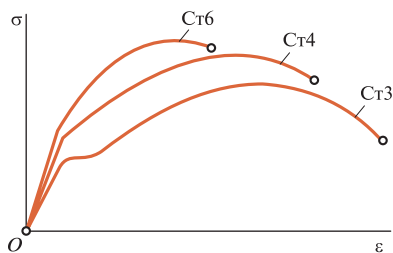


Рис. 19.7

Для пластичных материалов, диаграммы растяжения которых не имеют ярко выраженной площадки текучести (средне- и высокоуглеродистые, легированные стали) или совсем ее не имеют (медь, дюралюминий), вводится понятие *условного предела текучести* — напряжения, при котором относительное остаточное

удлинение образца равно 0,2%. Условный предел текучести также обозначим σ_T (иногда его обозначают $\sigma_{0,2}$).

Следует отметить, что деление материалов на пластичные и хрупкие условно, так как в зависимости от характера действующей нагрузки хрупкий материал может получить пластические свойства и, наоборот, пластичный материал приобретает свойства хрупкого. Так, например, деталь из пластичного материала при низкой температуре или при ударной нагрузке разрушается без образования шейки, как хрупкая.

19.5. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

При статическом растяжении образца растягивающая сила F , медленно возрастающая от нуля до какого-то значения, удлиняет образец на величину Δl и при этом совершает работу W . Эта работа аккумулируется в деформируемом образце в виде потенциальной энергии деформации Π , причем, пренебрегая незначительными потерями энергии (например, тепловыми), можно считать, что $W = \Pi$.

Если диаграмма растяжения построена в координатах $(F, \Delta l)$, то, как известно из теоретической механики, площадь диаграммы выражает работу деформации. До предела пропорциональности работа выражается площадью треугольника OAK (см. рис. 19.6). Таким образом, потенциальная энергия упругой деформации стержня длиной l постоянного поперечного сечения A при одинаковой во всех сечениях продольной силе $N = F$ будет равна

$$\Pi = W = \frac{F\Delta l}{2} = \frac{N^2 l}{2EA}.$$

Полная работа, затрачиваемая на разрушение образца, выражается площадью фигуры $OABDN$ диаграммы растяжения, площадь

треугольника NDE соответствует работе упругой деформации, исчезающей при разрыве образца.

При одновременном действии нескольких растягивающих или сжимающих сил и ступенчатом изменении размеров поперечного сечения брус разбивают на отдельные участки, отличающиеся значением напряжения; потенциальную энергию деформации всего бруса определяют как сумму потенциальных энергий отдельных участков:

$$W = \sum W_i = \sum \frac{\sigma_i^2 V_i}{2E},$$

где σ_i — нормальные напряжения в поперечных сечениях на каждом участке; V_i — объем каждого участка бруса.

Потенциальная энергия деформации выражается в единицах работы — джоулях (Дж), удельная потенциальная энергия — в джоулях на кубический метр (Дж/м³).

Анализируя формулы потенциальной энергии деформации, можно сделать следующие выводы:

1. Потенциальная энергия деформации — величина всегда положительная, так как в ее выражения входят квадраты напряжений или продольных сил.

2. По этой причине при вычислении потенциальной энергии деформации нельзя применять принцип независимости действия сил (из математики известно, что квадрат суммы не равен сумме квадратов слагаемых).

19.6. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

В результате проведения механических испытаний устанавливают предельные напряжения, при которых происходит нарушение работы или разрушение деталей конструкции.

Предельным напряжением при статической нагрузке для пластичных материалов является предел текучести, для хрупких — предел прочности. Для обеспечения прочности деталей необходимо, чтобы возникающие в них в процессе эксплуатации напряжения были меньше предельных.

Отношение предельного напряжения к напряжению, возникающему в процессе работы детали, называют *коэффициентом запаса прочности* и обозначают буквой s :

$$s = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma}, \quad \text{где } \sigma = \frac{N}{A}.$$

Очевидно, что недостаточный коэффициент запаса прочности не обеспечит надежности конструкции, а чрезмерный запас прочности приведет к перерасходу материала и утяжелению конструкции. Сечение, для которого коэффициент запаса прочности наименьший, называется *опасным*.

Минимально необходимый коэффициент запаса прочности называют *допускаемым* и обозначают $[s]$. Допускаемый коэффициент запаса прочности зависит от свойств, качества и однородности материала, точности представления о нагрузках, действующих на конструкцию, ответственности конструкции и многих других причин. Для пластичных материалов $[s] = 1,2 \dots 2,5$, для хрупких $[s] = 2 \dots 5$, для древесины $[s] = 8 \dots 12$.

Отношение предельного напряжения к допускаемому коэффициенту запаса прочности называют *допускаемым напряжением* и обозначают $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[s]}.$$

Условие прочности детали конструкции заключается в том, что наибольшее возникающее в ней напряжение (рабочее) не должно превышать допускаемого:

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma].$$

Условие прочности можно записать в ином виде: $s \geq [s]$, т.е. расчетный коэффициент запаса прочности не должен быть меньше допускаемого.

Если допускаемые напряжения при растяжении и сжатии различны, то их обозначают соответственно $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$. Ориентировочные значения допускаемых напряжений на растяжение и сжатие для некоторых материалов приведены в табл. 19.1.

Расчетная формула при растяжении и сжатии имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

и читается так: *нормальное напряжение в опасном сечении*, вычисленное по формуле $\sigma = N/A$, *не должно превышать допускаемое*.

При расчете конструкций на прочность встречаются три вида задач, различающихся формой использования расчетной формулы:

1) *проектный расчет*, при котором определяют размеры опасного сечения по формуле

$$A = \frac{N_{\text{max}}}{[\sigma]};$$

Таблица 19.1

Материал	[σ], МПа	
	Растяжение	Сжатие
Чугун серый	28... 80	120... 150
Сталь углеродистая конструкционная	60... 250	
Сталь легированная конструкционная	100... 400 и выше	
Медь	30... 120	
Латунь	70... 140	
Бронза	60... 120	
Дюралюминий	80... 150	
Текстолит	30... 40	50... 90
Дуб (вдоль волокна)	9... 13	13... 15
Кирпичная кладка	До 0,2	0,6... 2,5
Бетон	0,1... 0,7	1... 9

2) *проверочный расчет*, при котором определяется рабочее напряжение и сравнивается с допускаемым по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma];$$

3) *определение допускаемой нагрузки*, которое ведется по формуле

$$[N] = A[\sigma].$$

Пример 19.4. Пренебрегая массой конструкции, определить размер дубового подкоса *BC* квадратного сечения (рис. 19.8). Крепления в точках *A*, *B* и *C* считать идеально гладкими шарнирами. Дано: $F = 10$ кН, $a = 1$ м, $[\sigma] = 12$ МПа.

Решение. Рассмотрим равновесие бруса *AB*. Из теоретической механики известно, что реакция прямолинейного стержня, закрепленного двумя концами в идеально гладких шарнирах, направлена вдоль стержня. Таким образом, реакция *R* подкоса *BC* направлена вдоль его оси. Подкос работает на сжатие.

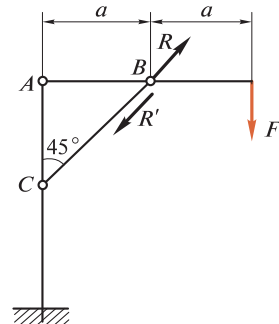


Рис. 19.8

Составим уравнение моментов относительно точки A :

$$\sum M_A = 0; -F \cdot 2a + Ra \sin 45^\circ = 0.$$

Сокращая равенство на a , получим

$$R = 2F/\sin 45^\circ = 2 \cdot 10/0,707 = 28,4 \text{ кН}.$$

Далее воспользуемся расчетным уравнением при сжатии и определим площадь A поперечного сечения подкоса BC : $\sigma = R/A \leq [\sigma]$, откуда

$$A = R/[\sigma] = 28,4 \cdot 10^3 / (12 \cdot 10^6) = 2370 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Так как подкос BC имеет квадратное сечение, то $A = b^2$, следовательно,

$$b = \sqrt{A} = \sqrt{2370 \cdot 10^{-6}} = 48 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 48,6 \text{ мм}.$$

Округлив, принимаем $b = 50 \text{ мм}$.

19.7. РАСТЯЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Если ось бруса вертикальна, то собственный вес вызывает деформацию растяжения или сжатия. Рассмотрим брус постоянного сечения весом G , длиной l , закрепленный верхним концом и нагруженный только собственным весом G (рис. 19.9).

Для определения напряжений в поперечном сечении на переменном расстоянии z от нижнего конца применим метод сечений. Рассмотрим равновесие нижней части бруса и составим уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0; N_z - G_z = 0, \text{ откуда}$$

$$N_z = G_z = \gamma Az,$$

где γ — удельный вес материала бруса; A — площадь его поперечного сечения.

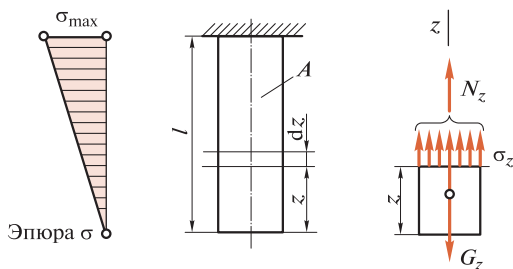


Рис. 19.9

$$\text{Напряжение } \sigma_z = \frac{N_z}{A} = \frac{\gamma Az}{A} = \gamma z.$$

Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса постоянного сечения, растягиваемого лишь собственным весом, прямо пропорциональны расстоянию сечения от нижнего конца и не зависят от площади сечения.

Эпюра распределения нормальных напряжений вдоль оси бруса представляет собой треугольник (см. рис. 19.9). Очевидно, что опасное сечение бруса будет находиться в заделке: $\sigma_{\max} = \gamma l$.

Определим длину бруса постоянного сечения, при которой напряжение только от собственного веса достигает допустимого, и брус не может нести полезной нагрузки. Такая длина бруса называется *предельной*:

$$l_{\text{пр}} = \frac{[\sigma]}{\gamma}.$$

Если σ_{\max} станет равным пределу прочности, то брус разрушится от собственного веса. Длина бруса, при которой он разрушается под действием собственного веса, называется *критической*:

$$l_{\text{кр}} = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\gamma}.$$

Как видно из формул, предельная и критическая длины не зависят от площади поперечного сечения бруса.

Вычислим для примера критическую длину бруса из стали Ст2, у которой $\sigma_{\text{в}} = 360$ МПа, а удельная сила тяжести $\gamma = 7,85 \cdot 10^4$ Н/м²:

$$l_{\text{кр}} = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\gamma} = \frac{360 \cdot 10^6}{7,85 \cdot 10^4} = 4600 \text{ м.}$$

Определим удлинение Δl бруса под действием собственного веса, для чего выделим бесконечно малый элемент длиной dz . Ввиду малости длины элемента будем считать, что в его пределах продольная сила N_z не изменяется. Применяя закон Гука, получим

$$d(\Delta l) = \frac{N_z dz}{EA} = \frac{\gamma Az dz}{EA} = \frac{\gamma}{E} z dz.$$

Проинтегрировав это выражение в пределах от 0 до l , получим

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\gamma}{E} z dz = \frac{\gamma}{E} \int_0^l z dz = \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Так как

$$G = \gamma Al, \text{ то } \Delta l = \frac{Gl}{2EA}.$$

Удлинение бруса постоянного сечения под действием собственного веса в 2 раза меньше удлинения при растяжении силой, равной собственному весу и приложенной к концу бруса.

19.8. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи на расчет конструкций, в элементах которых внутренние силовые факторы не могут быть определены с помощью одних уравнений равновесия статики, называются *статически неопределимыми*.

Для решения таких задач помимо уравнений равновесия составляют *уравнения перемещений* или *деформаций*.

Изменение температуры деталей вызывает изменение их размеров, в результате чего в статически неопределимых системах возникают дополнительные напряжения, называемые температурными.

Рассмотрим невесомый стержень постоянного сечения площадью A , длиной l , жестко зашпеленный по концам (рис. 19.10). При нагревании в стержне возникнут температурные напряжения сжатия. Определим эти напряжения.

Составим для стержня уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0; \quad R_C - R_B = 0,$$

откуда получим, что реакции R_C и R_B равны, а применив метод сечений, установим, что продольная сила N в сечениях стержня равна неизвестным реакциям:

$$N = R_C = R_B.$$

Составим дополнительное уравнение, для чего мысленно отбросим правую заделку и заменим ее реакцией R_B , тогда дополнительное уравнение деформаций будет иметь вид

$$\Delta l_t = \Delta l_{CB},$$

т.е. температурное удлинение стержня равно его укорочению под действием реакции R_B , так как связи полагаются абсолютно жесткими.

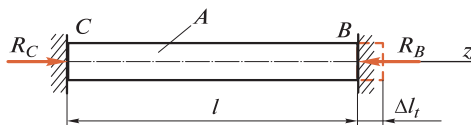


Рис. 19.10

Температурное удлинение $\Delta l_t = \alpha t l$, где α — коэффициент линейного расширения материала стержня.

Укорочение под действием реакции R_B :

$$\Delta l_{CB} = \frac{R_B l}{EA}.$$

Приравняем правые части этих равенств:

$$\alpha t l = \frac{R_B l}{EA}, \text{ откуда } R_B = \alpha t EA.$$

Определим температурные напряжения: $\sigma_t = \frac{R_B}{A} = \alpha t E$.

Для того чтобы избежать температурных напряжений, которые могут достигать значительных величин, один конец мостов ставят на катки; в длинных трубопроводах, подвергающихся изменению температуры, делают компенсирующие устройства и т. д.

Пример 19.5. Абсолютно жесткая балка, изображенная на рис. 19.11, шарнирно укреплена в стене и подвешена горизонтально на двух шарнирно закрепленных, вертикально расположенных стальных стержнях равной длины $l = 2$ м. В точке D на балку действует сила $F = 20$ кН. Площади поперечных сечений стержней равны: $A_1 = 3$ см², $A_2 = 6$ см². Модуль упругости материала стержней — $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, сила тяжести балки — $G = 40$ кН. Определить напряжения в стержнях 1 и 2.

Решение. Рассматривая равновесие балки, отбросив связи и заменив их реакциями, получаем три неизвестных: реакцию R_A шарнира A и реакции R_C и R_B стержней 1 и 2.

Для данной системы параллельных сил можно составить лишь два уравнения равновесия: уравнение проекций сил на вертикальную ось и уравнение моментов относительно какой-либо точки; следовательно, система статически неопределима.

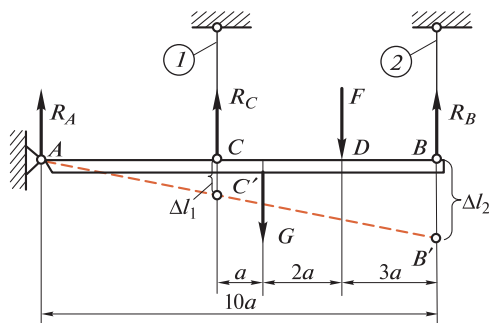


Рис. 19.11

Для решения задачи необходимо составить дополнительное уравнение перемещений элементов конструкции, для чего изобразим ее в деформированном виде. Из подобия треугольников ACC' и ABB' получаем

$$\frac{\Delta l_1}{4a} = \frac{\Delta l_2}{10a},$$

откуда $\Delta l_2 = 2,5\Delta l_1$.

Составим уравнение моментов относительно точки A :

$$\sum M_A = 0; \quad +R_C \cdot 4a - G \cdot 5a - F \cdot 7a + R_B \cdot 10a = 0.$$

Упрощая последнее уравнение, получаем

$$4R_C + 10R_B = 5G + 7F.$$

По закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{R_C l}{EA_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{R_B l}{EA_2}.$$

Разделим второе равенство на первое:

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{R_B l EA_1}{EA_2 R_C l} = \frac{R_B A_1}{R_C A_2}.$$

Так как $\Delta l_2 = 2,5\Delta l_1$, а $A_2 = 2A_1$, то $2,5 = \frac{R_B}{2R_C}$, откуда $R_B = 5R_C$.

Находим R_B и R_C :

$$4R_C + 50R_C = 5G + 7F; \quad 54R_C = 5 \cdot 40 + 7 \cdot 20 = 340,$$

откуда $R_C = 340/54 = 6,3$ кН и $R_B = 5R_C = 5 \cdot 6,3 = 31,5$ кН.

Определяем напряжения σ_1 и σ_2 в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{R_C}{A_1} = \frac{6,3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 21 \cdot 10^6 \text{ Па} = 21 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{R_B}{A_2} = \frac{31,5 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 52 \cdot 10^6 \text{ Па} = 52 \text{ МПа}.$$

19.9. СМЯТИЕ. КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Если детали конструкции, передающие значительную сжимающую нагрузку, имеют небольшую площадь контакта, то может произойти *смятие* поверхностей деталей. Смятие стараются предотвратить, например, под гайки и головки болтов подкладывают шайбы (рис. 19.12).

Для простоты расчетов полагают, что при контакте по плоскости возникают нормальные напряжения смятия, *равномерно распре-*

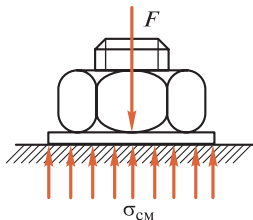


Рис. 19.12

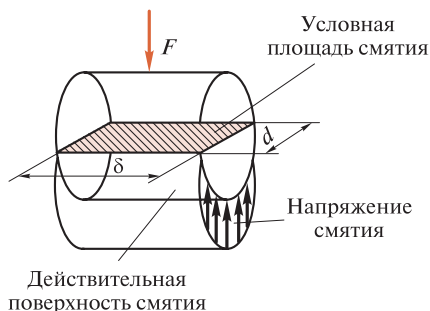


Рис. 19.13

деленные по площади контакта. Расчетное уравнение на смятие имеет вид

$$\sigma_{cm} = \frac{F}{A_{cm}} \leq [\sigma_{cm}],$$

где F — сжимающая сила; $[\sigma_{cm}]$ — допускаемое напряжение на смятие; A_{cm} — площадь контакта.

Если соприкасающиеся детали сделаны из разных материалов, то на смятие проверяют деталь из более *мягкого* материала.

При контакте двух деталей по цилиндрической поверхности (например, клепаное соединение) закон распределения напряжений смятия по поверхности контакта сложен (рис. 19.13), поэтому при расчете на смятие цилиндрических отверстий в расчетную формулу подставляют не площадь боковой поверхности полуцилиндра, по которой происходит контакт, а значительно меньшую площадь диаметрального сечения отверстия (условная площадь смятия); тогда

$$A_{cm} = d\delta,$$

где d — диаметр отверстия; δ — толщина соединяемой детали (высота цилиндра).

При различной толщине соединяемых деталей в расчетную формулу подставляют меньшую толщину.

В машиностроении допускаемые напряжения на смятие для болтовых, штифтовых и шпоночных соединений из низкоуглеродистой стали принимают в пределах 100...120 МПа, для клепаных соединений — 240...320 МПа, для древесины (сосна, дуб) — 2,4...11 МПа в зависимости от сорта древесины и направления сжимающей силы по отношению к направлению волокон.

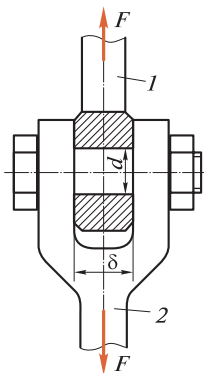


Рис. 19.14

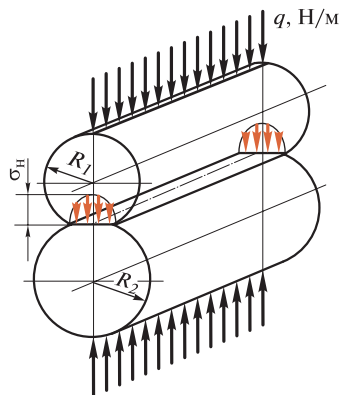


Рис. 19.15

Пример 19.6. Тяга 1 соединена с вилкой 2 посредством болта, поставленного без зазора (рис. 19.14). Определить напряжения смятия в головке тяги, если сила $F = 48$ кН, диаметр болта $d = 20$ мм, а толщина головки тяги $\delta = 24$ мм.

Решение. Вычисляем условную площадь смятия:

$$A_{\text{см}} = d\delta = 20 \cdot 24 = 480 \text{ мм}^2.$$

Определяем напряжения смятия в головке тяги:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} = \frac{48 \cdot 10^3}{480 \cdot 10^{-6}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа}.$$

Контактные напряжения. Решение вопросов о контактных напряжениях и деформациях впервые дано в работах немецкого физика Г. Герца (1857—1894). *Контактными* называются напряжения и деформации, возникающие при сжатии тел криволинейной формы, причем первоначальный контакт может быть линейным (например, сжатие двух цилиндров с параллельными образующими) или точечным (например, сжатие двух шаров). В результате деформации контактирующих тел начальный точечный или линейный контакт переходит в контакт по некоторой малой площадке.

Для деталей, в поверхностных слоях которых возникают контактные напряжения (например, фрикционные катки, зубчатые колеса, подшипники качения), решающую роль играет прочность рабочих поверхностей — *контактная прочность*.

Рассмотрим наиболее важный для нас случай контакта двух цилиндров с параллельными образующими (рис. 19.15). Определение контактных напряжений в этом случае производится по формуле Герца, выведенной в предположении, что материалы цилиндров

подчиняются закону Гука. Очевидно, что контактные напряжения по ширине площадки контакта неравномерны. Максимальные напряжения $\sigma_{\text{н}}$ определяются по формуле

$$\sigma_{\text{н}} = \sqrt{\frac{QE_{\text{пр}}}{2\pi(1-\nu^2)\rho_{\text{пр}}}},$$

где q — нагрузка на единицу длины линии контакта; $E_{\text{пр}}$ — приведенный модуль упругости, получаемый из соотношения $\frac{2}{E_{\text{пр}}} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$ ($\frac{1}{E}$ — некоторая характеристика податливости материала), откуда

$$E_{\text{пр}} = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2};$$

ν — коэффициент Пуассона; $\rho_{\text{пр}}$ — приведенный радиус кривизны цилиндров, определяемый из соотношения $\frac{1}{\rho_{\text{пр}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ($\frac{1}{\rho}$ — кривизна поверхности), откуда

$$\rho_{\text{пр}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

При $\nu = 0,3$ формула Герца приобретает вид

$$\sigma_{\text{н}} = 0,418 \sqrt{\frac{qE_{\text{пр}}}{\rho_{\text{пр}}}}.$$

Глава 20

СДВИГ (СРЕЗ)

20.1. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ СДВИГЕ

Сдвигом называется такой вид деформации, при которой в любом поперечном сечении бруса возникает только *поперечная сила*. Деформацию сдвига можно наблюдать, например, при резке ножницами металлических полос или прутков (рис. 20.1, а). Рассмотрим брус площадью поперечного сечения A , перпендикулярно оси которого приложены две равные и противоположно направленные силы F ; линии действия их параллельны и находятся на относительно небольшом расстоянии друг от друга. Для определения поперечной силы Q применим метод сечений (рис. 20.1, б).

Во всех точках поперечного сечения действуют распределенные силы, равнодействующую которых определим из условия равновесия оставленной части бруса:

$$\sum Y = 0; F - Q = 0,$$

откуда определим поперечную силу

$$Q = F.$$

Поперечная сила есть равнодействующая внутренних касательных сил в поперечном сечении при сдвиге.

Естественно считать, что при сдвиге в поперечном сечении бруса действуют только касательные напряжения τ . Предполагаем, что эти напряжения распределены по сечению равномерно и, следовательно, их можно определить по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A}.$$

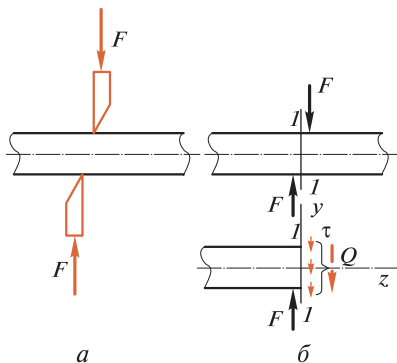


Рис. 20.1

Очевидно, что при сдвиге форма сечения на значение напряжения не влияет.

Примечание. Изложенный в этом подразделе расчет касательных напряжений при сдвиге приближенный, так как линии действия сил F и Q (рис. 20.1, б) не направлены по одной прямой и, строго говоря, эти силы не являются уравновешенной системой, а представляют собой пару сил. Однако момент этой пары (ввиду малого плеча) невелик, и соответствующими ей напряжениями можно пренебречь.

20.2. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СДВИГЕ

Условие прочности детали конструкции заключается в том, что наибольшее напряжение, возникающее в ней (рабочее напряжение), не должно превышать допускаемое.

Расчетная формула при сдвиге

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]$$

читается следующим образом: *касательное напряжение при сдвиге, вычисленное по формуле $\tau = Q/A$, не должно превышать допускаемое.*

По этой расчетной формуле проводят проектный и проверочный расчеты и определяют допускаемую нагрузку.

Деформация сдвига, доведенная до разрушения материала, называется *срезом* (применительно к металлическим деталям) или *скалыванием* (применительно к неметаллическим конструкциям).

Допускаемое напряжение на срез выбирают для пластичных материалов в зависимости от предела текучести. В машиностроении для штифтов, болтов, шпонок и т. п. принимают

$$[\tau_{ср}] = (0,25 \dots 0,35)\sigma_T$$

Для древесины допускаемые напряжения на скалывание во врубках колеблются в пределах от 0,5 до 1,4 МПа и зависят от сорта дерева и направления врубки по отношению к направлению волокон.

При расчетах на срез в случае, если соединение осуществляется несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и т. д.), полагают, что все они *нагружены одинаково*.

Расчеты соединений на срез обычно сопровождают проверкой прочности этих соединений на смятие.

Пример 20.1. Определить силу F , необходимую для пробивания квадратного отверстия размером $a = 25$ мм в стальной полосе толщиной

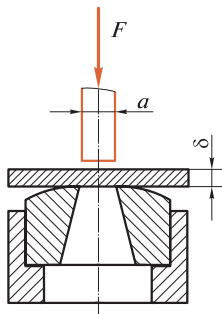


Рис. 20.2

Определим напряжения сжатия в пуансоне:

$$\sigma_c = \frac{F}{A},$$

где A — площадь поперечного сечения пуансона;

$$A = a^2 = 25^2 \cdot 10^{-6} = 625 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

следовательно,

$$\sigma_c = \frac{F}{A} = \frac{360 \cdot 10^3}{625 \cdot 10^{-6}} = 576 \cdot 10^6 \text{ Па} = 576 \text{ МПа}.$$

Пример 20.2. Определить напряжения смятия и среза в головке стержня, растягиваемого силой $F = 100$ кН. Дано: $D = 32$ мм, $d = 20$ мм, $h = 12$ мм (рис. 20.3).

Решение. Определим площадь смятия $A_{см}$ и площадь среза $A_{ср}$ головки. Площадь опорной поверхности головки, работающей на смятие, равна

$$A_{см} = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{3,14(32^2 - 20^2) \cdot 10^{-6}}{4} = 490 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Площадь среза равна площади боковой поверхности цилиндра диаметром d и высотой h :

$$A_{ср} = \pi dh = 3,14 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 754 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Определим напряжения смятия и среза головки:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} = \frac{100 \cdot 10^3}{490 \cdot 10^{-6}} = 204 \cdot 10^6 \text{ Па} = 204 \text{ МПа};$$

$$\tau_{ср} = \frac{F}{A_{ср}} = \frac{100 \cdot 10^3}{754 \cdot 10^{-6}} = 133 \cdot 10^6 \text{ Па} = 133 \text{ МПа}.$$

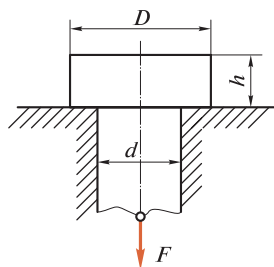


Рис. 20.3

Пример 20.3. В условиях примера 19.6 определить напряжения среза в болте (см. рис. 19.14).

Решение. Напряжения среза в болте определяем по формуле $\tau_{\text{ср}} = F/A_{\text{ср}}$. Площадь среза $A_{\text{ср}}$ равна двум площадям поперечного сечения болта:

$$A_{\text{ср}} = \frac{2\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{2},$$

следовательно,

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{F}{A_{\text{ср}}} = \frac{2F}{\pi d^2} = \frac{2 \cdot 32 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 400 \cdot 10^{-6}} = 54 \cdot 10^6 \text{ Па} = 54 \text{ МПа}.$$

20.3. ДЕФОРМАЦИЯ И ЗАКОН ГУКА ПРИ СДВИГЕ

Для установления параметров, характеризующих деформацию при сдвиге, рассмотрим элемент бруса в виде параллелепипеда $abcd$, на грани которого действуют только касательные напряжения τ , а противоположную грань параллелепипеда представим жестко заземленной (рис. 20.4). Деформация сдвига в указанном элементе заключается в перекашивании прямых углов параллелепипеда за счет поступательного перемещения грани bc по отношению к сечению, принятому за неподвижное. Деформация сдвига характеризуется углом γ и называется *углом сдвига*, или *относительным сдвигом* (так как этот параметр не зависит от расстояния h , на котором происходит сдвиг). Величина bb_1 , на которую смещается подвижная грань относительно неподвижной, называется *абсолютным сдвигом*. Относительный сдвиг γ выражается в радианах.

Напряжения и деформации при сдвиге связаны между собой зависимостью, которая называется **законом Гука при сдвиге**.

Закон Гука при сдвиге справедлив лишь в определенных пределах нагружения и формулируется так: *касательное напряжение прямо пропорционально относительному сдвигу*.

Математически закон Гука можно записать в виде равенства

$$\tau = G\gamma.$$

Коэффициент пропорциональности G характеризует жесткость материала (т.е. способность сопротивляться упругим деформациям) при сдвиге и называется *модулем сдвига*, или *модулем упругости второго рода*.

Модуль упругости и напряжение имеют одинаковую размерность:

$$[G] = \frac{[\tau]}{[\gamma]} = \text{Па}.$$

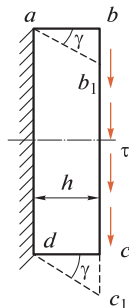


Рис. 20.4

Приведем значения G , МПа, для некоторых материалов:

Чугун	$4,5 \cdot 10^4$
Сталь	$8,1 \cdot 10^4$
Медь	$(4,0 \dots 4,9) \cdot 10^4$
Латунь	$(3,5 \dots 3,7) \cdot 10^4$
Алюминий	$(2,6 \dots 2,7) \cdot 10^4$
Дерево	$0,055 \cdot 10^4$

В заключение отметим, что между тремя упругими постоянными E , G и ν существует следующая зависимость: $G = E/[2(1 + \nu)]$. Принимая для сталей $\nu \approx 0,25$, получаем $G_{ст} \approx 0,4E_{ст}$.

20.4. ЗАКОН ПАРНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Закон парности касательных напряжений формулируется так: *касательные напряжения в двух взаимно-перпендикулярных площадках, перпендикулярные их общему ребру, равны по модулю.*

Внутри тела вблизи некоторой точки вырежем элементарный параллелепипед с размерами dx , dy , dz (рис. 20.5, а).

Пусть на верхней грани этого параллелепипеда действует касательное напряжение τ . Сила, действующая в этой грани, равна

$$dQ = \tau dx dy.$$

Так как параллелепипед находится внутри тела в равновесии, то $\sum X = 0$, следовательно, на нижней грани параллелепипеда будет действовать такая же сила dQ , но направленная в противоположную сторону. Пара сил (dQ , dQ) будет стремиться вращать параллелепипед против часовой стрелки (рис. 20.5, б).

Так как параллелепипед находится в равновесии, то $\sum M_y = 0$, следовательно, пара сил (dQ , dQ) будет уравниваться какой-то другой парой с моментом, равным моменту первой пары. Есте-

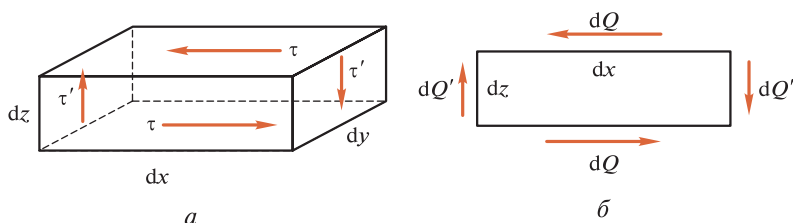


Рис. 20.5

ственно считать, что вторая пара образуется касательными напряжениями τ' , действующими на боковых (правой и левой) гранях параллелепипеда, причем $dQ' = \tau' dy dz$. Следовательно, $M(dQ, dQ) = M(dQ', dQ')$ или $\tau dx dy dz = \tau' dx dy dz$, откуда $\tau = \tau'$.

Обратим внимание на то, что парные касательные напряжения в двух взаимно-перпендикулярных сечениях направлены либо к линии пересечения плоскостей сечений, либо от этой линии.

20.5. НАПРЯЖЕНИЯ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ. ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Через всякую точку деформированного тела можно провести бесчисленное множество различно ориентированных секущих плоскостей.

Рассмотрим прямой брус постоянного поперечного сечения A , растягиваемый силами F (рис. 20.6, *a*). Разсечем брус плоскостью $I-I$, проходящей через точку B и составляющей с поперечным сечением угол φ , отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней.

Очевидно, что равнодействующая N внутренних сил, действующих в наклонном сечении, будет равна растягивающей силе F :

$$N = F,$$

а напряжения p_φ будут параллельны оси бруса (рис. 20.6, *б*). Полагая, что напряжения p_φ распределены по наклонному сечению равномерно, получим

$$p_\varphi = N/A_\varphi,$$

где A_φ — площадь наклонного сечения.

Нормальные напряжения σ в поперечном сечении будут равны

$$\sigma = N/A.$$

Так как $A_\varphi = A/\cos\varphi$, то $p_\varphi = N/A_\varphi = N/(A/\cos\varphi) = \sigma \cos\varphi$.

Разложим полное напряжение p_φ в точке наклонного сечения на нормальное σ_φ и касательное τ_φ напряжения (рис. 20.6, *в*); тогда

$$\sigma_\varphi = p_\varphi \cos\varphi = \sigma \cos^2\varphi;$$

$$\begin{aligned} \tau_\varphi &= p_\varphi \sin\varphi = \sigma \cos\varphi \sin\varphi = \\ &= (\sigma/2) \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

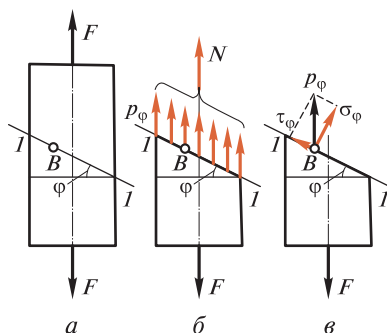


Рис. 20.6

Отсюда следует вывод: при растяжении бруса в наклонных сечениях возникают равномерно распределенные по сечению нормальные и касательные напряжения и соответствующие этим напряжениям деформации растяжения и сдвига.

Рассмотрим частные случаи:

1) $\varphi = 0$; $\sigma_\varphi = \sigma \cos^2 \varphi = \sigma = \sigma_{\max}$.

Нормальные напряжения имеют максимальное значение в поперечном сечении: $\tau_\varphi = (\sigma/2) \sin 2\varphi = 0$.

Касательные напряжения в поперечном сечении равны нулю;

2) $\varphi = 45^\circ$; $\sigma_\varphi = \sigma \cos^2 \varphi = \sigma/2$; $\tau_\varphi = (\sigma/2) \sin 2\varphi = \sigma/2 = \tau_{\max}$.

Касательные напряжения достигают своего максимального значения в сечениях, наклоненных к оси под углом 45° . Эти напряжения являются причиной появления на растягиваемом образце при достижении предела текучести сетки наклонных линий Людерса — Чернова;

3) $\varphi = 90^\circ$; $\sigma_\varphi = 0$; $\tau_\varphi = 0$.

В продольных сечениях бруса нет ни касательных, ни нормальных напряжений (вспомним гипотезу о ненадавливании волокон).

Из изложенного следует, что, говоря о напряжении в данной точке, всегда необходимо указать положение секущей плоскости, в которой это напряжение возникает.

Совокупность нормальных и касательных напряжений, возникающих в бесчисленном множестве различно ориентированных площадок, проходящих через данную точку, характеризует *напряженное состояние в данной точке*.

Площадки, в которых *касательные напряжения равны нулю*, называются *главными площадками*, а возникающие в них нормальные напряжения — *главными напряжениями*. Как доказывается в теории упругости, в общем случае напряженного состояния в зоне исследуемой точки могут существовать три взаимно-перпендикулярные главные площадки. В зависимости от числа таких площадок (где $\sigma \neq 0$) различают три основных вида напряженного состоя-

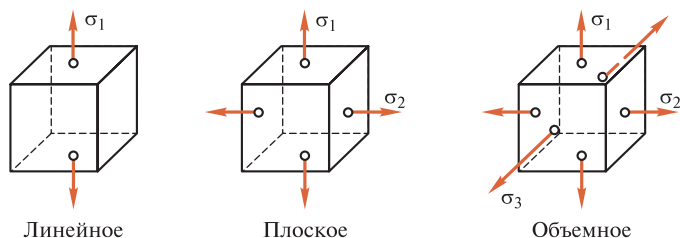


Рис. 20.7

ния: *линейное* (одноосное), *плоское* (двухосное) и *объемное* (трехосное) (рис. 20.7). В дальнейшем нас будут интересовать только первые два вида напряженного состояния.

Очевидно, что в рассмотренном случае одноосного растяжения главные площадки расположены в поперечном и продольном сечениях, т.е. взаимно-перпендикулярны. Обратим внимание также на то, что *главные напряжения в данной точке имеют максимальное и минимальное значения*:

$$\sigma_{\max} = \sigma; \sigma_{\min} = 0.$$

В дальнейшем нам понадобится зависимость между не равными нулю главными напряжениями в двух взаимно-перпендикулярных площадках (случай плоского напряженного состояния) и максимальными касательными напряжениями в наклонной (по отношению к главным) площадке.

Для вывода указанной зависимости внутри бруса вблизи некоторой точки вырежем бесконечно малую призму abc (рис. 20.8), у которой ab и ac — главные площадки, а σ_{\max} и σ_{\min} — главные напряжения. Площадь грани bc обозначим dA .

Рассмотрим равновесие призмы, для чего спроецируем действующие на ее гранях силы на ось x :

$$\sum X = 0; \tau dA + \sigma_{\min} dA \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_{\max} dA \cos \varphi \sin \varphi = 0,$$

откуда $\tau = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin 2\varphi$.

Из этого уравнения следует, что при $\varphi = 45^\circ$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Если $\sigma_{\min} = 0$, то $\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{2}$.

Если в случае плоского напряженного состояния в окрестности данной точки можно выделить элементарный параллелепипед таким образом, чтобы на его гранях действовали только равные между собой касательные напряжения (см. рис. 20.5, a), то такой вид напряженного состояния называется *чистым сдвигом*.

В дальнейшем с чистым сдвигом мы встретимся при изучении теории кручения круглого цилиндра.

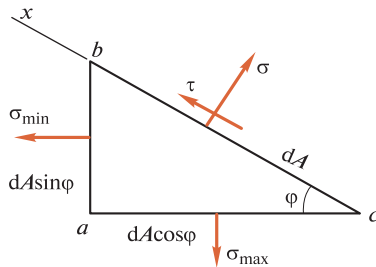


Рис. 20.8

Глава 21

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

21.1. СТАТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ПЛОЩАДИ

При некоторых деформациях прочность деталей зависит не только от площади поперечного сечения, но и от его формы. До сих пор мы изучали деформации, у которых напряжения зависели только от площади поперечного сечения. В дальнейшем для изучения деформаций кручения и изгиба нам потребуется знание некоторых других геометрических характеристик плоских фигур.

Статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния от них до этой оси (рис. 21.1).

Статический момент площади обозначим S с индексом соответствующей оси:

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA.$$

В теоретической механике были выведены формулы для определения координат центра тяжести площади фигуры:

$$x_C = \frac{\sum(A_i x_i)}{\sum A_i}; \quad y_C = \frac{\sum(A_i y_i)}{\sum A_i}.$$

Так как в этих формулах под A_i можно понимать площадь dA элементарной площадки, то в пределе при dA , стремящемся к нулю, выражения, стоящие в числителях правых частей формул, будут представлять собой статические моменты площади фигуры относительно осей y и x , а $\sum A_i$ есть площадь A всей фигуры. Следовательно,

$$S_y = \int_A x dA = x_C A; \quad S_x = \int_A y dA = y_C A.$$

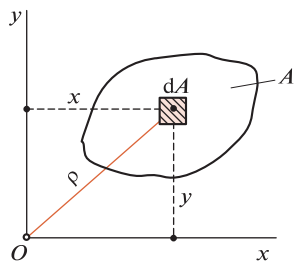


Рис. 21.1

Статический момент площади фигуры относительно оси, лежащей в этой же плоскости, равен произведению площади фигуры на расстояние от ее центра тяжести до этой оси.

Размерность статического момента площади

$$[S] = [x_c][A] = \text{м} \cdot \text{м}^2 = \text{м}^3.$$

Статический момент площади фигуры может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю.

Очевидно, что статический момент площади относительно оси, проходящей через центр тяжести площади фигуры (центральной оси), в том числе относительно оси симметрии фигуры, *равен нулю*.

В теоретической механике установлено также, что в формулах для определения координат центра тяжести площади под A_i можно понимать площади конечных частей фигуры, а под x_i и y_i — координаты центров тяжести этих частей (т.е. применять метод разбиения). Отсюда следует, что при определении статического момента площади сложной фигуры также можно применять метод разбиения, т.е. *определять статический момент* всей фигуры как *алгебраическую сумму* статических моментов отдельных ее частей:

$$S = \sum S_i,$$

где S_i — статический момент площади каждой части фигуры.

Понятие о статическом моменте площади понадобится нам в дальнейшем для определения положения центров тяжести сечений и при определении касательных напряжений при изгибе.

21.2. ПОЛЯРНЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Полярным моментом инерции плоской фигуры относительно полюса, лежащего в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до полюса (см. рис. 21.1).

Полярный момент инерции обозначим

$$I_p = \int_A \rho^2 dA.$$

Размерность полярного момента инерции

$$[I_p] = [\rho^2][A] = \text{м}^2 \cdot \text{м}^2 = \text{м}^4.$$

Полярный момент инерции — *величина всегда положительная и не равная нулю*.

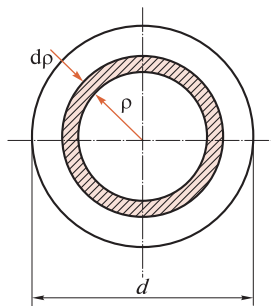


Рис. 21.2

Так как понятие полярного момента инерции понадобится нам при изучении деформаций кручения круглых валов, то выведем формулы для определения полярных моментов инерции круглого сплошного и кольцевого сечений, принимая за полюс центры этих фигур.

1. Круг диаметром d (рис. 21.2).

Выделим бесконечно малую площадку dA в виде кольца шириной $d\rho$, находящегося на расстоянии ρ от полюса (ρ — переменная величина). Тогда $dA = 2\pi\rho d\rho$. Определим полярный момент инерции:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{d/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = 0,1d^4.$$

2. Кольцо размером $D \times d$:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4);$$

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \approx 0,1(D^4 - d^4).$$

Полярный момент инерции кольцевого сечения *можно вычислить как разность* полярных моментов инерции большого и малого кругов.

21.3. ОСЕВОЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Осевым моментом инерции плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат расстояний от них до этой оси (см. рис. 21.1).

Осевой момент инерции обозначим I с индексом, соответствующим оси:

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA.$$

Очевидно, что осевой и полярный моменты инерции имеют одинаковую размерность:

$$[I] = \text{м}^4.$$

Осевой момент инерции — величина всегда положительная и не равная нулю.

Сложим моменты инерции относительно двух взаимно-перпендикулярных осей x и y (см. рис. 21.1):

$$\begin{aligned} I_x + I_y &= \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = \\ &= \int_A (y^2 + x^2) dA = \int_A \rho^2 dA = I_p; \end{aligned}$$

$$I_x + I_y = I_p.$$

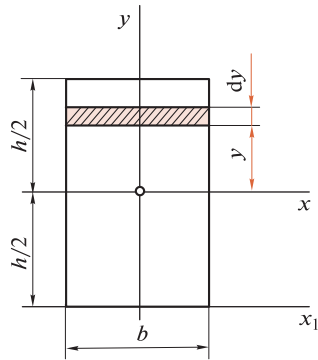


Рис. 21.3

Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно-перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат.

Так как интеграл суммы равен сумме интегралов, то *момент инерции сложной фигуры можно вычислять как сумму моментов инерции простых фигур*, на которые разбивают сложную фигуру. Понятие об осевых моментах инерции понадобится нам в дальнейшем при изучении теории изгиба.

Вычислим осевые моменты инерции некоторых простых фигур.

1. Прямоугольник размером $b \times h$ (рис. 21.3).

Бесконечно малую площадку dA выделим в виде полоски шириной b и высотой dy , тогда $dA = bdy$:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12};$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Для квадрата со стороной a $I_x = a^4/12$.

2. Круг диаметром d относительно осей x и y . В силу симметрии для круга $I_x = I_y$. Так как $I_x + I_y = I_p = \pi d^4/32$, то

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi}{64} d^4 \approx 0,05d^4.$$

3. Кольцо размером $D \times d$ относительно осей x и y :

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4).$$

21.4. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются *центральными*. Момент инерции относительно центральной оси называется *центральным моментом инерции*.

Теорема. *Момент инерции относительно какой-либо оси равен сумме момента инерции относительно центральной оси, параллельной данной, и произведения площади фигуры на квадрат расстояния между осями.*

Пусть дана произвольная плоская фигура, площадь которой A , центр тяжести расположен в точке C , а центральный момент инерции относительно оси x будет I_x . Вычислим момент инерции фигуры относительно оси x_1 , параллельной центральной и отстоящей от нее на расстоянии a (рис. 21.4):

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA + \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

Первое слагаемое правой части есть момент инерции фигуры относительно оси x , т.е. I_x ; второе слагаемое содержит статический момент площади относительно оси x , а он равен нулю, так как ось x — центральная; третье слагаемое после интегрирования будет равно $a^2 A$. В результате получим

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A;$$

теорема доказана.

Нужно помнить то обстоятельство, что последней формулой можно пользоваться только в тех случаях, когда одна из параллельных осей — центральная.

Анализируя полученную формулу, можно сделать вывод, что из множества параллельных осей *момент инерции будет наименьшим относительно центральной оси.*

Пользуясь доказанной теоремой, выведем формулу для вычисления момента инерции прямоугольника относительно оси x_1 , проходящей через основание (см. рис. 21.3):

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A = \frac{bh^2}{12} + \frac{h^2 bh}{4} = \frac{bh^3}{3}.$$

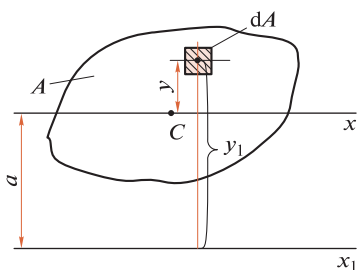


Рис. 21.4

21.5. ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Представим себе плоскую фигуру, моменты инерции которой относительно осей координат равны I_x и I_y , а полярный момент инерции относительно начала координат равен I_p . Как было установлено ранее,

$$I_x + I_y = I_p.$$

Если оси координат поворачивать в своей плоскости вокруг начала координат, то полярный момент инерции останется неизменным, а осевые моменты инерции будут изменяться, причем

$$I_x + I_y = \text{const.}$$

Если сумма двух переменных величин остается постоянной, то одна из них уменьшается, а другая увеличивается. Следовательно, при каком-то положении осей один из осевых моментов достигает максимального, а другой — минимального значения.

Оси, относительно которых моменты инерции имеют максимальное и минимальное значения, называются *главными осями инерции*.

Момент инерции относительно главной оси называется *главным моментом инерции*.

Если главная ось проходит через центр тяжести фигуры, то она называется *главной центральной осью*, а момент инерции относительно этой оси — *главным центральным моментом инерции*.

Особо важным является то обстоятельство, что если фигура имеет ось симметрии, то эта ось всегда будет одной из главных центральных осей.

Введем еще одну геометрическую характеристику плоского сечения.

Центробежным моментом инерции плоской фигуры называется взятая по всей площади фигуры сумма произведений элементарных площадок на произведение расстояний этих площадок до двух данных взаимно-перпендикулярных осей:

$$I_{xy} = \int_A xy dA,$$

где x , y — расстояния от площадки dA до осей y и x .

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и в частном случае равным нулю. Если взаимно-

перпендикулярные оси x и y или одна из них являются осью симметрии плоской фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю. Центробежный момент инерции входит в формулы для определения положения главных осей несимметричных сечений.

В таблицах стандартов на профили прокатных сталей содержится геометрическая характеристика, которая называется *радиусом инерции сечения*. Она используется при изучении внецентренного растяжения или сжатия, а также продольного изгиба и вычисляется по формулам

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}},$$

где I_x , I_y — осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей; A — площадь сечения.

Глава 22

КРУЧЕНИЕ

22.1. ПОНЯТИЕ О КРУЧЕНИИ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА

Кручением называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только *крутящий момент*.

Деформации кручения возникают, если к прямому брусу в плоскостях, перпендикулярных оси, приложить пары сил. Моменты этих пар будем называть *вращающими*, или *скручивающими*. Вращающий момент обозначается T .

Так как на кручение работают валы, обычно имеющие круглое или кольцевое сечение, то рассмотрим кручение круглого цилиндра (рис. 22.1).

Изготовим из резины (для большей наглядности) прямой круговой цилиндрический брус и жестко защемим один его конец; нанесем на его поверхности сетку линий, состоящую из образующих и окружностей, а затем приложим к свободному концу бруса пару сил, действующую в плоскости, перпендикулярной оси, т. е. подвергнем брус деформации кручения. При этом:

- 1) ось цилиндра, называемая *осью кручения*, останется прямой;
- 2) диаметры окружностей, нанесенных на поверхности цилиндра до деформации, при деформации останутся такими же, и расстояние между окружностями не изменится;
- 3) образующие цилиндра обратятся в винтовые линии.

Из этого можно заключить, что при кручении круглого цилиндра справедлива гипотеза плоских сечений, а также предположить, что радиусы окружностей остаются при деформации прямыми. Так как в попе-

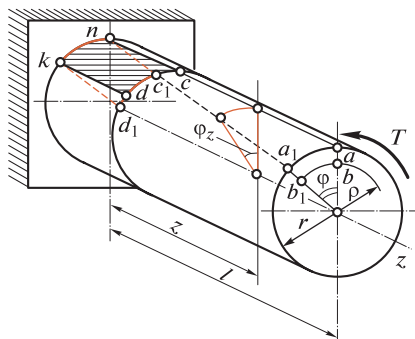


Рис. 22.1

речных сечениях бруса нет продольных сил, то расстояния между сечениями не изменяются.

Из сказанного выше следует, что деформация кручения круглого цилиндра заключается в повороте поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси кручения, причем углы поворота их прямо пропорциональны расстояниям от закрепленного сечения. Угол поворота сечения равен углу закручивания части цилиндра, заключенной между данным сечением и заделкой. Угол φ поворота концевое сечения называется *полным углом закручивания цилиндра*.

Относительным углом закручивания φ_0 называется отношение угла закручивания φ_z к расстоянию z от данного сечения до заделки. Если брус длиной l имеет постоянное сечение и нагружен скручивающим моментом на конце (т. е. состоит из одного участка), то

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_z}{z} = \frac{\varphi}{l} = \text{const.}$$

Рассматривая тонкий слой материала на поверхности бруса, ограниченный любой ячейкой сетки (например, ячейкой $kncd$ на рис. 22.1), видим, что эта ячейка при деформации перекашивается, принимая положение knc_1d_1 .

Аналогичную картину мы наблюдали при изучении деформации сдвига.

На этом основании заключаем, что при кручении также возникает деформация сдвига, но не за счет поступательного, а в результате вращательного движения одного поперечного сечения относительно другого. Следовательно, при кручении в поперечных сечениях возникают только *касательные внутренние силы*, образующие крутящий момент.

Крутящий момент есть результирующий момент относительно оси бруса внутренних касательных сил, действующих в поперечном сечении. Для наглядного изображения распределения крутящих моментов вдоль оси бруса строят *эпюры крутящих моментов*.

Крутящий момент в сечениях бруса определяется с помощью метода сечений. Так как равномерно вращающийся вал, как и неподвижный брус, находится в равновесии, то очевидно, что внутренние силы, возникающие в поперечном сечении, должны уравновешивать внешние моменты, действующие на рассматриваемую часть бруса. Отсюда следует, что *крутящий момент в любом поперечном сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных к брусу справа или слева от сечения*.

Эпюры крутящих моментов дают возможность определить опасное сечение. В частности, если брус имеет постоянное поперечное

сечение, то опасными будут сечения на участке, где возникает наибольший крутящий момент.

Крутящий момент полагаем *положительным*, если при взгляде со стороны сечения результирующий момент внешних пар, приложенных к рассматриваемой части бруса, будет направлен против часовой стрелки, и наоборот.

Пользуясь принципом смягченных граничных условий, будем полагать, что в поперечном сечении, где приложен вращающий момент, значения крутящего момента меняются скачкообразно.

22.2. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Представим себе, что прямой круговой цилиндр, подвергаемый деформации кручения, состоит из бесконечно большого количества волокон, параллельных оси. Полагаем, что при кручении справедлива гипотеза о ненадавливании волокон.

Зная, что при кручении происходит деформация сдвига, естественно считать, что в точках поперечного сечения бруса возникают только касательные напряжения τ , перпендикулярные радиусу, соединяющему эти точки с осью кручения. Существование нормальных напряжений в продольном сечении исключено, так как справедлива гипотеза о ненадавливании волокон; нормальные напряжения в поперечном сечении не возникают, так как нет продольной силы.

На рис. 22.1 видно, что абсолютный сдвиг сечения волокна a равен дуге aa_1 , а сечения волокна b — дуге bb_1 :

$$\cup bb_1 = \rho\varphi; \quad \cup aa_1 = r\varphi,$$

где ρ — расстояние от волокна b до оси кручения; φ — полный угол закручивания, рад; r — радиус цилиндра.

Так как радиусы сечения при кручении остаются прямыми, то величина абсолютного сдвига сечения волокон прямо пропорциональна их расстоянию от оси кручения.

Относительный сдвиг сечения волокна b $\gamma_\rho = \rho\varphi/l = \varphi_0\rho$.

Применим формулу закона Гука при сдвиге: $\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\varphi_0\rho$.

При $\rho = 0$ $\tau = 0$, т.е. на оси кручения касательные напряжения равны нулю.

При $\rho = r$ $\tau = \tau_{\max}$, т.е. касательные напряжения достигают *максимального значения* у волокон, наиболее удаленных от оси кручения:

$$\tau_{\max} = G\varphi_0 r.$$

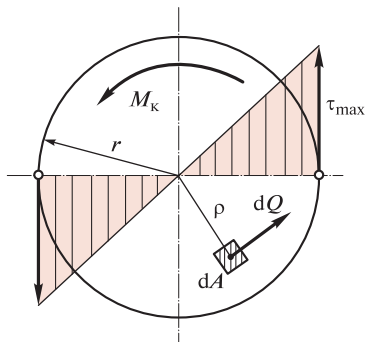


Рис. 22.2

Так как относительный угол закручивания φ_0 есть величина постоянная для данного цилиндрического бруса, то касательные напряжения при кручении прямо пропорциональны расстоянию от точек сечения до оси кручения. Эпюра распределения напряжений вдоль радиуса сечения имеет вид треугольника (рис. 22.2).

Если брус состоит из одного участка, т.е. имеет постоянное сечение и постоянный по длине участка крутящий момент, то касательные напряжения в данном волокне будут по всей длине цилиндра одинаковы.

Перейдем к выводу формул для определения угла закручивания и напряжений в поперечном сечении в зависимости от крутящего момента.

Рассечем брус, изображенный на рис. 22.1, поперечной плоскостью, находящейся на расстоянии z от заделки, и рассмотрим полученное сечение (см. рис. 22.2). Выделим в сечении бесконечно малую площадку dA на расстоянии ρ от оси кручения. Сила dQ , действующая на эту площадку, перпендикулярна радиусу и равна

$$dQ = \tau_\rho dA.$$

Определим момент внутренних сил относительно оси кручения, т.е. крутящий момент

$$M_k = \int_A dQ\rho = \int_A \tau_\rho dA\rho = \int_A G\varphi_0\rho dA = G\varphi_0 \int_A \rho^2 dA = G\varphi_0 I_p,$$

откуда найдем относительный угол закручивания

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{GI_p}.$$

Полный угол закручивания φ , рад, цилиндра длиной l :

$$\varphi = \frac{M_k l}{GI_p}.$$

Произведение GI_p называется *жесткостью сечения при кручении*.

Итак, мы установили, что полный угол закручивания круглого цилиндра прямо пропорционален крутящему моменту, длине цилиндра и обратно пропорционален жесткости сечения при круче-

нии. Так как при выводе последней формулы мы применяли закон Гука, она справедлива в пределах, когда нагрузка и деформация прямо пропорциональны.

Для цилиндрического бруса, имеющего несколько участков, отличающихся материалом, размерами поперечного сечения, значением крутящего момента, полный угол закручивания равен алгебраической сумме углов закручивания отдельных участков:

$$\varphi = \sum \varphi_i.$$

Выведем формулу для определения напряжений:

$$\tau_\rho = G\varphi_0\rho = \frac{GM_{\kappa\rho}}{GI_\rho} = \frac{M_{\kappa\rho}}{I_\rho}.$$

При $\rho = r$ напряжения достигнут максимального значения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}r}{I_\rho} = \frac{M_{\kappa}}{I_\rho/r} = \frac{M_{\kappa}}{W_\rho},$$

где $W_\rho = I_\rho/r$ — момент сопротивления сечения кручению (или полярный момент сопротивления).

Момент сопротивления сечения кручению равен отношению полярного момента инерции к радиусу сечения.

Размерность момента сопротивления кручению

$$[W_\rho] = \frac{[I_\rho]}{[r]} = \text{м}^3.$$

Итак, напряжения и деформации при кручении круглого цилиндра определяют по формулам

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_\rho}; \quad \varphi = \frac{M_{\kappa}l}{GI_\rho}.$$

Обратим внимание на то, что эти формулы по структуре аналогичны формулам для определения напряжений и деформаций при растяжении, сжатии и применимы лишь для участков бруса, имеющих одинаковый материал, постоянные поперечное сечение и крутящий момент.

По закону парности касательных напряжений, последние возникают не только в поперечных, но и в продольных сечениях, поэтому, например, в деревянных брусках при кручении возникают трещины вдоль волокон (древесина плохо работает на скалывание вдоль волокон).

Из эпюры распределения касательных напряжений при кручении видно, что внутренние волокна бруса испытывают небольшие напряжения, поэтому валы иногда делают пустотелыми, чем дости-

гается значительный выигрыш в массе при незначительной потере прочности.

Определим момент сопротивления кручению для круглого и кольцевого сечений.

1. Круг диаметром d :

$$W_p = \frac{I_p}{0,5d} = \frac{\pi d^4}{32 \cdot 0,5d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

2. Кольцо размером $D \times d$:

$$W_p = \frac{I_p}{0,5D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32 \cdot 0,5D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \approx 0,2 \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

Отметим, что если полярный момент инерции кольцевого сечения можно определить как разность моментов инерции большого и малого кругов, то момент сопротивления кручению *нельзя определять* как разность моментов сопротивлений этих кругов.

22.3. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Условие *прочности* бруса при кручении заключается в том, что наибольшее возникающее в нем касательное напряжение не должно превышать допускаемое. Расчетная формула на прочность при кручении имеет вид $\tau = M_k/W_p \leq [\tau_k]$ и читается так: *касательное напряжение в опасном сечении*, определенное по формуле $\tau = M_k/W_p$, *не должно превышать допускаемое*.

Допускаемое напряжение при кручении выбирают в зависимости от допускаемого напряжения при растяжении:

для сталей

$$[\tau_k] = (0,55 \dots 0,6)[\sigma_p];$$

для чугунов

$$[\tau_k] = (1 \dots 1,2)[\sigma_p].$$

Кроме требования прочности к валам предъявляется требование *жесткости*, заключающееся в том, что угол закручивания 1 м длины вала не должен превышать определенной величины во избежание, например, пружинения валов.

Допускаемый угол закручивания 1 м длины вала задается в градусах и обозначается $[\varphi_0]$. Расчетная формула на жесткость при кручении имеет вид

$$\varphi_0^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \frac{M_k}{GI_p} \leq [\varphi_0^{\circ}].$$

Величины допускаемых углов закручивания зависят от назначения вала; их обычно принимают в пределах: $[\varphi_0^{\circ}] = 0,25 \dots 1^{\circ}/\text{м}$.

С помощью полученных расчетных формул выполняют три вида расчетов конструкций на прочность и жесткость при кручении — проектный, проверочный и определение допускаемой нагрузки.

Пример 22.1. Определить диаметр стального вала, передающего мощность $P = 48$ кВт при частоте вращения $n = 980$ об/мин, если допускаемое напряжение кручения $[\tau_k] = 30$ МПа.

Решение. Расчетное уравнение на прочность при кручении круглого цилиндра имеет вид

$$\tau_k = M_k/W_p \leq [\tau_k].$$

Определим угловую скорость вала:

$$\omega = \pi n/30 = 3,14 \cdot 980/30 = 102,5 \text{ рад/с.}$$

Найдем крутящий момент:

$$M_k = P/\omega = 48 \cdot 10^3/102,5 = 464 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Определим момент сопротивления кручению:

$$W_p = M_k/[\tau_k] = 464/30 \cdot 10^6 = 15,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Находим требуемый диаметр вала из формулы

$$W_p = \pi d^3/16 \approx 0,2d^3;$$

$$d = \sqrt[3]{W_p/0,2} = \sqrt[3]{15,6 \cdot 10^{-6}/0,2} = 43 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 43 \text{ мм.}$$

Округляя найденное значение диаметра до ближайшего большего стандартного значения, принимаем $d = 45$ мм.

Пример 22.2. Сравнить массы сплошного и полого валов, работающих при всех прочих равных условиях (передаваемая мощность, материал, допускаемое напряжение, условия работы), если диаметр сплошного вала $d = 70$ мм, а отношение внутреннего и наружного диаметров полого вала $d_0/D = 0,9$.

Решение. Из расчетной формулы на кручение круглого цилиндра

$$\tau_{k \max} = M_k/W_p \leq [\tau_k]$$

видно, что при всех прочих равных условиях моменты сопротивления кручению сплошного и полого валов будут равны, т.е.

$$0,2d^3 = 0,2(D^4 - d_0^4)/D.$$

Так как по условию $d = 70$ мм, а $d_0 = 0,9D$, получим равенство:

$$70^3 = (D^4 - 0,9D^4)/D = 0,334D^3,$$

откуда

$$D = 100 \text{ мм}; d_0 = 0,9D = 90 \text{ мм}.$$

Массы сплошного и полого валов относятся как площади A_c и A_n их поперечных сечений.

Определим эти площади:

$$A_c = \pi d^2/4; A_n = \pi D^2/4 - \pi d_0^2/4 = \pi(D^2 - d_0^2)/4.$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$A_c/A_n = d^2/(D^2 - d_0^2) = 70^2/(100^2 - 90^2) = 2,58.$$

Полый вал легче сплошного в 2,58 раза.

22.4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Представим себе круглый цилиндрический брус постоянного сечения, жестко заземленный одним концом и нагруженный на другом конце моментом, приложенным статически, т. е. медленно возрастающим от нуля до какого-то значения T . Полагаем, что момент остается в пределах, когда нагрузка и деформация пропорциональны, т. е. справедлив закон Гука.

Вращающий момент T вызывает в брус деформацию кручения и при этом совершает работу W , которая аккумулируется в виде потенциальной энергии деформации Π , причем, пренебрегая незначительными потерями энергии, можно считать, что $W = \Pi$.

Работа в случае статического нагружения равна

$$W = \frac{T\varphi}{2},$$

где φ — полный угол закручивания бруса.

Так как $T = M_k$, то

$$\Pi = W = \frac{T\varphi}{2} = M_k \frac{M_k l}{2GI_p} = \frac{M_k^2 l}{2GI_p}.$$

При одновременном действии нескольких моментов или ступенчатом изменении размеров поперечного сечения брус разбивают на участки и потенциальную энергию деформации всего бруса определяют как сумму потенциальных энергий отдельных его участков:

22.5. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИНТОВЫХ ПРУЖИН

В технике наиболее распространены цилиндрические винтовые пружины из стали круглого поперечного сечения, работающие на растяжение или сжатие. Покажем, как рассчитывают такие пружины, имеющие небольшой угол α подъема витков ($\alpha \leq 15^\circ$).

Рассмотрим цилиндрическую винтовую пружину с диаметром D винтовой оси, диаметром d проволоки и числом витков n , сжимаемую силой F (рис. 22.3, *a*).

Для определения внутренних силовых факторов применим метод сечений. Рассечем пружину плоскостью, проходящей через ось, и отбросим нижнюю часть пружины (рис. 22.3, *б*). Ввиду того что угол α подъема витков мал, будем считать сечение витка поперечным, т. е. кругом диаметра d .

Рассматривая равновесие верхней части пружины, видим, что в поперечном сечении витка возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила $Q = F$ и крутящий момент $M_k = FD/2$. Отсюда следует, что в поперечном сечении витка действуют только касательные напряжения сдвига и кручения.

Будем считать, что напряжения сдвига распределены по сечению равномерно, а напряжения кручения определяются, как при кручении прямого кругового цилиндра. Эпюры распределения напряжений сдвига и кручения, а также эпюра суммарных напряжений в точках горизонтального диаметра сечения представлены на рис. 22.3, *б*.

Из суммарной эпюры видно, что наибольшие касательные напряжения возникают в точке B , ближайшей к оси пружины:

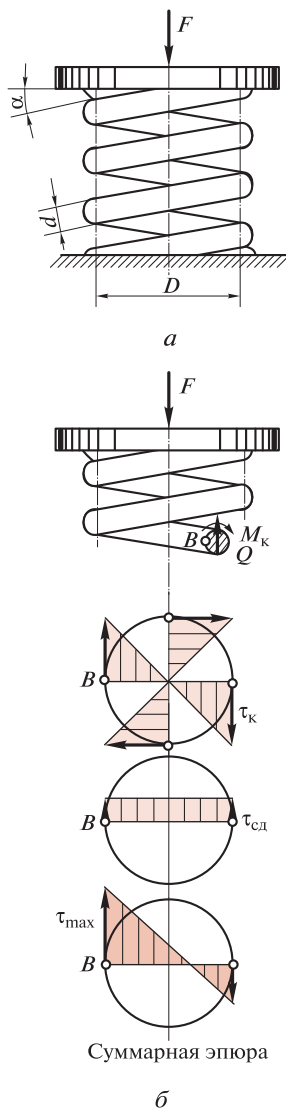


Рис. 22.3

$$\tau_{\max} = \tau_{\text{сд}} + \tau_{\text{к}} = \frac{Q}{A} + \frac{M_{\text{к}}}{W_p} = \frac{F}{\pi d^2/4} + \frac{FD/2}{\pi d^3/16};$$

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(\frac{d}{2D} + 1 \right).$$

Если пружина имеет относительно большой средний диаметр и изготовлена из относительно тонкой проволоки, то первое слагаемое в скобках (соответствующее напряжению сдвига) значительно меньше единицы и им можно пренебречь; тогда

$$\tau_{\max} \approx \frac{8FD}{\pi d^3}. \quad (22.1)$$

Формула для приближенного расчета цилиндрических винтовых пружин имеет вид

$$\tau_{\max} \approx \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau].$$

Так как пружины обычно изготавливают из высококачественной стали, допускаемое напряжение берут в пределах

$$[\tau] = 200 \dots 1000 \text{ МПа.}$$

Далее выведем формулу для определения уменьшения высоты (осадки) λ пружины. Разбивая пружину на бесконечно малые участки длиной dl , которые ввиду малости длины будем считать прямолинейными, и учитывая только потенциальную энергию деформации кручения, получим:

$$\Pi = \int_0^l \frac{M_{\text{к}}^2 dl}{2GI_p} = \frac{M_{\text{к}}^2 l}{2GI_p},$$

где $l = \pi Dn$ — длина проволоки пружины.

Работа силы F , приложенной к пружине статически, будет равна $W = F\lambda/2$. Так как $W = \Pi$, $M_{\text{к}} = FD/2$, $I_p = \pi d^4/32$, то

$$\frac{F\lambda}{2} = \frac{(FD/2)^2 \pi Dn}{2G\pi d^4/32},$$

откуда $\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4}$.

Эту формулу можно записать в таком виде: $\lambda = \frac{F}{c}$, где $c = \frac{Gd^4}{8D^3n}$ — коэффициент жесткости пружины.

При $\lambda = 1$ $c = F$, поэтому коэффициент жесткости численно равен силе, вызывающей осадку, равную единице длины.

Отношение среднего диаметра витков к диаметру проволоки обозначают c_n и называют *индексом пружины*: $c_n = D/d$.

Обычно индекс пружины $c_n = 4 \dots 12$.

Пример 22.3. Определить диаметр проволоки стальной пружины, если под действием силы $F = 800$ Н ее осадка $\lambda = 39$ мм. Индекс пружины $c_n = 6$, число витков $n = 14$. Модуль упругости $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, допускаемое напряжение $[\tau] = 450$ МПа.

Решение. Индекс пружины $c_n = D/d$, откуда $D = c_n d$. Подставим значение D в формулу для осадки пружины:

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4} = \frac{8Fc_n^3d^3n}{Gd^4} = \frac{8Fc_n^3n}{Gd},$$

откуда найдем d и после подстановки числовых значений получим

$$d = \frac{8Fc_n^3n}{\lambda G} = \frac{8 \cdot 800 \cdot 6 \cdot 14}{39 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7 \text{ мм};$$

$$D = c_n d = 6 \cdot 7 = 42 \text{ мм}.$$

Глава 23

ИЗГИБ

23.1. ПОНЯТИЕ О ЧИСТОМ ИЗГИБЕ ПРЯМОГО БРУСА

Чистым изгибом называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только *изгибающий момент*.

Деформация чистого изгиба будет, например, иметь место, если к прямому брусу в плоскости, проходящей через ось, приложить две равные по величине и противоположные по знаку пары сил.

На изгиб работают балки, оси, валы и другие детали конструкций (определение балки известно из теоретической механики). В дальнейшем почти всегда мы будем рассматривать такие брусья, у которых имеется по крайней мере одна плоскость симметрии и плоскость действия нагрузок совпадает с ней. В этом случае деформация изгиба происходит в плоскости действия внешних сил, и изгиб называется *прямым* в отличие от косоугольного изгиба.

При изучении деформации изгиба будем мысленно представлять себе, что балка состоит из бесчисленного количества волокон, параллельных оси. Для того чтобы получить представление о деформации изгиба, проведем два опыта.

1. Балку, свободно лежащую на двух опорах, в верхней и нижней частях которой предварительно сделаны пазы и в них помещены точно пригнанные по размеру пазов брусочки, подвергнем деформации изгиба (рис. 23.1). В результате этого брусочки, расположенные на выпуклой стороне, выпадут из пазов, а брусочки, расположенные на вогнутой стороне, будут зажаты.

2. На боковую поверхность призматического резинового (для большей наглядности) бруса прямоугольного сечения нанесем сетку продольных и поперечных прямых линий и подвергнем этот брус деформации чистого изгиба (рис. 23.2). В результате можно видеть следующее:

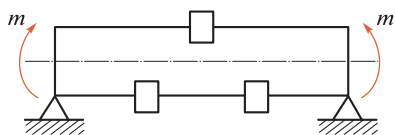


Рис. 23.1

а) поперечные прямые линии останутся при деформации прямыми, но повернутся навстречу друг к другу;

б) продольные прямые линии, а также ось бруса искривятся;

в) сечения бруса расширятся в поперечном направлении на вогнутой стороне и сузятся на выпуклой стороне.

Из этих опытов можно сделать вывод, что *при чистом изгибе справедлива гипотеза плоских сечений*; волокна, лежащие на выпуклой стороне, растягиваются, лежащие на вогнутой стороне — сжимаются, а на границе между ними лежит *нейтральный слой* волокон, которые только *искривляются, не изменяя своей длины*.

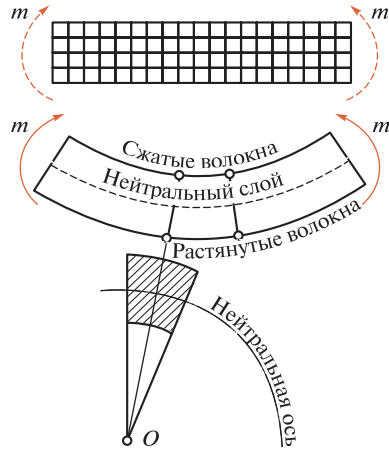


Рис. 23.2

Полагая справедливой гипотезу о ненадавливании волокон, можно утверждать, что *при чистом изгибе в поперечном сечении бруса возникают только нормальные напряжения растяжения и сжатия, неравномерно распределенные по сечению*.

Искривление волокон и оси бруса происходит за счет неравномерного распределения нормальных напряжений по поперечному сечению.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью* (н.о.). На нейтральной оси нормальные напряжения *равны нулю*.

23.2. ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ И ПОПЕРЕЧНАЯ СИЛА

Как известно из теоретической механики, опорные реакции балок определяют, составляя и решая уравнения равновесия статики для всей балки. Будем помнить, что при определении внутренних сил реакции связей учитываются наравне с активными внешними силами, действующими на балку.

Для определения внутренних силовых факторов применим метод сечений, причем изображать балку будем только одной линией — осью, к которой приложены активные и реактивные силы. Рассмотрим два случая.

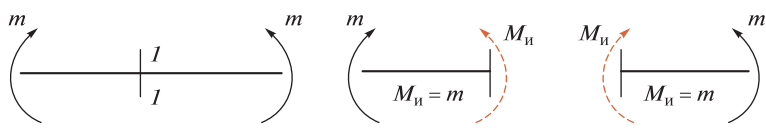


Рис. 23.3

1. К балке приложены две равные и противоположные по знаку пары сил (рис. 23.3).

Рассматривая равновесие части балки, расположенной слева или справа от сечения $I-I$, видим, что во всех поперечных сечениях возникает только изгибающий момент $M_{и}$, равный внешнему моменту. Таким образом, это случай чистого изгиба.

Изгибающий момент есть результирующий момент относительно нейтральной оси внутренних нормальных сил, действующих в поперечном сечении балки.

Обратим внимание на то, что изгибающий момент имеет разное направление для левой и правой частей балки. Это говорит о *непригодности* правила знаков статики при определении знака изгибающего момента.

2. К балке приложены активные и реактивные силы, перпендикулярные оси (рис. 23.4).

Рассматривая равновесие частей балки, расположенных слева и справа, видим, что в поперечных сечениях должны действовать изгибающий момент $M_{и}$ и поперечная сила Q . Из этого следует, что в рассматриваемом случае в точках поперечных сечений действуют не только нормальные напряжения, соответствующие изгибающему моменту, но и касательные, соответствующие поперечной силе.

Поперечная сила есть равнодействующая внутренних касательных сил в поперечном сечении балки.

Обратим внимание на то, что поперечная сила имеет противоположное направление для левой и правой частей балки, что говорит о *непригодности* правила знаков статики при определении знака поперечной силы.

Изгиб, при котором в поперечном сечении балки действуют изгибающий момент и поперечная сила, называется *поперечным*.

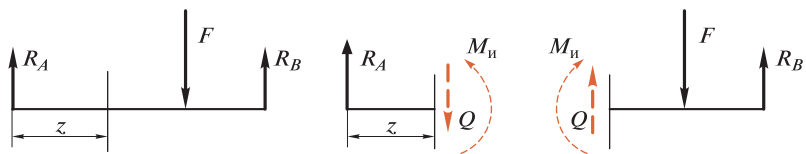


Рис. 23.4

В общем случае при поперечном изгибе изгибающий момент и поперечная сила в разных сечениях могут иметь неодинаковое значение.

У балки, находящейся в равновесии под действием плоской системы сил, алгебраическая сумма моментов всех активных и реактивных сил относительно любой точки равна нулю; следовательно, сумма моментов внешних сил, действующих на балку левее сечения, численно равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на балку правее сечения.

Таким образом, изгибающий момент в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов относительно центра тяжести сечения всех внешних сил, действующих справа или слева от сечения.

У балки, находящейся в равновесии под действием плоской системы сил, перпендикулярных оси (т.е. системы параллельных сил), алгебраическая сумма всех внешних сил равна нулю; следовательно, сумма внешних сил, действующих на балку левее сечения, численно равна сумме сил, действующих на балку правее сечения.

Таким образом, поперечная сила в сечении балки численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих справа или слева от сечения.

Так как правила знаков статики неприемлемы для установления знаков изгибающего момента и поперечной силы, установим для них другие правила знаков, а именно:

если внешняя нагрузка стремится изогнуть балку выпуклостью вниз, то *изгибающий момент* в сечении считается *положительным*, и наоборот, если внешняя нагрузка стремится изогнуть балку выпуклостью вверх, то *изгибающий момент* в сечении считается *отрицательным* (рис. 23.5);

если сумма внешних сил, лежащих *по левую сторону* от сечения, дает равнодействующую, направленную вверх, то поперечная сила в сечении считается *положительной*, если равнодействующая направлена вниз, то *поперечная сила* в сечении считается *отрицательной*; для части балки, расположенной справа от сечения, знаки поперечной силы будут противоположными (рис. 23.6).

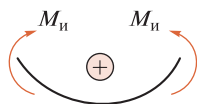


Рис. 23.5

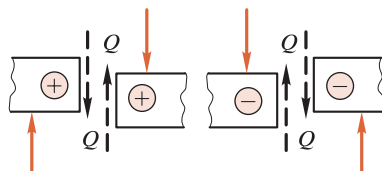


Рис. 23.6

Пользуясь этими правилами, следует мысленно представлять себе *сечение балки жестко заземленным*, а связи отброшенными и замененными реакциями.

Подчеркнем, что при определении опорных реакций пользуются правилами знаков статики; при определении знаков изгибающего момента и поперечной силы — правилами знаков сопротивления материалов.

Правило знаков для изгибающих моментов иногда называют «правилом дождя» (имея в виду, что в случае выпуклости вниз образуется воронка, в которой задержится дождевая вода, и наоборот).

23.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки существуют дифференциальные зависимости, основанные на теореме Журавского, названной по имени замечательного русского инженера-мостостроителя Д. И. Журавского (1821 — 1891).

Теорема. Поперечная сила равна первой производной от изгибающего момента по абсциссе сечения балки.

Рассмотрим балку (рис. 23.7). Начало координат возьмем на левом конце балки, а ось z направим вправо (в дальнейшем это будет иметь существенное значение). На одном из участков балки возьмем сечение с текущей координатой z и запишем уравнение изгибающего момента:

$$M_{\text{и}} = R_A z + m - F_1(z - a) + q(z - b)^2/2.$$

Продифференцировав это выражение по координате z , получим

$$\frac{dM_{\text{и}}}{dz} = R_A - F_1 + q(z - b).$$

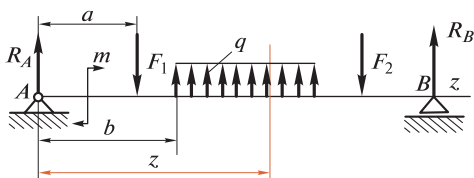


Рис. 23.7

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть поперечная сила Q в сечении z . Таким образом,

$$\frac{dM_{из}}{dz} = Q;$$

теорема доказана.

Если уравнение изгибающих моментов (для участков с равномерно распределенной нагрузкой) продифференцировать вторично, то получим

$$\frac{d^2 M_{из}}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q,$$

т. е. вторая производная от изгибающего момента или первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Как известно из высшей математики, по знаку второй производной функции можно судить о выпуклости или вогнутости кривой; соответствующее правило следует использовать при построении эпюр.

23.4. ЭПЮРЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Для наглядного изображения распределения вдоль оси балки поперечных сил и изгибающих моментов строят эпюры, которые дают возможность определить предположительно опасное сечение балки и установить значения поперечной силы и изгибающего момента в этом сечении.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов можно строить двумя способами.

Первый способ заключается в том, что сначала составляют аналитические выражения поперечных сил и изгибающих моментов для каждого участка как функций текущей координаты z поперечного сечения:

$$Q = f_1(z); M_{из} = f_2(z).$$

Затем по полученным уравнениям строят эпюры.

Второй способ заключается в построении эпюр по характерным точкам и значениям поперечных сил и изгибающих моментов на границах участков. Применяя этот способ, в большинстве случаев можно обойтись без составления уравнений поперечных сил

и изгибающих моментов. При наличии некоторого опыта второй способ предпочтительнее.

При построении эпюр следует руководствоваться приведенными ниже правилами:

1. Эпюры моментов строят на *сжатом волокне*, т. е. положительные моменты (и положительные поперечные силы) откладывают вверх от оси, а отрицательные — вниз.

2. Пользуясь принципом смягченных граничных условий, будем полагать, что в сечении, где приложена сосредоточенная сила, значение *поперечной силы* меняется *скачкообразно*, причем скачок равен модулю этой силы.

3. На том же основании будем полагать, что в сечении, где приложена пара сил (момент), значение *изгибающего момента* меняется *скачкообразно*, причем скачок равен моменту пары.

4. Правильность построения эпюр следует проверять с помощью теоремы Журавского.

Как известно из математики, если $M_{из} = f(z)$, то

$$\frac{dM_{из}}{dz} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол, который составляет касательная к эпюре моментов с положительным направлением оси z .

Согласно теореме Журавского,

$$Q = \frac{dM_{из}}{dz} = \operatorname{tg} \alpha$$

(масштабы $M_{из}$ и z полагаем численно равными единице), следовательно, если угол α острый, то $Q > 0$ и *изгибающий момент* на участке *возрастает*; если угол α тупой, то $Q < 0$ и *изгибающий момент* на участке *убывает*; если $\alpha = 0$ на всем участке, то $M_{из} = \operatorname{const}$, $Q = 0$ и на этом участке возникает *чистый изгиб*; если $\alpha = 0$ в одной точке эпюры моментов, то в этом сечении $Q = 0$, а *изгибающий момент* имеет *экстремальное* (максимальное или минимальное) значение. В сечении, где на эпюре поперечных сил имеется скачок, на эпюре изгибающих моментов будет резкое изменение направления касательной.

Чтобы правила знаков для изгибающих моментов и поперечных сил не противоречили знакам, полученным на основании теоремы Журавского, при проверке эпюр следует ось z мысленно всегда направлять *слева направо*.

5. На участке, где нет распределенной нагрузки, *эпюра моментов* представляет собой *наклонную прямую*, а *эпюра поперечных сил* — *прямую, параллельную оси*.

6. На участке, где приложена равномерно распределенная нагрузка, *эпюра моментов* представляет собой *параболу*, а *эпюра поперечных сил* — *наклонную прямую*.

7. На конце балки *изгибающий момент равен нулю*, если там не приложена пара сил.

8. При построении эпюры для консольных балок начало координат удобно брать на конце консоли, что нередко дает возможность обойтись без определения опорных реакций. В сечении, соответствующем заделке, *поперечная сила равна реактивной силе*, а *изгибающий момент — реактивному моменту*.

Пример 23.1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, шарнирно закрепленной двумя концами и нагруженной сосредоточенной силой (рис. 23.8).

Решение. Начало координат поместим на левом конце балки, а ось направим вправо. Данная балка состоит из двух участков.

Определим опорные реакции R_A и R_B , составив уравнения моментов относительно опор A и B :

$$\sum M_A = 0; -Fa + R_B l = 0, \text{ откуда } R_B = Fa/l;$$

$$\sum M_B = 0; -R_A l + Fb = 0, \text{ следовательно, } R_A = Fb/l.$$

Проверим правильность определения реакций, составив уравнение проекций на ось y :

$$\sum Y = 0; R_A - F + R_B = 0;$$

$$Fb/l - F + Fa/l = F(a + b)/l - F = F - F = 0.$$

Полученное тождество $0 \equiv 0$ говорит о том, что реакции определены правильно.

Приступаем к построению эпюр, применяя для этого метод сечений.

Построение эпюры поперечных сил. На первом участке поперечная сила Q_1 положительна, постоянна и равна R_A , так как слева от сечения $I-I$ других сил нет.

Откладываем вверх от оси эпюры в произвольном масштабе $Q_1 = R_A = Fb/l$; затем проводим прямую, параллельную оси эпюры.

Значение поперечной силы на втором участке будет равно Q_2 :

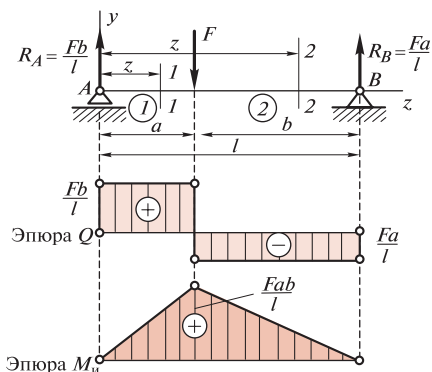


Рис. 23.8

$$Q_2 = R_A - F = Fb/l - F = -F(l - b)/l = -Fa/l = -R_B$$

(то же получим, если рассмотрим часть балки, расположенную справа от сечения 2—2).

В точке приложения сосредоточенной силы F эпюра Q имеет скачок, численно равный F .

Вид эпюры Q показан на рис. 23.8.

Построение эпюры изгибающих моментов. В сечении 1—1 на первом участке изгибающий момент равен $M_{1и} = R_A z$, причем z изменяется от 0 до a . Поскольку z входит в это уравнение в первой степени, эпюра моментов будет представлять собой прямую линию.

Для построения эпюры $M_{1и}$ достаточно найти значения моментов на границах участка, т. е. при $z = 0$ и $z = a$:

при $z = 0$ $M_{1и} = 0$;

при $z = a$ $M_{1и} = Fba/l$.

Для определения изгибающего момента в сечении 2—2 проще рассмотреть правую часть балки, на которую действует одна сила:

$$M_{2и} = R_B(l - z),$$

причем z меняется от a до l .

Эпюра моментов на втором участке также будет изображаться прямой линией. Найдем значения изгибающего момента на границах участка:

при $z = a$ $M_{2и} = Fa(l - a)/l = Fab/l$;

при $z = l$ $M_{2и} = Fa(l - l)/l = 0$.

По полученным значениям строим эпюру $M_{и}$. Наибольшее значение $M_{и}$ будет иметь в сечении, где приложена сила F :

$$M_{и\max} = Fab/l.$$

Это сечение будет предположительно опасным.

В частном случае, когда сила F приложена в середине балки,

$$a = b = l/2 \text{ и } M_{и\max} = Fl/4.$$

Пример 23.2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, свободно лежащей на двух опорах и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 23.9).

Решение. В силу симметричности распределения нагрузки по всей длине балки опорные реакции равны между собой:

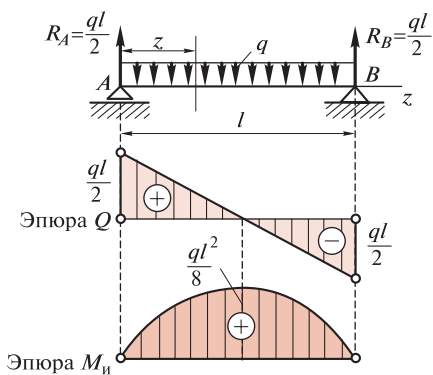


Рис. 23.9

$$R_A = R_B = ql/2.$$

Построение эпюры поперечных сил. Данная балка имеет один участок. В любом сечении поперечная сила

$$Q = R_A - qz = ql/2 - qz.$$

Поскольку z входит в это уравнение в первой степени (линейная зависимость), то эпюра Q будет прямолинейной. Для построения эпюры достаточно значений поперечной силы в двух точках:

$$\text{при } z = 0 \quad Q = ql/2;$$

$$\text{при } z = l \quad Q = ql/2 - ql = -ql/2.$$

Эпюра Q показана на рис. 23.9.

Построение эпюры изгибающих моментов. Выражение для изгибающего момента в любом сечении балки имеет вид

$$M_{из} = R_A z - qz \frac{z}{2} = q \frac{l}{2} z - \frac{qz^2}{2}.$$

Это уравнение параболы.

Определим значения $M_{из}$:

$$\text{при } z = 0 \quad M_{из} = 0;$$

$$\text{при } z = \frac{l}{2} \quad M_{из} = \frac{ql}{2} \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

Очевидно, что при $z = l \quad M_{из} = 0$.

По найденным значениям строим эпюру $M_{из}$, как показано на рис. 23.9.

Поскольку вторая производная

$$\frac{d^2 M_{из}}{dz^2} = -q,$$

т.е. меньше нуля, то эпюра $M_{из}$ будет расположена выпуклостью вверх.

Согласно теореме Журавского максимальное значение изгибающего момента будет в середине пролета балки, где $Q = \frac{dM_{из}}{dz} = 0$:

$$M_{из \max} = \frac{ql^2}{8}.$$

23.5. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Как было установлено ранее, в поперечных сечениях балки при чистом изгибе возникают только нормальные напряжения растяжения и сжатия. Вопрос о распределении этих напряжений по поперечному сечению решается путем рассмотрения деформаций волокон балки.

Рассмотрим участок балки, подверженный деформации чистого изгиба. Двумя поперечными сечениями AB и CD выделим элемент балки бесконечно малой длины ds (рис. 23.10). Радиус кривизны нейтрального слоя обозначим ρ .

Рассмотрим слой волокон mn , находящийся на расстоянии y от нейтрального слоя NN . Это волокно в результате деформации изгиба удлинилось на величину nn_1 . Ввиду малости расстояния ds заштрихованные треугольники будем считать прямолинейными; эти треугольники подобны ($n_1F \parallel mE$):

$$\triangle OEF \sim \triangle Fnn_1.$$

Из подобия треугольников запишем равенство:

$$\frac{nn_1}{ds} = \frac{y}{\rho}.$$

Так как левая часть этого равенства есть относительное удлинение, т. е. $nn_1/ds = \varepsilon$, то $y/\rho = \varepsilon$. Применяв закон Гука при растяжении и сжатии $\sigma = E\varepsilon$, получим

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}.$$

Из этой формулы видно, что нормальные напряжения при изгибе распределены по высоте сечения неравномерно: *максимальные напряжения возникают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси*. По ширине сечения нормальные напряжения не меняются. Распределение нормальных напряжений изображено на рис. 23.11.

Полученная формула для определения нормальных напряжений неудобна, так как в нее входит радиус кривизны нейтрального слоя. Для вывода формулы, связывающей нормальные напряжения с изгибающим моментом, применим метод сечений и рассмотрим

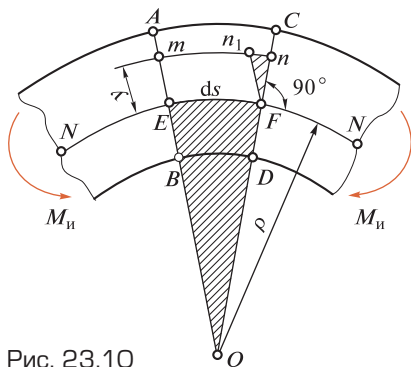


Рис. 23.10

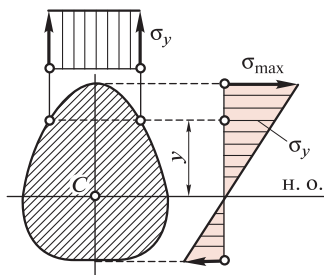


Рис. 23.11

равновесие части балки, изображенной на рис. 23.12.

В плоскости поперечного сечения выделим бесконечно малую площадку dA , в пределах которой будем считать нормальные напряжения σ постоянными; тогда нормальная сила dN , действующая на площадку dA , будет равна

$$dN = \sigma dA.$$

Составим два уравнения равновесия:

$$1) \sum Z = 0; \int_A dN = 0$$

или

$$\int_A \sigma dA = \int_A \frac{Ey}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

(ρ для данного сечения есть величина постоянная, поэтому она вынесена за знак интеграла). Так как E и ρ не равны нулю, то

$$\int_A y dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой статический момент площади сечения относительно оси x , т. е. нейтральной оси. Равенство нулю статического момента означает, что при изгибе *нейтральная ось проходит через центр тяжести площади поперечного сечения*;

$$2) \sum M_x = 0; -m + \int_F y dN = 0.$$

Так как при чистом изгибе изгибающий момент равен внешнему моменту $M_{из} = m$, то

$$M_{из} = \int_A y dN = \int_A y \sigma dA = \int_A y \frac{Ey}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{EI}{\rho},$$

где $I = \int_A y^2 dA$ — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси; EI — жесткость сечения при изгибе.

Так как при чистом изгибе балки постоянного сечения $M_{из} = \text{const}$ и $I = \text{const}$, то $\rho = EI/M_{из} = \text{const}$. Следовательно, изогнутая ось такой балки представляет собой дугу окружности.

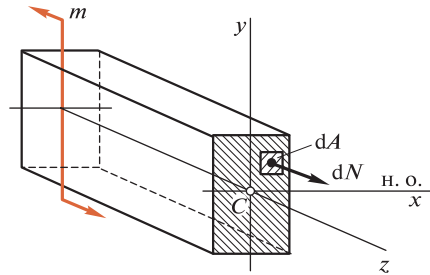


Рис. 23.12

Выражение радиуса кривизны подставим в формулу для определения нормальных напряжений; тогда

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} = \frac{E y}{EI/M_{и}} = \frac{M_{и} y}{I}.$$

Максимальное значение нормальные напряжения будут иметь у волокон, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{и} y_{\max}}{I} = \frac{M_{и}}{I/y_{\max}} = \frac{M_{и}}{W_x},$$

где $W_x = I/y_{\max}$ — *момент сопротивления сечения изгибу* (или *осевой момент сопротивления*), равный отношению осевого момента инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси к расстоянию от этой оси до наиболее удаленного волокна.

Размерность момента сопротивления сечения изгибу $[W] = \text{м}^3$.

Итак, наибольшие нормальные напряжения при чистом изгибе вычисляем по формуле

$$\sigma = \frac{M_{и}}{W_{и}}.$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что эта формула по структуре аналогична формулам для определения напряжений при растяжении, сжатии, сдвиге и кручении.

23.6. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Условие прочности балки при изгибе заключается в том, что максимальное нормальное напряжение в опасном сечении не должно превышать допускаемое.

Полагая, что гипотеза о ненадавливании волокон справедлива не только при чистом, но и при поперечном изгибе, мы можем нормальные напряжения в поперечном сечении определять при поперечном изгибе по той же формуле, что и при чистом изгибе. Вопрос о проверке прочности балки на касательные напряжения, а также о расчете балок на жесткость будет рассмотрен в последующих подразделах.

Расчетная формула на прочность при изгибе имеет вид

$$\sigma = \frac{M_{и \max}}{W_{и}} \leq [\sigma]$$

и читается так: *нормальное напряжение в опасном сечении, определенное по формуле $\sigma = M_{и \max}/W_{и}$, не должно превышать допускаемое. Допускаемое нормальное напряжение при изгибе выби-*

рают таким же, как и при растяжении и сжатии.

Максимальный изгибающий момент определяют из эпюр изгибающих моментов или расчетом.

Так как момент сопротивления изгибу $W_{и}$ в расчетной формуле стоит в знаменателе, то чем больше $W_{и}$, тем меньше будут расчетные напряжения. Определим моменты сопротивления изгибу наиболее распространенных сечений:

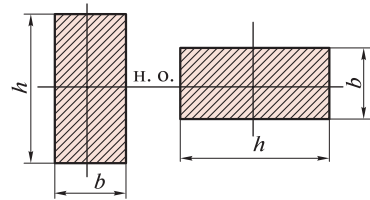


Рис. 23.13

1. Прямоугольник размером $b \times h$ (рис. 23.13):

$$W_{пр} = \frac{I}{y_{max}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}.$$

Если балку прямоугольного сечения положить плашмя, то $W'_{пр} = hb^2/6$, тогда

$$\frac{W_{пр}}{W'_{пр}} = \frac{bh^2}{6} : \frac{hb^2}{6} = \frac{h}{b} > 1,$$

следовательно, при прочих равных условиях максимальные нормальные напряжения σ' у прямоугольной балки, положенной плашмя, будут больше, чем у той же балки, когда ее наибольший габаритный размер h вертикален (имеется в виду, что изгиб происходит в вертикальной плоскости).

Из этого следует правило: для обеспечения максимальной прочности ось, относительно которой момент инерции максимален, должна быть нейтральной.

2. Круг диаметром d :

$$W_{и} = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

3. Кольцо размером $D \times d$:

$$W_{и} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) : \frac{D}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

Момент сопротивления кольцевого сечения *нельзя определять* как разность моментов сопротивлений большого и малого кругов.

Нетрудно подсчитать, что при одинаковой площади поперечного сечения, т.е. одинаковом расходе материала, момент сопротивления кольцевого сечения больше момента сопротивления сплошного круглого сечения.

Так как вблизи нейтральной оси материал мало напряжен, то *выгодно* больше материала *располагать* дальше от нейтральной оси.

Поэтому в машиностроении редко применяют металлические балки прямоугольного сечения, но весьма широко распространены прокатные профильные балки таврового, двутаврового, углового, швеллерного и других сечений. Моменты инерции, моменты сопротивления и другие характеристики прокатных фасонных профилей стандартных размеров приведены в таблицах ГОСТа.

Для балок, материал которых *неодинаково* работает на растяжение и сжатие (например, чугун), целесообразно применять профили, не симметричные относительно нейтральной оси, например тавровый или П-образный. Так как у несимметричного профиля при изгибе возникают неодинаковые напряжения растяжения и сжатия, то сечение, например, чугунной балки выгодно располагать так, чтобы меньшие напряжения были в зоне растянутых, а большие — в зоне сжатых волокон (рис. 23.14).

Проведем сравнение экономичности по массе балок двутаврового, прямоугольного и квадратного сечений. Предположим, что из расчетного уравнения мы определим момент сопротивления изгибу балки:

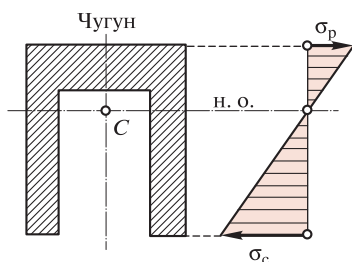
$$W_x = \frac{M_{и \max}}{[\sigma]} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1\,200 \text{ см}^3.$$

По таблицам ГОСТа выбираем двутавровый профиль № 45 с площадью поперечного сечения $A_{дв} = 84,7 \text{ см}^2$.

Определим размеры прямоугольного сечения, полагая $h = 2b$:

$$W_{и} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot 4b^2}{6} = \frac{2b^3}{3} = 1\,200 \text{ см}^3,$$

откуда $b = \sqrt[3]{1\,200 \cdot 3/2} = 12,2 \text{ см}$; $h = 2b = 24,4 \text{ см}$; $A_{пр} = bh = 12,2 \cdot 24,4 = 297 \text{ см}^2$. При прочих равных условиях массы балок пропорциональны площадям поперечных сечений:



$$\frac{A_{пр}}{A_{дв}} = \frac{297}{84,7} \approx 3,5.$$

Балка *прямоугольного* сечения в *три с половиной раза* тяжелее балки *двутаврового* профиля при одинаковой прочности и прочих равных условиях.

Определим размеры квадратного сечения со стороной a : $W_{и} = a^3/6 =$

Рис. 23.14

$= 1\,200\text{ см}^3$, откуда $a = \sqrt[3]{1\,200 \cdot 6} = 19,4\text{ см}$; $A_{\text{кв}} = a^2 = 375\text{ см}^2$; $A_{\text{кв}}/A_{\text{дв}} = 375/84,7 \approx 4,5$.

Балка квадратного сечения в четыре с лишним раза тяжелее балки двутаврового профиля при одинаковой прочности и прочих равных условиях.

Пример 23.3. Определить номер профиля консольной балки двутаврового сечения, если допускаемое напряжение при изгибе $[\sigma] = 120\text{ МПа}$, $F = 2\,000\text{ Н}$, $q = 4\,000\text{ Н/м}$, $l = 2\text{ м}$ (рис. 23.15).

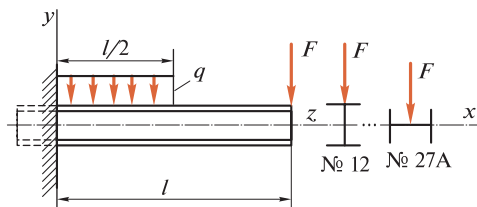


Рис. 23.15

Решение. Очевидно, что у данной балки, работающей на изгиб, максимальный изгибающий момент будет в заделке и определится по формуле

$$M_{\text{и max}} = -Fl - ql^2/8.$$

Подставив данные, получим абсолютное значение момента

$$M_{\text{и max}} = 2\,000 \cdot 2 + 4\,000 \cdot 4/8 = 6\,000\text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Расчетное уравнение на прочность при изгибе имеет вид

$$\sigma_{\text{max}} = M_{\text{и max}}/W_x \leq [\sigma],$$

откуда

$$W_x = M_{\text{и max}}/[\sigma] = 6\,000/(120 \cdot 10^6) = 50 \cdot 10^{-6}\text{ м}^3 = 50\text{ см}^3.$$

Найдя по таблицам сортамента ближайшее большее значение для W_x , выбираем двутавровое сечение № 12, для которого $W_x = 58,4\text{ см}^3$. Если сечение балки повернуть на 90° , т.е. расположить полки вертикально, а стенку — горизонтально (см. рис. 23.15), то потребуется профиль № 27А (при таком расположении сечения двутавр подбирается по W_y). В этом случае балка окажется в три раза тяжелее.

Пример 23.4. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, изображенной на рис. 23.16, если $F = 20\text{ кН}$, $q = 20\text{ кН/м}$, $m = 8\text{ кН} \cdot \text{м}$, $a = 0,8\text{ м}$. Проверить балку на прочность, если ее профиль — двутавр № 20, а допускаемое напряжение $[\sigma] = 150\text{ МПа}$.

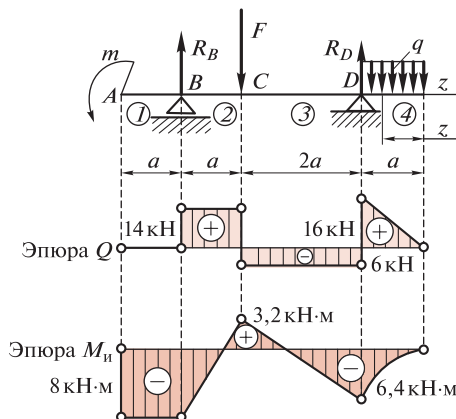


Рис. 23.16

Решение. Определим опорные реакции R_B и R_D , составив уравнение моментов относительно точек B и D :

$$\sum M_B = 0;$$

$$m - Fa + R_D \cdot 3a - qa \cdot 3,5a = 0.$$

Подставив данные и произведя вычисления, получим $R_D = 22$ кН;

$$\sum M_D = 0;$$

$$m - R_B \cdot 3a + F \cdot 2 - qa \cdot 0,5a = 0.$$

Подставив данные и произведя вычисления, получим $R_B = 14$ кН.

Построение эюры Q . На первом участке $Q_1 = 0$, так как алгебраическая сумма сил пары всегда равна нулю.

На втором участке $Q_2 = R_B = 14$ кН.

На третьем участке $Q_3 = R_B - F = 14 - 20 = -6$ кН.

На этих участках эюра Q изображается прямыми линиями, параллельными оси.

Четвертый участок рассмотрим, взяв начало координат на правом конце балки: $Q_4 = qz$, где z изменяется от 0 до a :

при $z = 0$ $Q_4 = 0$;

при $z = a$ $Q_4 = qa = 20 \cdot 0,8 = 16$ кН·м.

Эюра изображается прямой наклонной линией.

В точке D эюра Q имеет скачок, равный опорной реакции R_D .

Построение эюры $M_{и}$. На первом участке $M_{и1} = -m = -8$ кН.

На втором и третьем участках строим эюру по значениям изгибающего момента на границах участков:

в сечении B

$$M_{2и} = -m = -8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в сечении C

$$M_{2и} = -m + R_B a = -8 + 14 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в сечении D

$$M_{3и} = -m + R_B \cdot 3a - F \cdot 2a = -8 + 14 \cdot 3 \cdot 0,8 - 20 \cdot 2 \cdot 0,8 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На первых трех участках эпюра $M_{и}$ изображается прямыми линиями.

Для построения эпюры $M_{и}$ на четвертом участке начало координат возьмем на правом конце балки: $M_{4и} = -qz^2/2$, где z изменяется от 0 до a :

при $z = 0$ $M_{4и} = 0$;

при $z = a$ $M_{4и} = -qa^2/2 = -20 \cdot 0,8^2/2 = -6,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

На четвертом участке эпюра $M_{и}$ — дуга параболы.

Проверка балки на прочность. Наибольший изгибающий момент будет на первом участке:

$$|M_{и \max}| = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Расчетная формула на прочность при изгибе:

$$\sigma = M_{и \max} / W_x \leq [\sigma].$$

По таблицам сортамента находим значение момента сопротивления для двутавра № 20:

$$W_x = 184 \text{ см}^3 = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Подставляя значения и учитывая размерности, получим

$$\sigma = \frac{8 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} \approx 44 \cdot 10^6 \text{ Па} = 44 \text{ МПа} < 150 \text{ МПа}.$$

Условие прочности $\sigma < [\sigma]$ выполнено. В данном случае балка работает с большой недогрузкой, следовательно, балку можно изготовить из двутавра меньшего размера, например № 14.

23.7. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Как было установлено ранее, в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе возникают не только нормальные, но и касательные напряжения, вызывающие деформации сдвига. В силу закона парности такие же касательные напряжения будут возникать и в продольных сечениях, параллельных нейтральному слою. Наличие касательных напряжений в продольных сечениях подтверждается появлением в деревянных балках при поперечном изгибе продольных трещин.

Перейдем к выводу формулы для определения касательных напряжений при поперечном изгибе балок прямоугольного сечения.

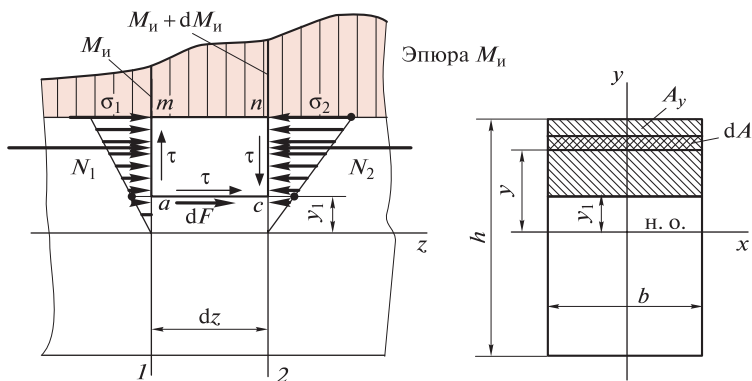


Рис. 23.17

Эта формула была выведена в 1855 г. русским инженером-мостостроителем Д. И. Журавским. Потребность в такой формуле была вызвана тем, что в XIX в. при строительстве мостов широко применялись деревянные конструкции, а балки из древесины обычно имеют прямоугольное сечение и плохо работают на скалывание вдоль волокон.

Рассмотрим балку прямоугольного сечения $b \times h$ (рис. 23.17).

Пусть в поперечном сечении 1 действует изгибающий момент M_n , а в сечении 2 , отстоящем от первого на бесконечно близком расстоянии dz , — изгибающий момент $M_n + dM_n$. На расстоянии y_1 от нейтральной оси проведем продольное сечение ac и рассмотрим равновесие элементарного параллелепипеда $amnc$, имеющего изменения $b \times dz \times \left(\frac{h}{2} - y_1\right)$.

Равнодействующую нормальных внутренних сил, действующих на грань am , обозначим N_1 , а действующих на грань cn — N_2 ; переменные нормальные напряжения в этих гранях обозначим соответственно σ_1 и σ_2 .

В поперечном сечении балки выделим бесконечно узкую полоску dA , находящуюся на переменном расстоянии y от нейтральной оси, тогда

$$N_1 = \int_{A_y} \sigma_1 dA = \int_{A_y} \frac{M_n y}{I} dA = \frac{M_n}{I} \int_{A_y} y dA;$$

$$N_2 = \int_{A_y} \sigma_2 dA = \int_{A_y} \frac{(M_n + dM_n) y}{I} dA = \frac{M_n + dM_n}{I} \int_{A_y} y dA.$$

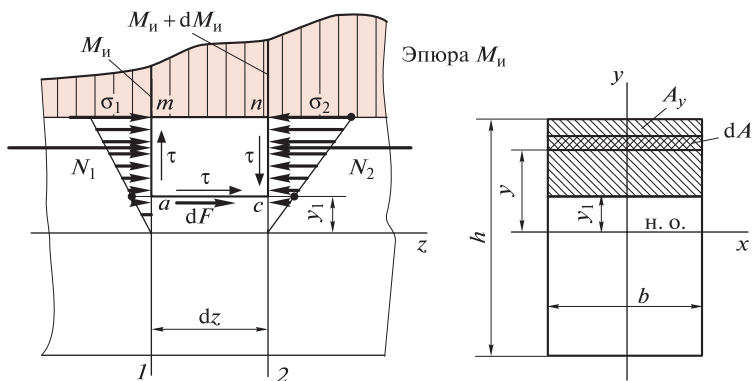


Рис. 23.17

Эта формула была выведена в 1855 г. русским инженером-мостостроителем Д. И. Журавским. Потребность в такой формуле была вызвана тем, что в XIX в. при строительстве мостов широко применялись деревянные конструкции, а балки из древесины обычно имеют прямоугольное сечение и плохо работают на скалывание вдоль волокон.

Рассмотрим балку прямоугольного сечения $b \times h$ (рис. 23.17).

Пусть в поперечном сечении 1 действует изгибающий момент M_n , а в сечении 2 , отстоящем от первого на бесконечно близком расстоянии dz , — изгибающий момент $M_n + dM_n$. На расстоянии y_1 от нейтральной оси проведем продольное сечение ac и рассмотрим равновесие элементарного параллелепипеда $amnc$, имеющего изменения $b \times dz \times \left(\frac{h}{2} - y_1\right)$.

Равнодействующую нормальных внутренних сил, действующих на грань am , обозначим N_1 , а действующих на грань cn — N_2 ; переменные нормальные напряжения в этих гранях обозначим соответственно σ_1 и σ_2 .

В поперечном сечении балки выделим бесконечно узкую полоску dA , находящуюся на переменном расстоянии y от нейтральной оси, тогда

$$N_1 = \int_{A_y} \sigma_1 dA = \int_{A_y} \frac{M_n y}{I} dA = \frac{M_n}{I} \int_{A_y} y dA;$$

$$N_2 = \int_{A_y} \sigma_2 dA = \int_{A_y} \frac{(M_n + dM_n) y}{I} dA = \frac{M_n + dM_n}{I} \int_{A_y} y dA.$$

Предполагаем, что касательные напряжения в поперечном сечении прямоугольной балки параллельны поперечной силе Q и по ширине сечения распределены равномерно. Полагая, что в продольном сечении касательные напряжения τ также распределены равномерно, определим касательную силу dF , действующую на грани ac :

$$dF = \tau b dz.$$

Составим уравнение равновесия параллелепипеда $amnc$:

$$\sum Z = 0; N_1 + dF - N_2 = 0,$$

откуда

$$dF = N_2 - N_1$$

или

$$\tau b dz = \frac{M_n + dM_n}{I} \int_{A_y} y dA - \frac{M_n}{I} \int_{A_y} y dA,$$

$\int_{A_y} y dA$ обозначим через S , это статический момент заштрихованной площади A_y сечения относительно нейтральной оси; тогда

$$\tau b dz = \frac{S}{I} (M_n + dM_n - M_n) = \frac{S}{I} dM_n,$$

откуда

$$\tau = \frac{dM_n}{dz} \frac{S}{Ib}.$$

Так как согласно теореме Журавского $\frac{dM_n}{dz} = Q$, то $\tau = \frac{QS}{Ib}$.

Это равенство называется *формулой Журавского*.

Выведенная формула дает значение касательных напряжений в продольных сечениях, но по закону парности в точках поперечного сечения, лежащих на линии пересечения продольной и поперечной плоскостей, будут действовать одинаковые по модулю касательные напряжения.

Формула Журавского читается так: касательные напряжения в поперечном сечении балки равны произведению поперечной силы Q на статический момент S относительно нейтральной оси части сечения, лежащей выше рассматриваемого слоя волокон, деленному на момент инерции I всего сечения относительно нейтральной оси и на ширину b рассматриваемого слоя волокон.

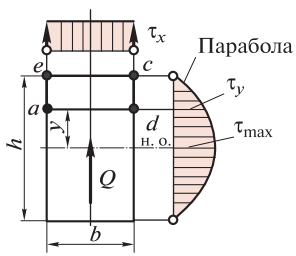


Рис. 23.18

Определим закон распределения касательных напряжений для балки прямоугольного сечения (рис. 23.18). Для слоя волокон ad :

$$S_{adce} = b(h/2 - y) \left(\frac{h/2 - y}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

$$\tau = \frac{QS}{Ib} = \frac{Q(b/2)(h^2/4 - y^2)}{b b h^3 / 12} = \frac{6Q(h^2/4 - y^2)}{b h^3};$$

при $y = \pm h/2$ $\tau = 0$;

$$\text{при } y = 0 \quad \tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3\tau_{\text{сред.}}}{2}.$$

Таким образом, в верхнем и нижнем слоях волокон касательные напряжения *равны нулю*, а в волокнах нейтрального слоя они достигают *максимального значения*. Законы распределения касательных напряжений по ширине и высоте прямоугольного сечения показаны на рис. 23.18.

С некоторым приближением формулу Журавского можно применять для определения касательных напряжений в балках с поперечными сечениями другой формы. Рассмотрим консольную балку корытного профиля, сечение которой показано на рис. 23.19, изгибаемую силой F на конце.

Плоскостью $I-I$ отсечем часть полки площадью A . Так как изгиб балки поперечный, то в плоскости $I-I$ будут действовать продольные касательные силы и напряжения τ_z (см. рис. 23.17). По закону парности в поперечном сечении полки возникнут касательные напряжения τ_x той же величины, и их можно определить по формуле Журавского:

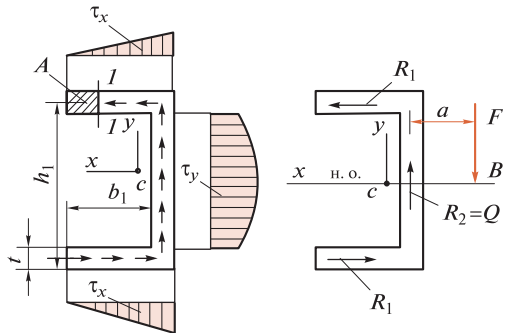


Рис. 23.19

$$\tau_x = \frac{QS_x}{It},$$

где Q — поперечная сила в сечении балки; S_x — статический момент отсеченной площади A относительно оси x (нейтральная ось), $S_x = Ah_1/2$; I — момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси; t — толщина полки.

Если полка постоянной толщины, то касательные напряжения τ_x изменяются по линейному закону, тогда

$$\tau_{x\max} = \frac{Qb_1th_1}{2It} = \frac{Qb_1h_1}{2I}.$$

Равнодействующая R_1 касательных напряжений в верхней полке равна

$$R_1 = \tau_{x\text{сред}} b_1 t = \frac{\tau_{x\max} b_1 t}{2} = \frac{Qb_1^2 h_1 t}{4I}.$$

На нижнюю полку действует такая же сила R_1 , но направленная в противоположную сторону. Две силы R_1 образуют пару с моментом

$$M_k = R_1 h_1.$$

Следовательно, в сечении наряду с вертикальной поперечной силой $Q = R_2$ возникает также крутящий момент M_k , который скручивает балку; R_2 — равнодействующая касательных напряжений в стенке балки.

Чтобы деформации кручения не было, внешнюю силу F следует приложить в какой-то точке B на расстоянии a от середины стенки и соблюсти условие $Fa = M_k$, откуда

$$a = \frac{M_k}{F}.$$

Такая точка B называется *центром изгиба*. Если сечение балки имеет две оси симметрии, то центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

Без вывода приведем формулу для определения максимальных касательных напряжений у балки *круглого сечения*:

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A} = \frac{4}{3} \tau_{\text{сред}}.$$

Касательные напряжения в балках соответствуют деформации сдвига, в результате чего плоские поперечные сечения при поперечном изгибе не остаются плоскими, как при чистом изгибе, а *искривляются* (рис. 23.20).

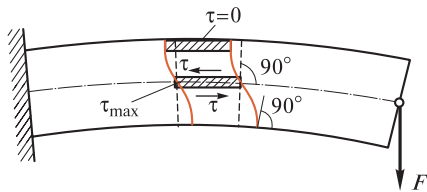


Рис. 23.20

Большинство балок рассчитывают только по нормальным напряжениям; три вида балок следует *проверять по касательным напряжениям*, а именно: *деревянные балки*, так как древесина плохо работает на скалывание; *узкие балки*

(например, двутавровые), так как максимальные касательные напряжения обратно пропорциональны ширине нейтрального слоя; *короткие балки*, так как при относительно небольших изгибающем моменте и нормальных напряжениях у таких балок могут возникать значительные поперечные силы и касательные напряжения.

Максимальное касательное напряжение в двутавровом сечении определяется по формуле Журавского. В таблицах сортамента приведены значения статического момента площади полусечения для двутавров и швеллеров.

Пример 23.5. Консольная балка, жестко зашпемленная одним концом в заделке, состоит из двух деревянных брусев квадратного сечения, соединенных на другом конце болтом (рис. 23.21). К свободному концу балки приложена сила $R = 15$ кН. Длина балки $l = 2$ м. Определить диаметр стержня болта, если допускаемое напряжение среза $[\tau_{ср}] = 80$ МПа. Размер сечения брусев $a = 20$ см.

Решение. Во всех поперечных сечениях балки кроме изгибающего момента возникает поперечная сила $Q = R = 15$ кН и соответствующие ей касательные напряжения сдвига, определяемые по формуле Журавского, причем максимальные напряжения τ_{max} возникают на нейтральной оси, т.е. в месте соприкосновения брусев.

По закону парности такие же касательные напряжения возникают и в продольных сечениях балки.

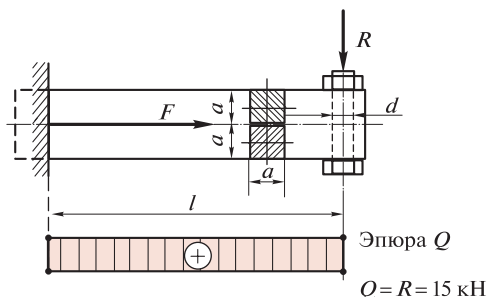


Рис. 23.21

Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib},$$

где Q — поперечная сила, $Q = 15 \cdot 10^3$ Н; S — статический момент площади полусечения балки относительно нейтральной оси, $S = a^2 \cdot a/2 = a^3/2$; I — момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси; $I = a(2a)^3/12 = 2a^4/3$; b — ширина сечения, $b = a$.

Подставив эти выражения в формулу Журавского, получим:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{4a^2}.$$

Подставляя числовые значения и учитывая размерности, найдем

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot 15\,000}{4 \cdot 0,2 \cdot 0,2} = 0,282 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Сила сдвига $F = \tau_{\max} A_{\text{сд}}$, где $A_{\text{сд}}$ — площадь сдвига, $A_{\text{сд}} = al$.

Вычислим F :

$$F = \tau_{\max} al = 0,282 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 2 = 113 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Сила F , действующая на стыке балок, стремится срезать болт. Найдем необходимый диаметр d стержня болта из расчета его на срез:

$$F/A_{\text{ср}} \leq [\tau_{\text{ср}}],$$

где $A_{\text{ср}}$ — площадь среза, равная площади поперечного сечения стержня болта, $A_{\text{ср}} = \pi d^2/4$.

Подставляя это выражение в расчетную формулу, получим

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau_{\text{ср}}]}}.$$

Подставим числовые значения:

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 113 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 42 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 42 \text{ мм.}$$

23.8. УПРУГАЯ ЛИНИЯ БАЛКИ

Изогнутая под действием нагрузок ось балки представляет собой плавную кривую, которая называется *упругой линией*. Деформация балки при изгибе характеризуется *прогибом* y и *углом поворота поперечного сечения*, который равен углу α наклона касательной к упругой линии по отношению к оси z балки. Уравнения прогибов и углов поворота сечений в общем виде записываются так:

$$y = f_1(z); \quad \alpha = f_2(z).$$

Из математики известно, что радиус кривизны кривой $y = f_1(z)$ в любой точке определяется по формуле

$$\rho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''}, \quad y' = \frac{dy}{dz} = \operatorname{tg} \alpha; \quad y'' = \frac{d^2y}{dz^2}.$$

Ввиду малости деформаций $(y')^2$ пренебрегаем (так как эта величина значительно меньше единицы), тогда

$$\rho \approx \frac{1}{y''}.$$

Ранее мы вывели формулу $\frac{EI}{\rho} = M_{из}$; подставляя в нее приближенное значение радиуса кривизны, получим дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$EIy'' = M_{из}.$$

Чтобы получить уравнение углов поворота сечений $\alpha = f_2(z)$, нужно это уравнение проинтегрировать один раз, причем ввиду малости деформаций будем считать, что

$$y' = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha, \text{ рад.}$$

Для получения уравнения прогибов $y = f_1(z)$ нужно дифференциальное уравнение проинтегрировать дважды.

Рассмотрим балку постоянного сечения, нагруженную моментом m , сосредоточенной силой F и равномерно распределенной нагрузкой q , дающими положительные изгибающие моменты (рис. 23.22).

Начало координат возьмем на левом конце балки, ось y направим вверх, а ось z — вправо. Рассматриваемая балка имеет пять участков, каждому из которых соответствует свое уравнение моментов, уравнение прогибов и уравнение углов поворота сечений. Обратим внимание на то, что упругая линия балки есть *плавная кривая*, следовательно, на границах участков значения углов поворота сечения

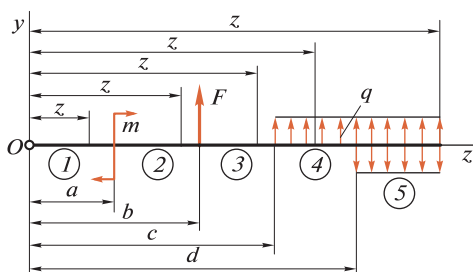


Рис. 23.22

и прогибов, определенных из уравнений соседних участков, будут совпадать. Интегрирование дифференциальных уравнений будем производить, не *раскрывая скобок* в уравнениях моментов, что сказывается лишь на значениях произвольных постоянных.

1-й участок:

$$EIy'' = 0; EIy' = C_1;$$

$$EIy = C_1z + D_1;$$

2-й участок:

$$EIy'' = m = m(z - a)^0;$$

$$EIy' = m(z - a) + C_2;$$

$$EIy = m \frac{(z - a)^2}{2} + C_2z + D_2.$$

Подставив в уравнения первого и второго участков значение $z = a$, получим

$$C_1 = C_2; \quad D_1 = D_2;$$

3-й участок:

$$EIy'' = m(z - a)^0 + F(z - b);$$

$$EIy' = m(z - a) + F \frac{(z - b)^2}{2} + C_3;$$

$$EIy = m \frac{(z - a)^2}{2} + F \frac{(z - b)^3}{2 \cdot 3} + C_3z + D_3;$$

4-й участок:

$$EIy'' = m(z - a)^0 + F(z - b) + q \frac{(z - c)^2}{2};$$

$$EIy' = m(z - a) + F \frac{(z - b)}{2} + q \frac{(z - c)^2}{2 \cdot 3} + C_4;$$

$$EIy = m \frac{(z - a)^2}{2} + F \frac{(z - b)^3}{2 \cdot 3} + q \frac{(z - c)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + C_4z + D_4.$$

Так как на границах смежных участков справедливы уравнения и предыдущего, и последующего участков, то

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C; \quad D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D.$$

Обозначим α_0 — угол поворота сечения в начале координат (в радианах), а y_0 — прогиб в начале координат.

При $z = 0$ получим

$$EI\alpha_0 = C; \quad EIy_0 = D.$$

Так как каждой отдельной нагрузке в уравнениях соответствует отдельное слагаемое, то в общем виде можно записать следующие уравнения:

обобщенное уравнение углов поворота сечений

$$EI\alpha = EI\alpha_0 + \sum m(z-a) + \sum F \frac{(z-b)^2}{2} + \sum q \frac{(z-c)^3}{2 \cdot 3};$$

обобщенное уравнение прогибов

$$EIy = EIy_0 + EI\alpha_0 z + \sum m \frac{(z-a)^2}{2} + \sum F \frac{(z-b)^3}{2 \cdot 3} + \sum q \frac{(z-c)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Если равномерно распределенная нагрузка заканчивается не в конце балки, то эту нагрузку следует *мысленно продолжить* до конца и добавить противоположно направленную нагрузку такой же интенсивности (см. рис. 23.22, участок 5). При этом в обобщенные уравнения углов поворота и прогибов добавится еще по одному слагаемому с отрицательным знаком, соответственно:

$$-\sum q \frac{(z-d)^3}{2 \cdot 3} \quad \text{и} \quad -\sum q \frac{(z-d)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Знаки слагаемых в обобщенных уравнениях устанавливают по *правилу знаков для изгибающих моментов*.

Положительное значение y означает прогиб вверх, и наоборот; положительное значение α означает поворот сечения против часовой стрелки, и наоборот.

При пользовании обобщенными уравнениями следует помнить:

- 1) для балки, жестко зашечленной левым концом,
 $\alpha_0 = 0; y_0 = 0;$
- 2) для балки, левый конец которой лежит на опоре,
 $\alpha_0 \neq 0; y_0 = 0;$

для определения α_0 следует составить уравнение прогибов для второй опоры и приравнять его нулю;

3) в сечении с максимальным прогибом угол поворота сечения $\alpha = 0$, так как в этой точке упругой линии касательная параллельна оси z .

Помимо расчетов на прочность балки нередко проверяют или рассчитывают *на жесткость*. Условие жесткости заключается в том, что максимальный прогиб (стрела прогиба f) или максимальный угол поворота не должны превышать допускаемых величин.

Расчетные уравнения на жесткость имеют следующий вид:

$$y_{\max} = f \leq [f]; \quad \alpha_{\max} \leq [\alpha].$$

Допускаемую величину прогиба обычно задают в долях длины пролета l , например для мостов $[f] = (1/700 \dots 1/10\,000)l$. Допускаемый угол поворота сечения задают в долях радиана.

В заключение выведем формулу потенциальной энергии деформации балки.

Из формулы $\frac{EI}{\rho} = M$ определим кривизну $\frac{1}{\rho}$ упругой линии балки: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{d\alpha}{dz}$, где $d\alpha$ — элементарный угол поворота сечения z на участке dz (угол смежности).

Тогда $d\alpha = \frac{M}{EI} dz$. Элементарная потенциальная энергия деформации равна элементарной работе изгибающего момента и при статическом нагружении равна $d\Pi = dW = \frac{d\alpha \cdot M}{2} = \frac{M^2}{2EI} dz$. В результате интегрирования в пределах участка длиной l получим нужную формулу

$$\Pi = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dz.$$

Пример 23.6. Определить прогиб y_B свободного конца консольной балки AB , изгибаемой сосредоточенной силой F (рис. 23.23).

Решение. Реакция R_A и момент защемления m_A соответственно равны:

$$R_A = F; \quad m_A = Fl.$$

Учитывая, что $y_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$, из обобщенного уравнения прогибов находим

$$EIy_B = \frac{R_A l^3}{6} - \frac{m_A l^2}{2}.$$

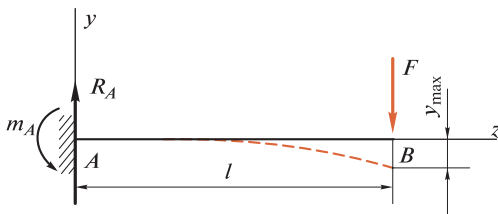


Рис. 23.23

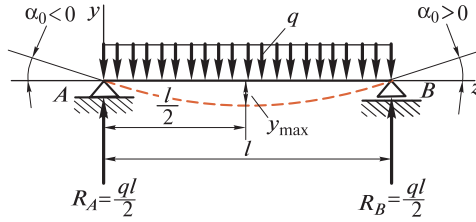


Рис. 23.24

Подставив значения R_A и m_A , получим

$$y_B = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fl^3}{6} - \frac{Fl^3}{2} \right) = -\frac{EI^3}{3EI}.$$

Пример 23.7. Определить максимальный прогиб и углы поворота сечений на опорах балки, показанной на рис. 23.24.

Решение. В силу симметрии балки реакции опор равны

$$R_A = R_B = ql/2.$$

Поместим начало координат на левой опоре, тогда $y_0 = 0$.

Для определения α_0 используем условие, что при $z = l$ $y_B = 0$.

$$EIy_B = EI\alpha_0 l + \frac{ql}{2} \frac{(l-0)^3}{6} - \frac{q(l-0)^4}{24} = 0,$$

откуда $\alpha_0 = -ql^3/(24EI)$. Очевидно, что $\alpha_B = -\alpha_0$.

Наибольшие углы поворота имеют опорные сечения.

Максимальный прогиб находится посередине пролета балки, т.е. при $z = l/2$. Тогда

$$EIy_{\max} = -\frac{ql^3}{24} \frac{l}{2} + \frac{ql}{2} \frac{(l-0)^3}{6} - \frac{q(l/2-0)^4}{24} = -\frac{5ql^4}{384}.$$

Следовательно,

$$y_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EI}.$$

Пример 23.8. Определить максимальный прогиб и угол поворота на опорах балки, нагруженной посередине пролета сосредоточенной силой (рис. 23.25).

Решение. Реакции равны $F/2$ каждая и направлены снизу вверх.

Помещаем начало координат на левой опоре, тогда $y_0 = 0$.

Для определения α_0 используем условие, что при $z = l$ прогиб равен нулю ($y_B = 0$):

$$EIy_B = EI\alpha_0 l + \frac{F}{2} \frac{(l-0)^3}{6} - \frac{F(l-l/2)}{6} = 0,$$

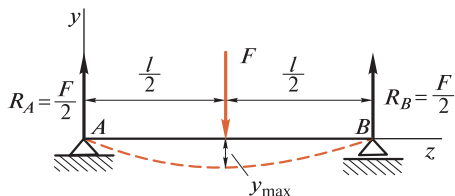


Рис. 23.25

откуда

$$EI\alpha_0 = -\frac{Fl^2}{16}.$$

Следовательно,

$$\alpha_0 = \alpha_A = \alpha_{\max} = -\frac{Fl^2}{16EI}.$$

Ввиду симметрии угол поворота на правой опоре

$$\alpha_B = -\alpha_A = \frac{Fl^2}{16EI}.$$

Максимальный прогиб будет при $z = l/2$, тогда

$$EI\alpha_0 z = -\frac{Fl^2}{16} \frac{l}{2},$$

следовательно,

$$EIy_{\max} = -\frac{Fl^2}{16} \frac{l}{2} + \frac{F}{2} \frac{(l-l/2)^3}{6} = -\frac{Fl^3}{48},$$

откуда

$$y_{\max} = -\frac{Fl^3}{48EI}.$$

23.9. БАЛКИ РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ИЗГИБУ

При изгибе балок постоянного сечения (за исключением случая чистого изгиба) все сечения, кроме опасного, имеют излишний запас прочности, что свидетельствует о нерациональном использовании материала. Наиболее рациональной будет такая форма балки, при которой *напряжения во всех поперечных сечениях будут равны допусжаемому*. Такие балки называются *балками равного сопротивления изгибу*.

Рассмотрим произвольное сечение балки равного сопротивления изгибу. Обозначим действующий в этом сечении изгибающий момент M'_i , а момент сопротивления — W'_i . Тогда должно выполняться условие

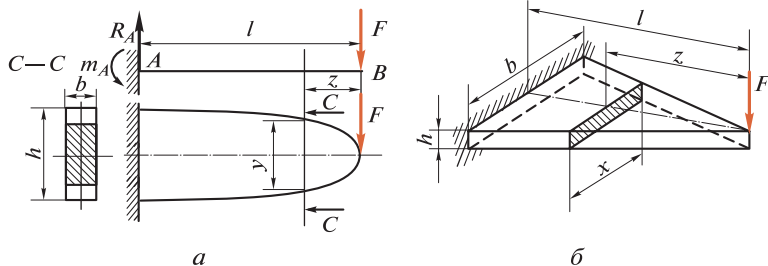


Рис. 23.26

$$\frac{M'_и}{W'_и} = \frac{M_{и\max}}{W} = [\sigma] = \text{const.}$$

Отсюда следует, что в балках равного сопротивления изгибу моменты сопротивления сечений должны быть прямо пропорциональны изгибающим моментам:

$$\frac{M'_и}{M_{и\max}} = \frac{W'}{W}.$$

Изготовление балок равного сопротивления сложно в технологическом отношении, поэтому применение их ограничено.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий теорию балок равного сопротивления изгибу.

Пусть балка *AB* *прямоугольного сечения* жестко закреплена одним концом, а к другому ее концу приложена сосредоточенная сила *F*, как показано на рис. 23.26, *a*. При условии равного сопротивления изгибу по всей длине установим:

- 1) как должна меняться высота *h* балки при постоянной ширине *b*;
- 2) как должна меняться ширина балки при постоянной высоте.

1. *Ширина балки постоянна*. Изгибающий момент в произвольном сечении, отстоящем на расстоянии *z* от свободного конца,

$$M'_и = -Fz.$$

Соответствующий момент сопротивления

$$W' = by^2/6.$$

Здесь *b* = const, а *y* — меняется.

Максимальный изгибающий момент будет в закреплении:

$$M_{и\max} = -Fl.$$

Момент сопротивления изгибу в защемлении

$$W_{\text{и}} = bh^2/6.$$

Запишем условие пропорциональности изгибающих моментов и моментов сопротивления изгибу:

$$\frac{-Fz}{-Fl} = \frac{by^2/6}{bh^2/6}, \text{ откуда } y^2 = \frac{hz}{l}.$$

Это уравнение параболы. Заметим, что объем такой балки равного сопротивления изгибу будет составлять 2/3 объема балки постоянного сечения $b \times h$, что дает экономию материала в 33 % (рис. 23.26, б).

2. *Высота балки постоянна.* Обозначим переменную ширину x , ширину балки в защемлении b , высоту балки h . Как и в предыдущем случае, запишем

$$\frac{-Fz}{-Fl} = \frac{xh^2/6}{bh^2/6}, \text{ откуда } x = \frac{bz}{l}.$$

Из этого соотношения видно, что ширина балки изменяется по линейному закону. Подобная балка изображена на рис. 23.26, б. По сравнению с призматической балкой постоянного сечения экономия материала достигает 50 %.

Сравним прогибы балок постоянного сечения и равного сопротивления изгибу при одинаковой прочности и прочих равных условиях. Формула для определения прогиба свободного конца балки равного сопротивления изгибу (без вывода)

$$y'_{\text{max}} = -\frac{Fl^3}{2EI}.$$

Сравнивая это выражение с формулой для определения прогиба свободного конца балки постоянного сечения

$$y_{\text{max}} = -\frac{Fl^3}{3EI},$$

приходим к выводу, что наибольший прогиб балки равного сопротивления изгибу в 1,5 раза превосходит прогиб балки постоянного сечения.

Свойство балок равного сопротивления изгибу (с постоянной высотой) деформироваться значительно больше балок постоянного сечения (при тех же нагрузках и допускаемых напряжениях) используется в случаях, когда необходимо смягчить действие нагрузки, изменяющейся с течением времени, или ударной нагрузки. В частности, листовые рессоры, широко применяющиеся на транспорте (вагоны, автомашины), представляют собой разрезанные на полосы и сложенные стопкой балки равного сопротивления изгибу.

Глава 24

СОЧЕТАНИЕ ОСНОВНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ (СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ)

24.1. ИЗГИБ И РАСТЯЖЕНИЕ ИЛИ СЖАТИЕ

Рассмотрим брус длиной l постоянного поперечного сечения площадью A , защемленный одним концом и нагруженный на свободном конце произвольно направленной силой F , приложенной в центре тяжести сечения (рис. 24.1).

Разложим силу F на составляющие F_x , F_y и F_z . В результате действия этих составляющих получаем сочетание деформаций растяжения и поперечного изгиба в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях, причем касательными напряжениями изгиба будем в дальнейшем пренебрегать.

Применим принцип независимости действия сил и определим максимальные нормальные напряжения в опасном сечении (заделке):

$$\sigma_p = \frac{F_z}{A}; \quad \sigma_x = \pm \frac{F_y l}{W_x}; \quad \sigma_y = \pm \frac{F_x l}{W_y}.$$

Максимальные суммарные напряжения возникнут в точке E и будут напряжениями растяжения:

$$\sigma_{\max} = \sigma_E = \frac{F_z}{A} + \frac{F_y l}{W_x} + \frac{F_x l}{W_y}.$$

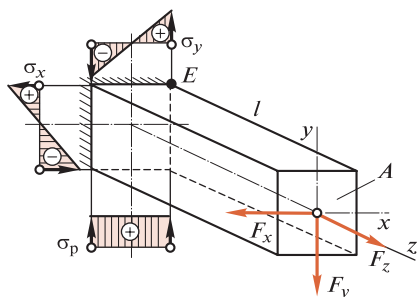


Рис. 24.1

Эпюры нормальных напряжений растяжения и изгиба представлены на рис. 24.1.

Деформации растяжения и изгиба сочетаются, например, у крюков, винтов с отогнутой головкой, винтов слесарных тисков и т.д.

Пример 24.1. На рис. 24.2 изображен стальной крюк, изготовленный из круглого прутка диаметром $d = 24$ мм. Эксцентриситет крюка

$e = 55$ мм, сила тяжести поднимаемого груза $F = 3$ кН. Определить напряжения σ_1 и σ_2 в сечениях 1—1 и 2—2 крюка.

Решение. Применив метод сечений, видим, что в сечении 1—1 действует один силовой фактор — продольная сила $N = F$, а в сечении 2—2 — два внутренних силовых фактора: продольная сила $N = F$ и изгибающий момент $M_{и} = Fe$.

Вычислим напряжения σ_1 и σ_2 в сечениях 1—1 и 2—2:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 24^2 \cdot 10^{-6}} = 6,7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

В сечении 2—2 имеем сочетание изгиба и растяжения.

Вычислим максимальное суммарное напряжение:

$$\sigma_2 = \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{и}}{W_{и}} = \sigma_1 + \frac{Fe}{W_{и}}.$$

Учитывая, что $e = 55$ мм, а $W_{и} \approx 0,1d^3$, получим

$$\sigma_2 = 6,7 \cdot 10^6 + \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 55 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 24^3 \cdot 10^{-9}} = 126 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Внецентренное сжатие. Вид деформации, когда сжимающая сила параллельна оси бруса, но точка ее приложения не совпадает с центром тяжести сечения называется *внецентренным сжатием* (ранее изученную нами деформацию можно назвать центральным сжатием).

Рассмотрим брус прямоугольного сечения площадью $A = bh$ (рис. 24.3, а), к которому на расстоянии e от оси приложена параллельная ей сила F .

В центре тяжести сечения вдоль оси приложим две противоположно направленные силы, равные по модулю силе F . Полученную систему трех сил будем рассматривать как силу F , приложенную в центре тяжести, и пару сил с моментом $m = Fe$. Пользуясь принципом независимости действия сил, внецентренное сжатие будем рассматривать как *сочетание центрального сжатия и чистого изгиба*, причем соответствующие нормальные напряжения будем определять по формулам

$$\sigma_c = -\frac{F}{A}; \quad \sigma_{и} = \pm \frac{M_{и}}{W_{и}},$$

а суммарные напряжения — по формуле

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_{и} = -\frac{F}{A} \pm \frac{M_{и}}{W_{и}}.$$

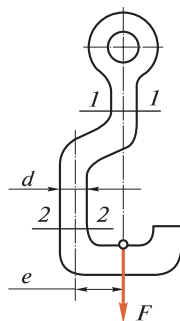


Рис. 24.2

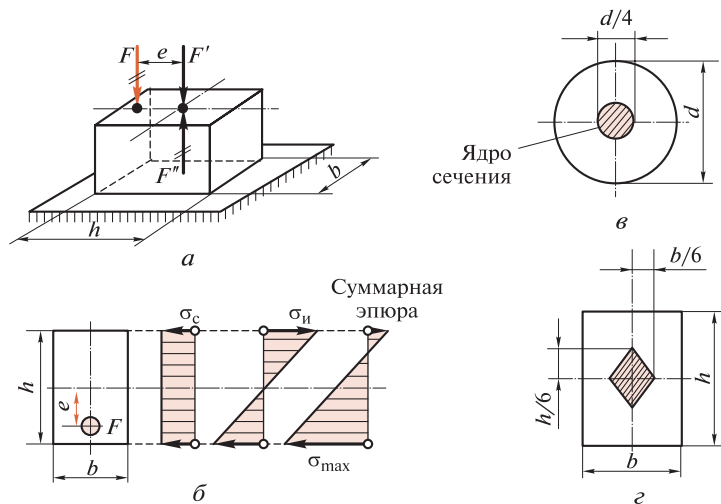


Рис. 24.3

Максимальные суммарные напряжения будут напряжениями сжатия:

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} - \frac{Fe}{W_{\text{и}}}.$$

Эпюры нормальных напряжений сжатия, изгиба и суммарная эпюра представлены на рис 24.3, б.

Чтобы в брусе не возникали напряжения растяжения (недопустимые, например, в кирпичной или каменной кладке), должно выполняться неравенство

$$\sigma_{\text{с}} \geq \sigma_{\text{н}} \text{ или } \frac{F}{A} \geq \frac{Fe}{W_{\text{и}}}, \text{ откуда } e \leq \frac{W_{\text{и}}}{A}.$$

Для бруса прямоугольного сечения предельное значение эксцентриситета

$$e = \frac{W_{\text{и}}}{A} = \frac{bh^2/6}{bh} = \frac{h}{6}.$$

Для бруса круглого сечения диаметром d предельное значение эксцентриситета будет равно

$$e = \frac{W_{\text{и}}}{A} = \frac{\pi d^3/32}{\pi d^2/4} = \frac{d}{8}.$$

Ввиду полярной симметрии круга геометрическое место предельных положений точек приложения сжимающей силы F будет пред-

ставлять собой окружность диаметром $d/4$. Круг, расположенный внутри этой окружности, называется *ядром сечения* (рис. 24.3, в).

Для прямоугольного бруса сечением $b \times h$ ядро сечения представляет собой ромб с диагоналями $h/3$ и $b/3$ (рис. 24.3, г). В случае *внецентренного растяжения* расчеты производятся по таким же формулам с учетом знаков напряжений.

24.2. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

До сих пор мы рассматривали случаи сочетания основных деформаций, когда в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения, которые в каждой точке можно было складывать алгебраически.

Часто встречаются и имеют большое практическое значение случаи сочетания основных деформаций, когда в поперечных сечениях возникают и нормальные, и касательные напряжения, распределенные неравномерно и по разным законам. Для таких случаев опытное определение величин, характеризующих прочность, невозможно, поэтому при оценке прочности детали приходится основываться на механических характеристиках данного материала, полученных из диаграммы растяжения.

Как известно, при растяжении прочность пластичных материалов характеризуется *пределом текучести*, а хрупких — *пределом прочности*; эти напряжения считаются предельными, в зависимости от них вычисляют допускаемые напряжения.

Гипотезы прочности — это научные предположения об основной причине достижения материалом предельного напряженного состояния при сочетании основных деформаций.

Напряженные состояния при сочетании основных деформаций и одноосном растяжении будем называть *равноопасными*, или *эквивалентными*, если их главные напряжения отличаются от предельного для данного материала в одинаковое число раз, иначе говоря, коэффициенты запаса прочности для эквивалентных напряженных состояний одинаковы.

Эквивалентным напряжением называется такое условное напряжение при одноосном растяжении, которое равноопасно заданному случаю сочетания основных деформаций.

На основании гипотез прочности выводят формулы для вычисления эквивалентного напряжения, которое затем сопоставляют с допускаемым напряжением на растяжение. Таким образом, условие прочности при сочетании основных деформаций, когда в попереч-

ных сечениях действуют и нормальные, и касательные напряжения, будет иметь вид

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma_p].$$

Сформулируем и охарактеризуем гипотезы прочности и приведем соответствующие формулы для вычисления эквивалентных напряжений.

Первая теория прочности, основанная на гипотезе наибольших нормальных напряжений, и *вторая теория прочности*, основанная на гипотезе наибольших линейных деформаций, в настоящее время не применяются, и мы их рассматривать не будем.

Перейдем к рассмотрению теорий прочности, которыми пользуются в настоящее время.

1. Гипотеза наибольших касательных напряжений (*третья теория прочности*).

Согласно этой гипотезе, предложенной в конце XVIII в., *опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшие касательные напряжения достигают предельной величины*.

В подразд. 20.5 мы установили, что при одноосном растяжении бруса максимальное касательное напряжение в наклонном сечении равно половине максимального нормального напряжения. Отсюда следует, что предельное касательное напряжение равно половине предельного нормального:

$$\tau_{\text{пред}} = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{2}.$$

В том же подразделе мы установили, что в случае плоского напряженного состояния максимальное касательное напряжение равно полуразности главных напряжений:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}}{2}.$$

Чтобы вывести формулу для вычисления эквивалентных напряжений по третьей теории, рассмотрим брус, у которого в поперечном сечении действуют нормальные σ и касательные τ напряжения (рис. 24.4, а).

Внутри бруса вблизи некоторой точки B вырежем бесконечно малую призму abc , у которой грань ab совпадает с поперечным, грань ac — с продольным сечениями, а грань bc является главной площадкой, на которой действует главное напряжение σ_0 . Согласно закону парности касательных напряжений в грани ac призмы также будут действовать касательные напряжения τ (рис. 24.4, б). Так как в продольном сечении бруса нормальных напряжений нет, то здесь

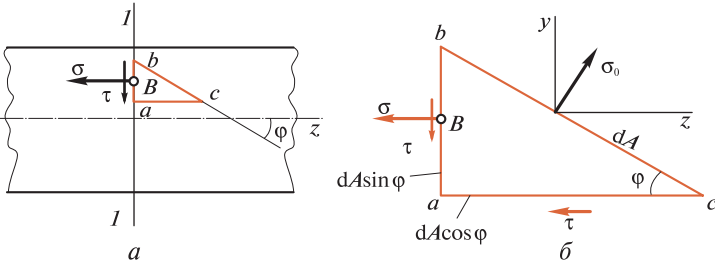


Рис. 24.4

мы имеем дело со случаем плоского напряженного состояния, который называют *упрощенным*.

Рассмотрим равновесие призмы abc , для чего спроецируем все действующие на нее силы на оси z и y . Площадь грани bc обозначим dA :

$$\sum Z = 0; \sigma_0 dA \sin \varphi - \tau dA \cos \varphi - \sigma dA \sin \varphi = 0;$$

$$\sum Y = 0; \sigma_0 dA \cos \varphi - \tau dA \sin \varphi = 0.$$

Разделив обе части равенств на dA , получим:

$$(\sigma_0 - \sigma) \sin \varphi = \tau \cos \varphi; \quad \sigma_0 \cos \varphi = \tau \sin \varphi.$$

Оба равенства разделим на $\cos \varphi$ и, исключив из них $\operatorname{tg} \varphi$, получим выражение

$$\frac{\tau}{\sigma_0 - \sigma} = \frac{\sigma_0}{\tau},$$

равнозначное квадратному уравнению

$$\sigma_0^2 - \sigma_0 \sigma - \tau^2 = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Таким образом, главные напряжения в наклонных площадках в зонах точки A бруса определяют по формулам:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Следовательно, максимальные касательные напряжения будут (см. подразд. 20.5):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Поскольку $\tau_{\text{пред}} = \sigma_{\text{пред}}/2$, а эквивалентное напряжение не должно превышать предельного, то, применяя гипотезу наибольших касательных напряжений, имеем

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{пред}} = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{2} = \frac{\sigma_{\text{эКВ}}}{2} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}.$$

В результате получаем формулу для вычисления эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Гипотеза наибольших касательных напряжений хорошо подтверждается опытами, в особенности для пластичных материалов.

2. Гипотеза Мора (четвертая теория прочности).

К. О. Мор (1835 — 1918) — немецкий ученый в области сопротивления материалов и строительной механики, создатель одной из теорий прочности, графических методов определения напряжений при сложном напряженном состоянии (круг Мора) и т. д.

Гипотеза Мора предложена в начале XX в. Согласно этой гипотезе, *опасное состояние материала наступает тогда, когда на некоторой площадке осуществляется наиболее неблагоприятная комбинация нормального и касательного напряжений.*

Формула для вычисления эквивалентных напряжений имеет вид

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

где $k = [\sigma_p]/[\sigma_c]$.

Эта формула одинаково пригодна как для хрупких, так и для пластичных материалов, при $k = 1$ она тождественна формуле третьей теории прочности.

3. Энергетическая гипотеза (пятая, или энергетическая теория прочности).

При деформации элементарной частицы тела в общем случае изменяются ее форма и ее объем. Таким образом, полная потенциальная энергия деформации состоит из двух частей: энергии формоизменения и энергии изменения объема. Энергетическая гипотеза прочности, предложенная в начале XX в., в качестве критерия перехода материала в предельное состояние принимает только *энергию формоизменения.*

Согласно этой гипотезе, *опасное состояние материала в данной точке наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизменения для этой точки достигает предельной величины.*

Формула для вычисления эквивалентных напряжений имеет вид

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Эта формула для пластичных материалов хорошо подтверждается опытами и получила широкое распространение.

Отметим, что во всех приведенных ранее формулах σ и τ — нормальные и касательные напряжения на площадке *поперечного сечения*, проходящего через опасную или предположительно опасную точку.

24.3. ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ

Сочетание деформаций изгиба и кручения испытывает большинство валов, которые обычно представляют собой прямые бруска круглого или кольцевого сечения.

При расчете валов мы будем учитывать только крутящий или изгибающий моменты, действующие в опасном поперечном сечении, и не будем принимать во внимание поперечные силы, так как соответствующие им касательные напряжения относительно невелики.

Максимальные нормальные и касательные напряжения в поперечных сечениях круглых валов вычисляют по формулам

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}}, \quad \tau = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{р}}},$$

причем для круглых валов $W_{\text{р}} = 2W_{\text{и}}$.

При сочетании изгиба и кручения опасными будут точки опасного поперечного сечения вала, наиболее удаленные от нейтральной оси.

Применив третью теорию прочности, получим

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{р}}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{к}}}{2W_{\text{и}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}}{W_{\text{и}}}.$$

Выражение, стоящее в числителе, назовем *эквивалентным моментом*:

$$M_{\text{экр}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2};$$

тогда расчетная формула для круглых валов примет вид

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{M_{\text{экр}}}{W_{\text{и}}} \leq [\sigma]$$

(валы обычно изготавливают из материала, у которого $[\sigma_{\text{р}}] = [\sigma_{\text{с}}] = [\sigma]$).

По этой формуле расчет круглых валов ведут, как на изгиб, но не по изгибающему, а по эквивалентному моменту. Применив энергетическую теорию прочности, получим

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{к}}}{2W_{\text{и}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}}{W_{\text{и}}},$$

т. е. по энергетической теории прочности

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}.$$

Для расчетов деталей на сочетание деформаций поперечного изгиба и кручения необходимо, как правило, составить расчетную схему конструкции и построить эпюры изгибающих и крутящих моментов, определить предположительно опасные сечения, после чего, применив одну из теорий прочности, произвести необходимые расчеты.

На рис. 24.5 в прямоугольных проекциях представлены ведущий вал цилиндрической прямозубой передачи, расчетная схема вала и эпюры крутящего и изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Эпюры построены на основании следующих данных:

- передаваемая мощность $P = 40$ кВт;
- частота вращения вала $n = 1000$ об/мин;
- диаметр делительной окружности зубчатого колеса $D = 300$ мм;
- расстояние между опорами вала $l = 400$ мм;
- радиальная нагрузка на зуб колеса $F_r = 0,36F_t$, где F_t — окружная сила на колесе.

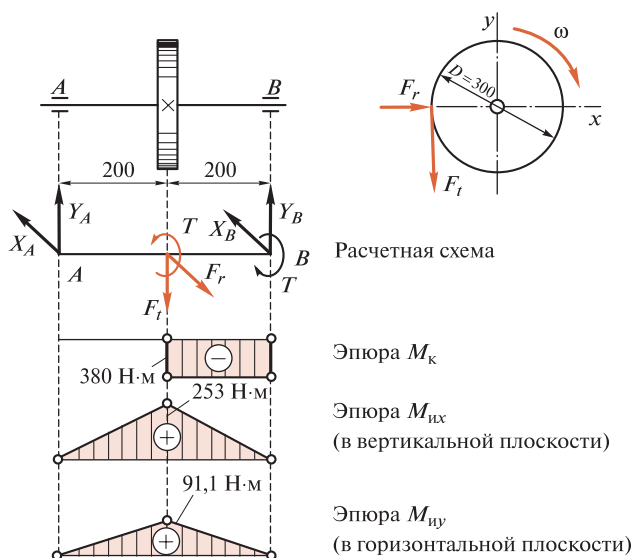


Рис. 24.5

Проведем проверку прочности вала, изображенного на рис. 24.5, если дано:

- диаметр вала в опасном сечении $d = 35$ мм;
- допускаемое напряжение для вала $[\sigma_p] = 70$ МПа.
- Прежде всего определим вращающий момент T :

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{30P}{\pi n} = \frac{30 \cdot 40 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1000} = 380 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Далее определим окружную силу F_t :

$$F_t = \frac{2T}{D} = \frac{2 \cdot 380}{0,3} = 2530 \text{ Н}.$$

РАСЧЕТ ВАЛА НА ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ

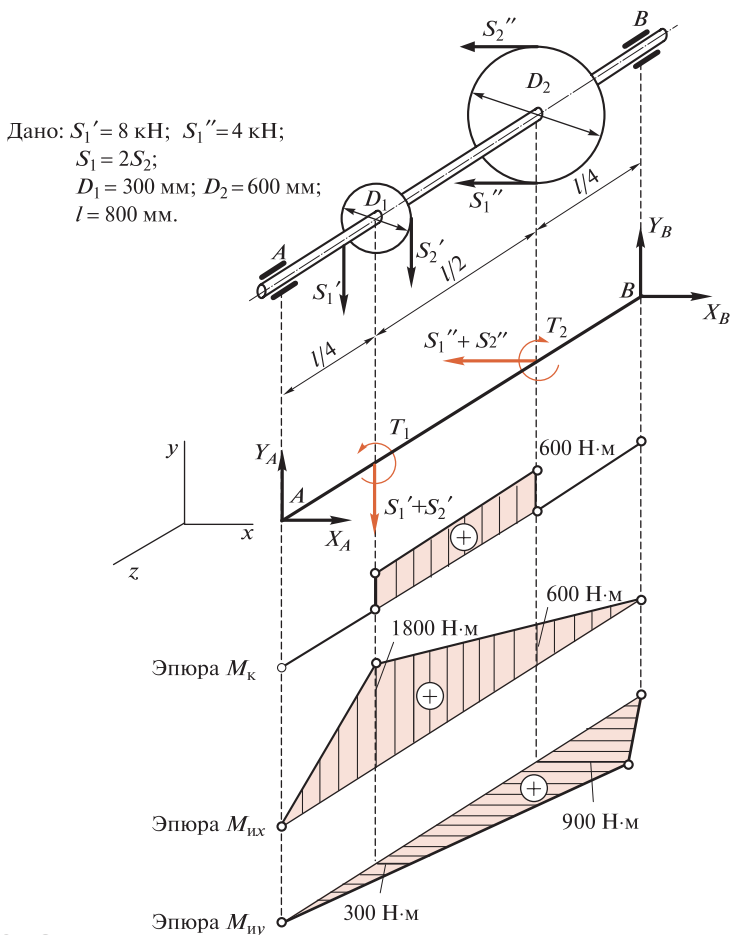


Рис. 24.6

Определяем радиальную силу F_r :

$$F_r = 0,36F_t = 0,36 \cdot 2530 = 911 \text{ Н},$$

по этим данным строим эпюры M_k и $M_{и}$. Из эпюр видно, что опасное сечение расположено в месте закрепления зубчатого колеса.

Применим третью теорию прочности:

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{\sqrt{M_{и}^2 + M_k^2}}{W_{и}};$$

учитывая, что $M_{и}^2 = M_{иx}^2 + M_{иy}^2$, $W_{и} \approx 0,1d^3$.

Взяв значения моментов из эпюр на рис. 24.6, получим:

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{\sqrt{253^3 + 91,1^2 + 380^2}}{0,1(35 \cdot 10^{-3})^3} = 109 \cdot 10^6 \text{ Па} = 109 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{экр}} = 109 \text{ МПа} > [\sigma_p] = 70 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность вала недостаточна.

На рис. 24.6 в аксонометрической проекции представлены трансмиссионный вал ременной передачи, расчетная схема вала и эпюры крутящего и изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а также данные для расчета.

Глава 25

ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

25.1. СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ МАТЕРИАЛОВ

Ранее было установлено, что динамические нагрузки подразделяются на повторно-переменные, ударные, внезапно приложенные и инерционные.

В этом подразделе рассматриваются *повторно-переменные нагрузки*, которые вызывают в деталях машин периодически изменяющиеся напряжения и деформации. Сопротивление деталей действию таких нагрузок существенно отличается от их сопротивления при статическом нагружении.

Повторно-переменным нагрузкам подвергаются, например, вращающиеся оси, валы, зубчатые колеса и т.п. При вращении вала одни и те же волокна оказываются то в растянутой, то в сжатой зоне, т.е. подвергаются деформациям растяжения—сжатия.

Анализ поломок деталей машин показывает, что материалы длительное время подвергавшиеся действию переменных нагрузок, могут разрушаться при напряжениях более низких, чем предел прочности и даже предел текучести. Разрушение при этом происходит вследствие *усталости материала*.

Дальнейшее изложение материала ведется в соответствии со стандартом «Сопротивление усталости. Основные термины, определения и обозначения». Используем стандартное определение усталости.

Усталостью называется процесс постепенного накопления повреждений материала под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению.

Причины усталостного разрушения заключаются в появлении микротрещин из-за неоднородности строения материала, следов механической обработки и повреждений поверхности детали (волосовины, раковины, газовые и шлаковые включения, следы резца или шлифовального камня и т.п.), а также в результате концентрации напряжений, о чем будет идти речь в следующем подразделе.

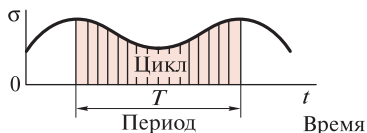


Рис. 25.1

Способность материалов противостоять усталости называется *сопротивлением усталости*. Изучение этого вопроса имеет очень большое значение, поскольку такие ответственные детали, как валы, поршневые пальцы, оси железнодорожных вагонов и многие другие выходят из строя в результате усталости.

Введем основные стандартные понятия, необходимые в дальнейшем.

Циклом напряжений называется совокупность всех значений напряжений за период их изменения (рис. 25.1). *Периодом цикла T* называется продолжительность одного цикла.

Цикл напряжений (рис. 25.2) характеризуется следующими параметрами:

- 1) максимальное напряжение σ_{\max} ;
- 2) минимальное напряжение σ_{\min} ;
- 3) среднее напряжение $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$;
- 4) амплитуда цикла $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$;
- 5) коэффициент асимметрии цикла $R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$.

Циклы, имеющие одинаковый коэффициент асимметрии, называются *подобными*.

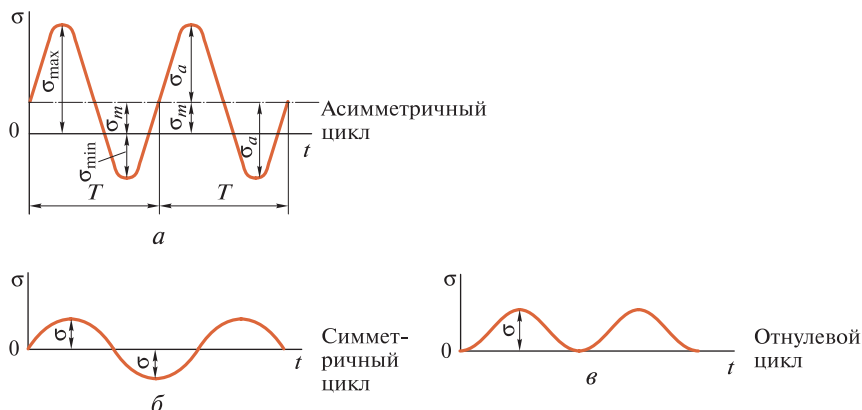


Рис. 25.2

В случае равенства σ_{\max} и σ_{\min} по абсолютной величине имеем *симметричный* цикл напряжений (см. рис. 25.2, б), при котором $\sigma_m = 0$, $\sigma_a = \pm\sigma$, $R_\sigma = -1$.

Цикл напряжений, изображенный на рис. 25.2, а, является примером *асимметричного* знакопеременного цикла.

На рис. 25.2, в показан от *нулевой* цикл напряжений, для которого $R_\sigma = 0$, так как $\sigma_{\min} = 0$.

В случае действия касательных напряжений необходимо в обозначениях и формулах заменить σ на τ .

Число циклов напряжений до начала усталостного разрушения называется *циклической долговечностью* и обозначается N .

Максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором материал может сопротивляться усталости при заданной циклической долговечности, называется *пределом выносливости*.

Предел выносливости для нормальных напряжений при симметричном цикле обозначают σ_{-1} , при отнулевом цикле — σ_0 , при цикле с коэффициентом асимметрии R_σ — σ_R .

Для определения предела выносливости производят испытания образцов на усталость на специальных машинах. Наибольшее распространение имеют испытания на усталость при изгибе и симметричном цикле напряжений. Предварительно устанавливаемая наибольшая продолжительность испытаний называется *базой испытаний*, обычно задаваемая числом циклов, обозначаемым N_0 . Для стали $N_0 = 10^7$ циклов.

Для испытания на усталость изготавливают серию одинаковых тщательно отполированных образцов, имеющих в рабочей части цилиндрическую форму диаметром 5...10 мм. Образцы доводят до разрушения при различной нагрузке и напряжениях, устанавливая при этом циклическую долговечность образца. По полученным данным строят *кривую усталости* (рис. 25.3). На кривой усталости имеется участок, стремящийся к горизонтальной асимптоте. Ордината этой асимптоты и дает значение предела выносливости σ_R .

Опыт показывает, что стальной образец, выдержавший 10^7 циклов, может выдержать и неограниченное число циклов. Экспериментально установлено, что при любом асимметричном цикле предел выносливости для того же материала будет выше, чем при симметричном цикле. Это

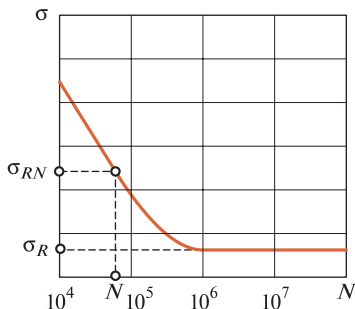


Рис. 25.3

означает, что *симметричный цикл является наиболее опасным*. Для цветных металлов предел выносливости определяют при базе испытаний $N_0 = 10^8$ и более циклов.

Величина предела выносливости зависит от вида деформации. Испытания на усталость при растяжении — сжатии и кручении проводятся реже, поэтому пределы выносливости при растяжении σ_{-1p} и кручении τ_{-1} определяют из эмпирических формул по известному пределу выносливости σ_{-1} при симметричном цикле изгиба:

$$\sigma_{-1p} \approx (0,7 \dots 0,9)\sigma_{-1}; \tau_{-1} \approx 0,58\sigma_{-1}.$$

Пределы выносливости для симметричного цикла изгиба могут быть вычислены с помощью характеристик статической прочности (например, временного сопротивления σ_B) по следующим эмпирическим соотношениям:

для углеродистой стали

$$\sigma_{-1} \approx 0,43\sigma_B;$$

для легированной стали

$$\sigma_{-1} \approx 0,35\sigma_B + 120 \text{ МПа};$$

для серого чугуна

$$\sigma_{-1} \approx 0,45\sigma_B.$$

При расчетах деталей, не предназначенных для длительной эксплуатации, вместо предела выносливости учитывается *предел ограниченной выносливости* σ_{RN} — максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, соответствующее задаваемой циклической долговечности N (см. рис. 25.3).

25.2. ВЛИЯНИЕ ФАКТОРОВ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

Предел выносливости конкретной детали конструкции зависит от ряда факторов, главные из которых — концентрация напряжений, масштабный фактор (размеры детали) и состояние поверхности детали (шероховатость и поверхностное упрочнение).

Влияние концентрации напряжений. *Концентрацией напряжений* называется повышение напряжений в местах изменений формы или нарушений сплошности материала. Напряжения, вычисленные по формулам сопротивления материалов без учета концентрации, называются *номинальными напряжениями*.

Резкое изменение формы или площади поперечного сечения деталей (наличие отверстий, выточек, галтелей, канавок, надрезов и т.п.) приводит к неравномерному распределению напряжений, т.е. вызывают *концентрацию напряжений*. Причина, вызывающая концентрацию напряжений (отверстие, выточка), называется *концентратором напряжений*.

Рассмотрим стальную полосу, растягиваемую силой F (рис. 25.4). В поперечном сечении площадью A полосы действует продольная сила $N = F$. Номинальное напряжение равно $\sigma = F/A$.

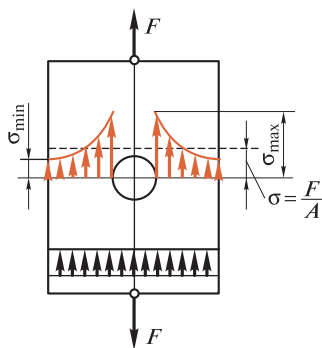


Рис. 25.4

Концентрация напряжений имеет местный характер, поскольку с удалением от концентратора напряжения быстро падают, приближаясь к своим номинальным значениям. График распределения напряжений в месте концентратора показан на рис. 25.4 (иногда их называют местными напряжениями).

Явление концентрации напряжений легко понять с помощью так называемой *гидродинамической аналогии*. Теоретическими и экспериментальными исследованиями доказано сходство между распределением напряжений в деталях и скоростями и направлениями отдельных струй потока воды, протекающего по трубе, имеющей форму исследуемой детали. В прямой трубе постоянного поперечного сечения скорость потока во всех точках сечений одинакова; постоянными остаются и напряжения во всех точках сечения прямого бруса постоянного сечения.

Любое изменение поперечного сечения будет являться препятствием для потока. При сужении трубы скорость потока увеличивается, а при расширении — уменьшается. Аналогичным образом напряжение в сечениях прямого бруса увеличивается или уменьшается при изменении размеров и формы сечения.

С количественной стороны концентрацию напряжений характеризует *теоретический коэффициент концентрации напряжений*. Коэффициент α_σ равен отношению наибольшего местного напряжения σ_{\max} к номинальному напряжению σ :

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma}.$$

В случае концентрации касательных напряжений по аналогии принимают

$$\alpha_{\tau} = \frac{\tau_{\max}}{\tau}$$

Концентрация напряжений по-разному влияет на прочность пластичных и хрупких материалов. Существенное значение при этом имеет и характер нагрузки. Если взять пластичный материал, нагруженный статически, то при увеличении нагрузки рост наибольших местных напряжений при достижении предела текучести приостанавливается вследствие местной текучести материала, и произойдет выравнивание напряжения по сечению. Отсюда можно сделать вывод, что при статической нагрузке пластичные материалы малочувствительны к концентрации напряжений.

При нагрузках, быстро изменяющихся во времени, выравнивание напряжений произойти не успевает, поэтому концентрацию напряжений необходимо учитывать и для пластичных материалов.

При расчетах на прочность деталей из хрупких материалов концентрацию напряжений необходимо учитывать и при статической нагрузке, поскольку неравномерность распределения напряжений вследствие их концентрации сохраняется на всех стадиях нагружения.

Теоретический коэффициент концентрации отражает влияние концентратора напряжений в условиях, далеких от разрушения детали, поэтому вводится понятие эффективного коэффициента концентрации напряжений, обозначаемого K_{σ} или K_{τ} .

Эффективным коэффициентом концентрации напряжений называется отношение предела выносливости σ_{-1} образца без концентрации напряжений к пределу выносливости $\sigma_{-1к}$ образцов с концентрацией напряжений, имеющих такие же абсолютные размеры, как и гладкие образцы:

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1к}} \quad \text{и} \quad K_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1к}}$$

Сравнение показывает, что эффективный коэффициент концентрации всегда меньше теоретического.

Для стальных валов при $\sigma_b \leq 800$ МПа принимают $K_{\sigma} \approx 1,4 \dots 2,5$.

Влияние абсолютных размеров детали. На основании опытов установлено, что предел выносливости зависит от абсолютных размеров поперечного сечения образца: с увеличением размеров сечения предел выносливости уменьшается. Эта закономерность объясняется тем, что с увеличением объема материала возрастает вероятность наличия в нем неоднородностей строения и нарушений сплошности, что приводит к появлению очагов концентрации

напряжений. Влияние абсолютных размеров детали учитывается введением в расчетные формулы соответствующего коэффициента.

Коэффициентом влияния абсолютных размеров поперечного сечения K_d называется отношение предела выносливости гладких образцов диаметра d к пределу выносливости гладких образцов стандартных размеров:

$$K_d = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}$$

Для стальных валов $K_d = 0,52 \dots 0,95$.

Влияние состояния поверхности детали. На предел выносливости влияют шероховатость поверхности детали и поверхностное упрочнение. С увеличением шероховатости поверхности предел выносливости понижается, что учитывается введением в расчетные формулы коэффициента влияния шероховатости поверхности K_F .

Коэффициентом влияния шероховатости поверхности называется отношение предела выносливости образцов с данной шероховатостью поверхности к пределу выносливости гладкого стандартного образца.

Значения этого коэффициента $K_F = 0,45 \dots 1,0$.

Для повышения сопротивления усталости широко применяются различные способы упрочнения поверхностей деталей, например поверхностная закалка, химико-термическая обработка, обкатка роликами, дробеструйная обработка и др. Отношение предела выносливости упрочненных образцов к пределу выносливости неупрочненных образцов называется *коэффициентом влияния поверхностного упрочнения* и обозначается K_v . Обычно $K_v = 1,1 \dots 2,8$.

Общий *коэффициент снижения предела выносливости* обозначается K и определяется по формуле

$$K = \frac{K_{\sigma(\tau)}/K_{d\sigma} + 1/K_F - 1}{K_v}$$

25.3. РАСЧЕТЫ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ

Расчеты на сопротивление усталости (или упрощенно — расчеты на усталость) имеют в технике очень большое значение. На усталость при изгибе рассчитывают валы и вращающиеся оси, на контактную усталость и изгиб рассчитывают зубья зубчатых передач, катки фрикционных передач и многие другие детали. Потеря работоспособности и поломки деталей конструкций нередко происходят из-за усталости материала.

Расчеты на усталость нередко выполняются как *проверочные*. В результате получают фактические коэффициенты запаса прочности s , которые сравнивают с допускаемыми для данной конструкции коэффициентами запаса прочности $[s]$ по условию:

$$s \geq [s].$$

Обычно для деталей $[s] = 1,3 \dots 3$ и более в зависимости от вида и назначения детали.

При *симметричном* цикле изменения напряжений коэффициент запаса прочности определяют по следующим формулам:

для растяжения (сжатия)

$$s_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1p}}{K_{\sigma}};$$

для кручения

$$s_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau}};$$

для изгиба

$$s_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma}},$$

где σ и τ — номинальные значения максимальных нормальных и касательных напряжений; K — *коэффициент снижения предела выносливости*.

Из практики известно, что симметричный цикл изменений напряжений (по сравнению с асимметричным) является наиболее опасным, поэтому в дальнейшем расчеты будем вести как при симметричном цикле. При этом допускается некоторая неточность в сторону увеличения запаса прочности.

25.4. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ИНЕРЦИОННОЙ И УДАРНОЙ НАГРУЗКЕ

Расчеты при инерционной нагрузке. Расчеты с учетом инерционных нагрузок ведутся известным из теоретической механики методом кинетостатики, основанном на принципе Д'Аламбера. Согласно этому принципу все активные и реактивные силы, приложенные к телу, вместе с силами инерции образуют систему взаимно уравновешенных сил, удовлетворяющую всем условиям равновесия. Таким образом, задачи динамики и сопромата решаются методами статики.

В качестве примера рассмотрим расчет тонкостенного кольца, равномерно вращающегося в своей плоскости с угловой скоростью ω (рис. 25.5, а). Полученная в результате расчета формула напряжений используется при расчете ободов маховиков и напряжений в ремнях ременных передач.

При равномерном вращении нормальное ускорение любой точки кольца $a_n = v^2/R = \omega^2 R$, где v — окружная скорость, R — средний радиус кольца. Касательное ускорение $a_\tau = 0$, так как $\omega = \text{const}$.

Применяя принцип Д’Аламбера, приложим к каждому элементу кольца центробежную силу инерции. Эти силы распределены равномерно по окружности кольца и направлены по радиусу от центра. На единицу длины окружности кольца приходится сила инерции

$$q^{\text{ин}} = m_1 a_n,$$

где $m_1 = \rho A$ — масса единицы дуги кольца; A — площадь поперечного сечения; ρ — плотность материала кольца.

Подставляя выражения для m_1 и a_n , получим

$$q^{\text{ин}} = \frac{\rho A v^2}{R}.$$

Определим внутренние силы, возникающие в поперечных сечениях кольца, для чего расsection его по диаметру и рассмотрим равновесие оставленной части (рис. 25.5, б).

Поскольку кольцо тонкое, то можно предположить, что нормальные напряжения распределены по его поперечному сечению равномерно, следовательно, кольцо работает на растяжение.

Определим продольные силы N , возникающие в поперечных сечениях. Для этого спроецируем все силы, действующие на полукольцо на ось y . На элемент кольца, соответствующий элементарному центральному углу $d\varphi$, приходится элементарная сила инерции $dF_n^{\text{ин}}$, равная

$$dF_n^{\text{ин}} = q^{\text{ин}} R d\varphi.$$

Проекция этой силы на ось y равна произведению $dF_n^{\text{ин}} \cos$. Поскольку каждая из элементарных сил инерции направлена по ра-

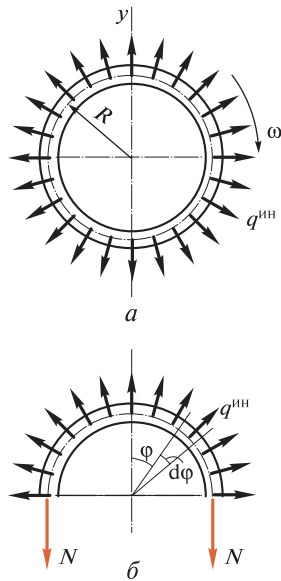


Рис. 25.5

диусу и, следовательно, наклонена к оси y под разными углами, необходимо составлять уравнения равновесия в интегральной форме (угол φ изменяется от $-\pi/2$ до $+\pi/2$):

$$\sum Y = 0; \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho A v^2 \cos \varphi d\varphi - 2N = 0,$$

откуда

$$2N = \rho A v^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \rho A v^2 \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\rho A v^2$$

или

$$N = \rho A v^2.$$

Определим нормальное напряжение в поперечном сечении кольца:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{\rho A v^2}{A} = \rho v^2.$$

Отметим, что напряжения не зависят от площади поперечного сечения кольца и пропорциональны квадрату окружной скорости.

Запишем условие прочности:

$$\sigma = \rho v^2 \leq [\sigma_p],$$

откуда определим допускаемую окружную скорость:

$$[v] = \sqrt{\frac{[\sigma_p]}{\rho}}.$$

Вычислим допускаемую окружную скорость, если кольцо изготовлено из стали плотностью $\rho = 0,8 \cdot 10^4$ кг/м³, допускаемое напряжение при растяжении $[\sigma_p] = 160$ МПа. Тогда

$$[v] = \sqrt{\frac{[\sigma_p]}{\rho}} = \sqrt{\frac{160 \cdot 10^6}{0,8 \cdot 10^4}} = 140 \text{ м/с}.$$

Расчеты при ударной нагрузке. Совокупность явлений, возникающих при столкновении двух твердых тел, называется *ударом*. Он может быть *упругим* и *неупругим*; в последнем случае ударяющее тело не отскакивает от ударяемой упругой системы, а продолжает двигаться вместе с ней. При ударе за очень малый промежуток времени (доли секунды) происходит резкое изменение относительной скорости соударяющихся тел, в результате чего возникают значительные *ударные*, или *мгновенные*, силы.

Ударные нагрузки имеют в технике широкое применение, например при ковке, штамповке и чеканке металла, забивке костылей, гвоздей и свай, в вибротехнике. Сопротивление материалов при ударной нагрузке существенно отличается от поведения материала при статическом нагружении.

При рассмотрении примера действия ударной нагрузки будем считать, что напряжения не превышают предел пропорциональности, т.е. подчиняются закону Гука, а удар будем полагать абсолютно неупругим.

Рассмотрим напряжения и деформации при осевом ударе стержня постоянного сечения (рис. 25.6).

Груз G падает с высоты h на недеформирующийся диск, укрепленный на конце стержня длиной l . Работа, производимая грузом G при падении, равна потенциальной энергии Π деформации стержня:

$$G(h + \Delta l_d) = \frac{\Delta l_d^2 EA}{2l},$$

так как $\Pi = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{\Delta l^2 EA}{2l}$ (см. гл. 19).

Здесь E — модуль упругости материала стержня; Δl_d — его динамическое удлинение; A — площадь поперечного сечения стержня.

Полученное выражение перепишем так:

$$\Delta l_d^2 - \frac{2Gl}{EA} \Delta l_d - \frac{2Ghl}{EA} = 0.$$

Статическое удлинение стержня равно

$$\Delta l_{ст} = \frac{Gl}{EA},$$

тогда квадратное уравнение примет вид

$$\Delta l_d^2 - 2\Delta l_{ст} \Delta l_d - 2\Delta l_{ст} h = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} + \sqrt{\Delta l_{ст}^2 + 2\Delta l_{ст} h}$$

(второй корень не определяется, так как он дает отрицательное значение для Δl_d).

Выражение для Δl_d преобразуем к виду

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} \right).$$

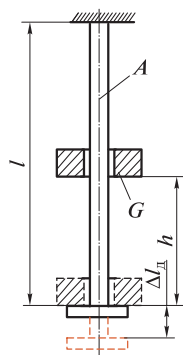


Рис. 25.6

Введем обозначение

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}},$$

где k_d — коэффициент динамичности.

Тогда

$$\Delta l_d = k_d \Delta l_{ст},$$

т.е. наибольшее перемещение, вызываемое действием ударной нагрузки, равно произведению коэффициента динамичности на перемещение от статической нагрузки (в данном случае силы тяжести падающего груза).

На основании линейной зависимости (по закону Гука) между силами и перемещениями можно записать формулу для динамического напряжения

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}.$$

Определение перемещений и напряжений при ударе сводится, таким образом, к определению перемещений и напряжений, вызванных статически приложенной силой, равной силе тяжести падающего груза, и вычислению коэффициента динамичности.

Заметим, что полученные формулы верны как для случая продольного (осевого) удара по стержню, так и для случая поперечного удара по балке.

Рассмотрим случай внезапного приложения нагрузки, что равносильно действию груза, падающего с высоты $h = 0$. Тогда из формулы для определения коэффициента динамичности следует, что $k_d = 2$, вследствие чего получаем $\Delta l_d = 2\Delta l_{ст}$ и $\sigma_d = 2\sigma_{ст}$, т.е. перемещения и напряжения в результате действия внезапно приложенной силы *вдвое больше*, чем при статическом действии той же силы.

Из формулы для определения коэффициента динамичности видно, что с увеличением $\Delta l_{ст}$ (т.е. уменьшением жесткости стержня) k_d уменьшается. Поэтому в технике для смягчения ударов применяют пружины и рессоры — детали, имеющие малую жесткость (большую податливость).

Глава 26

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

26.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Продольным изгибом называется изгиб первоначально прямолинейного стержня вследствие потери устойчивости под действием центрально приложенных продольных сжимающих сил. Продольный изгиб возникает при достижении сжимающими силами и напряжениями критического значения.

Расчеты на прочность и жесткость, приведенные в предыдущих главах, делались в предположении, что при деформации конструкции между внешними нагрузками и вызываемыми ими внутренними силами существует *устойчивая форма* равновесия, при которой малым возмущающим воздействиям соответствуют малые отклонения конструкции от первоначальной формы. Нагрузки, при превышении которых происходит потеря устойчивости (критическое состояние), называют *критическими*. Опасность потери устойчивости особенно велика для тонкостенных конструкций, стержней, пластинок и оболочек.

Рассмотрим тонкий стальной стержень, длина которого значительно больше поперечных размеров, сжимаемый силой F , немного большей критической силы $F_{кр}$ (рис. 26.1).

Применяя метод сечений, убеждаемся, что в результате искривления оси в поперечных сечениях стержня возникают два внутренних силовых фактора — продольная сила $N = F$ и изгибающий момент $M_{из}$.

Таким образом, искривленный стержень испытывает *сочетание деформаций* центрального сжатия и изгиба.

При сжимающих силах, даже немного превышающих критическую силу, напряжения изгиба могут непосредственно угрожать прочности конструкции. Поэтому критическое состояние конструкции считается недопустимым.

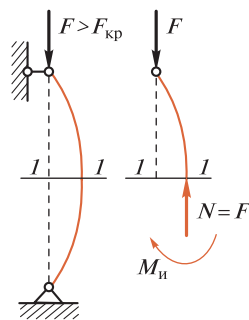


Рис. 26.1

Для обеспечения устойчивости необходимо, чтобы действующая на стержень сжимающая сила F была меньше критической $F_{кр}$.

Обозначим допускаемую сжимающую силу $[F]$, тогда

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[s_y]}$$

где $[s_y]$ — допускаемый коэффициент запаса устойчивости.

Очевидно, что устойчивость стержня обеспечена, если $[s_y] > 1$.

Значение коэффициента запаса устойчивости зависит от назначения стержня и его материала. Обычно для сталей $[s_y] = 1,8 \dots 3$; для чугунов $[s_y] = 5 \dots 5,5$; для дерева $[s_y] = 2,8 \dots 3,2$.

26.2. ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА И ЯСИНСКОГО

Для расчетов стержней на устойчивость необходимо знать способы определения критической силы $F_{кр}$.

Первые исследования устойчивости сжатых стержней были проведены академиком Петербургской Академии наук Леонардом Эйлером (1707 — 1783). Академик С. И. Вавилов писал: «Вместе с Петром I и Ломоносовым Эйлер стал добрым гением нашей Академии, определившим ее славу, ее крепость, ее продуктивность». В дальнейшем большая работа в области теоретического и экспериментального исследования вопросов устойчивости была проведена русским ученым, профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф. С. Ясинским (1856 — 1899), опубликовавшим в 1893 г. большую работу «Опыт развития продольного изгиба».

Л. Эйлером была получена формула для определения величины критической силы $F_{кр}$.

Приведем формулу Эйлера без вывода:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{п}^2}$$

Здесь E — модуль упругости первого рода; I_{\min} — наименьший из осевых моментов инерции сечения, поскольку искривление стержня происходит в плоскости наименьшей жесткости, в чем нетрудно убедиться, сжимая продольной силой слесарную линейку; $l_{п}$ — приведенная длина стержня;

$$l_{п} = \mu l,$$

где l — длина стержня; μ — коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов стержня.

На рис. 26.2 показаны наиболее часто встречающиеся способы закрепления концов стержня и приведены значения μ : оба конца стержня закреплены шарнирно и могут сближаться (рис. 26.2, а); нижний конец жестко зашпемлен, верхний свободен (рис. 26.2, б); оба конца жестко зашпемлены, но могут сближаться (рис. 26.2, в); нижний конец закреплен жестко, верхний — шарнирно, концы могут сближаться (рис. 26.2, г); нижний конец закреплен жестко,

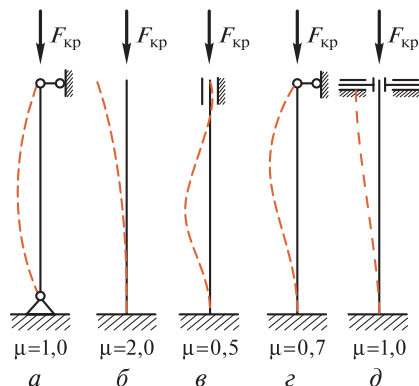


Рис. 26.2

верхний имеет «плавающую заделку» (рис. 26.2, д). Заметим, что чем меньше μ , тем больше критическая сила, а следовательно, и допускаемая сжимающая нагрузка. Например, сжимающая нагрузка стержня, жестко зашпемленного обоими концами ($\mu = 0,5$), может быть в 16 раз больше нагрузки стержня, зашпемленного одним концом ($\mu = 2$).

Вывод формулы Эйлера основан на законе Гука, который справедлив только до предела пропорциональности. Поэтому формулой Эйлера можно пользоваться не всегда. Для определения *пределов применимости* формулы Эйлера определим критическое напряжение $\sigma_{кр}$, т. е. напряжение, которое возникает в поперечном сечении площадью A стержня при достижении критической силы:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A}.$$

Определим наименьший радиус инерции i_{\min} поперечного сечения стержня:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.$$

Перепишем формулу для $\sigma_{кр}$ так:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i_{\min})^2}.$$

Введем понятие *гибкости стержня* $\lambda = \mu l / i_{\min}$. Это безразмерная величина, определяемая размерами стержня и способом закрепления его концов. Окончательно получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Формулу Эйлера можно применять только при выполнении условия

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц},$$

где $\sigma_{пц}$ — предел пропорциональности материала стержня. Следовательно, должно быть

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \lambda_{пред}.$$

Величину, стоящую в правой части неравенства, называют *предельной гибкостью*. Предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня.

Условие применимости формулы Эйлера можно записать так:

$$\lambda \geq \lambda_{пред},$$

т.е. формула Эйлера применима лишь в тех случаях, когда гибкость стержня больше или равна предельной гибкости.

Определим значение $\lambda_{пред}$ для низкоуглеродистой стали Ст3, для которой $\sigma_{пц} = 200$ МПа, а $E = 2 \cdot 10^5$ МПа:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{3,14 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6}} = 100.$$

Для стержней из низкоуглеродистой стали формула Эйлера применима, если их гибкость $\lambda \geq 100$.

Аналогично можно определить значения предельной гибкости для других материалов. В частности, для чугуна $\lambda_{пред} = 80$; для дерева (сосна) $\lambda_{пред} = 110$.



Рис. 26.3

В тех случаях, когда гибкость стержней меньше предельной, формула Эйлера становится неприменимой и при расчетах пользуются эмпирической формулой Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

где a и b — коэффициенты, зависящие от материала и определяемые по таблицам справочников (см., например, [1]).

В частности, для стали Ст3 при гибкостях $\lambda = 40 \dots 100$ принимают $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа. При гибкостях $\lambda < 40$ стержни рассчитывают на сжатие, т. е. по формуле

$$\sigma_c = \frac{F}{A}.$$

Итак, при малых значениях λ ($\lambda < 40$) стержни из низкоуглеродистой стали рассчитывают на простое сжатие; при средних ($40 \leq \lambda < 100$) расчет ведут по формуле Ясинского, а при больших ($\lambda \geq 100$) — по формуле Эйлера. График зависимости критического напряжения от гибкости для стержней из низкоуглеродистой стали изображен на рис. 26.3.

26.3. РАСЧЕТЫ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Существует три вида расчетов на устойчивость прямолинейных стержней — проектный, проверочный и силовой. Рассмотрим содержание каждого из этих расчетов.

Проектный расчет. Определяют минимальный осевой момент инерции поперечного сечения стержня по формуле

$$I_{\min} = \frac{F[s_y](\mu l)^2}{\pi^2 E},$$

где F — действующая нагрузка; $[s_y]$ — допускаемый коэффициент запаса устойчивости; μ — коэффициент приведения длины стержня; l — длина стержня; E — модуль продольной упругости.

Далее находят гибкость стержня λ по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

где $i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A}$; A — площадь поперечного сечения.

Полученную гибкость сравнивают с предельной для данного материала.

Таблица 26.1

λ	30	50	60	80	100	120	140	160
φ	0,92	0,86	0,82	0,70	0,51	0,37	0,29	0,24
φ^*	0,91	0,83	0,79	0,65	0,43	0,30	0,23	0,19

Примечание. Значения φ^* относятся к сталям повышенного качества ($\sigma_T \geq 320$ МПа).

Проверочный расчет. Определяют действительный коэффициент запаса устойчивости s_y и сравнивают его с допускаемым по формуле

$$s_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} \geq [s_y].$$

Силовой расчет. Определяют допускаемую нагрузку $[F]$ по формуле

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{[s_y]}.$$

Расчет сжатых стержней на устойчивость можно свести к расчету на простое сжатие. При расчете применяют следующую формулу:

$$[F] = \varphi[\sigma_c]A,$$

где $[\sigma_c]$ — допускаемое напряжение на сжатие; φ — коэффициент продольного изгиба.

Значение φ зависит от гибкости стержня, его материала и определяется для сталей по табл. 26.1.

Расчеты показывают, что при продольном изгибе наиболее выгодными являются кольцевые и коробочные тонкостенные сечения, имеющие относительно большой момент инерции.

ДЕТАЛИ И УЗЛЫ МАШИН

III ЧАСТЬ

Глава 27. Основные принципы проектирования деталей машин

Глава 28. Неразъемные соединения деталей

Глава 29. Разъемные соединения деталей

Глава 30. Общие сведения о механических передачах

Глава 31. Фрикционные передачи

Глава 32. Ременные передачи

Глава 33. Зубчатые передачи

Глава 34. Червячные передачи

Глава 35. Цепные передачи

Глава 36. Передача винт — гайка

Глава 37. Валы и оси

Глава 38. Опоры валов и осей

Глава 39. Механические муфты

Глава 27

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

27.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОЕКТИРОВАНИИ МАШИН

Проектированием называется процесс разработки комплексной технической документации, содержащей технико-экономические обоснования, расчеты, чертежи, макеты, сметы, пояснительные записки и другие материалы, необходимые для производства машины. По типу изображения объекта различают *чертежное* и *объемное проектирование*; последнее включает выполнение макета или модели объекта. Для деталей машин характерен чертежный метод проектирования.

Совокупность конструкторских документов, полученных в результате проектирования, называется *проектом*.

Правила проектирования и оформления проектов стандартизованы в Единой системе конструкторской документации (ЕСКД), которая устанавливает пять стадий разработки конструкторской документации на изделия всех отраслей промышленности, а именно:

техническое задание устанавливает основное назначение и технические характеристики, показатели качества и технико-экономические требования, предъявляемые к разрабатываемому изделию;

техническое предложение — совокупность конструкторских документов, содержащих технические и технико-экономические обоснования целесообразности разработки документации изделия на основании анализа технического задания, сравнительной оценки возможных решений с учетом особенностей разрабатываемого и существующих подобных изделий, а также патентных материалов;

эскизный проект — совокупность конструкторских документов, содержащих принципиальные конструктивные решения, дающие общие представления об устройстве и принципе работы изделия, а также данные, определяющие его основные параметры и габаритные размеры;

технический проект — совокупность конструкторских документов, содержащих окончательные технические решения, дающие полное представление об устройстве изделия и исходные данные для разработки рабочей конструкторской документации;

разработка технической документации включает в себя чертежи узлов и деталей, спецификации, технические условия на изготовление, сборку, испытание изделия и др.

Курсовой проект по деталям машин в условиях учебного заведения в более или менее упрощенном виде включает в себя все стадии разработки.

В соответствии с разработанной в процессе проектирования конструкторской документацией в дальнейшем создается *технологическая документация*, которая определяет технологию изготовления изделия.

Конструкторские, технологические, а также нормативно-технические документы (последние включают стандарты всех категорий, руководящие технические материалы, общие технические требования и т. п.) в совокупности составляют *техническую документацию*, необходимую для организации и осуществления производства, испытаний, эксплуатации и ремонта предмета производства (изделия).

Условия работы деталей машин бывают весьма разнообразными и трудно поддающимися точному учету, поэтому расчеты деталей машин часто выполняют по приближенным, а иногда эмпирическим формулам, являющимся результатом обобщения накопленного опыта проектирования, испытаний и эксплуатации деталей и узлов машин.

В процессе проектирования деталей машин встречаются два вида расчетов, а именно: *проектный расчет*, при котором обычно определяются основные размеры деталей или узла, *проверочный расчет*, когда для созданной конструкции определяется, например, значение напряжений в опасных сечениях, тепловой режим, долговечность и другие параметры.

27.2. СТАНДАРТИЗАЦИЯ И ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМОСТЬ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Стандартизацией называется процесс установления и применения *стандартов* — документов, содержащих обязательные нормы, правила и требования, относящиеся к различным сторонам человеческой деятельности, в том числе к сфере проектирования, производства, эксплуатации и ремонта машин.

Наиболее распространенный и эффективный метод стандартизации — *унификация* — рациональное сокращение числа объектов одинакового функционального назначения, а также сведение к минимуму типоразмеров деталей и их элементов.

Стандартизация и унификация обеспечивают *взаимозаменяемость* деталей и узлов, т. е. возможность установки и замены их без предварительной подгонки. В свою очередь, взаимозаменяемость деталей — необходимое условие для организации специализированного и массового производства изделий, а также для его широкого кооперирования.

Наша страна является членом Международной организации по стандартизации (ИСО). Государственные стандарты (ГОСТы) создаются и пересматриваются с учетом рекомендаций и решений ИСО. Принятые в данном учебнике буквенные обозначения физических величин соответствуют этим рекомендациям, а применяемые единицы физических величин — ГОСТ 8.417—2002.

Кроме ГОСТов существуют следующие *категории стандартов*: республиканские стандарты (РСТ), отраслевые стандарты (ОСТ), стандарты предприятий (СТП).

На нестандартизованную продукцию предприятия и другие организации разрабатывают технические условия (ТУ).

В нашей стране созданы системы стандартов на отдельные стороны производственной деятельности, которые упорядочивают конструкторскую и технологическую документацию, а также подготовку производства, снижают их трудоемкость и повышают производительность инженерно-технического труда. Такими системами стандартов в области машиностроения являются следующие:

- **Единая система конструкторской документации (ЕСКД);**
- **Единая система технологической документации (ЕСТД);**
- **Единая система технологической подготовки производства (ЕСТПП).**

Для оценки уровня стандартизации той или иной конструкции пользуются показателем, называемым *коэффициентом стандартизации деталей*, равным отношению количества стандартных деталей изделия к общему их количеству без учета крепежных деталей.

27.3. ТЕХНОЛОГИЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ И ЭКОНОМИЧНОСТЬ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Обязательным условием при проектировании новой машины является обеспечение технологичности конструкций.

Технологичность — соответствие изделия требованиям производства и эксплуатации. Цель обеспечения технологичности — повышение производительности труда и качества изделия при максимальном снижении себестоимости.

Одним из важнейших требований технологичности является *соответствие конструкции типу и условиям производства*. Конструкция, технологичная в условиях единичного производства, может оказаться совершенно неприемлемой для массового выпуска, и наоборот.

При решении вопроса технологичности конструктор должен в общих чертах представлять себе и учитывать при конструировании способ получения заготовки детали (прокат, поковка, горячая или холодная штамповка, литье и т.д.), технологию механической обработки, сварки и сборки изделия, вопросы контроля и испытаний, обеспечивая *производственную технологичность*, а также продумывать вопросы технического обслуживания и ремонта изделия, обеспечивая *эксплуатационную и ремонтную технологичность*.

К основным требованиям технологичности относится максимально возможное применение в конструкции стандартных и унифицированных деталей и узлов.

Весьма существенным показателем технологичности конструкций является ее *материалоемкость*. Как правило, наиболее технологичными следует считать детали, при изготовлении которых наименьшее количество материалов уходит в отходы.

Конструктору не следует завышать задаваемую точность размеров и чистоту поверхностей деталей, так как это ведет к повышению себестоимости и трудоемкости их изготовления.

Основными показателями технологичности изделия являются *трудоемкость изготовления* (измеряемое в нормочасах количество труда, необходимое для изготовления изделия без учета покупных деталей) и *технологическая себестоимость* (сумма затрат на осуществление технологических процессов изготовления без учета покупных деталей). Одним из дополнительных показателей технологичности является сформулированный в предыдущем параграфе *коэффициент стандартизации деталей*.

В большинстве случаев оптимальным вариантом конструкций деталей машин будет вариант, обеспечивающий *минимальную себестоимость* при прочих равных условиях. Приблизительно себестоимость C деталей можно определить по формуле

$$C = M + Z + H,$$

где M — стоимость материала деталей с учетом стоимости отходов; Z — зарплата производственных рабочих; H — накладные расходы, исчисляемые в процентах от зарплат и включающие в себя зарплату непромышленного персонала, стоимость амортизации основного оборудования, зданий, расходы на электроэнергию, отопление,

стоимость специальной оснастки, инструмента и т.д. В зависимости от типа и конкретных условий производства накладные расходы достигают 100 %, а нередко и более.

С увеличением масштаба производства себестоимость детали резко снижается, так как с применением специальной оснастки и оборудования значительно снижается трудоемкость детали и зарплата производственных рабочих, уменьшается стоимость специальной оснастки, приходящаяся на одну деталь, сокращаются затраты на материал благодаря более производительным методам изготовления заготовки и уменьшению припусков.

27.4. КРИТЕРИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ И ИЗНАШИВАНИЕ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Основными критериями работоспособности машин являются прочность, жесткость и износостойкость, а в некоторых случаях теплостойкость и виброустойчивость. Понятия прочности и жесткости известны из сопротивления материалов.

Прочностью называется способность материала детали в определенных условиях и пределах воспринимать нагрузки не разрушаясь и без значительных остаточных деформаций. *Основными критериями прочности материала являются предел текучести, предел прочности и предел выносливости.*

Наиболее распространенным методом оценки прочности деталей машин является расчет по допускаемым напряжениям по условиям прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \tau_{\max} \leq [\tau],$$

т. е. максимальные расчетные (действительные) нормальные или касательные напряжения не должны превышать допускаемые.

Допускаемое напряжение при статической нагрузке есть отношение предельного напряжения (предел текучести — для пластичных, предел прочности — для хрупких материалов) к *допускаемому коэффициенту запаса прочности* $[s]$, которые каждая отрасль машиностроения определяет на основании своего опыта эксплуатации деталей машин.

Предельное напряжение при переменных нагрузках — *предел выносливости*. Допускаемое напряжение при *расчетах на усталость* определяется в зависимости от характера приложения нагрузки, числа циклов нагружения, концентрации напряжений, качества поверхности, размеров деталей и других факторов.

Второй распространенный метод расчета деталей машин на прочность — сравнение действительного коэффициента запаса прочности s с допускаемым по условию

$$s \geq [s].$$

Выбор допускаемого коэффициента запаса прочности является очень ответственной задачей, так как завышение $[s]$ ведет к значительному увеличению массы и габаритных размеров конструкции, увеличивает ее стоимость, а занижение $[s]$ делает конструкцию недостаточно надежной.

Жесткостью называется способность материала деталей сопротивляться изменению формы и размеров при нагружении. Жесткость соответствующих деталей обеспечивает требуемую точность машины, нормальную работу ее узлов. Так, например, нормальная работа зубчатых колес и подшипников возможна лишь при достаточной жесткости валов. Диаметры валов, определенные из расчета на жесткость, нередко оказываются большими, чем полученные из расчета на прочность. Нормы жесткости деталей устанавливаются на основе опыта эксплуатации деталей машин. Значение расчета на жесткость возрастает, так как вновь создаваемые высокопрочные материалы имеют значительно более высокие характеристики прочности (пределы текучести и прочности), а характеристики жесткости (модули продольной упругости и сдвига) меняются незначительно.

Изнашиванием называется процесс отделения материала с поверхности твердого тела и накопления его остаточной деформации при трении, проявляющийся в постепенном изменении размеров и формы тела. Результат изнашивания называется *износом*. Свойство материала оказывать сопротивление изнашиванию в определенных условиях трения называется *износостойкостью*. Обеспечение износостойкости изделий регламентировано системой ГОСТов.

Установлено, что 85...90 % машин выходит из строя в результате изнашивания и лишь 10...15 % в результате поломок, поэтому одним из важнейших условий прогресса является изыскание путей снижения трения и изнашивания деталей машин.

В зависимости от происходящих процессов изнашивание можно подразделить на три вида: механическое, коррозионно-механическое и электроэрозионное. При дальнейшем изучении предмета мы будем иметь дело с некоторыми видами *механического изнашивания*, а именно:

абразивное изнашивание материала, происходящее в результате режущего или царапающего действия твердых тел или частиц, попадающих в зону контакта деталей;

изнашивание при заедании, происходящее в результате схватывания, глубинного вырывания материала, переноса его с одной поверхности трения на другую и воздействия возникших неровностей на сопряженную поверхность; заедание может привести к *задир* — появлению широких и глубоких борозд в направлении скольжения;

усталостное изнашивание, происходящее в результате усталостного разрушения (отслаивания и выкрашивания) при повторном деформировании микрообъемов материала поверхностного слоя. Усталостное изнашивание может происходить как при трении качения, так и при трении скольжения.

Контактные напряжения. *Контактными* называют напряжения и деформации, возникающие при взаимном нажатии двух соприкасающихся тел криволинейной формы. Теоретический контакт тел в этом случае может быть линейным (например, сжатие двух цилиндров с параллельными образующими) или точечным (например, сжатие двух шаров). Вследствие деформации в местах соприкосновения элементов конструкций передача давлений происходит по весьма малым площадкам. Решение вопроса о контактных напряжениях и деформациях впервые дано в работах немецкого физика Г. Герца в 1881 — 1882 гг.

Работоспособность деталей машин, находящихся под действием контактных напряжений, определяется сопротивлением усталости рабочих поверхностей этих деталей.

Рассмотрим два цилиндрических ролика 1 и 2 с неподвижными осями, касающихся по общей образующей и прижатых друг к другу силой Q (рис. 27.1), причем ролик 1 ведущий и передает вращение ролику 2 за счет силы трения $F_{тр} = fQ$, где f — коэффициент трения скольжения. В зоне соприкосновения роликов первоначальный линейный контакт по образующей в результате деформации

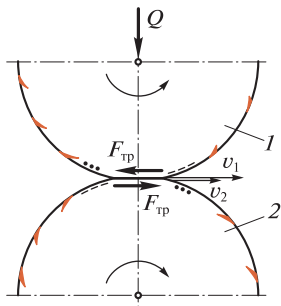


Рис. 27.1

превращается в контакт по узкой полоске и возникают известные из сопротивления материалов контактные напряжения, вычисляемые по формуле Герца. Площадка контакта перемещается по поверхности роликов и в результате многократного деформирования микрообъемов материала в поверхностном слое возникают усталостные трещины. Под действием сил трения происходят пластические сдвиги поверхностных слоев материала и образовавшиеся усталостные трещины наклоняются и вы-

тягиваются *в направлении сил трения* (см. рис. 27.1). Если вращение роликов происходит в условиях обильной смазки, то в трещины попадает масло, которое при прохождении зоны контакта *выдавливается* из трещин ведущего ролика *1* и *заклинивается* в трещинах ведомого ролика *2*, расширяя и углубляя их. Многократное повторение этого процесса приводит к отделению с поверхностного слоя материала в форме чешуек (отслаивание) или отделению частиц, приводящему к образованию ямок (выкрашивание), прежде всего на рабочей поверхности ведомого ролика.

При прохождении зоны контакта элементы поверхностного слоя ведущего ролика *1* переходят из состояния сжатия (что на рис. 27.1 обозначено тремя точками) в состояние растяжения (что обозначено тремя черточками), а у ведомого ролика *2*, наоборот, — из состояния растяжения в состояние сжатия. Это приводит к *упругому скольжению* рабочих поверхностей роликов, в результате чего ведомый ролик имеет меньшую окружную скорость, чем ведущий, т.е. $v_1 > v_2$. Рабочая поверхность, по которой точка контакта перемещается с большей скоростью, называется *опережающей*, а сопряженная поверхность — *отстающей*.

Сказанное выше, а также экспериментальные данные и опыт эксплуатации машин позволяют сделать важный вывод, что *сопротивление усталостному изнашиванию, а следовательно, и нагрузочная способность у опережающих поверхностей выше, чем у отстающих*. Это правило полностью справедливо и для рабочих поверхностей зубьев зубчатых передач.

Обратим внимание на то, что направление силы трения и скорости относительно зоны контакта у отстающей поверхности совпадают, а у опережающей противоположны.

Расчет на *контактную усталость* рабочих поверхностей деталей ведется по *допускаемым контактным напряжениям*.

Далее приведем определения ряда других характеристик, влияющих на работоспособность и надежность.

Теплостойкостью называется способность конструкции работать в пределах заданных температур в течение заданного времени. Для обеспечения нормального температурного режима проводят тепловые расчеты конструкций.

Виброустойчивостью называется способность конструкции работать в заданном диапазоне режимов без недопустимых колебаний. В связи с повышением скоростей машин расчеты на виброустойчивость становятся все более актуальными.

Ремонтопригодностью называется приспособленность изделия к предупреждению и обнаружению причин возникновения его от-

казов, повреждений и устранению их последствий путем проведения ремонтов и технического обслуживания.

Сохраняемость называется свойство изделия непрерывно сохранять исправное и работоспособное состояние в течение и после хранения и транспортирования.

27.5. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О КОНСТРУКЦИОННЫХ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Конструкционными называют материалы, обладающие прочностью и применяемые для изготовления конструкций, воспринимающих силовую нагрузку. Конструкционные материалы подразделяют на *металлические, неметаллические и композиционные*.

Затраты на материалы в общей стоимости машин составляют весьма значительную часть. Так, например, в редукторах общего назначения эта часть достигает 85 %, в автомобилях — 70 %. Снижение материалоемкости конструкции является важным источником повышения эффективности производства. Основными *направлениями снижения материалоемкости* машиностроительной продукции являются совершенствование методов расчета и улучшение конструкции машин, применение прогрессивной технологии изготовления заготовок и деталей машин, повышение качества и расширение номенклатуры материалов, более полное использование вторичного сырья и отходов производства.

Выбор материалов деталей — важный этап проектирования, от которого в значительной степени зависят масса, габаритные размеры, стоимость и долговечность машин. Для снижения стоимости машин большое значение имеет замена дорогостоящих и дефицитных материалов, однако применение более дешевых материалов может привести к увеличению массы, габаритных размеров и снижению долговечности машин. Таким образом, вопрос о выборе материала представляет собой сложную *технико-экономическую задачу*, в решении которой необходимо учитывать экономические, технологические и эксплуатационные соображения.

Наиболее распространенными материалами в машиностроении являются металлы, которые подразделяют на черные и цветные.

Черные металлы (стали и чугуны) в машинах занимают по массе более 90 %; они сравнительно дешевы, обладают высокой прочностью и жесткостью. Основные недостатки черных металлов — высокая плотность и подверженность многих из них коррозии.

Цветные металлы (медь, цинк, олово, свинец, алюминий, титан, магний и др.) входят в состав *сплавов цветных металлов* (бронзы, латуни, баббиты) и *легких сплавов* (силумины, дюралюминий, магниевые, титановые и др.). Цветные металлы и сплавы значительно дороже черных, более дефицитны, но обладают весьма ценными антифрикционными и антикоррозионными свойствами, а легкие сплавы (в особенности титановые) имеют высокую прочность при малой плотности.

Все более широко в машиностроении применяют *неметаллические материалы* (дерево, кожа, резина, графит, пластмассы и др.).

Пластмассы обладают довольно высокой прочностью, малой плотностью, электроизоляционными и антикоррозионными, фрикционными или антифрикционными свойствами. Детали из пластмасс имеют малую трудоемкость, так как их получают высокопроизводительными методами. Недостатки пластмасс: низкая теплостойкость и старение, сопровождаемое постепенным изменением механических характеристик, иногда цвета и даже размеров деталей.

Применение пластмасс в машиностроении дает большой технико-экономический эффект благодаря снижению массы машин, экономии цветных металлов и сталей, снижению трудоемкости и себестоимости машин.

Композиционные конструкционные материалы (например, биметаллы, стеклопластики и др.) образуются объемным сочетанием химически разнородных компонентов с четкой границей раздела. Такие материалы обладают свойствами, которыми не обладает каждый из компонентов, взятый в отдельности. Композиционные материалы могут обладать весьма высокими механическими, диэлектрическими, жаропрочными и другими свойствами.

Большинство машиностроительных материалов стандартизовано.

На всех этапах своего развития машиностроение нуждалось в создании новых и улучшении эксплуатационных качеств существующих материалов. Это необходимое условие непрерывного технического прогресса.

Глава 28

НЕРАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ

28.1. КЛЕПАНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Часть производственного процесса, заключающаяся в соединении готовых деталей, сборочных единиц, узлов и агрегатов в изделия, называется *сборкой*. Применяемая в дальнейшем терминология соответствует ГОСТ 23887—79 «Сборка. Термины и определения».

Классификация соединений. Все многообразие сопряжений деталей машин при сборке можно подразделить на следующие *виды соединений*:

- *по возможности относительного перемещения деталей* (подвижное и неподвижное);
- *по сохранению целостности деталей при разборке* (разъемное и неразъемное);
- *по форме сопрягаемых поверхностей* (плоское, цилиндрическое, коническое, сферическое, винтовое, профильное);
- *по методу образования*, определяемого процессом получения соединения или конструкцией, соединяющей детали (клепаное, сварное, паяное, клееное, пресовое, резьбовое, шпоночное, шлицевое, штифтовое, клиновое и др.).

Соединения, при разборке которых нарушается целостность составных частей изделия, называют *неразъемными*.

Предельное состояние соединения, когда становится возможной потеря его работоспособности, называется *нагрузочной способностью*.

Клепаным называется соединение деталей с применением *заклепок* — крепежных деталей из высокопластичного материала, состоящих чаще всего из стержня 1 и закладной головки 2; конец стержня расклепывается для образования замыкающей головки 3 (рис. 28.1).

Клепаное соединение является *неразъемным и неподвижным*.

Клепаные соединения применяют для изделий из листового, полосового материала или профильного проката в конструкциях, работающих в условиях ударных или вибрационных нагрузок (авиация,

водный транспорт, металлоконструкции мостов, подкрановых балок и т.д.) при небольших толщинах соединяемых деталей, для скрепления деталей из разных материалов, деталей из материалов, не допускающих нагрева или несвариваемых. В наше время клепаные соединения вытесняются более экономичными и технологичными сварными и клееными соединениями, так как отверстия под заклепки ослабляют сечения деталей на 10...20%, а трудоемкость изготовления и масса клепаной конструкции обычно больше, чем сварной или клееной. Образование замыкающей головки клепаного соединения производится либо вручную с помощью молотка и поддержки, либо клепальными пневматическими молотками ударного действия.

По функциональному назначению клепаные соединения подразделяют на *прочные* и *плотные*; последние обеспечивают не только прочность, но и герметичность соединения.

По конструкции клепаные соединения бывают *нахлесточные* и *стыковые* с одной или двумя накладками. Ряды поставленных заклепок образуют *заклепочный шов*, который может быть однорядным и многорядным, односрезным или двухсрезным. На рис. 28.2 показаны двухрядный односрезный нахлесточный шов (*а*), однорядный односрезный стыковой шов с одной накладкой (*б*), однорядный двухсрезный стыковой шов с двумя накладками (*в*).

Конструкция и размеры заклепок нормальной точности и повышенного качества стандартизованы. По форме головок заклепки бывают (рис. 28.3) с *полукруглой* (*а*), *потайной* (*б*), *полупотайной* (*в*), *плоской* (*г*), *полукруглой низкой* и другими головками.

В тех случаях, когда нежелательно или недопустимо клепаное соединение подвергать ударам, применяют *полупустотелые* заклепки (рис. 28.3, *д*), замыкающая головка которых образуется развальцовкой.

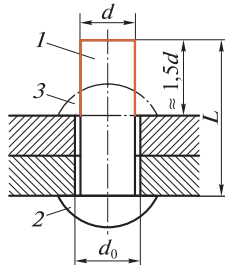


Рис. 28.1

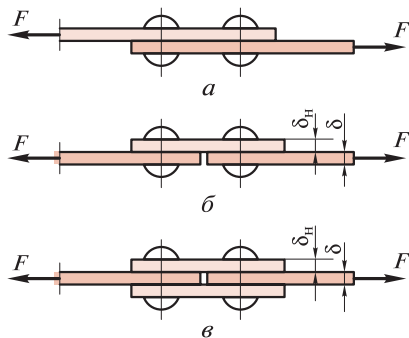


Рис. 28.2

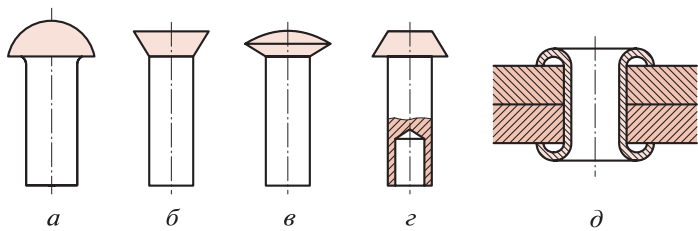


Рис. 28.3

Для соединения тонких листов и неметаллических материалов, а также когда в конструкции нужны отверстия для электрических, крепежных или других деталей, применяют *пустотелые* заклепки (рис. 28.3, д).

В случае отсутствия доступа к месту образования замыкающей головки обычными способами (ударами или развальцовкой) применяют специальные, например, *взрывные* заклепки (типа полупустотелой); в стержень такой заклепки закладывается взрывчатое вещество.

Заклепки изготовляют из низкоуглеродистых сталей, цветных металлов (например, медь) или их сплавов (латунь, алюминиевые сплавы). Клепка стальных заклепок диаметром до 10 мм, заклепок пустотелых и из цветных или легких металлов и сплавов выполняется в холодном состоянии. Стальные заклепки большего диаметра клепают в горячем состоянии.

Подбор заклепок по длине, размеры замыкающих головок и диаметры отверстий под заклепки регламентированы стандартом.

Расчет прочных клепаных соединений. Основным *критерием работоспособности таких конструкций является прочность*, причем при расчетах предполагается, что напряжения в сечениях распределены равномерно.

Обычно клепаные соединения нагружены силами, действующими параллельно плоскости контакта соединяемых деталей, поэтому разрушение соединения может произойти в результате следующих причин:

- срез заклепок по сечению $1-1$ под действием касательных напряжений (рис. 28.4);
- смятие отверстий соединяемых деталей и заклепок под действием напряжений смятия;
- разрыв соединяемой детали по сечению, ослабленному отверстиями под заклепки.

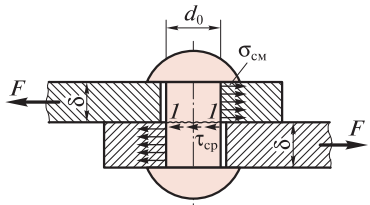


Рис. 28.4

В процессе клепки материал заклепки осаждается и заполняет отверстие, поэтому расчет соединения ведут по диаметру поставленной заклепки (по диаметру d_0 отверстия под заклепку, которое несколько больше диаметра заклепки d). Кроме того, предполагается, что нагрузка F распределяется между заклепками шва равномерно, а сила трения, возникающая между склепанными деталями, в расчете на прочность не учитывается.

Расчетные формулы на прочность клепаного соединения имеют следующий вид:

1. Прочность заклепок на срез (см. рис. 28.4)

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{F}{zA_{\text{ср}}} \leq [\tau_{\text{ср}}],$$

где $A_{\text{ср}} = i\pi d_0^2/4$; i — число плоскостей среза; z — число заклепок шва; $A_{\text{ср}}$ — площадь среза заклепки.

2. Прочность соединения на смятие

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{zA_{\text{см}}} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где $A_{\text{см}} = d_0\delta_{\text{мин}}$; $\delta_{\text{мин}}$ — меньшая из толщин соединяемых деталей (как известно из сопротивления материалов, при расчете на смятие цилиндрических поверхностей в расчет вводится не действительная, а условная площадь смятия, равная площади диаметрального сечения сминаемой части детали).

28.2. СВАРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Сварным — называется неразъемное соединение, выполненное *сваркой*, т. е. путем установления межатомных связей между свариваемыми частями при их нагревании или пластическом деформировании.

Основные понятия, термины и определения, относящиеся к сварке металлов стандартизованы. Технология сварочного производства изучается в курсе технологии металлов.

Сварные соединения являются наиболее распространенными и совершенными из неразъемных соединений, так как лучше других обеспечивают условия равнопрочности, снижения массы и стоимости конструкции. Замена клепаных конструкций сварными уменьшает их массу до 25 %, а замена литых конструкций сварными уменьшает расход металла до 30 % и более. Трудоемкость сварных конструкций значительно меньше клепаных, а возможности меха-

низации и автоматизации технологического процесса значительно больше. Сварка позволяет соединять детали сложной формы, обеспечивает сравнительно бесшумный технологический процесс и герметичность соединений. В настоящее время сваривают детали, изготовленные из черных, многих цветных металлов, а также из пластмасс. Свариваемость материалов характеризуется их склонностью к образованию трещин при сварке и механическими свойствами соединения. Хорошей свариваемостью обладают низкоуглеродистые стали, плохой — высокоуглеродистые стали и чугуны.

Недостатки сварных соединений: недостаточная надежность при ударных и вибрационных нагрузках, коробление деталей в процессе сварки, концентрация напряжений и сложность проверки качества соединений.

Существует много видов сварки, которые можно подразделить на две группы: сварка *плавлением* и сварка *давлением*. Часть конструкции, в которой сварены примыкающие друг к другу элементы, называется *сварным узлом*. В машиностроении наибольшее распространение имеют сварные узлы, полученные разновидностью сварки плавлением — *дуговой* сваркой, при которой нагрев осуществляется электрической дугой; меньшее распространение имеет *контактная* сварка с применением давления, при которой нагрев производится теплотой, выделяемой при прохождении электрического тока в зоне контакта соединяемых деталей. В дальнейшем рассматриваются соединения, полученные дуговой сваркой.

Металл соединяемых сваркой деталей называется *основным*, а металл, предназначенный для введения в сварочную ванну в дополнение к расплавленному основному, называется *присадочным*; переплавленный присадочный металл, введенный в сварочную ванну, называется *наплавленным*. Участок соединения, образовавшийся в результате кристаллизации металлической сварочной ванны называется *сварным швом*. Металл шва является сплавом основного и наплавленного металла, а иногда только переплавленным основным металлом.

Существуют следующие виды сварных соединений (рис. 28.5): *стыковое* (а), *нахлесточное* (б); *угловое* (в), *тавровое* (г). Шов стыкового сварного соединения называется *стыковым*, а швы нахлесточного, углового и таврового соединений называют *угловыми*. Сварные швы могут быть *непрерывными* и *прерывистыми*; последние имеют промежутки по длине шва. Металл шва, наплавленный за один проход, называется *валиком*; один или несколько валиков, расположенных на одном уровне поперечного сечения шва, называется *слоем*.

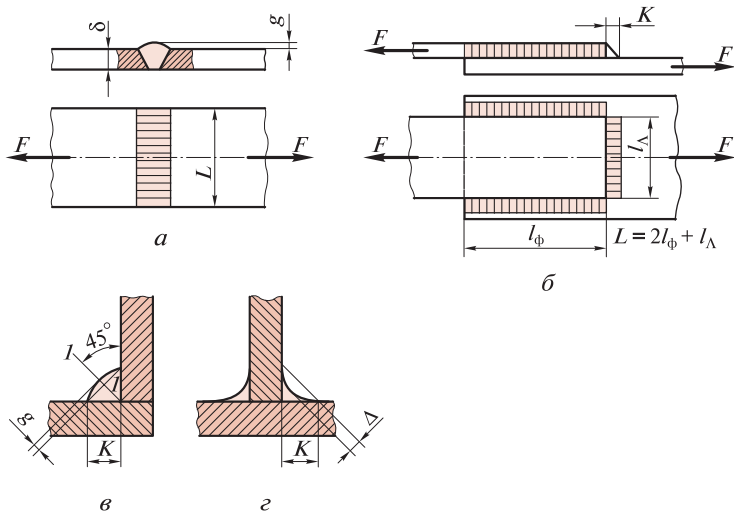


Рис. 28.5

Сварные швы по форме поперечного сечения могут быть *нормальными* (рис. 28.5, б), *выпуклыми* (рис. 28.5, а, в) и *вогнутыми* (рис. 28.5, г). Выпуклость шва обозначается g , а вогнутость — Δ ; их величина не должна превышать 3 мм. Выпуклый угловой шов, кажущийся на первый взгляд более прочным, имеет значительную концентрацию напряжений по сравнению с нормальным и особенно вогнутым швами, так как выпуклый шов образует более резкое изменение сечения детали в месте соединения. Поэтому при действии на конструкцию переменных нагрузок рекомендуется применять вогнутые угловые швы, хотя вогнутость их обычно достигается механической обработкой, которая значительно увеличивает стоимость соединения. У стыковых швов со снятыми механическим способом выпуклостями концентрация напряжений практически отсутствует.

Различают швы *лобовые* и *фланговые* (см. рис. 28.5, а, б), расположенные соответственно перпендикулярно и параллельно линии действия нагрузки; кроме того, бывают швы *косые* и *комбинированные*.

Расчет сварных соединений. Основным критерием работоспособности сварных соединений является прочность, причем предполагается, что напряжения в опасных сечениях распределены равномерно.

Расчет стыковых соединений производится по нормальным напряжениям *растяжения* или *сжатия* по номинальному сечению соединяемых элементов без учета выпуклости шва:

$$\sigma' = \frac{F}{\delta L} \leq [\sigma'],$$

где δ — толщина соединяемых элементов; L — длина шва; $[\sigma']$ — допускаемое напряжение металла шва для принятой технологии сварки (напряжение в металле шва обозначаем соответствующей буквой со штрихом).

Основным геометрическим и расчетным параметром угловых швов является *катет* K (если катеты сечения шва не равны, то шов характеризуют меньшим катетом). В большинстве случаев катет шва принимают равным толщине соединяемых деталей.

Расчет угловых швов производится по касательным напряжениям *сдвига* в опасном сечении $I-I$, расположенном в биссекторной плоскости прямого угла (см. рис. 28.5, θ), без учета выпуклости шва:

$$[\tau'_{cp}] = \frac{F}{0,7KL} \leq [\tau'],$$

где $0,7K \approx K \sin 45^\circ$ — высота опасного сечения шва; L — суммарная длина швов (см. рис. 28.5, δ); $[\tau'_{cp}]$ — допускаемое напряжение металла шва для принятой технологии сварки.

В нахлесточном соединении (см. рис. 28.5, δ) внешние силы F образуют пару сил, моментом которой ввиду малого плеча пренебрегают.

Допускаемые напряжения для сварных швов принимают в зависимости от допускаемых напряжений на растяжение для основного металла с учетом характера действующих нагрузок и принятой технологии сварки. Ориентировочно для стальных конструкций при статической нагрузке:

$$[\sigma'_p] = (0,9 \dots 1)[\sigma_p]; \quad [\sigma'_c] = [\sigma_p];$$

$$[\tau'_{cp}] = (0,6 \dots 0,65)[\sigma_p].$$

Здесь $[\sigma_p] = \sigma_T / [s]$, где σ_T — предел текучести основного материала; $[s]$ — допускаемый коэффициент запаса прочности ($[s] = 1,35 \dots 1,7$, большие значения для легированных сталей).

28.3. КЛЕЕННЫЕ И ПАЯНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Клеенные соединения. *Клееным* называется неразъемное соединение составных частей изделия с применением клея. Действие клеев основано на образовании межмолекулярных связей между клеевой пленкой и поверхностями склеенных материалов. Клееные

соединения применяют для соединения металлических, неметаллических и разнородных материалов, причем в настоящее время имеется тенденция к расширению применения этих соединений. Так, например, клееные соединения применяют в таких ответственных конструкциях, как летательные аппараты и мосты.

Достоинства клееных конструкций заключаются в возможности соединения практически всех конструкционных материалов в любых сочетаниях, любой толщины и конфигурации, причем обеспечивается герметичность и коррозионная стойкость соединений. В отличие от сварных, клееные соединения почти не создают концентрации напряжений, не вызывают коробления деталей и надежно работают при вибрационных нагрузках. По сравнению с другими клееные соединения дешевле, а клееные конструкции, как правило, легче других при прочих равных условиях.

Недостатки клееных соединений: сравнительно невысокая прочность, в особенности при неравномерном отрыве, относительно невысокая долговечность некоторых клеев («старение»), низкая теплостойкость, необходимость соблюдения специальных мер по технике безопасности (установка приточно-вытяжной вентиляции); для большинства соединений требуется нагрев, сжатие и длительная выдержка соединяемых деталей.

Клеи делят на конструкционные (для прочностных соединений) и неконструкционные (для ненагруженных соединений). По природе основного компонента различают *неорганические, органические и элементоорганические клеи*. К неорганическим клеям относят жидкие стекла, применяемые для склеивания целлюлозных материалов.

Существует большое разнообразие *конструкционных* клеев, отличающихся физико-механическими свойствами и технологией их применения. Наибольшее применение в машиностроении и приборостроении имеют органические клеи на основе синтетических полимеров, например *универсальные клеи БФ*, технические условия на которые стандартизованы, и *эпоксидные клеи* с наполнителем и без наполнителя. При необходимости повышенной теплостойкости (до 1 000 °С) применяют элементоорганические клеи, обладающие сравнительно меньшей эластичностью. Клеи не являются проводниками, поэтому при необходимости обеспечить электропроводность в них добавляют порошкообразное серебро. Для склеивания деталей требуется механическая и химическая подготовка их поверхностей.

Прочность клееного соединения в значительной степени зависит от толщины клеевого слоя, которая в основном определяется вязко-

стью клея и давлением при склеивании. Рекомендуются толщины клеевого слоя для различных клеев в пределах 0,05...0,25 мм; при толщине клеевого шва 0,5 мм и более прочность соединения значительно снижается. Наибольшее влияние на прочность клеевого соединения оказывает температура эксплуатационного режима.

В прочностных клеевых конструкциях наиболее распространены *стыковые* и *нахлесточные* соединения, примеры которых приведены на рис. 28.6: *а* — стыковое с накладкой; *б* — косостыковое; *в* — стыковое; *г* — стыковое соединение труб одинакового диаметра; *д* — нахлесточное; *е* — нахлесточное шпунтовое; *ж* — косостыковое соединение труб одного диаметра; *з* — нахлесточное (телескопическое) соединение труб разного диаметра.

Прочность клеевого соединения зависит от площади склеивания. Наиболее прочными являются соединения, работающие на *сдвиг* или *равномерный отрыв*, когда напряжения по всей площади склеивания можно полагать распределенными равномерно. При работе на отдираание (неравномерный отрыв) прочность соединения не определяется площадью склеивания, так как оно будет разрушаться последовательными участками; в таких случаях применяют комбинированные соединения — клееклепаные или клеесварные.

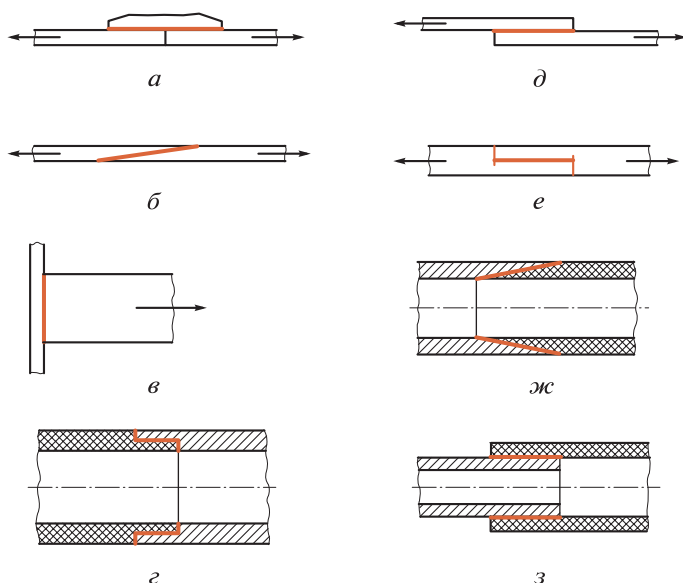


Рис. 28.6

Расчетные формулы на сдвиг и отрыв для клееных соединений имеют вид

$$\tau = \frac{F}{A_k} \leq [\tau], \quad \sigma_p = \frac{F}{A_k} \leq [\sigma_p],$$

где F — действующая сила; A_k — площадь склеивания. Допускаемое напряжение на сдвиг $[\tau] = \tau_b/[s]$, а на отрыв $[\sigma_p] = \sigma_b/[s]$, где для распространенных клеев предел прочности при сдвиге $\tau_b \leq 60$ МПа, предел прочности при растяжении $\sigma_b \leq 50$ МПа, а допускаемый коэффициент запаса прочности $[s] = 1,2 \dots 1,5$.

Паяные соединения. *Пайкой* называется процесс образования неразъемного соединения с межатомными связями путем нагрева соединяемых материалов *ниже температуры их плавления* и применения легкоплавкого присадочного материала — *припоя*. В температуре нагрева состоит принципиальное отличие пайки от сварки. Соединение, образованное пайкой, называется *паяным*.

В отличие от сварки пайка позволяет соединять детали из разнородных материалов, например, черных и цветных металлов и сплавов, стекла, керамики, графита. Кроме того, паять можно и детали с тонкостенными элементами, где применение сварки недопустимо из-за опасности прожога тонких стенок. Применение пайки в машиностроении возрастает в связи с широким внедрением новых конструкционных материалов, в том числе высокопрочных легированных сталей, многие из которых плохо свариваются. Примерами применения пайки могут служить радиаторы автомобилей и тракторов, лопатки турбин, топливные и масляные трубопроводы и др. Пайка является одним из основных видов соединения в приборостроении, в том числе в радиоэлектронике.

Процессы пайки сравнительно легко поддаются механизации и автоматизации. Во многих случаях применение пайки приводит к значительному повышению производительности труда, снижению массы и стоимости конструкций. По прочности паяные соединения уступают сварным.

По признаку взаимного расположения и формы паемых элементов типы паяных соединений подобны сварным и клееным и носят те же названия, а именно: нахлесточное, стыковое, косостыковое, тавровое, телескопическое, комбинированное. Если паемые элементы соединены по линии или в точке, то соединение называется *соприкасающимся*.

Многообразные способы пайки можно подразделить на два основных вида (в скобках даны термины ИСО):

низкотемпературная пайка (мягкая пайка), происходящая при температуре, не превышающей 723 К (450 °С);

высокотемпературная пайка (твердая пайка), происходящая при температуре, превышающей 723 К.

В первом случае применяют *оловянно-свинцовые* (мягкие) припои, во втором — *медно-цинковые* и *серебряно-медные* (твердые) припои. В качестве припоев применяют как чистые металлы, так и сплавы.

Для уменьшения вредного влияния окисления поверхностей при пайке применяют флюсы (на основе буры, хлорида цинка, канифоли); паяют в среде нейтральных газов (аргона) или в вакууме.

Перед пайкой паяемые поверхности деталей обезжиривают и очищают от оксидов. После подготовки соединяемых деталей к пайке и последующей сборки их обычно подогревают до температуры плавления припоя и в зазоры между ними вводят расплавленный припой.

Паяные швы из мягких припоев малопрочны, поэтому их применяют для соединений ненагруженных, малонагруженных, не подверженных действию ударных нагрузок и вибраций. Из-за низкой температуры плавления не рекомендуется применять их для соединений, работающих при температуре выше 100 °С. Мягкие припои широко применяют в приборостроении. Твердые припои применяют для соединений, несущих нагрузки. При статических нагрузках применяют припои на медной основе, а для соединений, воспринимающих ударные и вибрационные нагрузки, — припои на серебряной основе.

Расчет на прочность паяных соединений осуществляют по формулам для односторонних сварных и клееных соединений. Допускаемое напряжение на срез можно принимать для паяных швов из оловянно-свинцовых припоев $[\tau'] = 20 \dots 30$ МПа, из медно-цинковых припоев $[\tau'] = 175 \dots 230$ МПа. Для паяных швов из серебряно-медных припоев предел прочности при растяжении в полтора-два раза больше, чем при срезе и равен 400...600 МПа.

Глава 29

РАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ

29.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЯХ

Разъемными называют соединения, разборка которых происходит без нарушения целостности составных частей изделия. Разъемные соединения могут быть как подвижными, так и неподвижными. Наиболее распространенными в машиностроении видами разъемных соединений являются резьбовые, шпоночные, шлицевые, клиновые, штифтовые и профильные.

Резьбовым называют соединение составных частей изделия с применением детали, имеющей резьбу.

Резьба представляет собой чередующиеся выступы и впадины на поверхности тела вращения, расположенные по винтовой линии. Основные определения, относящиеся к резьбам общего назначения, стандартизованы.

Резьбовые соединения являются самым распространенным видом соединений вообще и разъемных в частности. В современных машинах детали, имеющие резьбу, составляют свыше 60 % от общего количества деталей.

Широкое применение резьбовых соединений в машиностроении объясняется их *достоинствами*:

- универсальностью;
- высокой надежностью;
- малыми габаритными размерами;
- небольшим весом крепежных резьбовых деталей;
- способностью создавать и воспринимать большие осевые силы;
- технологичностью;
- возможностью точного изготовления.

Недостатки резьбовых деталей:

- значительная концентрация напряжений в местах резкого изменения поперечного сечения;
- низкий КПД подвижных резьбовых соединений.

Резьбы изготовляют либо *пластической деформацией* (накатка на резьбонакатных станках, выдавливание на тонкостенных метал-

лических изделиях), либо *резанием* (на токарно-винторезных, резбонарезных, резбофрезерных, резбошлифовальных станках или вручную метчиками и плашками); на деталях из стекла, пластмассы, металлокерамики, иногда на деталях из чугуна резьбу изготовляют отливкой или *прессованием*. Следует отметить, что накатывание резьбы круглыми или плоскими плашками на резбонакатных станках — самый высокопроизводительный метод, с помощью которого изготавливается большинство стандартных крепежных деталей с наружной резьбой, причем накатанная резьба прочнее нарезанной, так как в первом случае не происходит перерезание волокон металла заготовки, а поверхность резьбы наклепывается.

Диаметры стержней под накатывание и нарезание резьб, диаметры отверстий под нарезание резьб, а также выход резьбы (сбеги, недорезы, проточки и фаски) стандартизованы. Кроме того, стандартизованы метки (в виде прорезей) на деталях с левой резьбой.

Основные геометрические параметры резьбы (рис. 29.1): *наружный диаметр* d, D (по стандартам диаметры наружной резьбы обозначают строчными, а диаметры внутренней резьбы — прописными буквами); *внутренний диаметр* d_1, D_1 ; *средний диаметр* d_2, D_2 — диаметр воображаемого цилиндра, на поверхности которого толщина витка равна ширине впадины; *угол профиля* α , *шаг резьбы* p — расстояние между соседними одноименными боковыми сторонами профиля в направлении, параллельном оси резьбы; *число заходов* n (заходность резьбы легко определяется на торце винта по числу сбегающих витков); *ход резьбы* $p_n = np$ — величина относительного осевого перемещения гайки или винта за один оборот (в целях унификации обозначений шаг резьбы, как и шаг зубьев зубчатых колес, будем обозначать строчной буквой p , а не прописной, как по стандартам на резьбы).

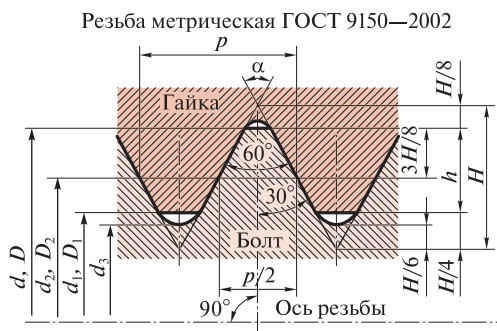


Рис. 29.1

К основным параметрам относится *угол подъема резьбы* ψ — угол, образованный касательной к винтовой линии резьбы в точках, лежащих на среднем диаметре, и плоскостью, перпендикулярной оси резьбы. Как будет показано далее (см. рис. 29.14, а), угол подъема резьбы определяется зависимостью

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{np}{\pi d_2}.$$

Диаметр, условно характеризующий размер резьбы, называется *номинальным*; для большинства резьб в качестве номинального диаметра резьбы принимается наружный диаметр.

Классификация резьб. Классифицировать резьбы можно по многим признакам: *по форме профиля* (треугольная, трапециевидальная, упорная, прямоугольная, круглая и др.); *по форме поверхности* (цилиндрическая, коническая); *по расположению* (наружная, внутренняя); *по числу заходов* (однозаходная, многозаходная); *по направлению заходов* (правая, левая); *по величине шага* (с крупным, с мелким); *по эксплуатационному назначению* (крепежная, крепежно-уплотнительная, ходовая, специальная).

Крепежные резьбы (метрическая, дюймовая) предназначены для скрепления деталей; *крепежно-уплотнительные* (трубные, конические) применяют в соединениях, требующих не только прочности, но и герметичности; *ходовые резьбы* (трапециевидальная, упорная, прямоугольная) служат для передачи движения и применяются в передачах винт—гайка, которые будут рассматриваться позже; *специальные резьбы* (круглая, окулярная, часовая и др.) имеют специальное назначение. Большинство применяемых в нашей стране резьб стандартизовано.

В этой главе мы будем в основном рассматривать конструкцию и расчет деталей и соединений с крепежной резьбой, имеющей в машиностроении наиболее широкое применение, а также ознакомимся со стандартами на ходовые резьбы.

Метрическая резьба. Форма и размеры профиля этой резьбы, диаметры и шаги, основные размеры регламентированы стандартами. Кроме того, стандартизованы резьба метрическая для приборостроения, резьба метрическая коническая, резьба метрическая на деталях из пластмасс (не указанные номера стандартов и срок их действия легко установить по «Указателю стандартов», переиздаваемому ежегодно).

Метрическая резьба (см. рис. 29.1) имеет исходный профиль в виде равностороннего треугольника с высотой H , вершины профиля срезаны, как показано на рисунке, а впадины притуплены, что

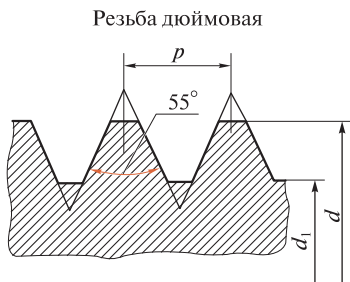


Рис. 29.2

необходимо для уменьшения концентрации напряжений и по технологическим соображениям (для увеличения стойкости резбонарезного и резбонакатного инструмента). Форма впадины резьбы болта может быть закругленной или плоскосрезанной. В резьбе предусмотрен радиальный зазор, который делает ее негерметичной.

По стандарту метрические резьбы делятся на резьбы с *крупным* и *мелким* шагом. При одном и том же номинальном диаметре метрическая резьба может иметь один крупный и пять мелких шагов. Резьбы с мелким шагом имеют меньшую высоту профиля и меньше ослабляют сечение детали; кроме того, эти резьбы имеют меньшие углы подъема резьбы и обладают повышенным самоторможением. Поэтому резьбы с мелким шагом применяют для соединения мелких тонкостенных деталей и при действии динамических нагрузок.

В машиностроении основное применение находит метрическая резьба с крупным шагом как более прочная и менее чувствительная к ошибкам изготовления и износу. Крепежные резьбовые детали имеют обычно *правую однозаходную резьбу*; левая резьба применяется редко. Допуски и посадки метрических резьб стандартизованы.

Дюймовая резьба (рис. 29.2). Эта крепежная резьба имеет треугольный профиль с углом $\alpha = 55^\circ$, номинальный диаметр ее задается в дюймах ($1'' = 25,4$ мм), а шаг — числом витков, приходящихся на один дюйм длины резьбы. Дюймовая резьба подобна применяемой в Англии, США и некоторых других странах резьбе Витворта; она используется у нас лишь при ремонте импортных машин. Применение дюймовой крепежной резьбы в новых конструкциях запрещено, а стандарт на нее ликвидирован без замены.

Из дюймовых резьб в нашей стране стандартизованы и находят применение: *трубная цилиндрическая*, *трубная коническая* (обе с углом профиля 55°) и *коническая дюймовая* с углом профиля 60° . Эти резьбы применяют в трубопроводах, они являются крепежно-уплотнительными.

Трапецидальная резьба (рис. 29.3). Профиль этой резьбы представляет собой равнобокую трапецию с углом между боковыми сторонами $\alpha = 30^\circ$. Профили, основные размеры и допуски трапецидальных резьб стандартизованы, причем предусмотрены резьбы с мелким, средним и крупным шагами.

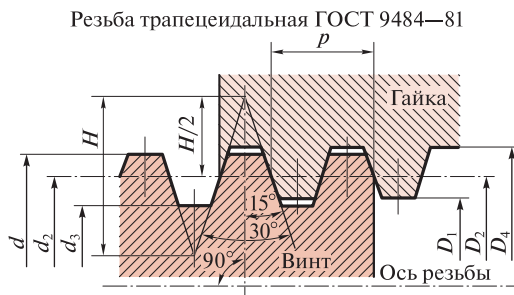


Рис. 29.3

Упорная резьба (рис. 29.4). Профиль этой резьбы представляет собой неравнобокую трапецию с углами наклона боковых сторон к прямой, перпендикулярной оси резьбы, равными 3 и 30°. Основные размеры и допуски упорной резьбы для диаметров от 10 до 600 мм регламентированы ГОСТом. Стандартизована также резьба упорная усиленная для диаметров от 80 до 2000 мм, у которой одна сторона профиля наклонена под углом 45°.

Трапецеидальная и упорная резьбы являются *ходовыми* и применяются в передачах винт—гайка. Так, например, трапецеидальная резьба применяется для ходовых винтов токарно-винторезных станков, где возникают реверсивные нагрузки; упорная резьба применяется при односторонних нагрузках, например для грузовых винтов домкратов и прессов, причем усилие воспринимается стороной, имеющей угол наклона 3°.

Трапецеидальную и упорную резьбы можно нарезать на резьбофрезерных, токарно-винторезных станках (последний способ значительно менее производительен), а окончательную обработку производить на резьбошлифовальных станках.

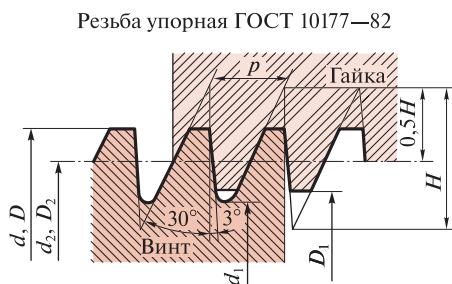


Рис. 29.4

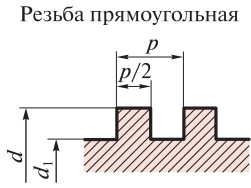


Рис. 29.5

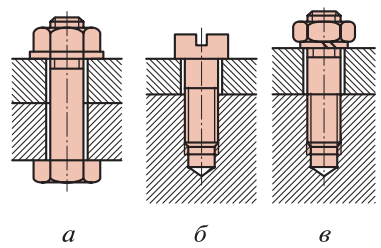


Рис. 29.6

Прямоугольная резьба (рис. 29.5). Эта резьба не стандартизована и имеет ограниченное применение в неотвественных передачах винт — гайка. В дальнейшем будет показано, что эта резьба из всех имеет наибольший КПД, но ее нельзя фрезеровать и шлифовать, так как угол профиля $\alpha = 0$; прочность прямоугольной резьбы ниже, чем у других резьб.

Крепежные резьбовые соединения и их детали. Основные и наиболее распространенные типы крепежных резьбовых соединений (рис. 29.6): болтовое (а), винтовое (б) и шпильчное (в). Детали этих соединений: болты, гайки, винты, шпильки и шайбы. Геометрические формы, размеры, варианты исполнения и технические требования на эти детали и их элементы регламентированы многочисленными стандартами.

Наиболее дешево и технологически просто болтовые соединения, так как они не требуют нарезания резьбы в соединяемых деталях.

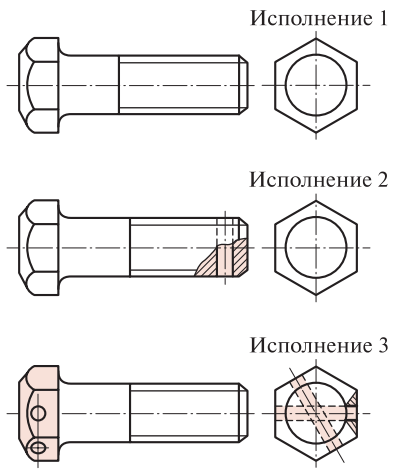


Рис. 29.7

Соединения винтами и шпильками применяют в тех случаях, когда одна из соединяемых деталей имеет значительную толщину. Болтовые и шпильчные соединения используют тогда, когда в процессе эксплуатации соединяемые детали подвергаются многократной разборке и сборке.

Детали резьбовых соединений делятся на детали *общего назначения* и *специальные*. Конструкция и расчет специальных деталей в этом учебнике не рассматриваются.

Болты общего назначения с шестигранной головкой

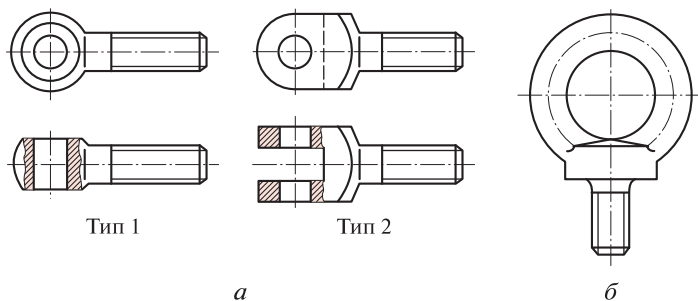


Рис. 29.8

(рис. 29.7) бывают грубой, нормальной и повышенной точности трех исполнений: без отверстий, с отверстием в стержне и с отверстиями в головке. Стандартами предусмотрены разные варианты конструкций болтов: с уменьшенной шестигранной головкой, с направляющим подголовком, с полукруглой головкой, потайной головкой, усом, квадратным подголовком и др.

Кроме того, стандартизованы болты откидные двух типов (рис. 29.8, *а*), служащие для быстрого зажима и освобождения деталей; рым-болты (рис. 29.8, *б*), которые служат для транспортировки тяжелых деталей или изделий, например больших редукторов; болты фундаментные, применяемые для крепления станины или корпуса изделия к фундаменту, болты высокопрочные, болты конические и др.

Гайки общего назначения шестигранные бывают грубой, нормальной и повышенной точности с одной или двумя наружными фасками. Стандартами предусмотрены разные варианты конструкций гаек: с уменьшенным размером «под ключ», гайки высокие, особо высокие, низкие, прорезные и корончатые (рис. 29.9, *а*). Кроме того, стандартизованы гайки круглые шлицевые и с отверстиями «под ключ», расположенными радиально или на торце (рис. 29.9, *б*), гайки-барашки для завинчивания без ключа (рис. 29.9, *в*), гайки колпачковые, гайки высокопрочные и др.

Винты общего назначения (рис. 29.10) делятся на *крепежные* и *установочные*; последние (рис. 29.10, *ж*) служат для фиксации положения деталей, причем форма и размеры отверстий под установочные винты стандартизованы. Винты в зависимости от формы головок бывают с полукруглой (*а*), цилиндрической (*б*), с цилиндрической скругленной (*в*), с полупотайной (*г*), с потайной (*д*) головками, с шестигранным углублением «под ключ» (*е*), с крестообразным шлицем под специальную отвертку, с накатанной го-

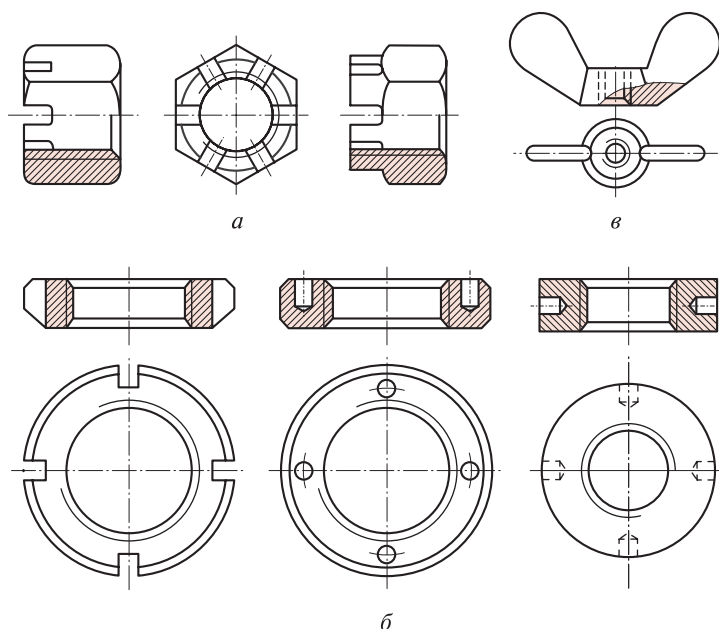


Рис. 29.9

ловкой, с шестигранной и квадратной головками и др. Кроме того, стандартизованы винты самонарезающие для металла и пластмасы, винты невыпадающие и шурупы, служащие для соединения деталей из дерева и мягких пластмасс; в отличие от винтов шурупы имеют острый конический конец и резьбу с крупным шагом.

Стержни крепежных винтов (как и болтов) могут иметь одинаковый по всей длине диаметр либо быть с уменьшенным диаметром ненарезанной части (рис. 29.10, *в*, *г*, *д*).

Шпильки (см. рис. 29.6, *в*) могут иметь ввинчиваемые концы нормальной и повышенной точности с длиной их от d до $2,5d$, где d — диаметр шпильки. Конструкция и размеры шпилек стандартизованы.

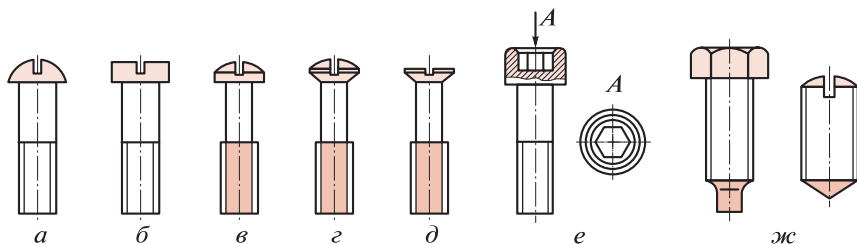


Рис. 29.10

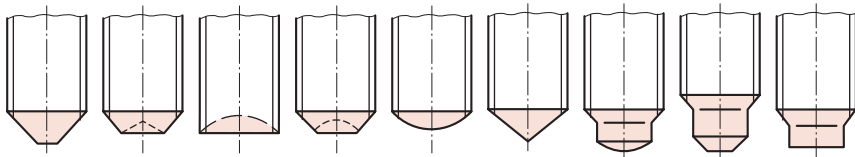


Рис. 29.11

Концы болтов, винтов и шпилек регламентированы специальным стандартом и показаны на рис. 29.11.

Технические требования на крепежные резьбовые детали стандартизованы и устанавливают для болтов, винтов и шпилек из углеродистых и легированных сталей двенадцать *классов прочности* в зависимости от значения минимального временного сопротивления и предела текучести стали; для гаек из тех же материалов установлено семь классов прочности.

Шайбы (рис. 29.12, а) подкладывают под гайки или головки болтов для увеличения опорной площади, уменьшения напряжений смятия и предохранения деталей от задиrow. Стальные шайбы цилиндрической формы согласно стандартам изготовляют двух исполнений (без фасок и с одной наружной фаской) и двух классов точности А и С. Кроме того, стандартизованы шайбы увеличенные и уменьшенные, шайбы стопорные с внутренними и наружными зубьями, шайбы косые (для соединения деталей, имеющих уклон), шайбы упорные быстросъемные, шайбы к высокопрочным болтам, шайбы пружинные (рис. 29.12, б) и др. Для предотвращения изгиба стержня болта или шпильки и перекоса опорных поверхностей применяют сферические шайбы.

Средства против самоотвинчивания резьбовых деталей. Все крепежные резьбы однозаходные, имеют малый угол подъема резьбы и удовлетворяют условию самоторможения. Однако опыт эксплуа-

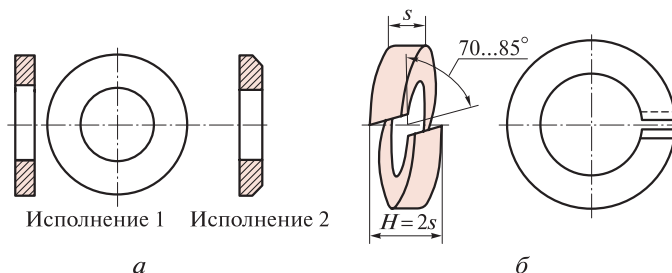


Рис. 29.12

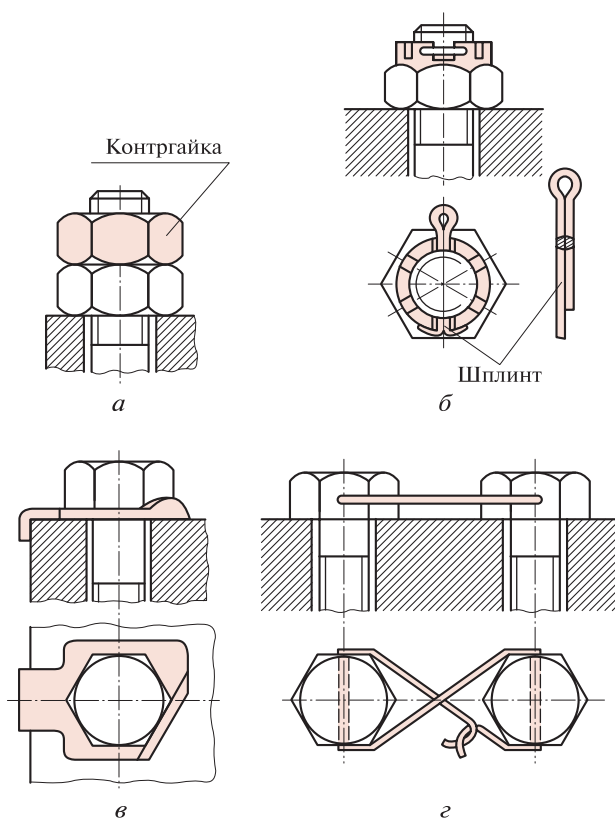


Рис. 29.13

тации резьбовых соединений показывает, что при вибрациях, переменной или ударной нагрузке происходит ослабление резьбового соединения и самоотвинчивание деталей. Для повышения надежности и предохранения резьбовых соединений от самоотвинчивания (иначе говоря, для стопорения) применяют различные способы. Первый из них основан на том, что в резьбе создается *дополнительное трение* путем установки контргайки (рис. 29.13, а) или пружинной шайбы (см. рис. 29.6, в), применения контргаек цангового типа, самоконтращихся гаек и т.д. Заметим, что пружинные шайбы (см. рис. 29.12, б) для правой и левой резьб должны иметь разное направление витка и наклон прорези, так как острые края шайбы должны врезаться в тело гайки и детали и дополнительно препятствовать самоотвинчиванию. Второй способ заключается в *жестком соединении* болта и гайки с помощью специальных деталей, на-

пример стандартного шплинта (рис. 29.13, б), для чего применяют прорезные или корончатые гайки и болты с отверстиями в стержне; жесткое соединение гайки или винта с деталью можно осуществить с помощью стандартной стопорной шайбы с лапкой (рис. 29.13, в); жесткое соединение болтов иногда выполняют с помощью проволоки (рис. 29.13, г). Третий способ предохранения от самоотвинчивания заключается в превращении резьбового соединения в *неразъемное* и применяют его для соединений, не требующих разборки (путем приварки, кернения, расклепывания) или разбирающихся очень редко (путем пайки, а для мелких резьбовых деталей применяют лак, краску, смолу).

Силовые соотношения в резьбовых соединениях. Для рассмотрения соотношения сил в резьбе представим себе винт с прямоугольной резьбой, нагруженный осевой силой Q (рис. 29.14). Мысленно разрежем один виток цилиндрической поверхностью по среднему диаметру резьбы d_2 и, развернув эту цилиндрическую поверхность на плоскость чертежа, получим наклонную плоскость с углом наклона, равным углу подъема резьбы ψ (рис. 29.14, а). Гайку заменим ползуном, к которому приложены все действующие в резьбе силы, а именно: осевая сила Q , нормальная реакция N , сила трения $F_{тр} = fN$ (где $f = \operatorname{tg} \varphi$; φ — угол трения), F — горизонтальная движущая сила.

Подъему ползуна вверх по наклонной плоскости будет соответствовать навинчивание гайки на винт.

Как известно из теоретической механики, для подъема ползуна вверх по шероховатой наклонной плоскости нужно приложить го-

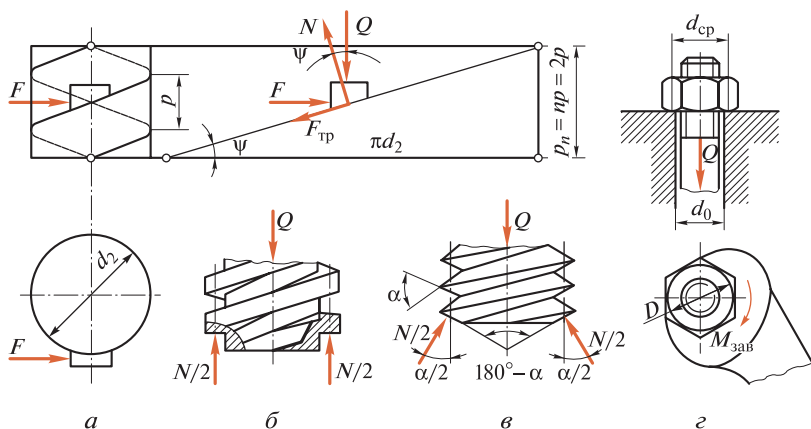


Рис. 29.14

ризонгальную силу $F = Q \operatorname{tg}(\psi + \varphi)$, где φ — угол трения (указанную формулу легко получить, рассмотрев равновесие системы сил, приложенных к ползуну), а КПД шероховатой наклонной плоскости

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg}(\psi + \varphi)}.$$

Обратим внимание на то, что с увеличением угла подъема КПД увеличивается, следовательно, КПД многозаходных резьб выше, чем однозаходных; с увеличением угла трения КПД уменьшается, так как увеличиваются потери на преодоление трения.

Сила F является в резьбе окружной, приложенной на среднем диаметре d_2 , следовательно, момент сил в резьбе

$$M_p = 0,5d_2F = 0,5d_2Q \operatorname{tg}(\psi + \varphi).$$

Для сравнения трения в прямоугольной и треугольной резьбах рассмотрим соответствующие винты, нагруженные осевой силой Q (рис. 29.14, б, в). Пренебрегая углом подъема резьбы и спроецировав действующие силы на ось винта, получим:

для прямоугольной резьбы

$$N = Q, F_{\text{тр}} = Nf = Qf,$$

где f — коэффициент трения скольжения;

для треугольной резьбы

$$N = Q / \cos \frac{\alpha}{2}, \quad F_{\text{тр}} = Nf = Qf / \cos \frac{\alpha}{2} = Qf',$$

где $f' = f / \cos \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \varphi'$ — приведенный коэффициент трения скольжения, а φ' — приведенный угол трения. Таким образом, трение в треугольной резьбе подобно трению клинчатого ползуна с углом заострения $180^\circ - \alpha$ (клинчатый ползун как бы вращается в конусообразной воронке). Для метрической резьбы $\alpha = 60^\circ$, $\cos \frac{\alpha}{2} \approx 0,87$, а $f' = 1,15f$, т.е. приведенный коэффициент трения больше основного на 15%.

Так как $f' > f$, то трение в треугольной резьбе больше, чем в прямоугольной, а КПД меньше, поэтому крепежные резьбы имеют треугольный профиль, а ходовые — прямоугольный или близкий к нему.

Для треугольной резьбы окружная сила $F = Q \operatorname{tg}(\psi + \varphi')$, а момент сил в резьбе $M_p = 0,5d_2Q \operatorname{tg}(\psi + \varphi')$.

При отвинчивании гайки направление сил трения изменится на противоположное и окружная сила $F_{\text{отв}} = Q \operatorname{tg}(\psi - \varphi')$. Чтобы не было самоотвинчивания резьбы, должно быть $F_{\text{отв}} < 0$ или $\psi < \varphi'$.

Для стандартных крепежных резьб угол подъема резьбы не превышает 4° , а приведенный угол трения в зависимости от материала гайки и винта лежит в пределах от 6 до 16° , следовательно, *все крепежные резьбы — самотормозящие* и при статической нагрузке не самоотвинчиваются. Мелкие крепежные резьбы (по сравнению с крупными) имеют меньший угол подъема резьбы и поэтому они менее склонны к самоотвинчиванию при динамических нагрузках.

Для затяжки крепежного резьбового соединения осевой силой Q (рис. 29.14, з) необходимо создать момент завинчивания $M_{\text{зав}}$, равный сумме момента сил в резьбе M_p и момента сил трения $M_{\text{оп}}$ на опорной поверхности гайки. Так как $M_p = 0,5d_2Q \text{tg}(\psi + \varphi')$, а $M_{\text{оп}} = Qfd_{\text{ср}}/2$ (предполагается, что равнодействующая сил трения приложена на среднем диаметре опорной поверхности), то

$$M_{\text{зав}} = 0,5d_2Q \text{tg}(\psi + \varphi') + Qfd_{\text{ср}}/2,$$

где $d_{\text{ср}} = 0,5(D + d_0)$; D — наружный диаметр опорной поверхности гайки; d_0 — диаметр отверстия под болт.

Для крепежных резьб средние значения $\psi \approx 2^\circ 30'$; $d_2 \approx 0,9d$; $d_{\text{ср}} \approx 1,4d$, где d — номинальный диаметр резьбы; тогда при $f = 0,15$

$$M_{\text{зав}} \approx 0,2Qd.$$

Длина стандартных ключей $L \approx 15d$. Приложив к концу ключа силу R , можно определить отношение Q/R , т.е. выигрыш в силе за счет резьбы. Так как $M_{\text{зав}} = RL$, то $0,2Qd = 15Rd$, откуда $Q/R \approx 75$.

29.2. РАСЧЕТ КРЕПЕЖНЫХ РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Основным критерием работоспособности крепежных резьбовых соединений является прочность. Стандартные крепежные детали сконструированы равнопрочными по следующим параметрам: по напряжениям среза и смятия в резьбе, напряжениям растяжения в нарезанной части стержня и в месте перехода стержня в головку. Поэтому для стандартных крепежных деталей в качестве главного критерия работоспособности принята прочность стержня на растяжение, и по ней ведут расчет болтов, винтов и шпилек. Расчет резьбы на прочность выполняют в качестве проверочного лишь для нестандартных деталей.

Расчет резьбы. Как показали исследования, проведенные Н. Е. Жуковским, силы взаимодействия между витками винта и гайки распределены в значительной степени неравномерно, однако

действительный характер распределения нагрузки по виткам зависит от многих факторов, трудно поддающихся учету (неточности изготовления, степени износа резьбы, материала и конструкции гайки и болта и т.д.). Поэтому при расчете резьбы условно считают, что все витки нагружены одинаково, а неточность в расчете компенсируют значением допускаемого напряжения.

Условие прочности резьбы на срез имеет вид

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A_{cp}} \leq [\tau_{cp}],$$

где Q — осевая сила; A_{cp} — площадь среза витков нарезки; для винта (см. рис. 29.1) $A_{cp} = \pi d_1 k H_r$, для гайки $A_{cp} = \pi D k H_r$. Здесь H_r — высота гайки; k — коэффициент, учитывающий ширину основания витков резьбы: для метрической резьбы для винта $k \approx 0,75$, для гайки $k \approx 0,88$; для трапецидальной и упорной резьб (см. рис. 29.3, 29.4) $k \approx 0,65$; для прямоугольной резьбы (см. рис. 29.5) $k = 0,5$. Если винт и гайка из одного материала, то на срез проверяют только винт, так как $d_1 < D$.

Условие прочности резьбы на смятие имеет вид

$$\sigma_{cm} = \frac{Q}{A_{cm}} \leq [\sigma_{cm}],$$

где A_{cm} — условная площадь смятия (проекция площади контакта резьбы винта и гайки на плоскость, перпендикулярную оси): $A_{cm} = \pi d_2 h z$, где (см. рис. 29.1) πd_2 — длина одного витка по среднему диаметру; h — рабочая высота профиля резьбы; $z = H_r/p$ — число витков резьбы в гайке высотой H_r ; p — шаг резьбы (по стандарту рабочая высота профиля резьбы обозначена H_1).

Расчет незатянутых болтов. Характерный пример незатянутого резьбового соединения — крепление крюка грузоподъемного механизма (рис. 29.15).

Под действием силы тяжести груза Q стержень крюка работает на растяжение, а опасным будет сечение, ослабленное нарезкой. Статическая прочность стержня с резьбой (которая испытывает объемное напряженное состояние) приблизительно на 10% выше, чем гладкого стержня без резьбы. Поэтому расчет стержня с резьбой условно ведут по расчетному диаметру $d_p = d - 0,9p$, где p — шаг резьбы с номинальным диаметром d (приближенно можно считать

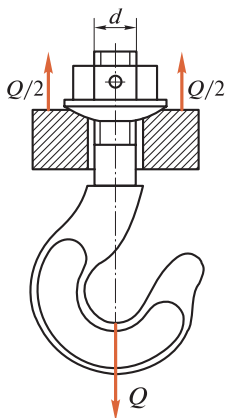


Рис. 29.15

$d_p \approx d_1$). Условие прочности нарезанной части стержня на растяжение имеет вид

$$\sigma_p = \frac{Q}{A_p} \leq [\sigma_p],$$

где расчетная площадь $A_p = \pi d_p^2/4$. Расчетный диаметр резьбы

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi[\sigma_p]}}.$$

По найденному значению расчетного диаметра подбирается стандартная крепежная резьба.

Расчет затянутых болтов. Пример затянутого болтового соединения — крепление крышки люка с прокладкой, где для обеспечения герметичности необходимо создать силу затяжки Q (рис. 29.16). При этом стержень болта растягивается силой Q и скручивается моментом M_p в резьбе.

Напряжение растяжения $\sigma_p = Q/(\pi d_p^2/4)$, максимальное напряжение кручения $\tau_k = M_p/W_p$, где $W_p = 0,2d_p^3$ — момент сопротивления кручению сечения болта; $M_p = 0,5Qd_2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi')$. Подставив в эти формулы средние значения угла подъема ψ резьбы, приведенного угла трения φ' для метрической крепежной резьбы и применяя энергетическую теорию прочности, получим

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma_p^2 + 3\tau_k^2} \approx 1,3\sigma_p.$$

Отсюда, согласно условию прочности $\sigma_{\text{экр}} \leq [\sigma_p]$, запишем

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{1,3Q}{\pi d_p^2/4} = \frac{Q_{\text{расч}}}{\pi d_p^2/4} = [\sigma_p],$$

где $Q_{\text{расч}} = 1,3Q$, а $[\sigma_p]$ — допускаемое напряжение при растяжении.

Таким образом, болт, работающий на растяжение и кручение, можно условно рассчитывать только на растяжение по осевой силе, увеличенной в 1,3 раза. Тогда

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4Q_{\text{расч}}}{\pi[\sigma_p]}}.$$

Расчет болтовых соединений, нагруженных поперечной силой. Возможны два принципиально отличных друг от друга варианта таких соединений.

В первом варианте (рис. 29.17) болт ставится с зазором и работает на растяжение. Затяжка болтового соедине-

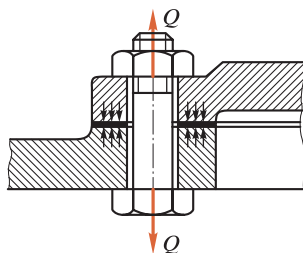


Рис. 29.16

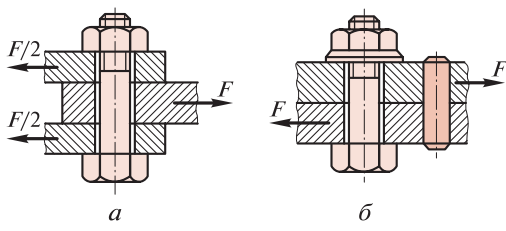


Рис. 29.17

ния силой Q создает силу трения, полностью уравновешивающую внешнюю силу F , приходящуюся на один болт, т. е. $F = ifQ$, где i — число плоскостей трения (для схемы на рис. 29.17, a $i = 2$); f — коэффициент сцепления. Для гарантии минимальную силу затяжки, вычисленную из последней формулы, увеличивают, умножая ее на коэффициент запаса сцепления $K = 1,3 \dots 1,5$, тогда

$$Q = \frac{KF}{if}.$$

Расчетная сила для болта $Q_{расч} = 1,3Q$, а расчетный диаметр болта

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4Q_{расч}}{\pi[\sigma_p]}}.$$

В рассмотренном варианте соединения сила затяжки до пяти раз может превосходить внешнюю силу и поэтому диаметры болтов получаются большими. Во избежание этого нередко такие соединения разгружают установкой шпонок, штифтов (рис. 29.17, b) и т. п.

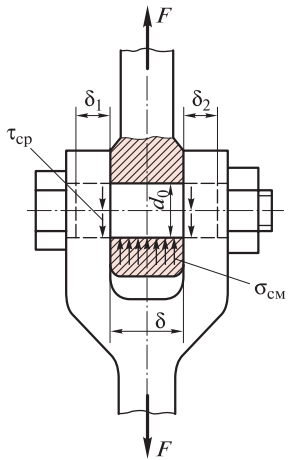


Рис. 29.18

Во втором варианте (рис. 29.18) болт повышенной точности ставят в развернутые отверстия соединяемых деталей *без зазора*, и он работает на срез и смятие. Условия прочности такого болта имеют вид

$$\tau_{ср} = \frac{4F}{\pi d_0^2 i} \leq [\tau_{ср}], \quad \sigma_{см} = \frac{F}{d_0 \delta} \leq [\sigma_{см}],$$

где i — число плоскостей среза (для схемы на рис. 29.18 $i = 2$); $d_0 \delta$ — условная площадь смятия, причем если $\delta > (\delta_1 + \delta_2)$, то в расчет (при одинаковом материале деталей) принимается меньшая величина. Обычно из условия прочности на срез определяют диаметр стержня болта, а затем проводят проверочный расчет на смятие.

Во втором варианте конструкции болтового соединения, нагруженного поперечной силой, диаметр стержня болта получается в два-три раза меньше, чем в первом варианте (без разгрузочных деталей).

Допускаемые напряжения. Обычно болты, винты и шпильки изготавливают из пластичных материалов, поэтому допускаемые напряжения при статической нагрузке определяют в зависимости от предела текучести материала, а именно: при расчете на растяжение $[\sigma_p] = \sigma_T/[s]$; при расчете на срез $[\tau_{ср}] = 0,4\sigma_T$; при расчете на смятие $[\sigma_{см}] = 0,8\sigma_T$.

Значения допускаемого коэффициента запаса прочности $[s]$ зависят от характера нагрузки (статическая или динамическая), качества монтажа соединения (контролируемая или неконтролируемая затяжка), материала крепежных деталей (углеродистая или легированная сталь) и их номинальных диаметров.

Ориентировочно при статической нагрузке крепежных деталей из углеродистых сталей: для незатянутых соединений $[s] = 1,5...2$ (в общем машиностроении), $[s] = 3...4$ (для грузоподъемного оборудования); для затянутых соединений $[s] = 1,3...2$ (при контролируемой затяжке), $[s] = 2,5...3$ (при неконтролируемой затяжке крепежных деталей диаметром более 16 мм).

Для крепежных деталей с номинальным диаметром менее 16 мм верхние пределы значений коэффициентов запаса прочности увеличивают в два и более раз ввиду возможности обрыва стержня из-за перетяжки.

Для крепежных деталей из легированных сталей (применяемых для более ответственных соединений) значения допускаемых коэффициентов запаса прочности берут примерно на 25 % больше, чем для углеродистых сталей.

При переменной нагрузке значения допускаемых коэффициентов запаса прочности рекомендуются в пределах $[s] = 2,5...4$, причем за предельное напряжение принимают предел выносливости материала крепежной детали.

В расчетах на срез при переменной нагрузке значения допускаемых напряжений берут в пределах $[\tau_{ср}] = (0,2...0,3)\sigma_T$ (меньшие значения для легированных сталей).

29.3. ШПОНОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Шпоночными называют разъемные соединения составных частей изделия с применением шпонок. Детали шпоночного соеди-

нения показаны на рис. 29.19, где шпонка 1 закладывается в пазы вала 2 и ступицы 3, надеваемой на вал детали (шкива, зубчатого колеса и т.п.). Шпоночные соединения могут быть неподвижными и подвижными и служат обычно для предотвращения относительного поворота ступицы и вала при передаче вращающего момента. Шпоночные соединения широко применяют во всех отраслях машиностроения.

Достоинства шпоночных соединений: простота и надежность конструкции, легкость сборки и разборки соединения, невысокая стоимость. Основной *недостаток* шпоночных соединений — снижение нагрузочной способности сопрягаемых деталей из-за ослабления их поперечных сечений шпоночными пазы и значительной концентрации напряжений в зоне этих пазов.

Шпоночные пазы на валах и осях обычно получают фрезерованием концевыми или дисковыми фрезами (рис. 29.20, а, б). Следует отметить, что в первом случае эффективный коэффициент концентрации напряжений примерно на 20 % больше, чем во втором случае вследствие более плавного выхода дисковой фрезы и менее резкого изменения поперечного сечения вала. Шпоночные пазы в ступицах обычно протягивают шпоночной протяжкой или долбят резцом.

Форма и размеры большинства типов шпонок стандартизованы, а их применение зависит от условий работы соединяемых деталей и диаметров посадочных поверхностей. Шпоночные соединения подразделяют на напряженные и ненапряженные.

Напряженным называется такое шпоночное соединение, в котором постоянно действуют внутренние силы упругости, вызванные предварительной (т.е. до приложения нагрузки) затяжкой. Эти соединения осуществляются стандартными клиновыми (рис. 29.21) и тангенциальными (рис. 29.22) шпонками с уклоном 1 : 100, обеспечивающим самоторможение. Клиновые шпонки забивают в пазы, ширина которых больше ширины шпонки b , в результате чего возникают значительные радиальные распорные силы и напряженное

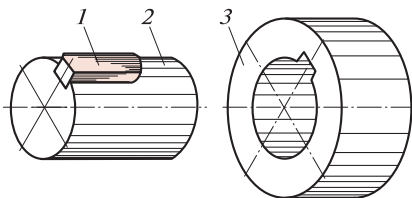


Рис. 29.19

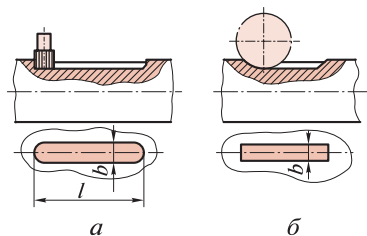


Рис. 29.20

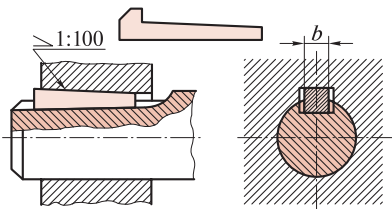


Рис. 29.21

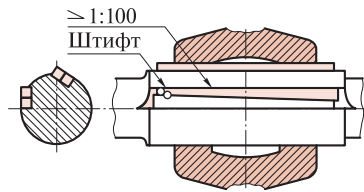


Рис. 29.22

соединение, способное передавать вращающие моменты и воспринимать осевые нагрузки в обоих направлениях. Согласно стандарту клиновые шпонки могут быть четырех исполнений: с головкой, без головки и без закруглений по концам, с закругленным одним или двумя концами. Соединения клиновыми шпонками применяют в тихоходных передачах, подверженных динамическим нагрузкам.

В соединениях тангенциальными (нормальными или усиленными) шпонками натяг создается не в радиальном, а в тангенциальном направлении, причем каждая шпонка выполняется из двух односкосных клиньев, положение которых после сборки должно быть зафиксировано с помощью штифта или другим способом. Тангенциальные шпонки применяют в тяжелом машиностроении, причем усиленные шпонки ставят при повышенных ударных нагрузках и частом изменении направления вращения. Обычно тангенциальные шпонки ставят попарно под углом 120° или 180° и ориентируют их в противоположном направлении, так как каждая шпонка передает вращающий момент только в одну сторону (см. рис. 29.22).

Напряженные шпоночные соединения обладают большой нагрузочной способностью, не требуют высокой точности пригонки, но, как правило, деформируют соединяемые детали, вызывают расцентровку, дисбаланс и неуравновешенность деталей, а при коротких ступицах — перекос их осей. Эти обстоятельства резко ограничивают область применения напряженных шпоночных соединений в современных машинах.

Ненапряженные шпоночные соединения осуществляются стандартными призматическими и сегментными или специальными шпонками. Подвижное соединение стандартной призматической направляющей шпонкой с креплением на валу показано на рис. 29.23, а (резбовое отверстие посередине предназначено для извлечения шпонки из паза вала с помощью винта). На рис. 29.23, б показано подвижное шпоночное соединение со специальными скользящими шпонками.

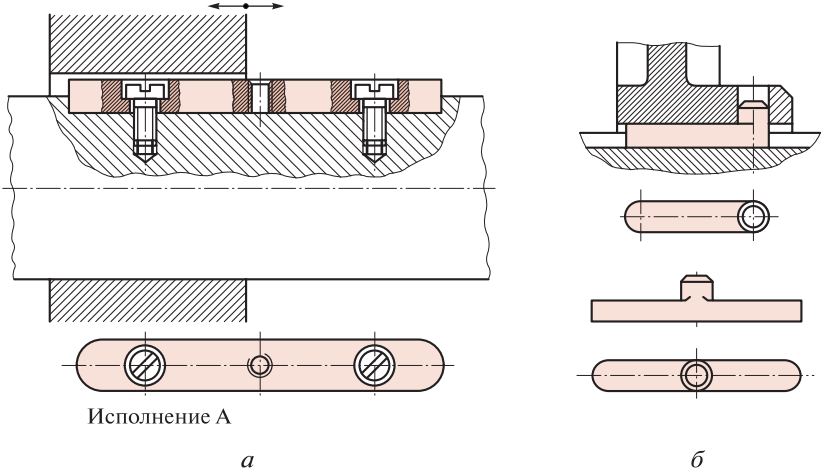


Рис. 29.23

Неподвижное соединение призматической шпонкой показано на рис. 29.24. Размеры, допуски и посадки призматических шпонок и пазов регламентированы ГОСТ 23360—78*. По форме торцов при-

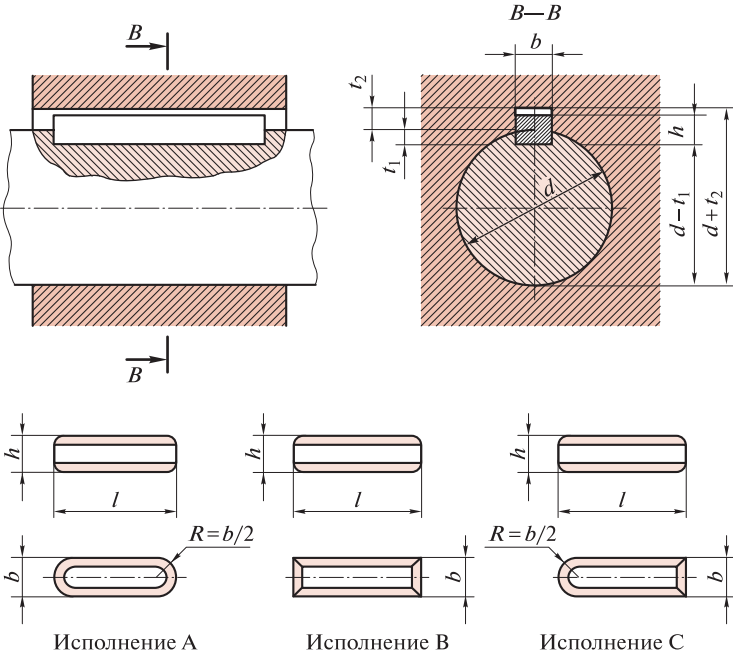


Рис. 29.24

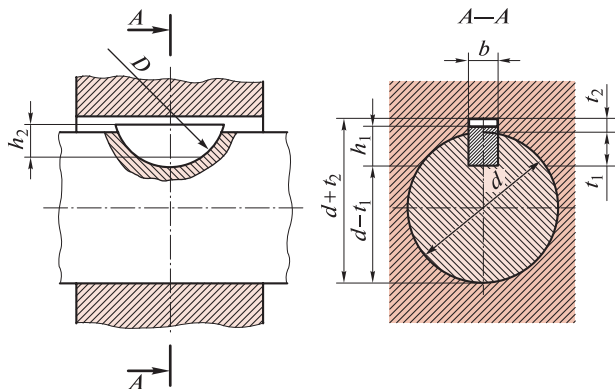


Рис. 29.25

зматические шпонки могут быть трех исполнений (см. рис. 29.24). Призматические шпонки обеспечивают передачу вращающего момента, но не могут воспринимать осевые нагрузки. Высокие призматические шпонки обладают повышенной нагрузочной способностью и применяются для ступиц из чугуна и других материалов более низкой прочности, чем материал вала. В зависимости от принятой базы обработки и измерения на рабочем чертеже должен указываться один размер для вала t_1 (предпочтительный вариант) или $d - t_1$, для втулки $d + t_2$.

Соединение сегментной шпонкой показано на рис. 29.25. Размеры сегментных шпонок и сечений пазов установлены ГОСТ 24071—97*, причем стандарт предусматривает шпонки двух исполнений: высотой h_1 (без лыски) и высотой h (с лыской). Сегментные шпоночные соединения технологичны, удобны при сборочных работах, но глубокий шпоночный паз значительно ослабляет вал, поэтому такие соединения применяют при передаче небольших вращающих моментов или для фиксации деталей на осях. В зависимости от принятой базы обработки и измерения на рабочем чертеже должен указываться один размер для вала t_1 (предпочтительный вариант) или $d - t_1$, для втулки $d + t_2$, где d — диаметр вала.

Расчет ненапряженных шпоночных соединений. Основными критериями работоспособности ненапряженных шпоночных соединений являются прочность шпонки на срез и прочность соединения на смятие. Расчеты на срез и смятие основаны на предположении, что соответствующие напряжения распределены по сечениям равномерно. Расчетная формула на срез шпонки (рис. 29.26) имеет вид

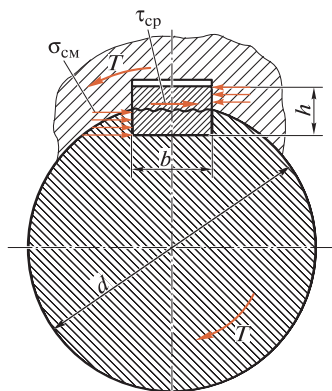


Рис. 29.26

$$\tau_{ср} = \frac{2T}{dA_{ср}} \leq [\tau_{ср}],$$

где T — вращающий момент; d — диаметр вала; $A_{ср}$ — площадь среза шпонки (плоскость возможного среза показана на рис. 29.26 волнистой линией).

Расчетная формула шпоночного соединения на смятие имеет вид

$$\sigma_{см} = \frac{2T}{dA_{см}} \leq [\sigma_{см}],$$

где $A_{см} = (h - t_1)l_p$; $(h - t_1)$ — высота площадки смятия; l_p — расчетная длина шпонки ($l_p = l - b$ для шпонок исполнения А, $l_p = l$ для шпонок исполнения В, $l_p = l - b/2$ для шпонок исполнения С, см. рис. 29.24); для сегментных шпонок приняты следующие обозначения: D — диаметр шпонки; d — диаметр вала (см. рис. 29.25), $l_p = l$.

Размеры стандартных призматических и сегментных шпонок установлены в зависимости от диаметра вала по условию прочности шпонки на срез, поэтому основным для таких соединений является проверочный расчет на смятие, а расчет на срез необходим лишь для нестандартных шпонок и особо ответственных конструкций. Если требуется определить длину призматической шпонки, то ее также определяют из расчета на смятие. Обычно длина призматической шпонки должна быть на 3... 10 мм меньше длины ступицы, насаженной на вал детали.

Материалы шпонок и допускаемые напряжения. Согласно действующим стандартам, шпонки должны изготавливаться из сталей с временным сопротивлением разрыву не менее 590 МПа. Сортамент чистотянутых среднеуглеродистых сталей для сегментных и призматических шпонок также регламентирован стандартом. Легированные стали применяют для специальных шпонок.

Допускаемые напряжения на смятие для неподвижных шпоночных соединений принимают в зависимости от предела текучести:

$$[\sigma_{см}] = \frac{\sigma_T}{[s]},$$

где допускаемый коэффициент запаса прочности $[s] = 1,9 \dots 2,3$ при постоянной нереверсивной нагрузке; $[s] = 2,9 \dots 3,5$ при переменной нереверсивной нагрузке; при реверсивной нагрузке значения $[s]$

увеличиваются на 30 %. При чугунных ступицах $[\sigma_{см}] = 70 \dots 100$ МПа. Для подвижных шпоночных соединений в целях предупреждения задира и ограничения износа допускаемые напряжения смятия уменьшают в 3–4 раза.

Допускаемые напряжения на срез для шпонок принимают в пределах $[\tau_{ср}] = 60 \dots 100$ МПа (меньшие значения берут при динамических нагрузках).

Пример 29.1. Подобрать призматическую шпонку для соединения стального зубчатого колеса с валом диаметром $d = 55$ мм, передающего вращающий момент $T = 600$ Н·м. Длина ступицы зубчатого колеса 70 мм. Нагрузка постоянная реверсивная.

Решение. Согласно стандарту на призматические шпонки по заданному диаметру вала берем шпонку с размерами: $b = 16$ мм, $h = 10$ мм, $t_1 = 6$ мм (исполнение А). Учитывая длину ступицы, из стандартного ряда выбираем длину шпонки $l = 63$ мм; расчетная длина $l_p = l - b = 63 - 16 = 47$ мм.

Принимая материал шпонки сталь 45 с пределом текучести $\sigma_T = 350$, а допускаемый коэффициент запаса прочности $[s] = 2,5$ (нагрузка постоянная реверсивная), определим допускаемое напряжение

$$[\sigma_{см}] = \frac{\sigma_T}{[s]} = \frac{350}{2,5} = 140 \text{ МПа.}$$

Проверяем соединение на смятие:

$$\begin{aligned} \sigma_{см} &= \frac{2T}{d(h-t_1)l_p} = \frac{2 \cdot 600}{55 \cdot 10^{-3}(10-6) \cdot 10^{-3} \cdot 47 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 116 \cdot 10^6 \text{ Па} = 116 \text{ МПа} \leq [\sigma_{см}] = 140 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Прочность шпоночного соединения обеспечена; если подсчитать напряжения среза, то

$$\tau_{ср} \approx 25 \text{ МПа} \leq [\tau_{ср}] = 60 \text{ МПа.}$$

29.4. ШЛИЦЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Шлицевым называется разъемное соединение составных частей изделия с применением пазов (шлицов) и выступов. Шлицевые соединения бывают подвижные и неподвижные. Детали шлицевого соединения (вал и втулка) показаны на рис. 29.27. Шлицевое соединение можно представлять как многошпоночное, у которого шпонки выполнены как единое целое с валом. Шлицевые соединения по сравнению со шпоночными обладают значительными *преимуществами*, а именно: меньшее число деталей в соединении,

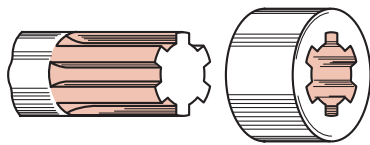


Рис. 29.27

значительно большая нагрузочная способность за счет большей площади контакта рабочих поверхностей вала и ступицы, меньшая концентрация напряжений в материале вала и ступицы, лучшее центрирование соединяемых деталей и более точное направление при осевом перемещении, высокая надежность при динамических и реверсивных нагрузках.

Эти преимущества обеспечили широкое распространение шлицевых соединений в автомобильной, тракторной, станкостроительной и других отраслях промышленности.

Эти преимущества обеспечили широкое распространение шлицевых соединений в автомобильной, тракторной, станкостроительной и других отраслях промышленности.

Недостатки шлицевых соединений — высокая трудоемкость и стоимость их изготовления.

Шлицы на валах чаще всего выполняют фрезерованием дисковой фасонной фрезой (методом деления), или червячной шлицевой фрезой на шлицефрезерном станке (методом обкатки); отделочные операции выполняют на шлицешлифовальных станках. Шлицевые отверстия в ступицах деталей обычно выполняют шлицевыми протяжками на протяжных станках.

Основные типы шлицевых соединений показаны на рис. 29.28: прямоугольное (а), эвольвентное (б), треугольное (в). Первые два типа шлицевых соединений стандартизованы.

Наибольшее распространение имеют соединения *шлицевые прямоугольные*, размеры и допуски которых регламентированы ГОСТ 1139—80*. Эти соединения применяют, например, для посадки подвижных и неподвижных зубчатых колес на валы в коробках передач металлорежущих станков. Стандарт предусматривает прямоугольные шлицевые соединения трех серий: легкой, средней (обе с числом зубьев от 6 до 10) и тяжелой (с числом зубьев от 10 до 20), отличающихся друг от друга высотой зубьев и, следовательно, нагрузочной способностью. Прямоугольные шлицевые соединения выполняют с *центрированием* (рис. 29.29): по боковым сторонам зу-

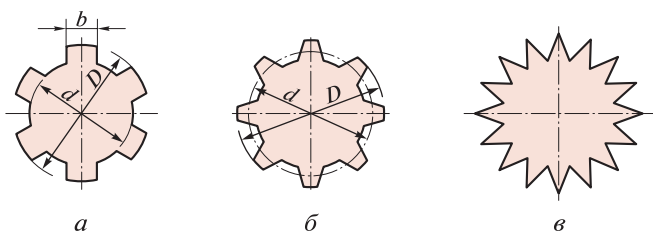


Рис. 29.28

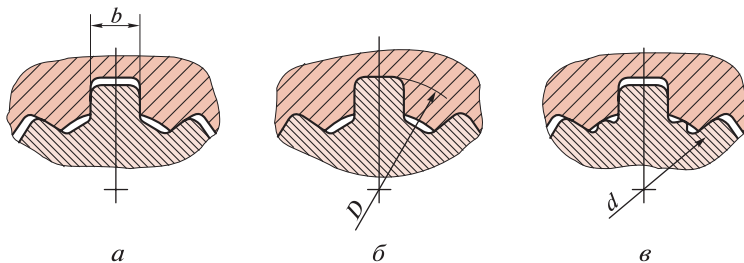


Рис. 29.29

бьев (*а*), по наружному диаметру (*б*), по внутреннему диаметру (*в*). Центрирование по боковым сторонам зубьев обеспечивает более равномерное распределение нагрузки между зубьями и поэтому его применяют при ударных и реверсивных нагрузках (например, в карданных валах); центрирование по наружному или внутреннему диаметрам обеспечивает более высокую соосность вала и ступицы. *Метод центрирования имеет прямое отношение к технологии изготовления деталей соединения*, причем наиболее технологично центрирование по наружному диаметру, применяемому при невысокой твердости внутренней поверхности ступицы ($H < 350$ НВ). В этом случае шлицевое отверстие обрабатывают протяжкой, а посадочную поверхность вала шлифуют.

При высокой твердости посадочной поверхности ступицы и вала рекомендуется центрирование по внутреннему диаметру. В этом случае после термообработки посадочные поверхности ступицы и вала шлифуют соответственно на внутришлифовальном и шлищшлифовальном станках.

Более совершенны, но пока менее распространены, *шлицевые эвольвентные* соединения с углом профиля 30° , размеры, допуски и измеряемые величины которых установлены стандартом. Эвольвентные шлицевые соединения по сравнению с прямобочными более технологичны, так как шлицевые валы можно нарезать червячными фрезами с прямолинейным профилем, а шлицевые ступицы большого размера нарезать долбяками на зубодолбежных станках. Кроме того, эвольвентные шлицевые соединения обладают большей нагрузочной способностью, так как их зубья утолщаются к основанию и имеют значительно (до двух раз) меньшую концентрацию напряжений за счет закруглений у основания зубьев.

Основные стандартные параметры эвольвентного соединения (рис. 29.28, *б*): номинальный диаметр D , угол профиля $\alpha = 30^\circ$, модуль m , диаметр делительной окружности $d = mz$, где z — чис-

ло зубьев. Стандарт предусматривает номинальные диаметры от 4 до 500 мм, модули от 0,5 до 10 мм и числа зубьев от 6 до 82.

Соединения с эвольвентными зубьями выполняют с центрированием по боковым поверхностям зубьев и реже по наружному диаметру; допускается применять центрирование по внутреннему диаметру. При центрировании по боковым поверхностям зубьев и при плоской форме дна впадины высота зубьев вала и втулки равна модулю, т.е. $h = H = m$, а рабочая высота профиля (с учетом зазоров и фасок) приблизительно равна $0,8m$. Эвольвентные зубья, как и прямобочные, можно применять в подвижных и неподвижных соединениях.

Соединения *шлицевые треугольные* не стандартизованы и применяются как неподвижные при тонкостенных ступицах, пустотелых валах, стесненных габаритных размерах деталей и сравнительно небольших вращающих моментах. Центрирование соединения выполняется по боковым поверхностям зубьев. Треугольные шлицевые соединения бывают цилиндрическими и коническими.

29.5. КЛИНОВЫЕ И ШТИФТОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Клиновым называется разъемное соединение составных частей изделия с применением детали, имеющей форму клина. Клиновые соединения подразделяют на *установочные* (рис. 29.30, а), предназначенные для регулирования и установки нужного взаимного положения деталей, и *силовые* (рис. 29.30, б, в), предназначенные для прочного скрепления деталей.

Клиновые соединения применяют, например, для регулирования положения подшипников валков прокатных станов, для соединения штока с ползуном в паровых машинах или насосах, соединения протяжек с патроном протяжного станка; рассмотренные ранее соединения клиновыми и тангенциальными шпонками также можно отнести к числу клиновых соединений.

Достоинства клиновых соединений: простота и надежность конструкции, возможность создания и восприятия больших усилий, быстрота сборки и разборки соединения. *Недостатки*: значительное ослабление сечений соединяемых деталей пазами под клинья, нетехнологичность этих пазов и концентрация напряжений, что существенно сократило область применения клиновых соединений в современных конструкциях.

Силовые клиновые соединения бывают *ненапряженные*, в которых нет напряжений до приложения внешней силы F (рис. 29.30, б),

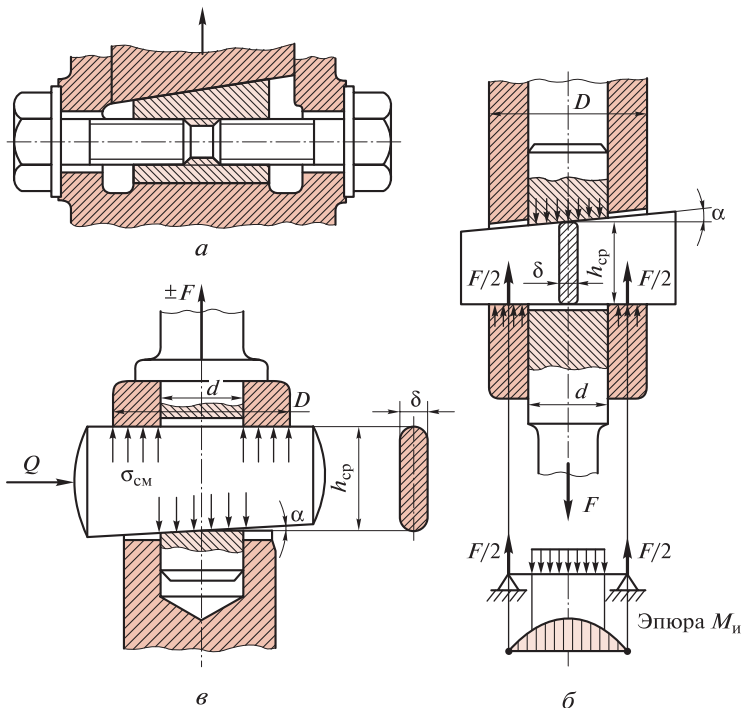


Рис. 29.30

и *напряженные*, в которых осуществляется предварительный натяг силой Q (рис. 29.30, в, где натяг осуществляется с помощью буртика на стержне). Ненапряженные соединения применяют при постоянных односторонних нагрузках, напряженные — при знакопеременных нагрузках. Для обеспечения самоторможения соединения необходимо, чтобы угол скоса клина был меньше удвоенного угла трения, т. е. $\alpha < 2\varphi$.

Критерием работоспособности клинового соединения является прочность. В клиновых соединениях рассчитывают стержень по ослабленному сечению и хвостовую часть стержня на срез, поверхность контакта клина со стержнем и втулкой на смятие и клин на изгиб; расчетная схема клина на изгиб показана на рис. 29.30, б.

Напряженное клиновое соединение рассчитывают так же, как и ненапряженное, но по расчетной нагрузке $F_p = 1,25F$.

Штифтовым называется соединение составных частей изделия с применением штифта. Штифтовые соединения применяют для фиксации взаимного положения деталей (рис. 29.31, а, б), при передаче сравнительно небольших вращающих моментов (рис. 29.31, в);

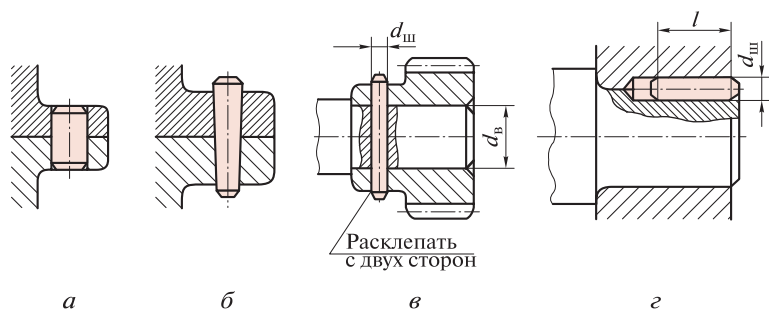


Рис. 29.31

для закрепления деталей на конце вала применяется соединение, где штифт выполняет роль круглой шпонки (рис. 29.31, г). В качестве распространенного примера можно привести фиксацию двумя штифтами взаимного положения корпуса и крышки редуктора, что необходимо при совместной механической обработке этих деталей и для сборки редуктора.

Достоинства штифтовых соединений: их простота, технологичность и низкая стоимость. **Недостаток** некоторых штифтовых соединений — ослабление сечения вала отверстием и связанная с этим концентрация напряжений.

Конструкция и размеры штифтов регламентированы многими стандартами. Основные типы стандартных штифтов представлены на рис. 29.32: конический гладкий (а), конический насеченный (б), цилиндрический гладкий (в), цилиндрический насеченный (г), пружинный (д). Кроме того, стандартизованы штифты цилиндрические

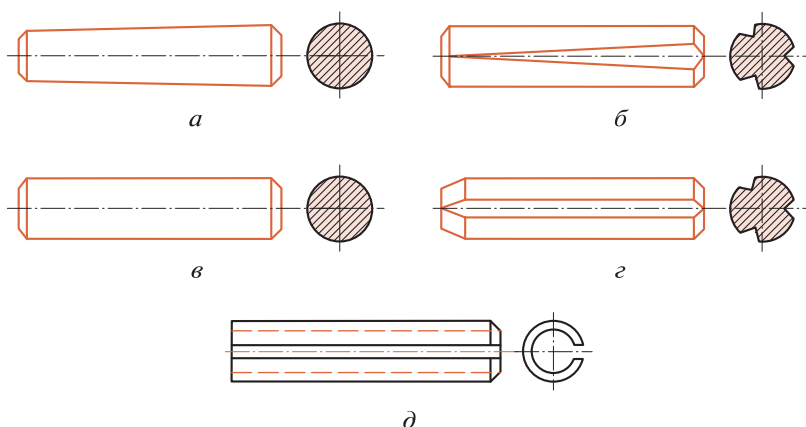


Рис. 29.32

насеченные с коническими насечками, штифты цилиндрические и конические с внутренней резьбой, штифты конические с резьбовой цапфой (резьба на штифтах служит либо для их закрепления, либо для извлечения из отверстия при разборке); стандартизованы также штифты конические разводные, штифты цилиндрические закаленные и штифты цилиндрические заклепочные (эти штифты с канавками имеют головки и их применяют вместо гвоздей или шурупов).

Гладкие конические и цилиндрические штифты чаще всего применяют в качестве установочных для фиксации взаимного положения соединяемых деталей; отверстия под штифты в этих деталях сверлят и разворачивают совместно. Цилиндрические штифты ставят в отверстия с натягом; в движущихся соединениях концы штифтов расклепывают. Конические штифты изготавливают с конусностью 1 : 50, обеспечивающей самоторможение; они допускают многократную сборку-разборку и поэтому применяются чаще.

Хорошо зарекомендовали себя в качестве крепежных насеченные штифты, так как они не требуют развертывания отверстий при установке, надежно сцепляются при забивании со стенками отверстия, допускают многократную сборку-разборку без заметного ухудшения сцепления.

Пружинные штифты вальцуют из ленты пружинной стали и закаливают. Ввиду большой податливости их можно устанавливать в грубо обработанные отверстия, причем обеспечивается надежное сцепление при вибрационных и ударных нагрузках, допускаются многократные разборка и сборка.

Штифты обычно изготавливают из углеродистой или пружинной стали, для соединения пластмассовых деталей применяют штифты из пластмасс.

Критерием работоспособности крепежного штифтового соединения является прочность. В соединении (см. рис. 29.31, в) диаметр $d_{ш}$ штифта можно определить из расчета его на срез по двум поперечным сечениям; в соединении, показанном на рис. 29.31, г, диаметр $d_{ш}$ и длина l круглой шпонки определяются из расчета на срез по диаметральному сечению (один из размеров задается, например, $d_{ш} = 0,25d_v$, где d_v — диаметр вала), а затем проверяют соединение на смятие, причем условная площадь смятия равна половине площади диаметрального сечения круглой шпонки.

Насеченные штифты рассчитывают так же, как и гладкие, но с коэффициентом ослабления, равным 1,3... 1,5.

Глава 30

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧАХ

Для увеличения производительности и облегчения физического и умственного труда человека создаются *машины* — механические устройства, выполняющие движения для преобразования энергии, материалов или информации. Всякая машина состоит из одного или нескольких *механизмов* — системы тел, служащих для преобразования движений. Работа машин обязательно сопровождается тем или иным движением ее органов и в этом заключается основное отличие машин от *сооружений* — мостов, зданий и т. д. Устройства, предназначенные для измерений, производственного контроля, управления машинами, регулирования технологических процессов, учета и других функций, называются *приборами*. Приборы также состоят из механизмов.

Для приведения в движение рабочих машин им передается механическая энергия от машин-двигателей. В подавляющем большинстве случаев двигатели и исполнительные органы рабочих машин связываются не непосредственно, а с помощью механизмов, называемых *передачами*, которые бывают механические, гидравлические, пневматические и электрические. В дальнейшем мы будем заниматься только механическими передачами.

В технике наиболее распространено вращательное движение, поэтому передачи для преобразования этого движения применяются весьма широко. *Преобразование скорости вращательного движения сопровождается изменением вращающего момента*. Механизм, предназначенный для передачи энергии от двигателя к ее потребителю с увеличением вращающих моментов за счет уменьшения частоты вращения, называется *силовой передачей*, или *трансмиссией*.

Классификация и основные характеристики передач. В самом общем виде передачи можно классифицировать по способу передачи движения: *передачи трением* (фрикционные, ременные); *передачи зацеплением* (зубчатые, червячные, цепные, винт — гай-

ка); по способу соединения звеньев: *передачи с непосредственным контактом* (фрикционные, зубчатые, червячные, винт — гайка); *передачи гибкой связью* (ременные, цепные).

Звено передачи, которое получает движение от машины-двигателя, называется *ведущим*; звено, которому передается движение, называется *ведомым*; кроме того, в передачах бывают *промежуточные* звенья.

На рис. 30.1 схематически изображены передача гибкой связью (а) и передача с непосредственным контактом (б), причем индексом 1 обозначены параметры, относящиеся к ведущему звену, а индексом 2 — к ведомому. Обратим внимание на то, что в первой из изображенных передач направление вращения ведущего и ведомого звеньев совпадают, а во второй — изменяется на противоположное.

Основные характеристики передачи: передаточное число, передаваемая мощность и КПД.

Передаточным отношением называется отношение угловой скорости ведущего звена к угловой скорости ведомого звена. Передаточное отношение может быть больше, меньше или равно единице.

Передаточным числом передачи называется отношение большей угловой скорости к меньшей. *Передаточное число не может быть меньше единицы.*

В целях унификации обозначений передаточные отношения и передаточные числа всех передач будем обозначать u , при необходимости с двойным индексом, соответствующим индексам звеньев передачи. Итак, передаточное отношение

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Отметим, что в расчетные формулы на прочность деталей машин всегда входят передаточные числа, т. е. $u \geq 1$.

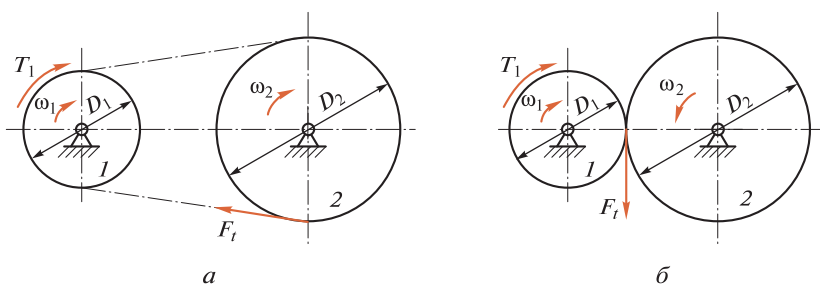


Рис. 30.1

Передачи, у которых угловая скорость ведомого звена меньше угловой скорости ведущего, называются *понижающими*, или *редукторами*; в противном случае передачи называются *повышающими*.

Механические передачи бывают *одноступенчатыми* и *многоступенчатыми*. *Передачное отношение ряда последовательно соединенных передач равно произведению их передаточных отношений*. Например, для двухступенчатого редуктора

$$u_{14} = u_{12}u_{34}.$$

Передачи выполняют либо с *постоянным*, либо с *переменным* передаточным отношением, причем изменение передаточного отношения может быть ступенчатым или бесступенчатым. Ступенчатое регулирование передаточного отношения осуществляется, например, коробками скоростей металлорежущих станков, автомобилей, тракторов. Механизм для плавного изменения передаточного отношения называется бесступенчатой передачей, или *вариатором*.

На рис. 30.1 показаны две передачи, в которых к ведущему звену 1 приложен вращающий момент T_1 , с помощью гибкой связи или непосредственно передающий ведомому звену 2 окружную силу F_t . Очевидно, что для любого звена вращающий момент и окружная сила связаны зависимостью

$$T = \frac{F_t D}{2},$$

откуда окружная сила

$$F_t = \frac{2T}{D}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, окружные силы ведущего и ведомого звеньев равны (но противоположно направлены), следовательно, *вращающие моменты на ведущем и ведомом валах будут различны и пропорциональны диаметрам соответствующих звеньев*.

Из теоретической механики известно, что мощность P при вращательном движении $P = T\omega$.

Отношение мощности P_2 на ведомом валу передачи к мощности P_1 на ведущем валу называется *механическим коэффициентом полезного действия* (КПД) и обозначается

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}.$$

Механический КПД характеризует механические потери в передаче; для различных передач КПД находится в пределах от 0,25 до 0,98.

В многоступенчатых передачах (при последовательном соединении ступеней) общий КПД определяется как произведение КПД каждой ступени в отдельности

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n.$$

Иногда КПД передачи определяют как произведение КПД отдельных элементов этой передачи. Например, для одноступенчатого зубчатого редуктора общий КПД

$$\eta = \eta_z \eta_{\text{п}}^2 \eta_{\text{р}},$$

где η_z , $\eta_{\text{п}}$, $\eta_{\text{р}}$ — коэффициенты, характеризующие потери энергии соответственно в зацеплении колес, в одной паре подшипников, на перемешивание и разбрызгивание масла в корпусе редуктора.

Так как $P_2 = \eta P_1$, то $T_2 \omega_2 = \eta T_1 \omega_1$, откуда

$$T_2 = \eta T_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} = \eta T_1 u.$$

Если потери в передаче невелики, то ими пренебрегают и принимают

$$T_2 = T_1 u.$$

Предельное состояние передачи, при котором становится возможной потеря ее работоспособности, называется *нагрузочной способностью*. Понятие запаса нагрузочной способности включает в себя понятие запаса прочности.

Глава 31

ФРИКЦИОННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

31.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Фрикционной передачей называется механизм, служащий для передачи вращательного движения от одного вала к другому с помощью сил трения, возникающих между насаженными на валы и прижатыми друг к другу дисками, цилиндрами или конусами.

Фрикционные передачи можно классифицировать по нескольким признакам:

по *расположению осей валов* (с параллельными осями, с пересекающимися осями и соосные); по *форме тел качения* (с гладкими цилиндрическими катками, рис. 31.1, *а*; катками с клинчатым ободом, рис. 31.1, *б*; с коническими катками, торовые, сферические и др.); по *условиям работы* (открытые — работающие всухую и закрытые — работающие в масляной ванне);

по *возможности регулирования* передаточного числа (с условно постоянным передаточным числом, с бесступенчатым регулированием передаточного числа — фрикционные вариаторы).

Достоинства фрикционных передач: простота конструкции, плавность и бесшумность работы, возможность безаварийной ситуации при случайной перегрузке, возможность плавного изменения передаточного числа на ходу машины. Главный *недостаток* фрикционных передач — значительная радиальная нагрузка на опоры

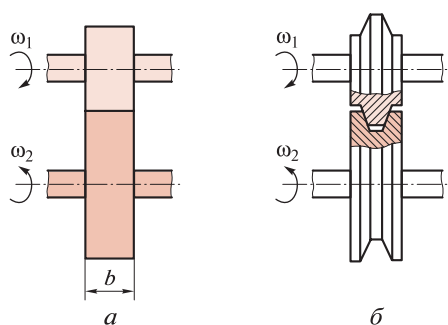


Рис. 31.1

валов, которая может до 35 раз превышать передаваемую окружную силу. Кроме того, фрикционные передачи не обеспечивают строгого постоянства передаточного числа при изменении нагрузки и имеют сравнительно невысокий КПД.

Фрикционные передачи находят применение в кузнечно-прессовом оборудовании (фрикционные прессы, фрикционные молоты), металлорежущих станках, транспортирующих машинах (например, лебедки с фрикционным приводом); в приборах и т.д. Наибольшее применение в машиностроении имеют фрикционные вариаторы. Принцип фрикционной передачи является основой технологического процесса в прокатных станах, основной работы рельсового и безрельсового колесного транспорта, однако эти вопросы являются предметом изучения в специальных дисциплинах.

Виды скольжения. Ранее было установлено, что при передаче вращающего момента за счет силы трения, возникающей на площадке контакта прижатых друг к другу катков, неизбежно возникает относительное проскальзывание их рабочих поверхностей, причем рабочая поверхность ведущего катка является *опережающей*, а рабочая поверхность ведомого катка — *отстающей*. Степень этого проскальзывания зависит от передаваемой окружной силы, упругих свойств материала катков и поэтому называется *упругим скольжением*, сопутствующим работе фрикционной передачи с катками любой формы.

При перегрузках, когда сила трения на площадке контакта катков оказывается меньше окружной силы, ведомый каток останавливается, ведущий каток скользит по нему и наступает *буксование*, приводящее к интенсивному местному износу ведомого катка. Скольжение является причиной износа, снижения КПД и непостоянства передаточного числа фрикционных передач.

Материалы тел качения фрикционных передач должны обладать высокой износостойкостью и прочностью рабочих поверхностей, возможно большим коэффициентом трения скольжения, высоким модулем упругости (для уменьшения упругого скольжения). Максимальную нагрузочную способность имеют катки из закаленной стали типа ШХ15, которые могут работать в масляной ванне и всухую. Применяются в силовых передачах также чугунные катки и сочетания текстолитовых и стальных или чугунных катков. Кроме того, для изготовления катков или их облицовки (для повышения коэффициента трения) применяют кожу, резину, прорезиненную ткань, дерево, фибру и другие материалы. Катки из неметаллических материалов работают всухую. При разных материалах тел качения *ведущий каток делают из менее прочного материала* во избежание образования задиров и лысок в случае буксования передачи.

31.2. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ФРИКЦИОННАЯ ПЕРЕДАЧА

Кинематика передачи. Схемы цилиндрической фрикционной передачи с гладкими катками представлены на рис. 31.1, а и 31.2. В результате неизбежного при работе фрикционных передач упругого скольжения ведомый каток отстает от ведущего и точное значение передаточного числа будет определяться по формуле

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2}{D_1(1 - \varepsilon)},$$

где ε — коэффициент скольжения (для металлических катков $\varepsilon = 0,01 \dots 0,03$, большие значения относятся к передачам, работающим всухую; для текстолитового катка $\varepsilon \approx 0,1$).

Наличие упругого скольжения и некоторая его зависимость от колебаний нагрузки и условий работы передачи вынуждают называть передаточное число фрикционной передачи *условно постоянным*. Для практических расчетов силовых фрикционных передач пользуются приближенным значением передаточного числа $u \approx D_2/D_1$.

Для одной пары катков силовых передач $u \leq 7$, для передач приборов $u \leq 25$.

Силовые соотношения в передаче (рис. 31.2). Для передачи от одного вала к другому вращающего момента необходимо за счет силы трения приложить к ведомому катку окружную силу

$$F_t = \frac{2T_1}{D_1},$$

которая должна быть *меньше наибольшей силы трения покоя*, возникающей между катками, прижатыми друг к другу силой Q . Таким образом, условие работы фрикционной передачи записывается так:

$$kF_t = F_{тр} = fQ,$$

где k — коэффициент запаса сцепления ($k = 1,3 \dots 1,4$); f — коэффициент трения (для стальных или чугунных катков, работающих в масляной ванне $f = 0,04 \dots 0,05$; работающих всухую $f = 0,15 \dots 0,20$; для передач с одним неметаллическим катком $f = 0,2 \dots 0,3$).

Из вышеприведенной формулы определим силу *прижатия катков*:

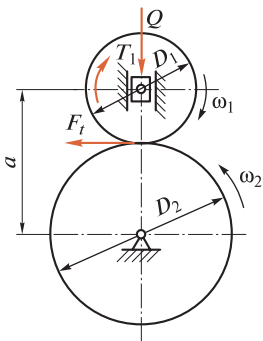


Рис. 31.2

$$Q = \frac{kF_t}{f} = \frac{2kT_1}{fD_1}.$$

Из этой формулы видно, что сила прижатия катков больше окружной силы в k/f раз, что при $k = 1,4, f = 0,04$ дает $k/f = 1,4/0,04 = 35$ раз. Большие силы прижатия катков создают значительные радиальные нагрузки на опоры валов и вызывают появление больших контактных напряжений на рабочих поверхностях катков, что делает силовые фрикционные передачи громоздкими, а их нагрузочную способность сравнительно невысокой.

Для уменьшения в несколько раз силы прижатия применяют катки с клинчатым ободом (см. рис. 31.1, б), трение в которых аналогично трению в клинчатом ползуне, рассмотренному в теоретической механике. Однако в таких катках возникает значительное геометрическое скольжение, существенно уменьшающее срок их службы.

Коэффициент полезного действия фрикционных передач в основном определяется потерями в результате относительного скольжения катков и потерями в опорах валов. Экспериментально установлено, что для закрытых передач КПД $\eta = 0,92 \dots 0,98$, для открытых $\eta = 0,8 \dots 0,92$.

Окружная скорость катков открытых силовых передач не должна быть больше 10 м/с, а для закрытых передач — 20 м/с.

Расчет передачи. *Критерий работоспособности фрикционных передач — износостойкость рабочих поверхностей тел качения.* В процессе работы на поверхности тел качения возникают циклически изменяющиеся контактные напряжения (рис. 31.3), которые вызывают *усталостное изнашивание* рабочих поверхностей катков.

Для катков, изготовленных из материалов, подчиняющихся закону Гука (металлы и текстолит), наибольшие контактные напряжения σ_H вычисляются по формуле Герца, известной из сопротивления материалов:

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{qE_{np}}{2\pi(1-\nu^2)\rho_{np}}},$$

где $q = Q/b$ — номинальная нагрузка на единицу длины контактной линии, b — ширина катков; $E_{np} = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2}$ —

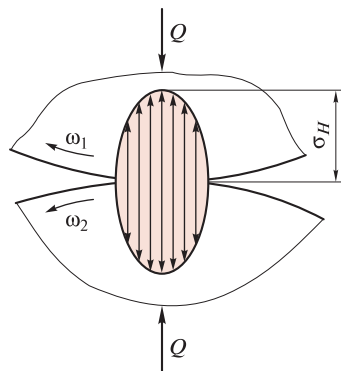


Рис. 31.3

приведенный модуль упругости материалов катков; $\rho_{пр} = \frac{0,5D_1D_2}{D_1 + D_2}$ — приведенный радиус кривизны катков; ν — коэффициент Пуассона материала катков. При $\nu = 0,3$

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{qE_{пр}}{\rho_{пр}}}.$$

31.3. ФРИКЦИОННЫЕ ВАРИАТОРЫ

Вариатором, или *бесступенчатой передачей*, называется механизм для плавного изменения передаточного отношения.

В машиностроении фрикционные вариаторы используют в силовых приводах, мощность которых колеблется от небольших величин до десятков и даже сотен киловатт. Вариаторы бывают одно- и двухступенчатые.

Основной кинематической характеристикой любого вариатора является *диапазон регулирования* D , равный максимальному передаточному отношению, деленному на минимальное:

$$D = u_{\max}/u_{\min}.$$

Для одноступенчатых вариаторов преимущественные значения $D = 3 \dots 6$. С увеличением диапазона регулирования снижается КПД вариатора.

На рис. 31.4 изображена схема *лобового вариатора*, в котором оси взаимно-перпендикулярны, а изменение скорости ведомого вала происходит за счет осевого перемещения ролика. Лобовой вариатор допускает реверсивные вращения ведомого вала при одностороннем вращении ведущего. Ведущим звеном в лобовой передаче может быть либо ролик, либо работающий торцом диск.

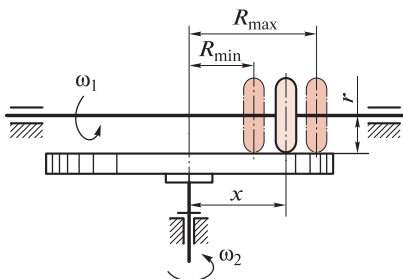


Рис. 31.4

Передаточное число лобового вариатора $u = \omega_1/\omega_2 = x/r$, диапазон регулирования $D = u_{\max}/u_{\min} = R_{\max}/R_{\min}$.

Для уменьшения геометрического скольжения, которое приводит к интенсивному износу и снижению КПД, рабочую поверхность ролика делают выпуклой, но при этом уменьшается

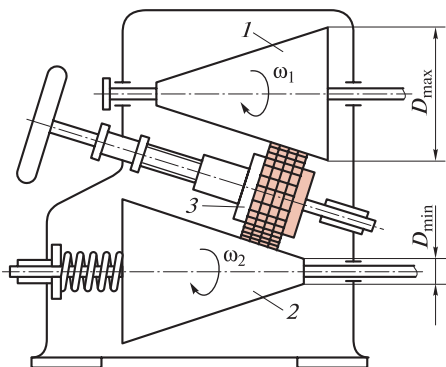


Рис. 31.5

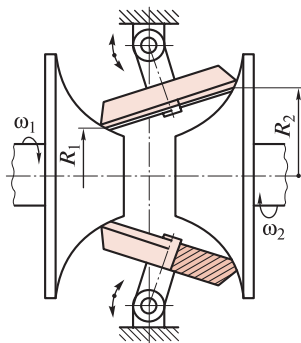


Рис. 31.6

площадка контакта и, следовательно, увеличиваются контактные напряжения.

На рис. 31.5 представлена схема *двухконусного вариатора* с параллельными осями. Изменение передаточного отношения происходит за счет перемещения с помощью винтового механизма промежуточного цилиндрического катка 3, зажатого между рабочими поверхностями конических катков 1 и 2.

Так как $u_{\max} = D_{\max}/D_{\min}$, а $u_{\min} = D_{\min}/D_{\max}$, то диапазон регулирования $D = u_{\max}/u_{\min} = D_{\max}^2/D_{\min}^2$.

Одними из наиболее совершенных являются *торовые вариаторы*, которые могут работать всухую и в масляной ванне. На рис. 31.6 изображена схема соосного торового вариатора (конструкция В.А. Светозарова). Вариатор состоит из двух соосных катков с тороидной рабочей поверхностью и двух промежуточных роликов, наклон осей которых может одновременно изменяться, за счет чего достигается изменение передаточного отношения. Диапазон регулирования торовых вариаторов

$$D = R_{\max}^2/R_{\min}^2 = 3 \dots 6,25.$$

Торовые вариаторы отличаются малым геометрическим скольжением и высоким КПД до 0,95. Торовые вариаторы нормализованы для мощностей от 1,5 до 20 кВт.

Кроме описанных существует много других конструкций фрикционных вариаторов, например шаровые, многодисковые, с раздвижными конусами и др.

Расчет фрикционных пар вариаторов выполняется подобно расчету фрикционных передач с постоянным передаточным отношением.

32.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Ременной передачей называется механизм, служащий для преобразования вращательного движения при помощи шкивов, закрепленных на валах, и бесконечной гибкой связи — *приводного ремня*, охватывающего шкивы (рис. 32.1, а).

Ременные передачи применяются почти во всех отраслях машиностроения и являются одним из старейших видов механических передач. В большинстве случаев ременные передачи выполняют как *понижающие*.

Достоинства ременных передач: простота конструкции и эксплуатации; плавность и бесшумность работы, обусловленные значительной податливостью приводного ремня; возможность пере-

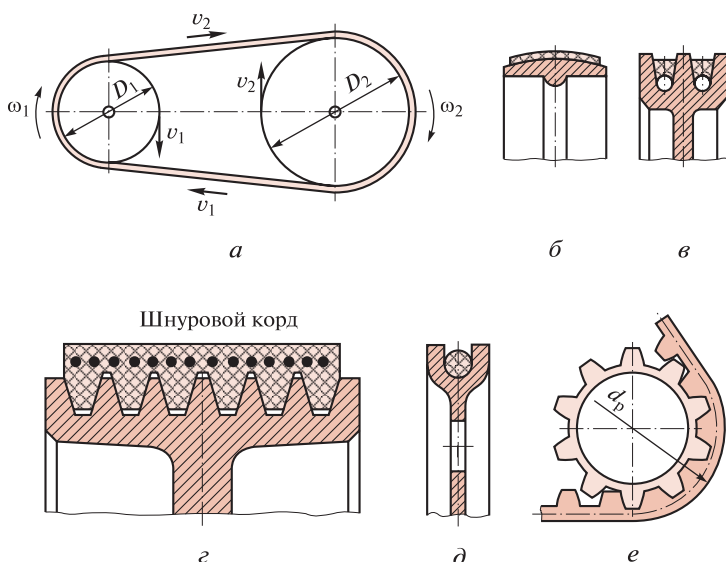


Рис. 32.1

дачи вращения валам, удаленным на большие расстояния (до 15 м и более); невысокая стоимость. *Недостатки*: малая долговечность приводных ремней; сравнительно большие габаритные размеры; высокие нагрузки на валы и их опоры; непостоянство передаточного числа большинства ременных передач.

Вышеуказанные достоинства и недостатки делают целесообразным применение ременной передачи на быстроходных ступенях сложных передач; наиболее характерной является установка ведущего шкива на валу электродвигателя. Мощность современных ременных передач редко превышает 50 кВт, так как при больших мощностях они получаются слишком громоздкими.

В зависимости от профиля сечения ремня передачи можно классифицировать следующим образом (рис. 32.1): *б* — *плоскоременная*; *в* — *клиноременная*; *г* — *поликлиноременная*; *д* — *круглоременная*; *е* — *зубчато-ремennая*; первые четыре являются *передачами трением*, последняя — *передача зацеплением*.

В современном машиностроении наибольшее применение имеют клиноременные передачи; увеличивается применение поликлинновых и зубчатых ремней, а также плоских ремней из синтетических материалов, обладающих высокой статической прочностью и долговечностью. Круглоременные передачи применяют при небольших мощностях, например, в приборах, настольных станках, машинах домашнего обихода и т. п.

Кинематика ременных передач. Передаточное отношение u всех передач, в том числе и ременных, определяется по формуле

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

где ω_1 , n_1 и ω_2 , n_2 — угловая скорость и частота вращения соответственно ведущего и ведомого шкивов.

Ветвь ремня, набегающая на ведущий шкив, называется *ведущей*, а сбегаящая — *ведомой* (рис. 32.1, а).

Окружные скорости ведущего и ведомого шкивов определяют по формулам

$$v_1 = \frac{\omega_1 D_1}{2} = \frac{\pi D_1 n_1}{60}; \quad v_2 = \frac{\omega_2 D_2}{2} = \frac{\pi D_2 n_2}{60},$$

где D_1 , D_2 — диаметры этих шкивов.

Дуга обода шкива, на которой он соприкасается с ремнем, называется *дугой обхвата*, а соответствующий ей центральный угол называется *углом обхвата* и обозначается α (рис. 32.2). Очевидно, что при передаче мощности с помощью ременной передачи ведущая

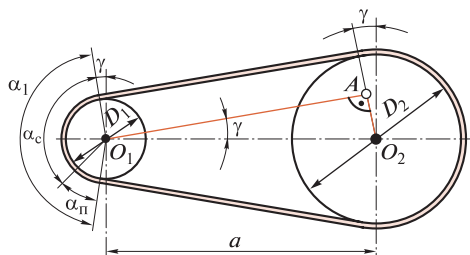


Рис. 32.2

ветвь ремня имеет большее натяжение. При перемещении ремня вместе с ободом ведущего шкива на дуге обхвата каждый элемент ремня перейдет из зоны большего в зону меньшего натяжения, в результате чего элементы ремня укорачиваются и он несколько отстает от шкива. На ведомом шкиве, наоборот, ремень несколько опережает шкив. В результате скорость v_1 ведущей ветви ремня и окружная скорость ведущего шкива оказывается больше скорости v_2 ведомой ветви ремня и окружной скорости ведомого шкива, т. е. $v_1 > v_2$.

Явление потери скорости ремня при огибании ведущего шкива является результатом *упругого скольжения, неизбежного при работе передач трением*. С упругим скольжением мы уже сталкивались при изучении фрикционных передач.

Как показали экспериментальные исследования, упругое скольжение происходит не на всей дуге обхвата, поэтому угол обхвата $\alpha = \alpha_n + \alpha_c$, где α_n — угол, соответствующий дуге относительного покоя, а α_c — угол, соответствующий дуге упругого скольжения (рис. 32.2). С ростом передаваемой нагрузки величина дуги покоя уменьшается.

Упругое скольжение не следует смешивать с буксованием передачи, когда происходит скольжение по всей дуге обхвата и передача мощности прекращается.

Упругое скольжение ремня и относительная потеря скорости характеризуются *коэффициентом скольжения* $\varepsilon = (v_1 - v_2)/v_1$, откуда $v_2 = v_1 (1 - \varepsilon)$.

Коэффициент скольжения может быть безразмерным числом ($\varepsilon = 0,01 \dots 0,02$) или выражаться в процентах.

Таким образом, передаточное отношение ременной передачи трением равно

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2v_1/D_1}{2v_2/D_2} = \frac{D_2}{D_1(1-\varepsilon)}.$$

Коэффициент скольжения зависит от передаваемой нагрузки, следовательно, *передаточное отношение ременной передачи тре-*

нием не является строго постоянной величиной. Приближенно можно принимать

$$u \approx \frac{D_2}{D_1}.$$

Ввиду отсутствия упругого скольжения зубчато-ременные передачи обеспечивают постоянство передаточного отношения, вычисляемого по формуле

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

где z_1, z_2 — числа зубьев ведущего и ведомого шкивов.

Геометрия ременных передач. На рис. 32.2 изображена схема открытой ременной передачи с бесконечным ремнем. Расчетная длина ремня L_p такой передачи в зависимости от межосевого расстояния a и диаметров шкивов D_1 и D_2 определяется по формуле

$$L_p = 2a + \frac{\pi(D_1 + D_2)}{2} + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a}.$$

Вычисленную расчетную длину бесконечных ремней (клиновых, поликлиновых, быстроходных плоских, зубчатых) округляют до ближайшего стандартного значения, после чего определяют окончательное межосевое расстояние по формуле

$$a = 0,25 \left[(L - w) + \sqrt{(L - w)^2 - 8y} \right],$$

где

$$w = \frac{\pi(D_1 + D_2)}{2}; \quad y = \frac{(D_2 - D_1)^2}{4}.$$

Угол обхвата α на малом шкиве для открытых передач равен

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - \frac{D_2 - D_1}{a} \frac{180^\circ}{\pi} = \\ &= 180^\circ - \frac{D_2 - D_1}{a} 57^\circ. \end{aligned}$$

Угол между ветвями ремня

$$2\gamma = 180^\circ - \alpha.$$

При конструировании открытых ременных передач следует учитывать, что угол обхвата на малом шкиве уменьшается с увеличением передаточного числа и уменьшением межосевого расстояния, поэтому в практике расчетов вводят ограничения для значения α, a, u .

Для плоскоременных передач:

$$[\alpha] \geq 150^\circ, a \geq 2(D_1 + D_2), u \leq 5;$$

для клиноременных передач:

$$[\alpha] \geq 90^\circ, a \geq 0,55(d_1 + d_2) + h$$

(h — высота сечения ремня; по действующим стандартам диаметры шкивов плоскоременных передач обозначаются D , а других ременных передач — d), $u \leq 10$.

Кроме того, необходимо учитывать, что у горизонтальных и наклонных открытых передач на величину угла обхвата влияет провисание ремня. Поэтому следует *ведомую ветвь располагать выше ведущей*, так как первая вследствие меньшего натяжения провисает больше и угол обхвата на шкивах увеличивается, что благоприятно сказывается на работе передачи.

Силы и напряжения в ремнях. Для передачи окружной силы $F_t = 2T/D$ между ремнем и шкивом за счет *предварительного натяжения* F_0 ремней создается сила трения $F_{тр}$ (рис. 32.3). Из условия равновесия ремня при передаче вращающего момента T можно записать равенство

$$F_t = F_{тр} = F_1 - F_2, \tag{32.1}$$

где F_1, F_2 — натяжения ведущей и ведомой ветвей.

Соотношение натяжений ведущей и ведомой ветвей при работе передачи на границе буксования определяют по уравнению Л. Эйлера, выведенному для нерастяжимой нити, перекинутой через цилиндры (без учета центробежных сил):

$$F_1 = F_2 e^{f\alpha},$$

где e — основание натурального логарифма; f — коэффициент трения; α — угол обхвата. Из этой формулы видно, что нагрузочная способность ременной передачи возрастает с увеличением f и α .

Так как геометрическая длина ремня от нагрузки не зависит, то можно записать равенство суммарных натяжений ветвей в нагруженной и ненагруженной передаче:

$$F_1 + F_2 = 2F_0, \tag{32.2}$$

Из равенств (32.1) и (32.2) следует:

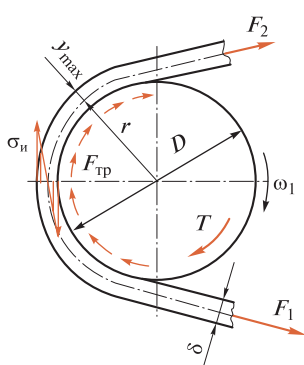


Рис. 32.3

$$F_1 = F_0 + \frac{F_t}{2}; \quad F_2 = F_0 - \frac{F_t}{2}.$$

Нагрузочная способность ремней передачи понижается в результате действия центробежных сил, которые уменьшают силы нормального давления ремня на шкив и, следовательно, понижают максимальную силу трения, одновременно увеличивая натяжение ветвей.

Предварительное напряжение σ_0 в ремне от предварительного натяжения F_0 равно $\sigma_0 = F_0/A$, где A — площадь поперечного сечения ремня.

Отношение окружной силы F_t к площади поперечного сечения ремня называется *полезным напряжением*, обозначаемым k :

$$k = \frac{F_t}{A}.$$

Напряжения σ_1 и σ_2 в ветвях ремня от рабочей нагрузки равны

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{k}{2}; \quad \sigma_2 = \sigma_0 - \frac{k}{2}.$$

Напряжение в ремне от действия центробежных сил определяется по известной из сопротивления материалов формуле для напряжений в тонком вращающемся кольце, а именно: $\sigma_v = \rho v^2$, где ρ — плотность материала ремня; v — окружная скорость шкива. Влияние центробежных сил на работоспособность передачи существенно сказывается при больших скоростях ($v > 25$ м/с).

Кроме вышеуказанных напряжений в ремне при огибании шкивов возникают *напряжения изгиба* $\sigma_{и}$ (см. рис. 32.3). Полагая, что для материала ремня справедлив закон Гука, можем записать известную из сопротивления материалов закономерность:

$$\sigma_{и} = E\varepsilon = \frac{E y_{\max}}{r} = \frac{E\delta/2}{D/2 + \delta/2} \approx \frac{E\delta}{D}.$$

Так как толщина ремня δ мала по сравнению с диаметром шкива D , то в знаменателе величиной $\delta/2$ пренебрегаем.

Здесь E — модуль упругости материала ремня; ε — относительное удлинение ремня; r — радиус кривизны нейтрального слоя ремня; y_{\max} — расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленного волокна. Эпюра напряжений изгиба показана на рис. 32.4.

Как видно из последней формулы, основным фактором, определяющим значение напряжений изгиба, является отношение толщины ремня к диаметру шкива. Напряжения изгиба обратно пропорциональны диаметру шкива, поэтому они будут иметь большее значение при огибании ремнем малого шкива.

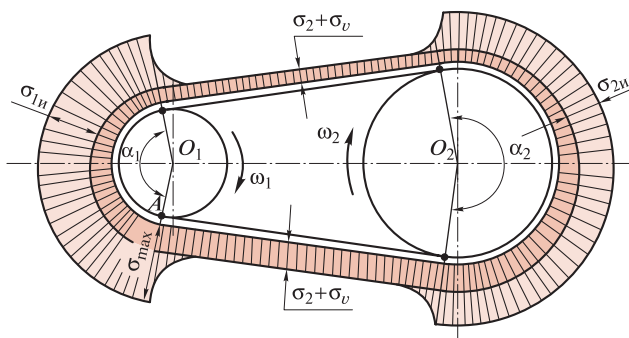


Рис. 32.4

Максимальные напряжения в ремне равны $\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_\nu + \sigma_{1и}$; они возникают в месте набегания ремня на ведущий шкив (см. точку A на рис. 32.4, где показана эпюра напряжений в ремне при работе передачи).

В ременных передачах потери энергии происходят из-за упругого скольжения ремня по шкивам, внутреннего трения в ремне при его изгибе, сопротивления воздуха и трения в опорах валов. Ориентировочные значения КПД ременных передач $\eta = 0,87 \dots 0,98$, причем КПД клиноременных передач меньше, чем плоскоременных.

Критерии работоспособности ременных передач. Основными критериями работоспособности передач трением являются тяговая способность передачи и долговечность ремня. Критериями работоспособности зубчато-ременной передачи являются прочность ремня и его долговечность.

Тяговой способностью ременной передачи называется ее способность передавать заданную нагрузку без частичного или полного буксования.

Основным методом расчета ременных передач трением является расчет передачи по тяговой способности, обеспечивающий высокий КПД передачи при достаточной долговечности ремней.

Тяговая способность ременной передачи характеризуется экспериментальными кривыми относительного скольжения ε (%), совмещенными с кривыми КПД η (%), в зависимости от степени загрузки передачи (рис. 32.5). Последняя характеризуется *коэффициентом тяги* φ , откладываемым по оси абсцисс и равным

$$\varphi = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} = \frac{F_t}{2F_0},$$

откуда окружная сила

$$F_t = 2F_0\varphi. \quad (32.3)$$

Из рис. 32.5 видно, что при увеличении коэффициента тяги φ до некоторого критического значения φ наблюдается упругое скольжение ремня, пропорциональное φ , а КПД передачи η возрастает до максимального значения. При увеличении коэффициента тяги от φ_0 до φ_{\max} работа передачи становится неустойчивой, появляется частичное буксование, а КПД передачи резко понижается. При $\varphi_0 = \varphi_{\max}$ наступает полное буксование и передача мощности прекращается.

Таким образом, предел рационального использования ремня характеризуется значением коэффициента тяги φ_0 . Зона частичного буксования характеризует способность передачи переносить кратковременные перегрузки. Оптимальными считаются значения коэффициента тяги: $\varphi_0 = 0,4 \dots 0,6$ для плоскоремennых передач (в зависимости от материала ремня) и $\varphi_0 = 0,6 \dots 0,75$ для клиноремennых передач.

Разделив обе части равенства (32.3) на площадь поперечного сечения ремня A , получим при $\varphi = \varphi_0$ *приведенное полезное напряжение* k_0 :

$$k_0 = \frac{F_t}{A} = \frac{2\varphi_0 F_0}{A} = 2\varphi_0 \sigma_0,$$

где σ_0 — предварительное напряжение.

Приведенным напряжение называется потому, что оно соответствует определенным условиям испытания ремня, а именно: 1) угол обхвата на ведущем шкиве $\alpha_1 = 180^\circ$; 2) скорость ремня $v = 10$ м/с; 3) передача открытая горизонтальная; 4) нагрузка равномерная, спокойная.

Приведенное полезное напряжение положено в основу расчета ремennых передач трением.

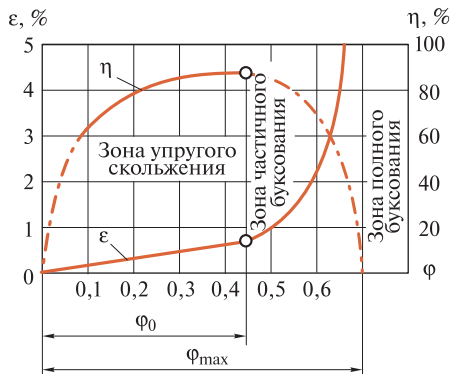


Рис. 32.5

Долговечностью ремня называется его свойство сохранять работоспособность до наступления предельного состояния. Количественно долговечность ремней оценивается *техническим ресурсом*, измеряемым чаще всего в часах.

Долговечность ремня в условиях нормальной эксплуатации в основном определяется его сопротивлением усталости, которое зависит от значения максимального переменного напряжения и частоты циклов изменения напряжений, иначе говоря, от числа изгибов ремня в единицу времени. Частоту циклов изменения напряжений N удобно выражать через число пробегов ремня в секунду, которое обозначим:

$$П = \frac{v}{L},$$

где v — скорость ремня; L — длина ремня. Тогда

$$N = 3600Пz_{ш}L_h,$$

где $z_{ш}$ — число шкивов в передаче; L_h — ресурс ремня, ч (по ГОСТ «Ремни приводные клиновые нормальных сечений» ресурс ремней обозначается T).

Следует отметить, что значительное влияние на долговечность ремня оказывает диаметр меньшего шкива, поэтому устанавливаются минимально допустимые диаметры шкивов. При уменьшении диаметра шкива увеличиваются напряжения изгиба и резко возрастает температура ремня из-за внутреннего трения.

Ориентировочно долговечность приводных ремней можно обеспечить, ограничив число пробегов ремня в секунду по условию:

$$П = \frac{v}{L} \leq [П],$$

где v — скорость ремня; L — длина ремня; $[П]$ — допускаемое число пробегов ремня; для плоских ремней $[П] \leq 5 \text{ с}^{-1}$, для клиновых $[П] \leq 15 \text{ с}^{-1}$, для поликлиновых $[П] \leq 30 \text{ с}^{-1}$, для плоских синтетических ремней $[П] \leq 50 \text{ с}^{-1}$.

32.2. ПЛОСКОРЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Наиболее типичные схемы передач плоским ремнем представлены на рис. 32.6: *а* — *открытая* (оси валов параллельны, шкивы вращаются в одинаковом направлении); *б* — *перекрестная* (оси валов параллельны, шкивы вращаются в противоположных направлениях); *в* — *полуперекрестная* (оси валов перекрещиваются); *г* — *угловая* (с направляющими роликами, оси валов перекрещиваются

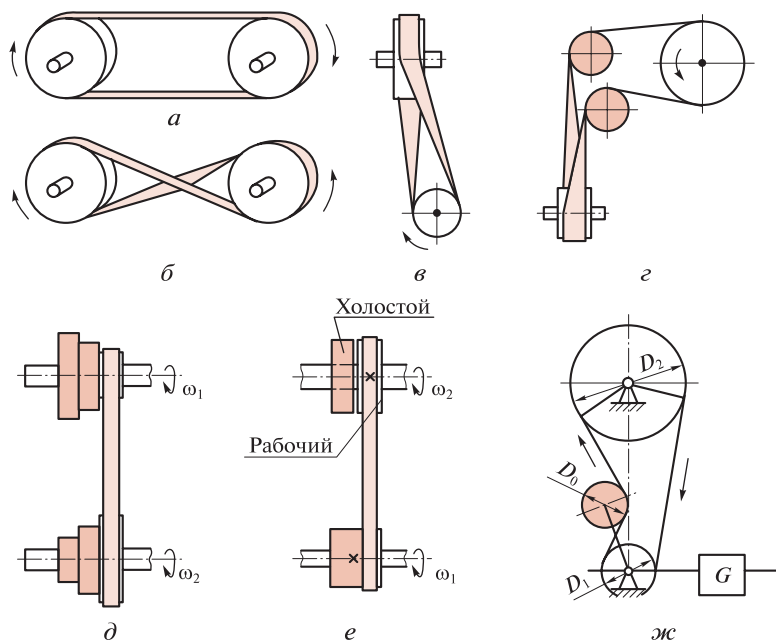


Рис. 32.6

или пересекаются); *д* — *со ступенчатыми шкивами* (регулируемая передача); *е* — *с холостым шкивом* (применяется для пуска и останки ведомого вала при непрерывном вращении ведущего); *ж* — *с натяжным роликом* (применяется при малых межосевых расстояниях и больших передаточных числах $u \leq 10$; натяжной ролик увеличивает угол обхвата шкивов и автоматически обеспечивает постоянное натяжение ремня).

Наибольшее распространение имеют открытые плоскоременные передачи. По сравнению с другими они обладают более высокой нагрузочной способностью, КПД и долговечностью ремней.

КПД передач плоским ремнем $\eta = 0,93 \dots 0,98$. Передаточное число открытой передачи $u \leq 5$; с натяжным роликом $u \leq 10$.

Плоскоременные передачи предпочтительны при больших межосевых расстояниях; кроме того, они сравнительно дешевы, ремни их обладают большой гибкостью и повышенной долговечностью, шкивы просты по конструкции. Плоскоременные передачи применяют при весьма высоких скоростях ремня (до 100 м/с).

Материал ремней. Общие требования, которые предъявляются к материалам приводных ремней, заключаются в следующем: достаточно высокое сопротивление усталости, статическая прочность

и износостойкость, высокий коэффициент трения, эластичность (малая жесткость при растяжении и изгибе), а также невысокая стоимость и недефицитность.

Плоские ремни бывают кожаные, шерстяные, хлопчатобумажные, резиноканевые и синтетические.

32.3. КЛИНОРЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Обычно *клиноремennая передача* представляет собой открытую передачу с одним или несколькими ремнями. Рабочими поверхностями ремня являются его боковые стороны.

По сравнению с плоскоремennыми клиноремennые передачи обладают большей тяговой способностью, имеют меньшее межосевое расстояние, допускают меньший угол обхвата малого шкива и большие передаточные числа ($u \leq 10$). Однако стандартные клиновые ремни не допускают скорость более 30 м/с из-за возможности крутильных колебаний ведомой системы, связанных с неизбежным различием ширины ремня по его длине и, как следствие, непостоянством передаточного отношения за один пробег ремня. У клиновых ремней большие потери на трение и напряжения изгиба, а конструкция шкивов сложнее.

Клиноремennые передачи широко используют в индивидуальных приводах мощностью до 400 кВт. КПД клиноремennых передач $\eta = 0,87 \dots 0,97$.

Поликлиновые ремennые передачи не имеют большинства недостатков, присущих клиноремennым, но сохраняют достоинства последних. Поликлиновые ремни имеют гибкость, сравнимую с гибкостью резиноканевых плоских ремней, поэтому они работают более плавно, минимальный диаметр малого шкива передачи можно брать меньшим, передаточные числа увеличить до $u \leq 15$, а скорость ремня — до 50 м/с. Передача обладает большой демпфирующей способностью.

Клиновые и поликлиновые ремни. Клиновые приводные ремни выполняют бесконечными из резиноканевых материалов трапециевидального сечения с углом клина $\varphi_0 = 40^\circ$. В зависимости от отношения ширины W большего основания трапеции к ее высоте T клиновые ремни бывают нормальных сечений ($W/T \approx 1,6$, рис. 32.7); узкие ($W/T \approx 1,2$); широкие ($W/T \approx 2,5$ и более; применяются для клиноремennых вариаторов).

В настоящее время стандартизованы *клиновые ремни нормальных сечений*, предназначенные для приводов станков, промышлен-

ных установок и стационарных сельскохозяйственных машин. Основные размеры и методы контроля таких ремней регламентированы ГОСТ 1284.1—89; обозначения сечений показаны на рис. 32.7. Ремни сечения ЕО применяют только для действующих машин и установок. Стандартные ремни изготовляют двух видов: для умеренного и тропического климата, работающих при температуре воздуха от -30 до $+60$ °С, и для холодного и очень холодного климата, работающих при температуре от минус -60 до $+40$ °С. Клиновые ремни (рис. 32.8, а, б) состоят из резинового или резиноканевого слоя растяжения 1, несущего слоя 2 на основе материалов из химических волокон (кордткань или кордшнур), резинового слоя сжатия 3 и оберточного слоя прорезиненной ткани 4. Сечение ремня кордтканевой (а), кордшнуровой (б) конструкции показаны на рис. 32.8. Более гибки и долговечны кордшнуровые ремни, применяемые в быстроходных передачах. Допускаемая скорость для ремней нормальных сечений $v \leq 30$ м/с. Ремни сечений А, В и С для увеличения гибкости могут изготавливаться с зубьями (пазами) на внутренней поверхности, полученными нарезкой или формованием (рис. 32.8, в).

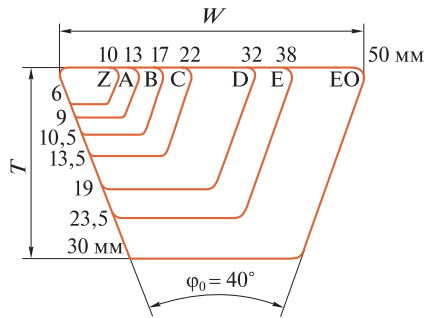


Рис. 32.7

Кроме вышеуказанных приводных клиновых ремней стандартизованы ремни вентиляторные клиновые (для двигателей автомобилей, тракторов и комбайнов) и ремни приводные клиновые (для сельскохозяйственных машин).

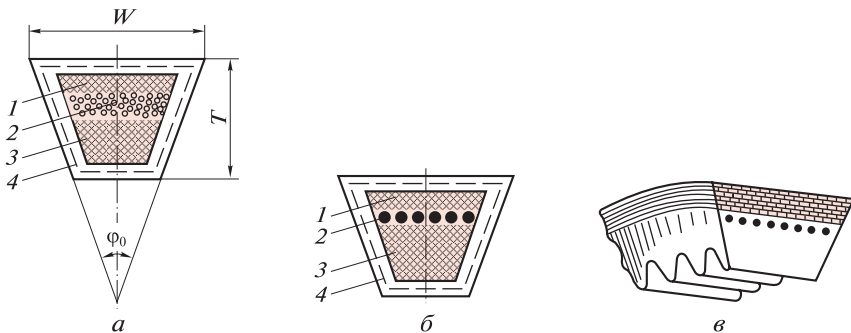


Рис. 32.8

При необходимости работы ремня с изгибом в двух направлениях применяют шестигранные (сдвоенные клиновые) ремни.

Весьма перспективны *узкие клиновые ремни*, которые передают в 1,5—2 раза большие мощности, чем ремни нормальных сечений. Узкие ремни допускают меньшие диаметры малого шкива и работают при скоростях до 50 м/с; передачи получаются более компактными. Четыре сечения этих ремней заменяют семь нормальных сечений.

Узкие ремни обладают повышенной тяговой способностью за счет лучшего распределения нагрузки по ширине несущего слоя, состоящего из высокопрочного синтетического корда. Применение узких ремней значительно снижает материалоемкость ременных передач.

Следует отметить, что в клиноременных передачах с несколькими ремнями из-за разной длины и неодинаковых упругих свойств нагрузка между ремнями распределяется неравномерно. Поэтому в передаче не рекомендуется использовать более 8—12 ремней.

Поликлиновые ремни (рис. 32.1, г) представляют собой бесконечные плоские ремни с ребрами на нижней стороне, работающие на шкивах с клиновыми канавками. По всей ширине ремня расположен высокопрочный синтетический шнуровой корд; ширина такого ремня в 1,5—2 раза меньше ширины комплекта ремней нормальных сечений при одинаковой мощности передачи.

Изготавливают три сечения кордшнуровых поликлиновых ремней, обозначаемых К, Л и М, с числом ребер от 2 до 50, длиной ремня от 400 до 4000 мм и углом клина $\varphi_0 = 40^\circ$.

По сравнению с плоскоременными *клиноременные передачи обладают значительно большей тяговой способностью за счет повышенного сцепления*, обусловленного приведенным коэффициентом трения f' между ремнем и шкивом.

Как известно из рассматриваемой в теоретической механике теории трения клинчатого ползуна

$$f' = f / \sin \frac{\alpha}{2},$$

где f — коэффициент трения на плоскости (для прорезиненной ткани по чугуна $f = 0,3$); α — угол профиля канавки шкива.

Приняв $\alpha = \varphi_0 = 40^\circ$, получим

$$f' = f / \sin 20^\circ \approx 3f.$$

Таким образом, при прочих равных условиях клиновые ремни способны передавать в три раза большую окружную силу, чем плоские.

Расчет передачи с клиновыми ремнями. Расчет проводят из условий обеспечения тяговой способности и долговечности ремней.

Расчет ремней выполняют с помощью таблиц стандарта, содержащих номинальные мощности, передаваемые одним ремнем в зависимости от сечения ремня, расчетного диаметра малого шкива, его частоты вращения и передаточного числа (расчетный диаметр шкива клиноременной передачи соответствует положению нейтрального слоя ремня, установленного в канавке шкива; см. диаметр d_p на рис. 32.13).

Проектный расчет клиноременной передачи начинают с выбора *сечения ремня* по заданной передаваемой мощности и частоте вращения малого шкива с помощью графиков (рис. 32.9). При мощностях до 2 кВт применяют сечение Z, а сечение EО — при мощностях свыше 200 кВт.

Далее определяется *расчетный диаметр малого шкива*. Минимально допустимые значения расчетных диаметров d_{min} малого шкива следующие:

Сечение ремня	Z	A	B	C	D	E	SPZ	SPA	SPB	SPC
d_{min} , мм	63	90	125	200	355	500	63	90	140	224

Следует помнить, что вышеприведенные значения расчетных диаметров малого шкива обеспечивают минимальные габаритные размеры передачи, но с увеличением этого диаметра возрастают тяговая способность и КПД передачи, а также долговечность ремней. При отсутствии жестких требований к габаритным размерам передачи расчетный диаметр d_1 малого шкива следует принимать больше минимально допустимого значения. Диаметр d_2 большого шкива определяют по формуле

$$d_2 = u d_1,$$

где u — передаточное число передачи; полученное значение округляют до ближайшего стандартного размера.

Расчетные диаметры шкивов клиноременных передач выбирают из стандартного ряда (мм): 63; 71; 80; 90; 100; 112; 125; 140; 160; 180; 200; 224; 250; 280; 315; 355; 400; 450; 500 и т. д.

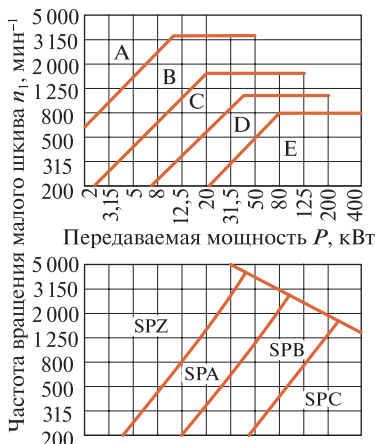


Рис. 32.9

Далее определяют *окружную скорость* v ремня по формуле

$$v_1 = \frac{\pi d_1 n_1}{60},$$

где d_1, n_1 — расчетный диаметр и частота вращения малого шкива.

В ходе дальнейшего расчета находят все геометрические параметры передачи.

Межосевое расстояние a предварительно определяют по условию

$$0,55(d_1 + d_2) + h < a < 2(d_1 + d_2),$$

где h — высота сечения ремня. Следует помнить, что с увеличением межосевого расстояния долговечность ремней увеличивается.

Расчетная длина ремня L_p вычисляется по формуле, приведенной в подразд. 32.1, и округляется до ближайшей стандартной длины из ряда (для сечения В) (мм): 800; 900; 1 000; 1 120; 1 250; 1 400; 1 600; 1 800; 2 000; 2 120; 2 240 и т.д. до 6 300.

Затем по формуле, приведенной в подразд. 32.1, определяют окончательное межосевое расстояние a в зависимости от принятой стандартной расчетной длины ремня.

Угол обхвата α_1 на малом шкиве вычисляется по формуле, приведенной в подразд. 32.1.

Мощность P_p , передаваемая одним ремнем, рассчитывается по формуле

$$P_p = \frac{P_0 C_\alpha C_L}{C_p},$$

где P_0 — номинальная мощность, передаваемая одним ремнем (определяется по таблицам ГОСТ 1284.3—96).

C_α — коэффициент угла обхвата:

α_1°	180	160	140	120	90
C_α	1,0	0,95	0,89	0,82	0,68

C_L — коэффициент длины ремня, зависящий от отношения принятой длины L ремня к исходной длине L_p , указанной в стандарте:

L/L_p	0,3	0,5	0,8	1,0	1,6	2,4
C_L	0,79	0,86	0,95	1,0	1,1	1,2

(подробная таблица значений C_L приведена в стандарте); C_p — коэффициент динамичности и режима работы (таблица значений C_p приведена в стандарте).

Дальнейший расчет клиноременной передачи сводится к определению числа ремней z по формуле

$$z = \frac{P}{C_z P_p},$$

где P — передаваемая мощность на ведущем валу; C_z — коэффициент, учитывающий число ремней в комплекте, вводится при $z \geq 2$:

$z \dots \dots \dots 2-3$	$4-6$	Более 6
$C_z \dots \dots \dots 0,95$	0,90	0,85

Во избежание значительной неравномерности распределения нагрузки между ремнями не рекомендуется в одной передаче использовать более 8 ремней нормального сечения и 12 узких ремней; число ремней мелких сечений не следует брать больше 6.

Нагрузка на вал клиноременной передачи

$$R = 2F_0 z \sin \frac{\alpha_1}{2},$$

где F_0 — натяжение ветви одного ремня; α_1 — угол обхвата малого шкива.

Величину F_0 натяжения ветви одного ремня вычисляют по формуле

$$F_0 = \frac{0,85 P C_p C_z}{z v C_a} + \Theta v^2,$$

где v — окружная скорость ремня; Θ — коэффициент, учитывающий влияние центробежных сил:

Сечение ремня Z	A	B	C	D	E	EO
$\Theta, \text{H} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^2 \dots \dots \dots 0,06$	0,1	0,18	0,3	0,6	0,9	1,5

Передачи с узкими и поликлиновыми ремнями рассчитывают по аналогичной методике. Таблицы мощностей, передаваемых одним узким ремнем и поликлиновым ремнем с 10 ребрами, имеются в учебных пособиях по курсовому проектированию деталей машин.

При расчете поликлиновых ремней определяют число ребер z по формуле

$$z = \frac{10P}{P_p},$$

где P — передаваемая мощность на ведущем валу; P_p — мощность, передаваемая ремнем с 10 ребрами.

Расчет долговечности клиновых ремней нормальных сечений установлен стандартом. Средний ресурс $L_{\text{нр}}$ ремней в эксплуатации для среднего режима работы устанавливается 2000 ч. При легких, тяжелых и очень тяжелых режимах работы *расчетный ресурс* вычисляют по формуле

$$L_{\text{нр}} = L_{\text{нр}} K_1 K_2,$$

где K_1 — коэффициент режима работы, равный: для легкого режима — 2,5; для тяжелого режима — 0,5; для очень тяжелого режима — 0,25; K_2 — коэффициент, учитывающий климатические условия эксплуатации, равный: для районов с холодным и очень холодным климатом — 0,75; для остальных районов — 1,0.

Для станков с непрерывным процессом резания (токарные, сверлильные, шлифовальные) режим работы полагается легким; для фрезерных, зубофрезерных станков режим работы полагается средним; строгальные, долбежные, зубодолбежные и деревообрабатывающие станки работают в тяжелом режиме; очень тяжелый режим работы полагается для подъемников, экскаваторов, молотов, дробилок, лесопильных рам и др.

32.4. ЗУБЧАТО-РЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Зубчато-ременные передачи — весьма перспективный вид передач для приводов машин.

В этих передачах (рис. 32.10) бесконечный плоский ремень, имеющий на внутренней поверхности зубья трапецеидальной формы, входит в зацепление с зубчатым шкивом. По сравнению с другими видами передач гибкой связью зубчато-ременные передачи обладают рядом преимуществ: отсутствие скольжения, малые габаритные размеры, небольшие нагрузки на валы и их опоры (немного превышающие или равные окружной силе), незначительная вытяжка ремня и высокий КПД (0,94...0,98).

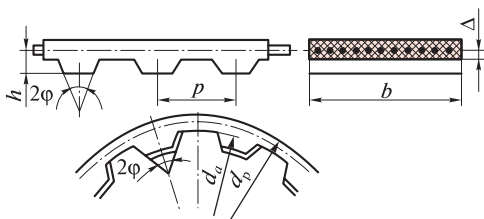


Рис. 32.10

Зубчато-ременные передачи применяют при скоростях ремня до 50 м/с, передаточных числах $u \leq 12$ и мощностях до 100 кВт и более. Передачи зубчатым ремнем обычно служат в качестве понижающих в приводах от электродвигателей к приемным валам машин, например металлорежущих станков.

Зубчатые ремни имеют несущий слой в виде металлического троса, стекловолокна или полиамидного шнура, находящегося в резиновой или пластмассовой основе. Для повышения износостойкости зубья покрывают тканью из синтетического волокна.

Наличие жесткого и прочного несущего каркаса обеспечивает неизменяемость окружного шага p при работе передачи. Расчетный диаметр d_p шкивов зубчато-ременной передачи соответствует положению несущего слоя ремня, надетого на шкивы (см. рис. 32.10).

Основной конструктивный параметр зубчатого ремня — модуль m :

$$m = p/\pi,$$

где p — окружной шаг; стандартизованы значения модуля m (мм) — 2; 3; 4; 5; 7; 10.

32.5. ШКИВЫ И НАТЯЖНЫЕ УСТРОЙСТВА

Шкивы. Основные конструктивные элементы шкива ременной передачи: обод, несущий ремень; ступица, насаживаемая на вал; диск или спицы, соединяющие обод со ступицей.

Материалами для шкивов ременных передач могут быть чугун, сталь, легкие сплавы, пластмассы и дерево.

Чугунные шкивы наиболее распространены; они изготавливаются из серого чугуна методом отливки и применяются при окружных скоростях до 30 м/с; для шкивов из модифицированного чугуна эта скорость может быть выше (до 45 м/с).

Стальные шкивы могут быть литыми, сварными или точеными. Стальное литье может применяться при окружных скоростях до 45 м/с; сварные шкивы допускают скорость до 60 м/с.

Шкивы из алюминиевых сплавов имеют среди металлических шкивов минимальную массу и могут использоваться при скоростях до 100 м/с, так как малая плотность этих сплавов значительно снижает центробежные нагрузки.

Неметаллические шкивы имеют малую массу, высокий коэффициент трения ремня о шкив, но теплопроводность и износостойкость их ниже, чем у металлических шкивов.

Шкивы, работающие с окружной скоростью свыше 5 м/с, подвергаются статической балансировке.

Основные размеры, конструктивные особенности и технические условия для шкивов плоскоремennых передач регламентированы стандартом, который устанавливает три типа шкивов с посадочным отверстием двух исполнений — цилиндрическим и коническим (рис. 32.11). Шкивы имеют гладкую рабочую поверхность обода. На поверхности обода шкивов, работающих с окружной скоростью свыше 40 м/с, должны быть проточены кольцевые канавки, обеспечивающие выход воздуха из-под ремня, во избежание образования воздушного клина, ухудшающего сцепление между ремнем и шкивом. Для предупреждения сползания плоского ремня со шкивов один из них (обычно ведомый) делают выпуклым, очерченным в осевом сечении дугой окружности (тип I), или с цилиндрической поверхностью в середине и коническими по краям (тип III), величина стрелы выпуклости h обода шкива возрастает с увеличением диаметра шкива. Допускается изготавливать шкивы с буртиками на обode и конусностью посадочного отверстия 1:5. Для уменьшения изнашивания ремня в результате упругого скольжения шероховатость поверхности обода шкива не должна превышать $Ra\ 2,5$ мкм. Ширина B обода шкива принимается по таблицам ГОСТа в зависимости от ширины b ремня из стандартного ряда (мм): 16; 20; 25; 32; 40; 50; 63; 71; 80; 90; 100 и т.д. до 250 (для открытых передач $B = 1,1b + 10$ мм).

Основные размеры шкивов для клиноремennых передач и технические требования к этим шкивам стандартизованы. Стандарт устанавливает три типа конструкций шкивов (рис. 32.12): a — монолитных с расчетным диаметром до 100 мм; b — с диском с расчетным диаметром от 80 до 400 мм; c — со спицами и расчетным диаметром от 180 до 1 000 мм. Шкивы могут изготавливаться с цилиндрическим или коническим посадочным отверстием.

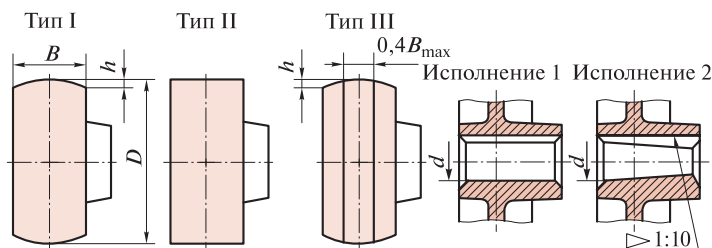


Рис. 32.11

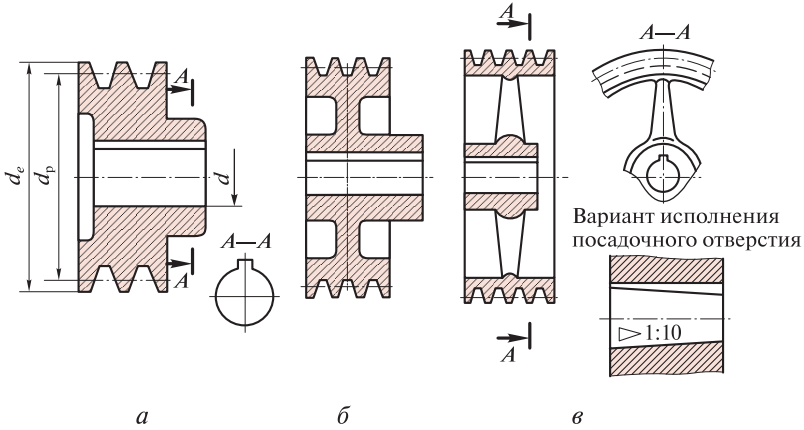


Рис. 32.12

Угол α профиля канавок для клиновых ремней зависит от расчетного диаметра d_p шкивов и колеблется в пределах $\alpha = 34 \dots 40^\circ$ (рис. 32.13, а). Это связано с тем, что при огибании шкива ремень изгибается; эпюра напряжений изгиба и положение нейтральной оси (н. о.) показаны на рис. 32.13, б.

В зоне растянутых волокон поперечные размеры ремня уменьшаются, а в зоне сжатых волокон — увеличиваются, в результате чего угол клина ремня при огибании шкива уменьшается и становится меньше своего первоначального значения $\varphi_0 = 40^\circ \pm 1^\circ$. Чем меньше диаметр шкива, тем больше напряжение изгиба и изменение угла клина ремня.

Для того чтобы обеспечить полное прилегание боковых поверхностей ремня к боковым поверхностям канавки шкива, соблюдается условие $\alpha \leq \varphi_0$.

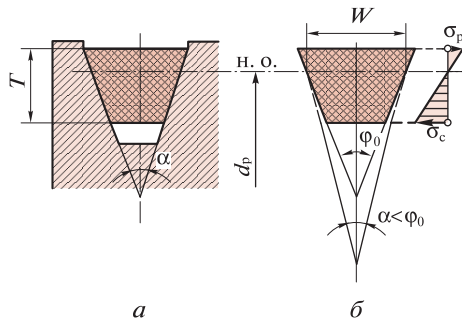


Рис. 32.13

Натяжные устройства. Необходимым условием работы ременных передач трением является предварительное натяжение ремня, которое должно сохраняться во время эксплуатации. Для компенсации отклонений от номинала по длине ремня, его удлинения во время эксплуатации, а также для свободной установки новых ремней и создания их предварительного натяжения в передачах предусматривается регулировка межосевого расстояния и установка натяжных устройств.

Натяжные устройства можно классифицировать следующим образом: устройства *периодического действия*, в которых натяжение ремня регулируется винтами; устройства *постоянного действия*, в которых натяжение поддерживается постоянным за счет силы тяжести или усилия упругого элемента; устройства *автоматические*, обеспечивающие регулирование натяжения ремня в зависимости от нагрузки.

Натяжные устройства периодического действия показаны на рис. 32.14: *а* — регулировка межосевого расстояния осуществляется перемещением электродвигателя по салазкам с помощью винта; *б* — регулировка осуществляется перемещением электродвигателя, установленного на качающейся платформе, регулируемой винтом.

Если в конструкции (рис. 32.14, *б*) удалить регулировочный винт, то получится натяжное устройство постоянного действия за счет веса электродвигателя.

На рис. 32.6, *ж* показана схема открытой ременной передачи с натяжным роликом. В такой передаче натяжение ремня поддерживается и регулируется грузом G , передвигаемым по качающемуся рычагу, на другом конце которого установлен натяжной ролик. Натяжные ролики применяют в основном в нереверсивных плоскоремных передачах с большими передаточными числами и малыми межосевыми расстояниями (без натяжного ролика у таких пере-

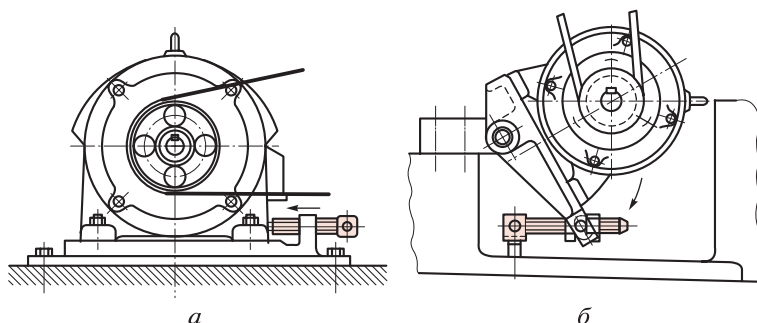


Рис. 32.14

дач угол обхвата малого шкива $\alpha_1 < 150^\circ$). Применение натяжного ролика увеличивает угол обхвата малого шкива и, следовательно, тяговую способность передачи, но долговечность ремня при этом уменьшается, так как он изгибается в двух направлениях; кроме того, значительно повышаются требования к соединениям концов ремня и возрастает стоимость передачи. Диаметр D_0 натяжного ролика принимают равным $D_0 = (0,8 \dots 1,0)D_1$, где D_1 — диаметр малого шкива; натяжной ролик устанавливается на ведомой ветви ремня ближе к малому шкиву.

В клиноременных передачах, допускающих значительно меньший угол обхвата малого шкива, натяжные ролики применяют лишь при невозможности регулировки межосевого расстояния; ролик рекомендуется располагать с внутренней стороны ремня, в противном случае ремень будет изгибаться в двух направлениях и возникнет необходимость применения ремня шестигранного (сдвоенного клинового) сечения.

Глава 33

ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

33.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Зубчатой передачей называется трехзвенный механизм, в котором два подвижных зубчатых звена образуют с неподвижным звеном вращательную или поступательную пару. Зубчатое звено передачи может представлять собой колесо, сектор или рейку. Зубчатые передачи служат для преобразования вращательных движений или вращательного движения в поступательное.

Все применяемые здесь и в дальнейшем термины, определения и обозначения, относящиеся к зубчатым передачам, соответствуют стандартам «Передачи зубчатые», «Передачи зубчатые цилиндрические» и «Передачи зубчатые конические».

Зубчатое зацепление представляет собой высшую кинематическую пару, так как зубья теоретически соприкасаются между собой по линиям или точкам, причем меньшее зубчатое колесо пары называется *шестерней*, а большее — *колесом*. Сектор цилиндрического зубчатого колеса бесконечно большого диаметра называется *зубчатой рейкой*.

Зубчатые передачи можно классифицировать по многим признакам, а именно: *по расположению осей валов* (с параллельными, пересекающимися, скрещивающимися осями и соосные); *по условиям работы* (закрытые — работающие в масляной ванне и открытые — работающие всухую или смазываемые периодически); *по числу ступеней* (одноступенчатые, многоступенчатые); *по взаимному расположению колес* (с внешним и внутренним зацеплением); *по изменению частоты вращения валов* (понижающие, повышающие); *по форме поверхности*, на которой нарезаны зубья (цилиндрические, конические); *по окружной скорости колес* (тихоходные при скорости до 3 м/с, среднескоростные при скорости до 15 м/с, быстроходные при скорости выше 15 м/с); *по расположению зубьев относительно образующей колеса* (прямозубые, косозубые, шевронные, с криволинейными зубьями); *по форме профиля зуба* (эвольвентные, круговые, циклоидальные).

Кроме перечисленных существуют передачи с гибкими зубчатыми колесами, называемые *волновыми*.

Основные виды зубчатых передач (рис. 33.1) с *параллельными осями*: *а* — цилиндрическая прямозубая, *б* — цилиндрическая косозубая, *в* — шевронная, *г* — с внутренним зацеплением; с *пересекающимися осями*: *д* — коническая прямозубая, *е* — коническая с тангенциальными зубьями, *ж* — коническая с криволинейными зубьями; со *скрещивающимися осями*: *з* — гипоидная, *и* — винтовая; *к* — зубчато-реечная прямозубая (гипоидная и винтовая передачи относятся к категории гиперboloидных передач, что будет пояснено далее).

Зубчатая передача, оси которой расположены под углом 90° , называется *ортогональной*.

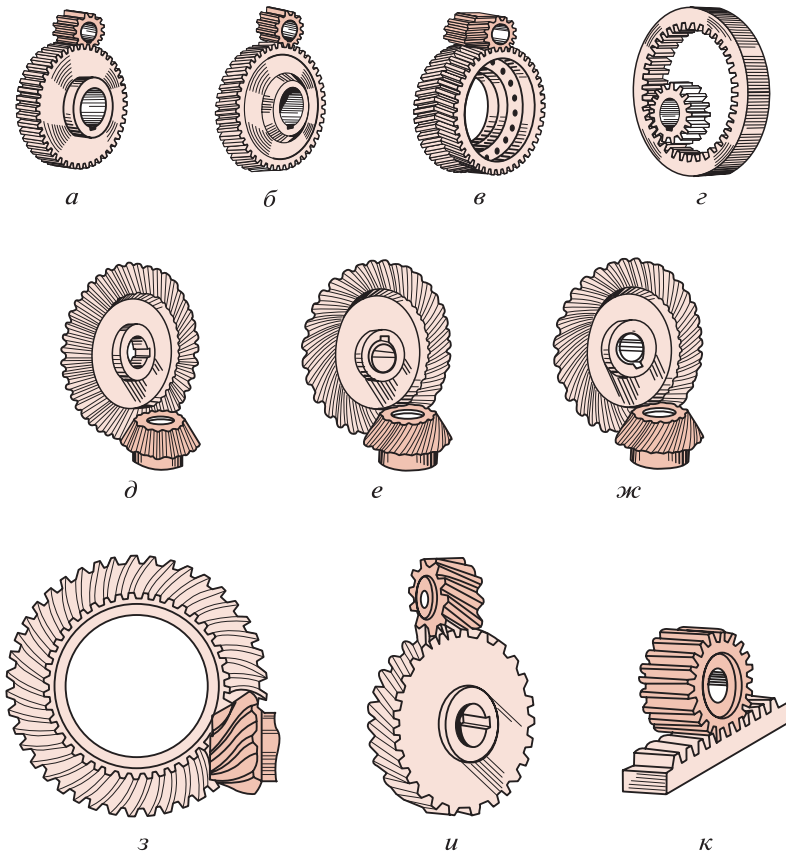


Рис. 33.1

Достоинство зубчатых передач заключается прежде всего в том, что при одинаковых характеристиках они *значительно более компактны* по сравнению с другими видами передач. Кроме того, зубчатые передачи имеют более высокий КПД (до 0,99 в одной ступени), сохраняют постоянство передаточного числа, создают относительно небольшую нагрузку на опоры валов, имеют большую долговечность и надежность работы в широких диапазонах мощностей (до десятков тысяч киловатт), окружных скоростей (до 150 м/с) и передаточных чисел (до нескольких сотен).

Недостатки зубчатых передач: сложность изготовления точных передач, возможность возникновения шума и вибраций при недостаточной точности изготовления и сборки, невозможность бесступенчатого регулирования частоты вращения ведомого вала.

Зубчатые передачи являются наиболее распространенными типами механических передач и находят широкое применение во всех отраслях машиностроения, в частности, в станкостроении, автомобиле- и тракторостроении и т.д.; в приборостроении, часовой промышленности и др.

Такое широкое распространение зубчатых передач делает необходимыми большую научно-исследовательскую работу по вопросам конструирования и технологии изготовления зубчатых колес и всестороннюю стандартизацию в этой области. В настоящее время стандартизованы термины, определения, обозначения, элементы зубчатых колес и зацеплений, основные параметры передач, расчет геометрии, расчет цилиндрических эвольвентных передач на прочность, инструмент для нарезания зубьев и многое другое.

Основная кинематическая характеристика всякой зубчатой передачи — *передаточное число*, определяемое по стандарту как *отношение числа зубьев колеса к числу зубьев шестерни* и обозначаемое *и*, следовательно,

$$i = \frac{z_2}{z_1}.$$

Определение *передаточного отношения* остается таким же, как и для других механических передач, т.е.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Потери энергии в зубчатых передачах зависят от типа передачи, точности ее изготовления, смазки и складываются из потерь на трение в зацеплении, в опорах валов и (для закрытых передач) потерь на перемешивание и разбрызгивание масла. Потерянная механиче-

ская энергия переходит в тепловую, что в некоторых случаях делает необходимым тепловой расчет передачи.

Потери в зацеплении характеризуются коэффициентом η_3 , потери в одной паре подшипников — коэффициентом $\eta_{п}$ и потери на перемешивание и разбрызгивание масла — коэффициентом $\eta_{м}$.
Общий КПД одноступенчатой закрытой передачи

$$\eta = \eta_3 \eta_{п}^2 \eta_{м}$$

Ориентировочно $\eta_3 = 0,96 \dots 0,98$ (закрытые передачи), $\eta_3 = 0,95 \dots 0,96$ (открытые передачи), $\eta_{п} = 0,99 \dots 0,995$ (подшипники качения), $\eta_{п} = 0,96 \dots 0,98$ (подшипники скольжения), $\eta_{м} = 0,98 \dots 0,99$.

Поверхности взаимодействующих зубьев колес, обеспечивающие заданное передаточное отношение, называются *сопряженными*. Процесс передачи движения в кинематической паре, образованной зубчатыми колесами, называется *зубчатым зацеплением*.

33.2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Для обеспечения непрерывного зацепления двух тел с постоянным передаточным отношением их сопряженные поверхности должны быть очерчены по кривым, удовлетворяющим *основному закону зацепления*, который формулируется следующим образом: *общая нормаль к сопряженным профилям, проведенная в точке их касания, делит межосевое расстояние на части, обратно пропорциональные угловым скоростям*.

Для доказательства сформулированной теоремы рассмотрим два зацепляющихся тела, вращающихся с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 вокруг неподвижных осей O_1 и O_2 (рис. 33.2).

Для передачи силы давления одного тела на другое в точке C их контакта должна быть общая нормаль NN к сопряженным профилям, которая пересечет линию центров O_1O_2 в точке Π . Опустим перпендикуляры O_1A и O_2B из центров вращения на нормаль NN , а через точку Π проведем две дуги окружности радиусов r_1 и r_2 . Согласно

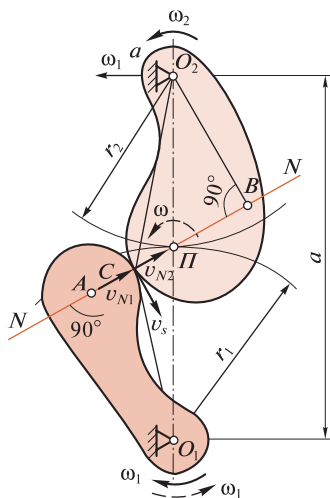


Рис. 33.2

законам вращательного движения векторы скоростей точек C контакта двух тел перпендикулярны радиусам, проведенным из центров вращения в точку касания, и равны по модулю:

$$v_{C1} = \omega_1 \cdot O_1C, \quad v_{C2} = \omega_2 \cdot O_2C.$$

Разложим мысленно векторы скоростей точек C контакта двух тел на направление нормали и касательной к профилю; нормальные составляющие, согласно стандарту, обозначаются v_{N1} и v_{N2} и называются *нормальной контактной скоростью* (см. рис. 33.2), а касательные составляющие обозначаются v_{T1} и v_{T2} и называются *касательной контактной скоростью* (на рис. 33.2 они не показаны).

Очевидно, что для непрерывного зацепления двух тел необходимо, чтобы

$$v_{N1} = v_{N2},$$

в противном случае первое тело должно внедряться во второе либо отстать от него. Очевидно также, что абсолютные скорости v_A и v_B точек A и B направлены по нормали NN , и эти скорости должны быть равны нормальной контактной скорости, т. е.

$$v_A = v_{N1} = v_{N2} = v_B,$$

в противном случае произошло бы изменение размеров контактирующих тел.

Принимая во внимание, что треугольники AO_1P и BO_2P подобны и что $v_A = \omega_1 \cdot AO_1 = v_B = \omega_2 \cdot BO_2$, получим

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \text{ откуда}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \text{ (или } \frac{d_2}{d_1} \text{)}.$$

Итак, для сохранения постоянного передаточного отношения $u = \omega_1/\omega_2 = \text{const}$ точка P , называемая *полюсом зацепления*, должна *сохранять на линии центров постоянное положение* и делить межосевое расстояние a в отношении r_2/r_1 . Теорема доказана.

Основной закон зацепления имеет общий характер и справедлив также для случаев, когда передаточное отношение должно изменяться во времени, т. е. $u \neq \text{const}$; при этом полюс зацепления не остается неподвижным, но будет перемещаться вдоль линии центров, а механизмы, осуществляющие подобное движение, имеют некруглые зубчатые колеса.

Окружности радиусов r_1 и r_2 , проходящие через полюс, называются *начальными*; окружная скорость точек, лежащих на этих окружностях, одинакова и равна

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2.$$

Для рассмотрения относительного движения тел используем применяемый в теории механизмов и машин *метод обращения движений* (метод остановки), т.е. сообщим всей системе вращение вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1 , в направлении, противоположном первоначальному (см. рис. 33.2). Тогда первое тело остановится, второе будет совершать сложное плоскопараллельное движение, состоящее из вращения вокруг осей O_1 и O_2 одновременно, а его движение по отношению к неподвижному первому телу можно рассматривать, применяя метод мгновенных центров скоростей, известный из теоретической механики.

Ранее мы установили, что окружные скорости точек, лежащих на начальных окружностях радиусов r_1 и r_2 , всегда равны, следовательно, если первая окружность остановлена, то вторая будет катиться по первой без скольжения, а точка P станет мгновенным центром скоростей второго тела. Для определения мгновенной угловой скорости ω запишем скорость оси O_2 в виде равенства

$$v_{O_2} = \omega_1 \cdot a = \omega r_2.$$

Так как $a = r_1 + r_2$, а $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, то

$$\omega = \frac{\omega_1(r_1 + r_2)}{r_2} = \frac{\omega_1 r_1}{r_2} + \omega_1 = \omega_1 + \omega_2.$$

Итак, после остановки первого тела второе будет вращаться вокруг полюса с мгновенной угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Отсюда следует, что точка C контакта второго тела будет скользить по поверхности первого тела (см. рис. 33.2) со скоростью

$$v_s = \omega \cdot PC = (\omega_1 + \omega_2)PC,$$

которая называется *скоростью скольжения* контактных точек. *Скорость скольжения прямо пропорциональна расстоянию контактных точек от полюса*. Скольжение контактных точек сопровождается трением.

Очевидно, что при зацеплении в полюсе скорость скольжения будет равна нулю, а после перехода точки контакта за полюс вектор скорости скольжения, как и сила трения, изменит направление на противоположное.

Требованиям основного закона зацепления удовлетворяют различные кривые, но наибольшее применение имеет *эвольвентное зацепление*, предложенное в середине XVIII в. Л. Эйлером; кроме того, в машиностроении применяется *круговое* зацепление, пред-

ложенное в 1954 г. М.Л.Новиковым, а в приборостроении — *циклоидальное* и некоторые другие виды зацепления.

Свойства эвольвентного зацепления. *Эвольвентой*, или разверткой окружности, называют плоскую кривую, которая описывается любой точкой прямой NN , перекатываемой без скольжения по неподвижной окружности (рис. 33.3). Линию NN называют *производящей прямой*, а окружность диаметра d_b , по которой эта прямая перекатывается, — *основной окружностью*. Так как перекатывание производящей прямой по основной окружности происходит без скольжения, то в каждый данный момент точка их касания является мгновенным центром скоростей и центром кривизны эвольвенты, следовательно, производящая прямая в каждом своем положении будет нормалью к эвольвенте, иначе говоря, *нормаль эвольвенты всегда является касательной к основной окружности*.

Из способа образования эвольвенты следует, что эта кривая не может существовать внутри основной окружности. Если перекатывать производящую прямую в противоположном направлении, то получим другую ветвь эвольвенты — левую (эвольвенты, изображенные на рис. 33.3 цветными линиями, правые). Каждый зуб колеса с эвольвентным зацеплением очерчивается участками правой и левой эвольвент; форма зубьев внутри основной окружности определяется профилем зуборезного инструмента.

Очевидно, что с увеличением диаметра d_b основной окружности радиусы кривизны эвольвенты будут увеличиваться, а в пределе при $d_b \rightarrow \infty$ эвольвента обращается в прямую, следовательно, *у рейки с эвольвентным зацеплением профиль зубьев должен быть прямолинейным*. Именно поэтому в основу проектирования цилиндрических и конических зубчатых колес эвольвентного зацепления положены *стандартные исходные контуры*, представляющие собой контур рейки с зубьями прямолинейного профиля.

Рассмотрим схему эвольвентного зацепления пары зубьев колес (рис. 33.4), вращающихся вокруг осей O_1 и O_2 с угловой скоростью ω_1 и ω_2 . Положение полюса зацепления Π определяется согласно основной теореме зацепления, а общая нормаль NN к профилям зубьев в точке контакта — касательная к основным окружностям

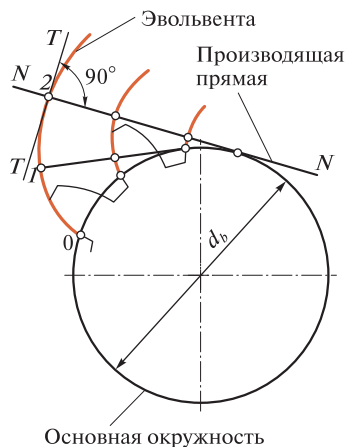


Рис. 33.3

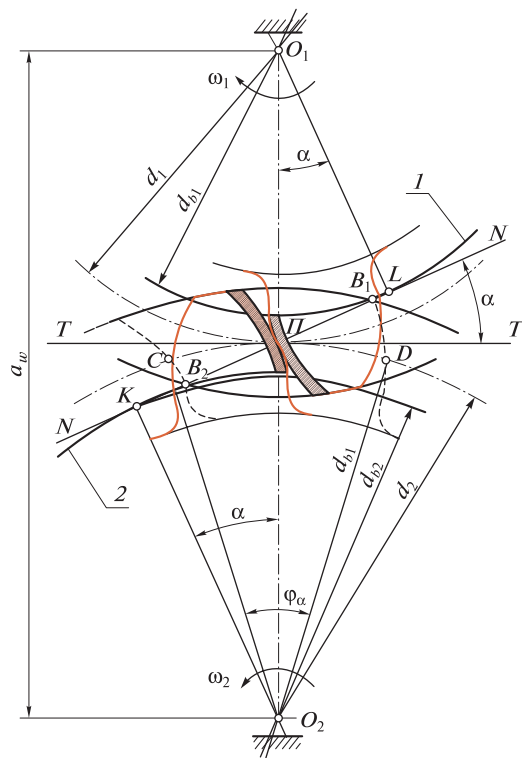


Рис. 33.4

1 и *2*, диаметры которых в соответствии со стандартом обозначены d_{b1} и d_{b2} . Так как основные окружности имеют постоянный диаметр, то общая нормаль NN и полюс Π будут занимать *постоянное положение*, следовательно, *точка контакта зубьев перемещается по общей нормали*, называемой поэтому *линией зацепления*. Прямая линия зацепления присуща только эвольвентному зацеплению.

Угол α между линией зацепления NN и общей касательной TT к начальным окружностям называется *углом зацепления*; его стандартное значение для эвольвентного зацепления $\alpha = 20^\circ$.

Если для той же пары колес немного изменить межосевое расстояние a_w , то изменится угол зацепления α , но диаметры основных окружностей останутся неизменными.

Так как $d_{b1} = d_1 \cos \alpha$, $d_{b2} = d_2 \cos \alpha$ (см. рис. 33.4), то передаточное отношение

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_{b2}}{d_{b1}}.$$

Таким образом, передаточное отношение эвольвентного зацепления зависит только от диаметров основных окружностей, следовательно, *изменение межосевого расстояния не влияет на кинематическую точность эвольвентного зацепления*, что является весьма существенным его достоинством.

При изменении межосевого расстояния a_w окружности диаметров d_1 и d_2 перестанут касаться друг друга в полюсе P , т. е. появятся *новые начальные окружности*, которые будут проходить через полюс P и в процессе зацепления перекашиваться друг по другу без скольжения; поэтому окружности диаметров d_1 и d_2 , не зависящие от межосевого расстояния, будем впредь называть *делительными*. Если межосевое расстояние передачи точно равно полусумме диаметров делительных окружностей, то *начальные и делительные окружности совпадают*. Таким образом, начальная окружность — понятие кинематическое и для отдельно взятого зубчатого колеса не существует. *Основные параметры зубчатого колеса определяются по делительной окружности*.

Зуб колеса расположен между *окружностью вершин зубьев* и *окружностью впадин*. Участок B_1B_2 линии зацепления NN (см. рис. 33.4), заключенный между окружностями вершин зубьев, называется *активной линией зацепления*. Часть профиля зуба, по которой происходит взаимодействие с зубом парного колеса, называется *активным профилем зуба* (на рис. 33.4 активные профили заштрихованы).

Угол поворота колеса передачи от положения входа зуба в зацепление до положения выхода из него называется *углом перекрытия* и обозначается φ_γ (у косозубой передачи угол перекрытия φ_γ состоит из угла торцового перекрытия φ_α (см. рис. 33.4) и угла осевого перекрытия φ_β).

Центральный угол τ (см. рис. 33.6), равный $2\pi/z$, или $360^\circ/z$ (где z — число зубьев колеса), называется *угловым шагом*.

Отношение угла перекрытия колеса к его угловому шагу называется *коэффициентом перекрытия* передачи и обозначается ε , тогда

$$\varepsilon_\gamma = \varphi_\gamma / \tau.$$

Для обеспечения непрерывности зацепления необходимо выполнить условие

$$\varphi_\gamma > \tau \text{ или } \varepsilon_\gamma > 1,$$

иначе пара зубьев выйдет из зацепления раньше, чем войдет в зацепление следующая пара. Таким образом, если $\varepsilon < 2$, период зацепления одной пары зубьев состоит из периода *однопарного* и пери-

ода *двупарного* зацепления. Чем больше коэффициент перекрытия, тем меньше период однопарного зацепления; зацепление в полюсе всегда будет однопарным.

На рис. 33.5 изображено зацепление зубчатого колеса с рейкой, в котором начальная окружность (н.о.) колеса перекачивается без скольжения по начальной прямой (н.п.) рейки. Угол профиля зуба рейки и угол зацепления, обозначенные α , равны между собой.

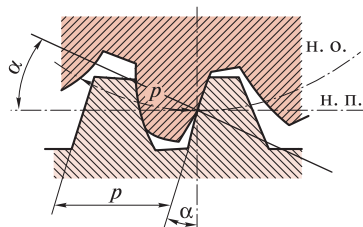


Рис. 33.5

33.3. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПРЯМОЗУБАЯ ПЕРЕДАЧА

На рис. 33.6 изображено цилиндрическое колесо с прямыми зубьями. Часть зубчатого колеса, содержащая все зубья, называется *венцом*; часть колеса, насаживаемая на вал, называется *ступицей*. Делительная окружность диаметром d делит зуб на две части — *головку зуба* высотой h_a и *ножку зуба* высотой h_f , высота зуба $h = h_a + h_f$. Расстояние между одноименными профилями соседних зубьев, измеренное по дуге делительной окружности, называется

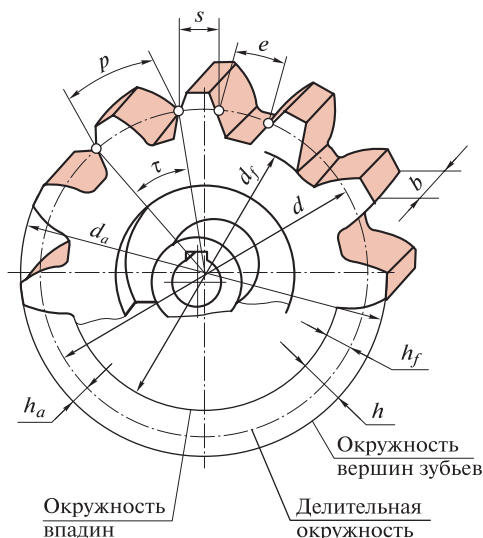


Рис. 33.6

Таблица 33.1

Модули, мм			
1-й ряд	2-й ряд	1-й ряд	2-й ряд
1	1,125	4	4,5
1,25	1,275	5	5,5
1,5	1,75	6	7
2	2,25	8	9
2,5	2,75	10	11
3	3,5	12	14

Примечание. При назначении модулей 1-й ряд следует предпочитать 2-му.

окружным делительным шагом зубьев и обозначается p . Шаг зубьев складывается из *окружной толщины* зуба s и *ширины впадины* e . Длина хорды, соответствующая окружной толщине зуба, называется *толщиной по хорде* и обозначается \bar{s} . Линейная величина, в π раз меньшая окружного шага, называется *окружным делительным модулем зубьев*, обозначается m и измеряется в миллиметрах (впредь слова «окружной делительный» в терминах будем опускать):

$$m = p/\pi.$$

Модуль зубьев — основной параметр зубчатого колеса. Для пары колес, находящихся в зацеплении, модуль должен быть одинаковым. Модули зубьев для цилиндрических и конических передач стандартизированы. Значения модулей от 1 до 14 мм приведены в табл. 33.1.

Все основные параметры зубчатых колес выражают через модули, а именно:

шаг зубьев $p = \pi m$;

диаметр делительной окружности $d = mz$.

Так как длина делительной окружности равна $\pi d = pz$, а $p = \pi m$, то $d = pz/\pi = mz$, где z — число зубьев колеса. Последняя формула позволяет определить модуль как число миллиметров диаметра делительной окружности, приходящихся на один зуб колеса.

В соответствии со стандартным исходным контуром для цилиндрических зубчатых колес (рис. 33.7) высота головки зуба $h_a = m$, высота ножки зуба $h_f = m + c = 1,25m$, где $c = 0,25m$ — радиальный зазор; в пределах глубины захода $h_d = 2m$ профиль исходного контура прямолинейный; радиус закругления у основания зуба $r_c = 0,25m$.

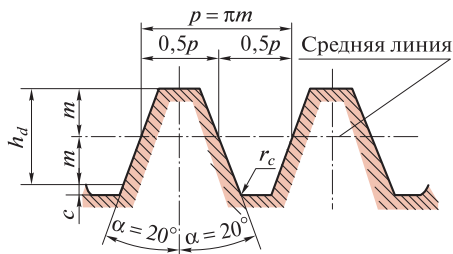


Рис. 33.7

Высота зубьев цилиндрических колес $h = h_a + h_f = 2,25m$, диаметр вершин зубьев $d_a = d + 2h_a = mz + 2m = m(z + 2)$, диаметр впадин $d_f = d - 2h_f = mz - 2 \cdot 1,2m = m(z - 2,5)$.

Расстояние между торцами зубьев колеса называется *шириной венца*. Контакт пары зубьев цилиндрической прямозубой передачи теоретически происходит по линии, параллельной оси; длина линии контакта равна ширине венца. В процессе работы передачи пара зубьев входит в зацепление сразу по всей длине линии контакта (что сопровождается ударом зубьев), после чего эта линия перемещается по высоте зуба, оставаясь параллельной оси.

Межосевое расстояние цилиндрической передачи с внешним и внутренним зацеплением

$$a = \frac{d_1 \pm d_2}{2} = m \frac{z_1 \pm z_2}{2}$$

называется *делительным межосевым расстоянием* (знак « \pm » для внутреннего зацепления). Если межосевое расстояние отличается от делительного, то оно обозначается a_w .

Прямозубая передача имеет только *торцовое перекрытие*. Коэффициент торцового перекрытия ε_α равен отношению угла торцового перекрытия φ_α к угловому шагу τ , т.е. $\varepsilon_\alpha = \varphi_\alpha / \tau$. Для прямозубых передач рекомендуется $\varepsilon_\alpha \geq 1,2$.

Стандартом на допуски для цилиндрических зубчатых колес и передач установлены *двенадцать степеней точности*, обозначенных цифрами (первая степень — наивысшая). Для каждой степени точности установлены нормы кинематической точности, плавности работы и контакта зубьев колес и передач.

В процессе изготовления зубчатых передач неизбежны погрешности в шаге, толщине и профиле зубьев, неизбежно радиальное биение венца, колебание межосевого расстояния при безззорном зацеплении контролируемого и измерительного колес и т.д. Все это создает кинематическую погрешность в углах поворота ведомого

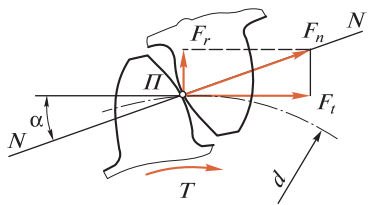


Рис. 33.8

колеса, выражаемую линейной величиной, измеряемой по дуге делительной окружности. *Кинематическая погрешность* определяется как разность между действительным и расчетным углом поворота ведомого колеса. Нормы *кинематической точности* регламентируют допуски на кинематическую погрешность

и ее составляющие за полный оборот колеса. Нормы *плавности* устанавливают допуски на циклическую (многократно повторяющуюся за один оборот) кинематическую погрешность колеса и ее составляющие. Нормы *контакта* устанавливают размеры суммарного пятна контакта зубьев передачи (в процентах от размеров зубьев) и допуски на параметры, влияющие на этот контакт, устанавливают также нормы бокового зазора зубьев.

В машиностроении зубчатые передачи общего назначения изготовляют по 6 — 9-й степеням точности. Цилиндрические прямозубые колеса 6-й степени точности применяют при окружных скоростях колес до 15 м/с; 7-й степени — до 10 м/с; 8-й степени — до 6 м/с; 9-й — до 2 м/с.

Рассмотрим силы, действующие в зацеплении прямозубой цилиндрической передачи (рис. 33.8). При изображенном на этом рисунке контакте пары зубьев в полюсе *П* скольжение (следовательно, и трение) отсутствует, зацепление будет однопарным и силовое взаимодействие колес будет заключаться в передаче по *линии давления* (нормали *NN'*) *силы нормального давления F_n*. Разложим эту силу на две взаимно-перпендикулярные составляющие *F_t* и *F_r*, называемые соответственно *окружной* и *радиальной* силами, тогда

$$F_t = F_n \cos \alpha; F_r = F_n \sin \alpha,$$

где α — угол зацепления.

Если известен передаваемый вращающий момент *T* и диаметр *d* делительной окружности, то

$$F_t = \frac{2T}{d};$$

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha$$

(так как $\alpha = 20^\circ$, то $F_r \approx 0,36F_t$).

Сила *F_t* вызывает вращение ведомого колеса и изгибает вал колеса в горизонтальной плоскости, сила *F_r* изгибает вал в вертикальной плоскости.

33.4. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПЕРЕДАЧИ С КОСЫМИ И ШЕВРОННЫМИ ЗУБЬЯМИ

Косозубыми называют колеса, у которых теоретическая делительная линия зуба является частью винтовой линии постоянного шага (теоретической делительной линией называется линия пересечения боковой поверхности зуба с делительной цилиндрической поверхностью). Линия зуба косозубых колес может иметь *правое* и *левое* направление винтовой линии. Угол наклона линии зуба обозначается β (рис. 33.9).

Косозубая передача с параллельными осями имеет *противоположное направление зубьев* ведущего и ведомого колес и относится к категории цилиндрических зубчатых передач, так как начальные поверхности таких зубчатых колес представляют собой боковую поверхность цилиндров. Передача с косозубыми колесами, оси которых скрещиваются, имеет одинаковое направление зубьев обоих колес и называется *винтовой зубчатой передачей* (см. рис. 33.1, *и*), которая относится к категории *гиперboloидных* зубчатых передач, так как начальные поверхности таких зубчатых колес являются частями однополостного гиперboloида вращения; делительные поверхности этих колес — цилиндрические.

У косозубых передач контактные линии расположены наклонно по отношению к линии зуба (см. рис. 33.9), поэтому в отличие от прямых косые зубья входят в зацепление не сразу по всей длине, а постепенно, что обеспечивает плавность зацепления и значительное снижение динамических нагрузок и шума при работе передачи. Поэтому косозубые передачи по сравнению с прямозубыми допускают значительно большие предельные окружные скорости колес.

Так, например, косозубые колеса 6-й степени точности применяют при окружной скорости до 30 м/с; 7-й степени — до 15 м/с; 8-й степени — до 10 м/с; 9-й — до 4 м/с.

Угол перекрытия косозубого колеса состоит из угла торцового и угла осевого перекрытий, следовательно, коэффициент перекрытия ε_γ косозубой передачи равен сумме коэффициентов торцового ε_α и осевого ε_β перекрытия:

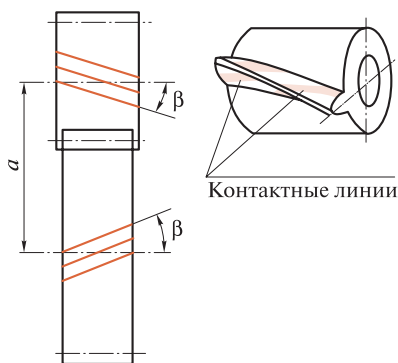


Рис. 33.9

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta > 2,$$

поэтому у *косозубой передачи нет периода однопарного зацепления.*

Косозубые колеса обрабатывают теми же зуборезными инструментами, что и прямозубые, поэтому *стандартные параметры колес задаются в нормальном к зубу сечении pp* (рис. 33.10, а). *Нормальный модуль $m_n = p_n/\pi$* , где p_n — нормальный шаг, измеренный по делительной поверхности. Кроме нормального модуля в косозубых колесах различают *окружной модуль $m_t = p_t/\pi$* , где p_t — окружной шаг, измеряемый по дуге делительной окружности в торцовом сечении; *осевой модуль $m_x = p_x/\pi$* , где p_x — осевой шаг, измеряемый по образующей делительного цилиндра.

Так как $p_t = p_n/\cos\beta$, то $m_t = m_n/\cos\beta$.

Размеры зубьев косозубого колеса определяют по нормальному модулю, т. е.

$$h = h_a + h_f = m_n + 1,25m_n = 2,25m_n,$$

а диаметр делительной окружности колеса по окружному модулю

$$d = m_t z = \frac{m_n z}{\cos\beta}.$$

Размеры косозубых колес и межосевое расстояние передачи определяют по следующим формулам:

диаметр вершин зубьев

$$d_a = d + 2h_a = d + 2m_n;$$

диаметр впадин

$$d_f = d - 2h_f = d - 2,5m_n;$$

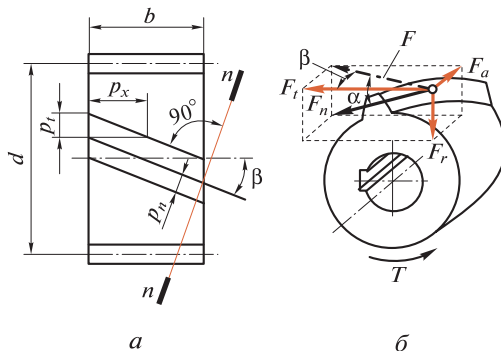


Рис. 33.10

межосевое расстояние

$$a = m_t \frac{z_1 + z_2}{2} = m_n \frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta}.$$

Коэффициент осевого перекрытия косозубой передачи

$$\varepsilon_\beta = \frac{b}{p_x},$$

где b — ширина венца; p_x — осевой шаг.

Нетрудно показать, что если ε_β — целое число, то суммарная длина контактных линий будет все время оставаться постоянной, что благоприятно для работы передачи, так как нагрузка на зубья в процессе зацепления будет оставаться постоянной, а шум и динамические нагрузки уменьшатся. Суммарная длина контактных линий в этом случае равна

$$l_\Sigma = \frac{b\varepsilon_\alpha}{\cos \beta}.$$

Силу нормального давления F_n в зацеплении косозубых колес можно разложить на три взаимно-перпендикулярные составляющие (рис. 33.10, б): окружную силу F_t , радиальную силу F_r и осевую силу F_a , равные:

$$F_t = \frac{2T}{d}; \quad F_r = \frac{F_t \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}; \quad F_a = F_t \operatorname{tg} \beta,$$

где T — передаваемый вращающий момент; α — угол зацепления.

Наличие осевой силы — существенный недостаток косозубых передач. Во избежание больших осевых сил в косозубой передаче угол наклона линии зуба ограничивают значениями $\beta = 8 \dots 20^\circ$, несмотря на то, что с увеличением β увеличивается прочность зубьев, плавность работы передачи, ее нагрузочная способность.

В современных передачах косозубые колеса имеют преимущественное распространение.

В отличие от косозубой в винтовой зубчатой передаче (рис. 33.1, и) между зубьями возникает не линейный, а точечный контакт, что значительно увеличивает контактные напряжения и снижает нагрузочную способность передачи. Кроме того, в винтовой зубчатой передаче значительной величины достигает относительное скольжение зубьев, что существенно снижает ее КПД, создает склонность к заеданию и вызывает быстрый износ зубьев. Учитывая эти недостатки, винтовые зубчатые передачи не следует применять в качестве силовых передач.

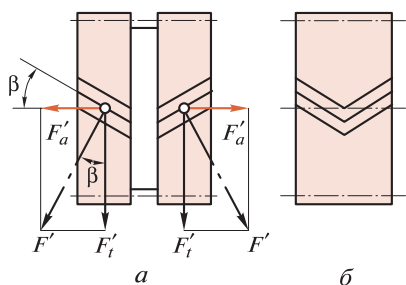


Рис. 33.11

Обязательное условие для винтовой зубчатой передачи — равенство нормальных модулей. Углы наклона линии зуба ведущего и ведомого колес могут быть различными, и угол скрещивания осей может быть не равен 90° .

Цилиндрическое зубчатое колесо, венец которого по ширине состоит из участков с правыми и левыми зубьями, называется **шевронным** (рис. 33.1, в). Часть венца с зубьями одинакового направления называется **полушевроном**. Из технологических соображений шевронные колеса изготавливают двух типов (рис. 33.11): с дорожкой посередине колеса (а) и без дорожки (б). В шевронном колесе осевые силы F_a' на полушевронах, направленные в противоположные стороны, **взаимно уравниваются внутри колеса и на валы и опоры валов не передаются**. Поэтому у шевронных колес угол наклона зубьев принимают в пределах $\beta = 25 \dots 40^\circ$, в результате чего повышаются прочность зубьев, плавность работы передачи и ее нагрузочная способность. Шевронные колеса применяют в мощных быстроходных закрытых передачах. **Недостатком** шевронных колес является высокая трудоемкость и себестоимость изготовления.

Геометрические, кинематические и прочностные расчеты шевронной и косозубой передач аналогичны.

Эквивалентные колеса. Прочность зуба косозубого колеса определяется его формой и размерами в нормальном сечении и длиной зуба.

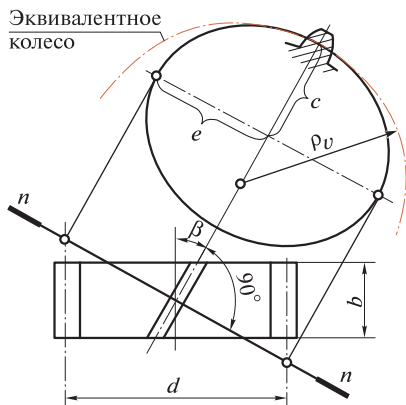


Рис. 33.12

Чтобы унифицировать методику расчетов на прочность прямых и косых зубьев, введено понятие эквивалентного колеса. **Эквивалентным прямозубым колесом** называется такое колесо, размеры и форма зубьев которого приблизительно совпадают с размерами и формой зуба косозубого колеса в нормальном сечении. На рис. 33.12 изображено косозубое колесо, пересеченное плоскостью nn ; нормальное сечение делительной цилиндрической поверхности этого колеса пред-

ставляет собой эллипс с полуосями $e = d/(2 \cos \beta)$ и $c = d/2$, где d — диаметр делительной окружности. Как известно из аналитической геометрии, максимальный радиус кривизны эллипса

$$\rho_v = \frac{e^2}{c} = \frac{d}{2 \cos^2 \beta}.$$

Этот радиус кривизны принимаем за радиус делительного цилиндра эквивалентного колеса, тогда его диаметр

$$d_v = \frac{d}{\cos^2 \beta}.$$

Подставив в это выражение $d_v = m_n z_v$ и $d = m_n z / \cos \beta$, получим формулу для определения числа зубьев эквивалентного прямозубого колеса (короче, эквивалентного числа зубьев):

$$z_v = \frac{z}{\cos^3 \beta}.$$

Параметры d_v и z_v эквивалентного колеса возрастают с увеличением угла β , что является одной из причин повышения нагрузочной способности косозубых колес по сравнению с прямозубыми и *дает возможность при одинаковой нагрузке иметь передачу с меньшими габаритными размерами.*

33.5. МАТЕРИАЛЫ, КОНСТРУКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОЛЕС И МЕТОДЫ ОБРАЗОВАНИЯ ЗУБЬЕВ

Материалы для изготовления зубчатых колес в машиностроении — стали, чугуны и пластмассы; в приборостроении зубчатые колеса изготавливают также из латуни, алюминиевых сплавов и др. Выбор материала определяется назначением передачи, условиями ее работы, габаритными размерами колес и даже типом производства (единичное, серийное или массовое) и технологическими соображениями.

Общая современная тенденция в машиностроении — стремление к снижению материалоемкости конструкций, увеличению мощности, быстроходности и долговечности машины. Эти требования приводят к необходимости уменьшения массы, габаритных размеров и повышения нагрузочной способности силовых зубчатых передач. Поэтому основные материалы для изготовления зубчатых колес — термообработанные углеродистые и легированные стали, обеспечивающие высокую объемную прочность зубьев,

а также высокую твердость и износостойкость их активных поверхностей.

В зависимости от твердости активных поверхностей зубьев стальные колеса делятся на две группы, а именно: колеса с твердостью $H \leq 350$ НВ, зубья которых хорошо прирабатываются; колеса с твердостью $H > 350$ НВ, зубья которых прирабатываются плохо, а при твердости активных поверхностей обоих колес $H \geq \text{HRC}$ полагаются неприрабатываемыми.

Кроме способности к приработке эти группы различны по технологии механической обработки, а также по нагрузочной способности.

Колеса первой группы, изготавливаемые из средне- и высокоуглеродистых сталей, подвергают нормализации или улучшению; чистовое нарезание зубьев производят после термообработки, и применения отделочных операций не требуется. Эти технологические преимущества колес первой группы обеспечивают их широкое применение при единичном или мелкосерийном производстве мало- и средненагруженных передач, а также передач с крупногабаритными колесами.

Колеса второй группы изготавливают из легированных сталей, подвергаемых различным видам термической и химико-термической обработки (цементация, объемная или поверхностная закалка, азотирование, планирование, нитроцементация), и применяют для быстроходных и высоконагруженных передач.

Зубья колес второй группы нарезают до термической обработки, при которой происходит коробление зубьев и снижение точности зубчатого венца. Для исправления формы зубьев требуются дорогостоящие отделочные операции (шлифовка, обкатка, притирка зубьев и др.), поэтому колеса с зубьями высокой твердости применяют в изделиях крупносерийного и массового производства. При прочих равных условиях масса колес второй группы в 3—4 раза меньше, чем первой.

Для изготовления тихоходных, преимущественно открытых передач, работающих с окружной скоростью до 3 м/с, применяют серые, модифицированные и высокопрочные чугуны, обладающие хорошими литейными свойствами, низкой стоимостью при минимальных отходах материала в стружку.

Нагрузочная способность зубчатых колес из *неметаллических* материалов значительно ниже, чем стальных, поэтому их используют в слабонагруженных передачах, к габаритным размерам которых не предъявляется жестких условий, но требуются снижение шума и вибраций, самосмазываемость или химическая стойкость. Зубча-

тые колеса из неметаллических материалов чаще всего используют в паре с металлическими. Для изготовления неметаллических колес применяют текстолит, древеснослоистые пластики, капрон, нейлон и др.

При выборе материалов и назначении их термообработки необходимо учитывать, что зуб шестерни в u (передаточное число) раз чаще входит в зацепление, чем зуб колеса. Поэтому для стальных колес первой группы в целях выравнивания долговечности и улучшения прирабатываемости следует твердость активных поверхностей зубьев шестерни делать большей, чем у колеса, причем рекомендуется иметь

$$H_{1cp} - H_{2cp} \geq 20.$$

Для изготовления шестерни и колеса первой группы целесообразно использовать сталь одной марки, а разность твердости обеспечивать за счет термообработки.

Для колес с неприрабатываемыми зубьями обеспечивать разность твердостей зубьев шестерни и колеса не требуется.

Конструкция цилиндрических колес зависит от их материала, размеров и способа изготовления.

Стальные зубчатые колеса диаметром до 150 мм (рис. 33.13) изготавливают из прутка или поковки и выполняют в виде сплошных дисков с двусторонней (*а*), односторонней (*б*) ступицей либо без нее (*в*). Стальные колеса диаметром до 500 мм чаще всего изготавливают коваными или штампованными; они имеют обод и ступицу, соединенные диском с отверстиями (рис. 33.13, *г*). Шестерни, диаметр которых меньше удвоенного диаметра вала, изготавливают как

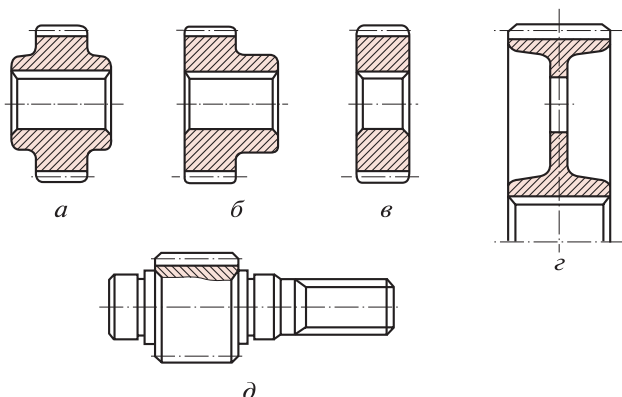


Рис. 33.13

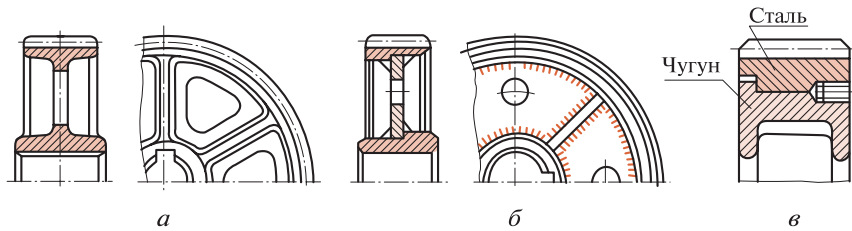


Рис. 33.14

единое целое с валом и называют *вал-шестерня* (рис. 33.13, д). В коробках скоростей применяют несколько шестерен, изготовленных из одного куска металла; такие зубчатые колеса называют *блоками шестерен*. Колеса диаметром более 500 мм обычно изготавливают отливкой; обод и ступицы соединяются спицами крестообразного (рис. 33.14, а), овального, таврового и других сечений. В единичном производстве колеса большого диаметра делают сварной конструкции (рис. 33.14, б). В целях экономии высококачественной стали колеса больших диаметров нередко делают бандажированными (рис. 33.14, в), когда стальной обод насаживается на чугунный центр; применяют также конструкции, в которых обод и центр соединяют крепежными болтами.

Как известно из технологии металлов, различные стали обладают разной прокаливаемостью. Это свойство стали зависит не только от их химического состава и принятой термообработки, но и от размеров деталей. Чтобы получить после термообработки нужные механические характеристики, для каждой марки стали устанавливают предельно допустимые диаметры заготовок шестерни и толщины сечений колеса с учетом припусков на механическую обработку.

Так, например, для стали 40Х, улучшенной до твердости 235... 262 НВ, допускается диаметр заготовки шестерни до 200 мм, а толщина сечения заготовки колеса до 125 мм. При более высокой твердости эти параметры снижаются соответственно до 125 и 80 мм (подробно см. в учебных пособиях по курсовому проектированию).

Чугунные зубчатые колеса независимо от их размера изготавливают отливкой с последующей механической обработкой.

Неметаллические зубчатые колеса изготавливают цельными или составными. На рис. 33.15 показано составное зубчатое

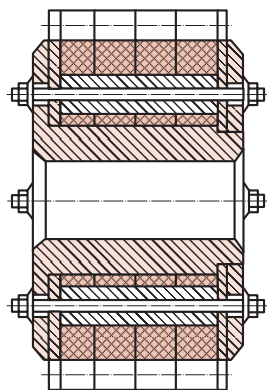


Рис. 33.15

колесо из склеенных пластин текстолита, надетых на металлическую втулку и скрепленных дисками с помощью болтов. Зубчатые колеса из капрона и нейлона изготавливают отливкой под давлением; нередко венец из этих материалов отливают вместе со стальным центром или насаживают на центр с натягом и скрепляют винтами.

Методы образования зубьев можно разделить на две основные группы: накатывание и нарезание (кроме того, иногда изготавливают колеса с литыми зубьями).

Накатывание зубьев стальных колес производится накатным инструментом путем пластической деформации венца колеса. Накатывание зубьев с модулем до 1 мм производится в холодном состоянии; при большем модуле венец нагревается токами высокой частоты.

Зубонакатывание применяется в массовом производстве и является высокопроизводительным методом, обеспечивающим минимальные отходы металла в стружку и повышение прочности зубьев, так как волокна металла в заготовке не перерезаются, а изгибаются.

Нарезание зубьев выполняют методом копирования и методом обкатки.

Метод копирования заключается в том, что впадины зубчатого венца прорезаются инструментом, профиль режущей части которого точно или приблизительно соответствует очертаниям впадины. На рис. 33.16 показано фрезерование зубьев цилиндрического колеса модульными фрезами: дисковой (*а*) и концевой (*б*). После прорезания одной впадины заготовка возвращается в исходное положение, поворачивается на величину углового шага, и процесс повторяется.

Так как с изменением числа зубьев колеса меняется и форма впадины, то для каждого модуля и числа зубьев нужно иметь свою фрезу, что практически невозможно. Поэтому фрезой одного модуля прорезают впадины в определенном диапазоне чисел зубьев (например, фрезой для 30 зубьев обрабатывают колеса с числом зубьев от 24 до 36), в результате чего зубья не всегда будут иметь точный профиль. Фрезерование зубьев методом копирования является простым, но недостаточно точным и весьма малопродуктивным методом, применяющимся в основном в единичном производстве.

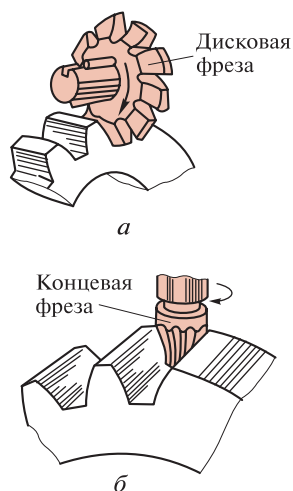


Рис. 33.16

К методу копирования можно отнести способы образования зубьев колес протягиванием, холодной или горячей штамповкой, а также прессованием и литьем под давлением.

Метод обкатки (огибания) является весьма точным, высокопроизводительным, универсальным и наиболее распространенным способом образования зубьев. Рассмотренный ранее процесс накатывания зубьев можно отнести к методу обкатки.

Процесс нарезания зубьев на зубообрабатывающих станках *уподобляется процессу зацепления* пары зубчатых колес или колеса с рейкой, когда одно из колес или рейка снабжены режущими элементами и превращены, таким образом, в режущий инструмент, называемый *производящим колесом*. Зубчатое зацепление производящего колеса с обрабатываемым зубчатым колесом называется *станочным зацеплением*. На рис. 33.17 показаны основные виды станочных зацеплений и соответствующие движения инструмента и заготовки: *а* — нарезание зубьев инструментальной рейкой (зуборезной гребенкой) на зубодолбежном станке; *б* — нарезание зубьев зуборезным долбяком на зубодолбежном станке; *в* — нарезание зубьев червячной модульной фрезой на зубофрезерном станке (червячная модульная фреза в осевом сечении имеет профиль инструментальной рейки).

Зуборезный инструмент профилируют на основе стандартных исходных контуров, один из которых (для цилиндрических эвольвентных зубчатых колес с модулями более 1 мм) показан на рис. 33.7. *Одним и тем же инструментом можно нарезать колеса данного модуля с разным числом зубьев*, что является весьма существенным достоинством метода обкатки. На зубодолбежных станках долбяком обрабатывают колеса как с внешними, так и внутренними зубьями. Червячными фрезами на зубофрезерных станках можно нарезать прямозубые, косозубые и шевронные колеса с дорожкой посередине (для выхода режущего инструмента); шевронные колеса без дорожки нарезают специальными косозубыми долбяками или гребенками. Наиболее производительным способом нарезания зубьев является фрезерование червячной фрезой. Как правило, зуборезные станки — полуавтоматы.

При необходимости получения весьма точных и чистых поверхностей зубьев применяют *отделочные операции*: шевингование, обкатку (для зубьев невысокой твердости) или шлифование, притирку (для закаленных зубьев).

Зубчатые колеса со смещением. Необходимость снижения материалоемкости конструкций и получения минимальных габаритных размеров приводит к необходимости создания передач с возможно меньшим числом зубьев. Однако при нарезании шестерен с малым

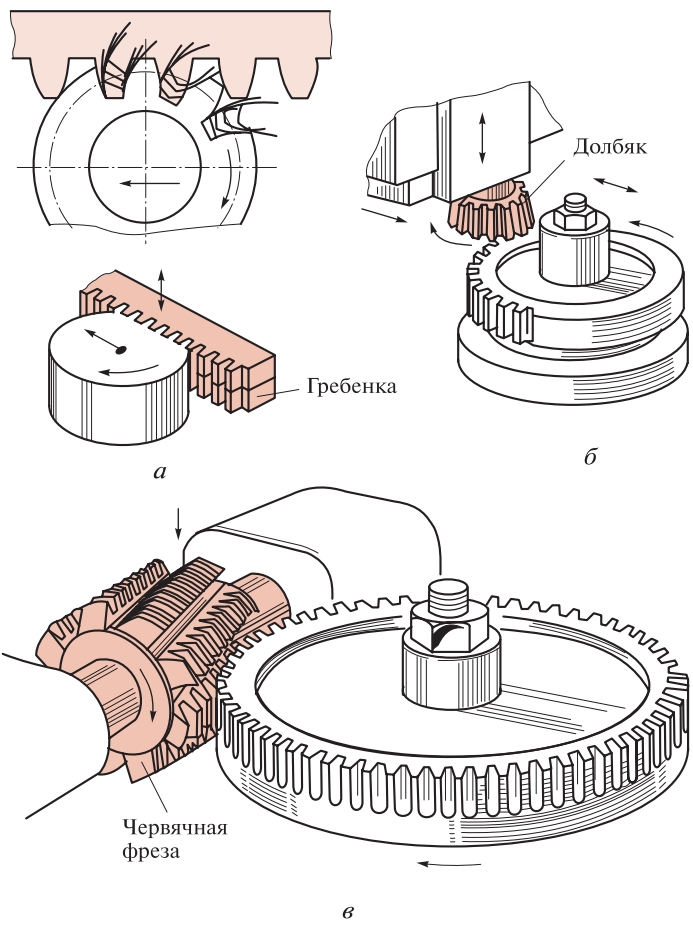


Рис. 33.17

числом зубьев в станочном зацеплении возникает явление *интерференции зубьев*, когда часть пространства оказывается одновременно занятой зубьями производящего и обрабатываемого колес.

Интерференция приводит к срезанию части номинальной поверхности у основания зуба обрабатываемого колеса (*подрезание зубьев*) или срезанию части номинальной поверхности у вершины зуба (*сревание зубьев*, свойственное колесам с внутренними зубьями).

На рис. 33.18, *a* показано изменение формы зуба в зависимости от числа зубьев колеса.

При уменьшении числа зубьев толщина их у основания уменьшается, у вершины зуб заостряется, а кривизна эвольвентного профиля

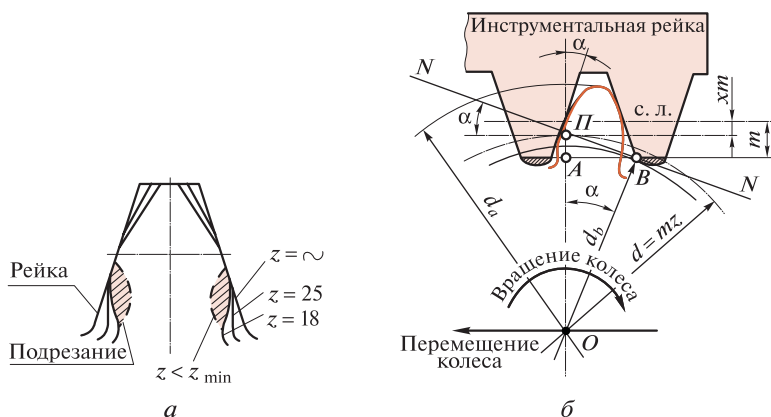


Рис. 33.18

увеличивается — *все это приводит к уменьшению прочности зуба*. При числе зубьев, меньшем z_{\min} , в станочном зацеплении возникает явление интерференции и происходит подрезание зубьев. *Для того чтобы избежать подрезания зубьев в станочном зацеплении*, производят смещение инструментальной рейки на величину xm , где x — коэффициент смещения; m — модуль зубьев (рис. 33.18, б).

Смещение рейки от оси колеса считают положительным, а к оси — отрицательным. На рисунке показано предельное положение рейки, при котором подрезание зубьев прекращается, т.е. положение, когда линия AB вершины инструментальной рейки (заштрихованная закругленная часть рейки в образовании активного профиля зубьев не участвует) будет проходить через точку B на линии зацепления. Так как размеры зуба инструмента стандартизованы, то при прочих равных условиях опасность возникновения подрезания определяется числом зубьев колеса. Определим z_{\min} .

Из рис. 33.18, б следует, что

$$AP = \frac{d - d_b \cos \alpha}{2} = \frac{d - d \cos^2 \alpha}{2} = m - xm.$$

Так как $d = mz$, то

$$mz - mz \cos^2 \alpha = 2(m - xm).$$

Сократив равенство на m , получим

$$z(1 - \cos^2 \alpha) = 2(1 - x)$$

или, учитывая, что $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$,

$$z \sin^2 \alpha = 2(1 - x).$$

При $z = z_{\min}$, когда не будет подрезания, не будет необходимости смещения рейки, т.е. $x = 0$, следовательно, при нарезании зубьев гребенкой

$$z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} = \frac{2}{\sin^2 20^\circ} = 17.$$

Минимальное число зубьев, которое можно без подрезания нарезать зуборезным долбяком, зависит от числа зубьев долбяка и передаточного числа в станочном зацеплении и колеблется в пределах $13 < z_{\min} < 17$. Для косозубых колес z_{\min} меньше, чем для прямозубых.

Зубчатые колеса нарезают со смещением не только для устранения подрезания, но и для улучшения формы зубьев и увеличения их прочности.

Если нарезать зубчатое колесо с положительным смещением (см. рис. 33.18, б), то увеличится (на высоту смещения) высота головки зуба и соответственно уменьшится на ту же величину высота ножи; диаметр заготовки также увеличится и станет равным

$$d_a = mz + 2(m + xm);$$

при отрицательном смещении все будет наоборот.

Если шестерню нарезать с положительным, а колесо — с таким же отрицательным смещением (алгебраическая сумма смещений равна нулю), то межосевое расстояние, угол зацепления и другие параметры передачи останутся неизменными, за исключением высот головок и ножек зубьев. Если алгебраическая сумма смещений не равна нулю, то изменяется не только соотношение между высотами головок и ножек зубьев, но и межосевое расстояние и угол зацепления.

Колеса со смещением нарезают тем же стандартным зуборезным инструментом и на тех же станках, что и колеса без смещения.

В заключение отметим, что в цилиндрических зубчатых передачах общего машиностроения (в частности, в редукторах) число зубьев меньшего колеса рекомендуется принимать равным $z = 20 \dots 25$.

33.6. КРИТЕРИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС И РАСЧЕТНАЯ НАГРУЗКА

При передаче вращающего момента T в зацеплении зубчатых колес действуют сила нормального давления F_n (рис. 33.19, в) и связанная с относительным геометрическим скольжением активных поверхностей зубьев сила трения $F_{тр} = fF_n$, где f — коэффициент трения скольжения. Как было установлено ранее, скорость скольжения

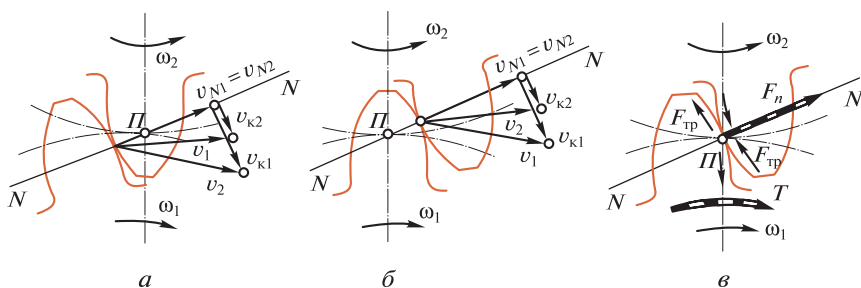


Рис. 33.19

прямо пропорциональна расстоянию контактных точек от полюса; при зацеплении в полюсе скорость скольжения равна нулю.

Для определения направления сил трения рассмотрим допущенное и заповушенное зацепления одной пары зубьев (рис. 33.19, а, б). Разложим каждый из векторов скоростей v_1 и v_2 точек контакта на две взаимно-перпендикулярные составляющие: v_N — контактную нормальную скорость и v_k — скорость общей точки контакта зубьев в направлении скольжения. Тогда скорость скольжения v_s контактных точек профилей зубьев равна: допущенное зацепление $v_s = v_{k2} - v_{k1}$ (см. рис. 33.19, а); заповушенное зацепление $v_s = v_{k1} - v_{k2}$ (см. рис. 33.19, б), причем в обоих случаях v_k головки зуба больше, чем у сопряженной с ней ножки. Следовательно, *активная поверхность головки зуба является опережающей, а ножки зуба — отстающей*. Направление сил трения у зубьев ведущего и ведомого колес показано на рис. 33.19, в.

Под действием сил нормального давления и трения зуб колеса испытывает сложное напряженное состояние, но решающее влияние на его работоспособность оказывают два фактора: *контактные напряжения* σ_H и *напряжения изгиба* σ_F , которые действуют на зуб только во время нахождения его в зацеплении и являются, таким образом, *повторно-переменными*.

Повторно-переменные напряжения изгиба вызывают появление усталостных трещин у растянутых волокон основания зуба (место концентрации напряжений), которые с течением времени приводят к его *поломке* (рис. 33.20, а, б).

Повторно-переменные контактные напряжения и силы трения приводят к *усталостному изнашиванию* активных поверхностей зубьев. Как было установлено ранее, сопротивление усталостному изнашиванию у опережающих поверхностей выше, чем у отстающих, поэтому *нагрузочная способность головок зубьев выше, чем ножек*. Этим объясняется отслаивание и выкрашивание частиц материала на активной поверхности ножек зубьев (рис. 33.20, в) при

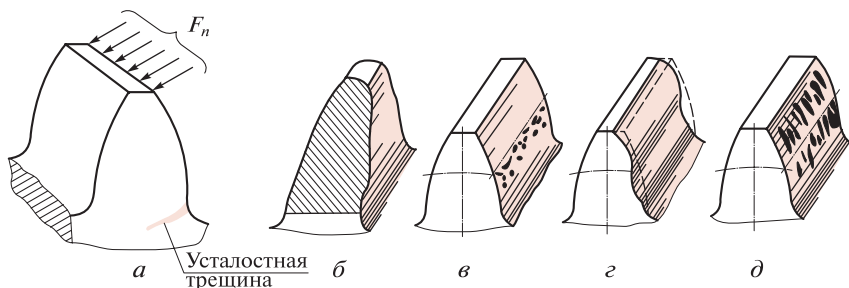


Рис. 33.20

отсутствии видимых усталостных повреждений головок. Усталостное изнашивание активных поверхностей зубьев характерно для работы закрытых передач.

В открытых передачах и в передачах с плохой (загрязняемой) смазкой усталостное изнашивание опережается абразивным износом активных поверхностей зубьев (рис. 33.20, з).

В тяжело нагруженных и высокоскоростных передачах в зоне контакта зубьев возникает высокая температура, способствующая разрыву масляной пленки и образованию металлического контакта, в результате чего происходит *заедание* зубьев (рис. 33.20, д), которое может завершиться прекращением относительного движения колес передачи.

Итак, *критерием работоспособности зубчатых передач является износостойкость активных поверхностей зубьев и их изгибная прочность.*

Расчетная нагрузка. Расчеты на прочность металлических цилиндрических эвольвентных зубчатых передач внешнего зацепления с модулем от 1 мм и выше регламентированы ГОСТ 21354—87.

Далее приняты следующие буквенные обозначения: K — коэффициенты, учитывающие влияние отдельных факторов на расчетную нагрузку; Z — специфические коэффициенты для расчетов на контактную прочность; Y — специфические коэффициенты для расчетов на изгиб; S — коэффициент запаса прочности; индекс H — для величин, учитываемых при расчете на контактную прочность; индекс F — для величин, учитываемых при расчете на изгиб.

Для вывода расчетных формул за *расчетную нагрузку* примем *удельную расчетную окружную силу*, определяемую по формуле

$$w_t = \frac{F_t K_\beta K_v}{b},$$

где F_t — окружная сила; K_β — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по длине зуба; K_v — коэффи-

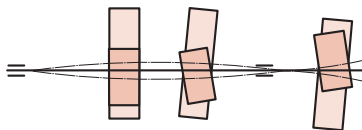


Рис. 33.21

работе передач такое распределение нагрузки маловероятно, даже у точно изготовленных передач.

Неравномерность распределения нагрузки по длине зуба возникает в результате следующих основных причин: непараллельность и перекося осей валов за счет неточностей изготовления корпусных деталей и неточностей сборки; погрешностей при изготовлении зубчатых колес и валов; деформации валов (изгиб и кручение) под нагрузкой. На рис. 33.21 показан перекося зубчатых колес в результате изгиба валов под нагрузкой. При симметричном расположении колес относительно опор вала перекося не возникает, а некоторое изменение межосевого расстояния для эвольвентной передачи значения не имеет; при несимметричном или консольном (наиболее неблагоприятном) расположении колесо перекашивается, что нарушает правильность контакта зубьев. В результате упругих деформаций обычно сохраняется контакт зубьев по всей длине, но нагрузка на единицу длины распределяется неравномерно, причем эта неравномерность возрастает с увеличением ширины венца, поэтому последнюю ограничивают. Неравномерность распределения нагрузки у прирабатывающихся зубьев ($H \leq 350$ НВ) с течением времени уменьшается.

Для определения ориентировочных значений K_β в стандарте имеются графики, приведенные на рис. 33.22, 33.23, где $K_{H\beta}$ — коэффициент неравномерности при расчете на контактную прочность; $K_{F\beta}$ — коэффициент неравномерности при расчете на изгиб; ψ_{bd} — коэффициент ширины венца колеса по диаметру делительной окружности шестерни. Каждая из кривых графиков соответствует определенному положению колес относительно опор валов; цифры у кривых соответствуют передачам, указанным на схемах; кривые 1 и 2 для случаев консольного расположения колес на валах, опирающихся соответственно на шариковые и роликовые подшипники качения. Графики разработаны для наиболее распространенного на практике режима работы с переменной нагрузкой и окружной скоростью $v < 15$ м/с. При постоянной нагрузке, твердости хотя бы одного из колес $H < 350$ НВ и скорости $v < 15$ м/с происходит полная приработка зубьев; при этих условиях принимают $K_\beta = 1$.

Коэффициент динамичности нагрузки K_v учитывает динамические нагрузки, возникающие в зацеплении в результате неточностей

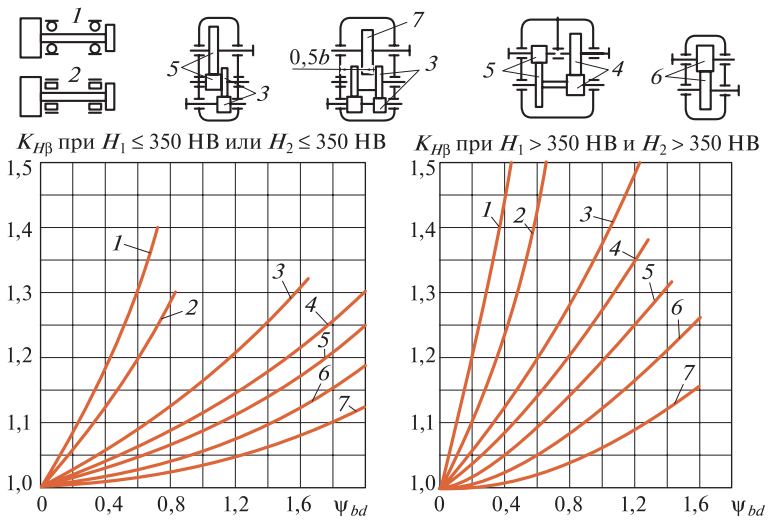


Рис. 33.22

изготовления деталей передачи, погрешностей зацепления, деформации зубьев, приводящих к непостоянству действительных значений мгновенного передаточного отношения. Величина K_v зависит от степени точности изготовления колес, вида передачи, твердости активных поверхностей зубьев и окружной скорости колес.

Значения $K_{H\alpha}$ и $K_{F\alpha}$ для цилиндрических передач, работающих с окружными скоростями до 10 м/с, приведены в табл. 33.2 и 33.3,

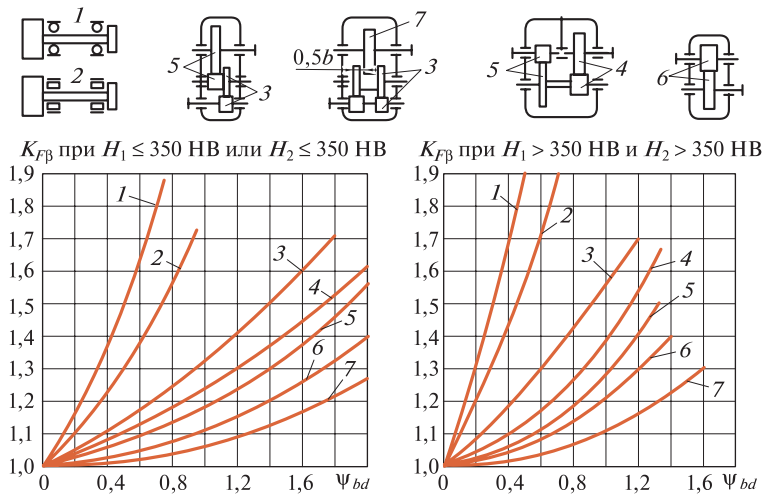


Рис. 33.23

Таблица 33.2

Степень точности	Твердость поверхности зубьев НВ		Коэффициент $K_{H\alpha}$ при окружной скорости, м/с					
			1	2	4	6	8	10
7	<i>a</i>	≤ 350	1,04/1,01	1,07/1,03	1,14/1,05	1,21/1,06	1,29/1,07	1,36/1,08
	<i>б</i>	> 350	1,03/1,00	1,05/1,01	1,09/1,02	1,14/1,03	1,19/1,03	1,24/1,04
8	<i>a</i>	≤ 350	1,04/1,01	1,08/1,03	1,16/1,02	1,23/1,06	1,32/1,07	1,40/1,08
	<i>б</i>	> 350	1,03/1,01	1,06/1,01	1,10/1,02	1,16/1,03	1,22/1,04	1,26/1,05
9	<i>a</i>	≤ 350	1,05/1,01	1,01/1,03	1,20/1,05	1,30/1,07	1,40/1,09	1,50/1,12
	<i>б</i>	> 350	1,04/1,01	1,07/1,01	1,13/1,02	1,20/1,03	1,26/1,04	1,32/1,05

Таблица 33.3

Степень точности	Твердость поверхности зубьев НВ		Коэффициент $K_{F\alpha}$ при окружной скорости, м/с					
			1	2	4	6	8	10
7	<i>a</i>	≤ 350	1,08/1,03	1,16/1,06	1,33/1,11	1,50/1,16	1,62/1,22	1,80/1,27
	<i>б</i>	> 350	1,03/1,01	1,05/1,02	1,09/1,03	1,13/1,05	1,17/1,07	1,22/1,08
8	<i>a</i>	≤ 350	1,01/1,03	1,20/1,06	1,38/1,11	1,58/1,17	1,78/1,23	1,96/1,29
	<i>б</i>	> 350	1,04/1,01	1,06/1,02	1,12/1,03	1,16/1,05	1,21/1,07	1,26/1,08
9	<i>a</i>	≤ 350	1,13/1,04	1,28/1,07	1,50/1,14	1,72/1,21	1,98/1,28	2,25/1,35
	<i>б</i>	> 350	1,04/1,01	1,07/1,02	1,14/1,04	1,21/1,06	1,27/1,08	1,34/1,09

причем в числителе даны значения для прямозубых, а в знаменателе — для косозубых колес; строки a — для передач с твердостью зубьев колеса $H_2 \leq 350$ НВ; строки b — для передач с твердостью зубьев шестерни и колеса H_1 и $H_2 > 350$ НВ. При окружной скорости $v > 10$ м/с для определения K_{Hv} и K_{Fv} используют формулы, приведенные в стандарте.

33.7. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ НА ПРОЧНОСТЬ

Приведенная в этом параграфе методика расчета и обозначений эвольвентных зубчатых передач в основном соответствует стандарту, но содержит некоторые упрощения, которые не оказывают существенного влияния на результаты расчетов и необходимы с точки зрения учебного процесса.

Расчет зубьев на контактную усталость. Контакт двух зубьев цилиндрических зубчатых колес рассматривается как контакт по образующим двух цилиндров и, следовательно, является линейным контактом. Наибольшие контактные напряжения (рис. 33.24) возникают при соприкосновении зубьев в полюсе (в зоне однопарного зацепления прямозубых передач).

Максимальные контактные напряжения при линейном контакте определяются по известной нам из гл. 31 формуле Герца, которая для стальных колес с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ будет иметь вид

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{qE_{np}}{\rho_{np}}},$$

где q — нормальная нагрузка на единицу длины контактных линий (для прямозубых передач длина контактной линии равна рабочей ширине венца); E_{np} — приведенный модуль упругости материалов колес; ρ_{np} — приведенный радиус кривизны зубьев.

Из свойств эвольвенты мы знаем, что центры ее кривизны лежат на основной окружности (см. рис. 33.3 и 33.4), следовательно, для пары зубьев (см. рис. 33.24) радиусы кривизны зубьев в точке касания будут

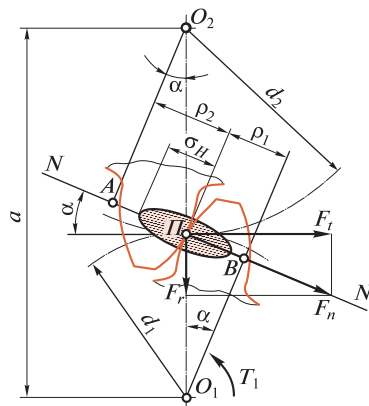


Рис. 33.24

$$\rho_1 = 0,5d_1 \sin \alpha;$$

$$\rho_2 = 0,5d_2 \sin \alpha.$$

Если колеса косозубые, то радиусы кривизны зубьев определяются по размерам эквивалентных колес, следовательно,

$$\rho_1 = 0,5d_1 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \beta};$$

$$\rho_2 = 0,5d_2 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \beta}.$$

Тогда, учитывая, что $d_2 = d_1 u$, где u — передаточное число, получим

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2 \cos^2 \beta}{d_1 \sin \alpha} + \frac{2 \cos^2 \beta}{d_1 u \sin \alpha} = 2(u+1) \frac{\cos^2 \beta}{d_1 u \sin \alpha}.$$

Нормальная нагрузка q на единицу длины контактных линий для косозубых колес с учетом неравномерности и динамичности нагрузки равна $q = \frac{F_n K_{H\beta} K_{Hv}}{l_\Sigma} = \frac{w_{Ht}}{\varepsilon_\alpha \cos \alpha}$ (так как сила нормального давления $F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha \cos \beta}$, суммарная длина контактных линий $l_\Sigma = \frac{\varepsilon_\alpha b}{\cos \beta}$), а

$$w_{Ht} = \frac{F_t K_{H\beta} K_{Hv}}{b}.$$

Подставляя полученные выражения $1/\rho_{np}$ и q в формулу Герца и заменяя произведение $\sin \alpha \cos \alpha$ на $0,5 \sin 2\alpha$, получим

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{4w_{Ht} E_{np} \cos^2 \beta (u+1)}{\varepsilon_\alpha d_1 u \sin 2\alpha}}.$$

Введем обозначение $Z = 0,418 \sqrt{\frac{4 \cos^2 \beta E_{np}}{\varepsilon_\alpha \sin 2\alpha}}$ — коэффициент, учитывающий геометрию передачи, свойства материала и коэффициент торцового перекрытия. В результате по условию нагрузочной способности $\sigma_H \leq [\sigma_H]$ получаем формулу для *проверочного расчета* на контактную усталость активных поверхностей зубьев стальных цилиндрических колес:

$$\sigma_H = Z \sqrt{\frac{w_{Ht} (u+1)}{d_1 u}} \leq [\sigma_H],$$

где $[\sigma_H]$ — допускаемое контактное напряжение; $Z \approx 462 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}$ для прямозубых передач; $Z \approx 376 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}$ для косозубых и шевронных передач.

Так как $w_{Ht} = \frac{F_t K_{H\beta} K_{Hv}}{b} = \frac{2T_1 K_{H\beta} K_{Hv}}{bd_1}$, то окончательно имеем

$$\sigma_H = Z \sqrt{\frac{2T_1(u+1)}{bd_1^2 u}} K_{H\beta} K_{Hv} \leq [\sigma_H].$$

При выводе формулы для проектного расчета необходимо уменьшить количество неизвестных величин, что достигается введением коэффициента ширины венца относительно диаметра $\psi_{bd} = b_2/d_1$. Тогда

$$\sigma_H = Z \sqrt{\frac{2T_1(u+1)}{d_1^3 \psi_{bd} u}} K_{H\beta} K_{Hv} \leq [\sigma_H].$$

Приравняв контактное напряжение σ_H допускаемому $[\sigma_H]$, учитывая, что $T_1 = T_2/u$, получим формулу для проектного расчета:

$$d_1 = K_d \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\beta} (u+1)}{\psi_{bd} [\sigma_H]^2 u^2}},$$

где

$$K_d = \sqrt[3]{2Z^2 K_{Hv}}.$$

При проектном расчете можно определять межосевое расстояние a , для чего вводится коэффициент ширины колеса по межосевому расстоянию $\psi_{ba} = b/a$ и учитывается, что $d_1 = 2a/(u+1)$. После преобразования получим формулу

$$a = K_a (u+1) \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\beta}}{\psi_{bd} [\sigma_H]^2 u^2}},$$

где

$$K_a = \sqrt[3]{0,5Z^2 K_{Hv}}.$$

Для предварительных расчетов прямозубых передач принимают

$$K_{H\beta} \approx 1,3, K_d = 7\,700 \text{ Па}^{1/3}, K_a = 4\,950 \text{ Па}^{1/3}.$$

Нагрузочная способность косозубых и шевронных колес выше, чем прямозубых, поэтому для них рекомендуются следующие значения коэффициентов:

$$K_{H\beta} \approx 1,2, K_d = 6\,750 \text{ Па}^{1/3}, K_a = 4\,300 \text{ Па}^{1/3}.$$

Значения ψ_{bd} выбираются по табл. 33.4, после чего ψ_{ba} определяется по формуле

$$\psi_{ba} = \frac{2\psi_{bd}}{u+1}.$$

Таблица 33.4

Расположение колеса относительно опор	Твердость рабочих поверхностей зубьев	
	$H_2 \leq 350$ НВ или H_1 и $H_2 \leq 350$ НВ	H_1 и $H_2 > 350$ НВ
	Ψ_{ba}	
Симметричное	0,8 ... 1,4	0,4 ... 1,0
Несимметричное	0,6 ... 1,2	0,3 ... 0,5
Консольное	0,3 ... 0,4	0,2 ... 0,25

Большие значения — для постоянных нагрузок и жестких конструкций опор и валов.

После определения межосевого расстояния a из эмпирических соотношений определяют модуль и округляют его значение до стандартного.

При твердости рабочих поверхностей зубьев шестерни и колеса H_1 и $H_2 \leq 350$ НВ принимают $m = (0,01 \dots 0,02)a$, при твердости зубьев шестерни $H_1 > 45$ HRC и колеса $H_2 \leq 350$ НВ принимают $m = (0,0125 \dots 0,025)a$, при твердости зубьев шестерни и колеса H_1 и $H_2 \geq 45$ HRC принимают $m = (0,016 \dots 0,0315)a$.

Для обеспечения равной контактной и изгибной прочности зубьев ориентировочное значение модуля при заданном межосевом расстоянии можно вычислить по формуле

$$m_n = K_{ma} \frac{T_2(u+1)Y_{F1}}{uab[\sigma_{F1}]},$$

где K_{ma} — вспомогательный коэффициент (для прямозубых передач $K_{ma} = 1,4$; для косозубых при $\varepsilon_\beta \leq 1$ $K_{ma} = 1,1$; для косозубых при $\varepsilon_\beta > 1$ и шевронных передач $K_{ma} = 0,85$); Y_{F1} — коэффициент формы зуба шестерни, определяемый по табл. 33.7; $[\sigma_{F1}]$ — допускаемое напряжение изгиба для шестерни.

Основные параметры (межосевые расстояния a , номинальные передаточные числа u , коэффициенты ширины колес Ψ_{ba}) цилиндрических передач для редукторов регламентированы ГОСТ 2185—66 (табл. 33.5 и 33.6).

Стандартные значения Ψ_{ba} : 0,1; 0,125; 0,16; 0,2; 0,25; 0,315; 0,4; 0,5; 0,63; 0,8; 1,0; 1,25.

Учитывая возможное осевое смещение зубчатых колес при сборке передачи, ширину венца шестерни принимают на несколько миллиметров большей, чем ширину венца колеса.

Таблица 33.5

Передаточные числа											
1-й ряд	1,0	—	1,25	—	1,6	—	2,0	—	2,5	—	3,15
2-й ряд	—	1,12	—	1,4	—	1,8	—	2,24	—	2,8	—
1-й ряд	—	4,0	—	5,0	—	6,3	—	8,0	—	10,0	И т.д.
2-й ряд	3,55	—	4,5	—	5,6	—	7,1	—	9,0	—	до 12,5

Таблица 33.6

Межосевое расстояние a , м										
1-й ряд	40	50	63	80	100	125	—	160	—	200
2-й ряд	—	—	—	—	—	—	140	—	180	—
1-й ряд	—	250	—	315	—	400	—	500	—	630
2-й ряд	225	—	280	—	355	—	450	—	560	—
										И т.д. до 2 500

Примечание. В табл. 33.5 и 33.6 1-й ряд следует предпочитать 2-му.

Расчет зубьев на усталость при изгибе. С точки зрения прочности зубьев на изгиб наиболее опасен момент, когда зуб входит в зацепление или выходит из него, а сила нормального давления приложена к вершине зуба (рис. 33.25). При расчетах на изгиб зуб рассматривается как консольная балка, жестко защемленная одним концом, для которой справедлива гипотеза плоских сечений. Кроме того, полагаем, что *вся нагрузка F_n воспринимается только одним зубом*, и пренебрегаем силами трения, что дает возможность считать силу F_n направленной по общей нормали к профилям соприкасающихся зубьев. Так как зуб своей вершиной входит в зацепление не на межосевой линии, то угол, который составляет линия давления с перпендикуляром к оси симметрии зуба, будет немного больше угла зацепления, но этой разницей пренебрегаем и полагаем, что $\alpha' \approx \alpha$.

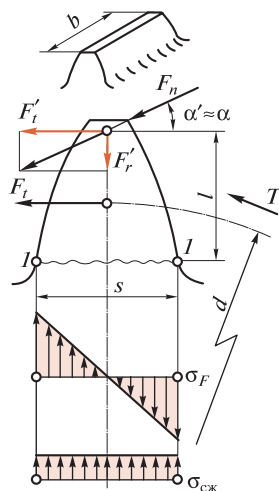


Рис. 33.25

Перенесем силу F_n на ось симметрии зуба и разложим ее на две взаимно-перпендикулярные составляющие F'_l и F'_r , одна из которых будет изгибать зуб, а вторая — сжимать. На рис. 33.25 показаны эпюры напряжений изгиба и сжатия.

Из практики известно, что усталостные трещины (см. рис. 33.20, а) возникают у основания зуба в зоне растянутых волокон. Это происходит потому, что *основание зуба является местом, где возникают наибольшие напряжения изгиба и концентрация напряжений*; последнее будем учитывать, вводя в расчеты теоретический коэффициент концентрации напряжений K_T .

Напряжениями сжатия (сравнительно небольшими) будем пренебрегать, так как на растянутой стороне зуба (где возникают усталостные трещины) суммарные напряжения равны разности напряжений изгиба и сжатия, следовательно, расчет только по напряжениям изгиба даст некоторое увеличение запаса прочности.

Напряжения изгиба σ_F в опасном сечении $I-I$ (см. рис. 33.25) зуба прямозубого колеса вычисляются по следующей формуле:

$$\sigma_F = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}} = \frac{6F'_l l}{bs^2}.$$

Заменим силу F'_l окружной силой $F_t = 2T/d$ (такая замена даст в расчетах отклонение в сторону увеличения запаса прочности, так как $F_t > F'_l$) и введем в расчет теоретический коэффициент концентрации напряжений K_T , коэффициент неравномерности нагрузки $K_{F\beta}$ и коэффициент динамичности нагрузки K_{Fv} , тогда условие прочности прямого зуба на изгиб будет иметь вид

$$\sigma_F = F_t K_{F\beta} K_{Fv} \frac{6K_T l}{bs^2} \leq [\sigma_F],$$

где $[\sigma_F]$ — допускаемое напряжение на изгиб.

Размеры l и s выразим через модуль зуба, от которого они зависят: $l = \mu m$, $s = \lambda m$, тогда $l/s^2 = \mu(\lambda^2 m)$. Подставив это выражение в предыдущую формулу и заменив $Y_F = 6K_T \mu / \lambda^2$, $w_{Ft} = F_t K_{F\beta} K_{Fv} / b$, получим формулу для *проверочного расчета прямозубых колес*

$$\sigma_F = \frac{Y_F w_{Ft}}{m} \leq [\sigma_F],$$

где Y_F — коэффициент формы зуба, зависящий только от числа зубьев и выбираемый по табл. 33.7; параметр $w_{Ft} = 2T_1 K_{F\beta} K_{Fv} / (d_1 b)$.

У косозубых колес длина зуба больше, чем у прямозубых, поэтому в расчетную формулу вводится коэффициент Y_β , учитывающий наклон линии зуба, причем

$$Y_\beta = 1 - \frac{\beta}{140},$$

Таблица 33.7

z_1, z_v	17	20	25	30	40	50	60	И более
Y_F	4,26	4,09	3,90	3,80	3,70	3,66	3,62	3,60

либо более точно,

$$Y_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \frac{\beta}{120} \geq 0,7,$$

где β — угол наклона; ε_β — коэффициент осевого перекрытия.

Формула для *проверочного расчета косозубых колес* имеет вид

$$\sigma_F = \frac{Y_F Y_\beta w_{Ft}}{m_n} \leq [\sigma_F],$$

причем коэффициент формы зуба Y_F подбирается по табл. 33.7 по эквивалентному числу зубьев z_v ; m_n — нормальный модуль.

Основным видом *проектного расчета закрытых передач* с низкой и средней твердостью зубьев является *расчет на контактную усталость* активных поверхностей зубьев, а расчет на усталость зубьев при изгибе применяется как *проверочный*.

Параметры *открытых передач*, а также *закрытых с высокой твердостью активных поверхностей зубьев* ($H > 50$ HRC, их нагрузочная способность лимитируется изгибной прочностью) определяют из расчета зубьев на изгиб, причем основным расчетным параметром является нормальный модуль. Формула для *проектного расчета на изгиб* имеет вид

$$m_n = K_m \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{F\beta} Y_{F1}}{i z_1^2 \psi_{bd} [\sigma_{F1}]}}$$

где $K_m = 1,4$ для прямозубых; $K_m = 1,12$ для косозубых (при $\varepsilon_\beta > 1$) и шевронных передач; для косозубых (при $\varepsilon_\beta \leq 1$) $K_m = 1,25$ (расчет ведется для шестерни).

Для обеспечения одинаковой долговечности ведущего и ведомого колес шестерню делают из более прочного материала, но прочность зуба также зависит от его формы. Поэтому сравнительную оценку прочности зубьев при изгибе можно провести по отношению $[\sigma_F]/Y_F$ для ведущего и ведомого колес, а проверочные расчеты ведут по колесу, для которого это отношение меньше.

При *проектном расчете на изгиб* задаются числом зубьев шестерни z_1 (для открытых передач $z_1 = 17 \dots 22$) и коэффициентом ширины колеса ψ_{bd} (для открытых передач $\psi_{bd} = (10 \dots 12)/z_1$); коэффициент $K_{F\beta}$ определяют по графику на рис. 33.23.

33.8. РАСЧЕТ ДОПУСКАЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Допускаемые контактные напряжения. Расчет допускаемых контактных напряжений ведется по формуле

$$[\sigma_H] = \sigma_{H \text{ lim } b} Z_N / S_H,$$

где $\sigma_{H \text{ lim } b}$ — предел контактной выносливости, соответствующий базе испытаний (т.е. наибольшему числу циклов при испытаниях на усталость); Z_N — коэффициент долговечности; S_H — минимальный коэффициент запаса прочности.

Предел контактной выносливости $\sigma_{H \text{ lim } b}$ зависит от термообработки, твердости активных поверхностей зубьев и определяется по табл. 33.8.

Коэффициент долговечности Z_N учитывает возможность повышения допускаемых напряжений для кратковременно работающих передач, когда заданное число циклов изменения напряжений N_k меньше базы испытаний $N_{H \text{ lim}}$; этот коэффициент определяется по формуле

$$Z_N = \sqrt[6]{N_{H \text{ lim}} / N_k} \geq 1 \leq Z_{N \text{ max}}.$$

База испытаний зависит от твердости зубьев и определяется по табл. 33.9. Заданное число циклов определяется по формуле

$$N_k = 60nL_h,$$

Таблица 33.8

Способ термической и химико-термической обработки	Средняя твердость поверхностей зубьев	Стали	$\sigma_{H \text{ lim } b}$, МПа	$\sigma_{F \text{ lim } b}$, МПа
Отжиг, нормализация или улучшение	$H \leq 350$ НВ	45, 50, 40Х, 45Х, 40ХН	$2H_{\text{HB}} + 70$	$1,75H_{\text{HB}}$
Объемная и поверхностная закалка	38... 50 HRC	40Х, 35ХМ, 35ХГСА, 40ХН	$17H_{\text{HRC}} + 200$	500... 700
Цементация и нитроцементация	Более 56 HRC	20Х, 12ХН3А, 18ХГТ, 20ХН	$23H_{\text{HRC}}$	700... 950
Азотирование	350... 750 НV	40Х, 38ХМЮА	1 050	2 580... 770

Таблица 33.9

Твердость HB	200	250	300	350	400	450	500	550	600
$N_{H \text{ lim}}$, млн циклов	10	17	25	37	50	64	80	100	120

где n — частота вращения того из колес, для которого определяется допускаемое напряжение; L_h — заданная долговечность (ресурс) передачи в часах. Предельные значения коэффициента долговечности: $Z_{N_{\max}} = 1,8$ для зубьев с поверхностным упрочнением; $Z_{N_{\max}} = 2,6$ для зубьев с однородной структурой материала (нормализация, улучшение, объемная закалка).

Для длительно работающих передач, когда $N_k > N_{H \text{ lim}}$, принимается $Z_N = \sqrt[20]{N_{H \text{ lim}}/N_k} \geq 0,75$.

Коэффициент запаса прочности $S_H = 1,1$ для зубчатых колес с однородной структурой материала; $S_H = 1,2$ для колес с поверхностным упрочнением зубьев; для передач, выход из строя которых связан с тяжелыми последствиями, значения коэффициентов следует увеличивать до $S_H = 1,25$ и $S_H = 1,35$ соответственно.

Расчет на контактную усталость прямозубых передач ведется по колесу, для которого допускаемое напряжение меньше; расчет косозубых и шевронных передач ведется по условному допускаемому напряжению

$$[\sigma_H] = 0,45([\sigma_{H1}] + [\sigma_{H2}]) \leq 1,23[\sigma_{H2}].$$

Для конических колес $[\sigma_H] \leq 1,15[\sigma_{H2}]$.

Допускаемые напряжения на усталость при изгибе. Расчет допускаемых напряжений изгиба ведется по формуле

$$[\sigma_F] = \frac{\sigma_{F \text{ lim}} Y_A Y_N}{S_F},$$

где $\sigma_{F \text{ lim}}$ — предел выносливости зубьев при изгибе, соответствующий базе испытаний и принимаемый по табл. 33.8 (большие значения при большей твердости зубьев); Y_A — коэффициент реверсивности нагрузки; Y_N — коэффициент долговечности; S_F — минимальный коэффициент запаса прочности.

Коэффициент реверсивности $Y_A = 1$ при одностороннем приложении нагрузки; $Y_A \approx 0,7$ для реверсивных передач.

Коэффициент долговечности $Z_N = \sqrt[9]{N_{F \text{ lim}}/N_k} \geq 1 \leq Y_{N_{\max}}$, где база испытаний для всех сталей $N_{F \text{ lim}} = 4 \cdot 10^6$ циклов; заданное число циклов $N_k = 60nL_h$. Для колес с однородной структурой материала $q = 6$, $Y_{N_{\max}} = 4$; при поверхностном упрочнении зубьев $q = 9$, $Y_{N_{\max}} = 2,5$.

Для длительно работающих передач, когда $N_k > N_{F \text{ lim}}$, принимается $Y_N = 1$.

Коэффициент запаса прочности учитывает нестабильность свойств материала, его твердость, вероятность неразрушения и ответственность передачи; $S_{F \text{ lim}} = 1,4 \dots 1,7$ в зависимости от марки стали и термообработки (см. таблицы стандарта).

После проверочных расчетов превышение допускаемых напряжений (перегрузка передачи) не должна превышать 5%, а недогрузка желательна не более 10%.

33.9. КОНИЧЕСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Конические зубчатые передачи применяют при пересекающихся (см. рис. 33.1, *д, е, ж*) или скрещивающихся (см. рис. 33.1, *з* — *гипоидная передача*) осях. Межосевой угол Σ может изменяться в широком диапазоне значений ($10^\circ < \Sigma < 170^\circ$), но наибольшее распространение имеют *ортогональные конические передачи* с углом $\Sigma = 90^\circ$.

Конические зубчатые передачи по сравнению с цилиндрическими имеют бóльшую массу и габаритные размеры, сложнее в изготовлении, а также в монтаже, так как требуют точной фиксации осевого положения зубчатых колес.

Наибольшее распространение имеют конические передачи с *прямыми* и *криволинейными* зубьями; последние постепенно вытесняют передачи с *тангенциальными* зубьями (см. рис. 33.1, *д, е, ж*). Конические зубчатые колеса с криволинейными зубьями могут иметь круговую, эвольвентную и циклоидальную линию зубьев; наиболее распространены колеса с *круговыми* зубьями.

Конические передачи с криволинейными зубьями по сравнению с прямозубыми имеют бóльшую нагрузочную способность, работают более плавно и, следовательно, динамические нагрузки и шум при их работе меньше. Допуски для конических и гипоидных передач регламентированы стандартом, согласно которому установлены двенадцать степеней точности и соответствующие нормы точности.

Предельные окружные скорости для конических прямозубых (непрямозубых) колес имеют следующие величины: при 6-й степени точности — до 12 (20) м/с, 7-й степени — до 8 (10) м/с, 8-й степени — до 4 (7) м/с, 9-й — до 1,5 (3) м/с.

Расчет геометрии конических прямозубых передач регламентирован ГОСТ 19624—74. На рис. 33.26 показаны основные геометрические параметры прямозубого цилиндрического колеса: R_e , R — внешнее и среднее конусное расстояния; b — ширина зубчатого

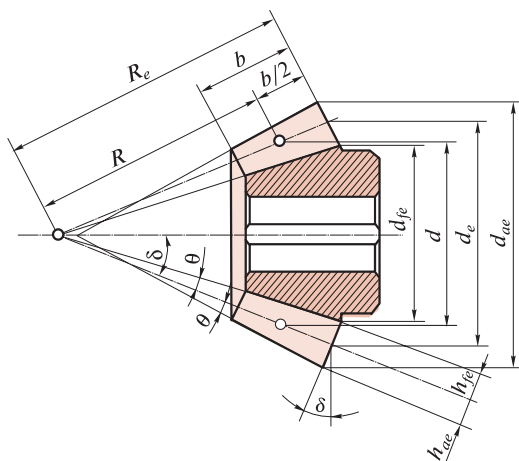


Рис. 33.26

венца; d , d_e — средний и внешний делительные диаметры; d_{ae} , d_{fe} — внешние диаметры вершин зубьев и впадин; δ — угол делительного конуса; h_{ae} , h_{fe} — внешняя высота делительной головки и ножки зуба; $\theta_a = \theta_f = \theta$ — угол делительной головки и ножки зуба.

Углы головки и ножки зуба сделаны одинаковыми для того, чтобы образующая конуса вершин зубьев одного колеса была параллельна образующей конуса впадины второго колеса, в результате чего радиальный зазор по длине прямого зуба будет постоянным (поэтому на рис. 33.26 вершины конусов не совпадают).

По приведенным выше параметрам определяют остальные размеры колес и передачи, в частности:

угол конуса вершин зубьев

$$\delta_a = \delta + \theta;$$

угол конуса впадин

$$\delta_f = \delta - \theta;$$

межосевой угол передачи (рис. 33.27)

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2.$$

У конических колес высота, толщина зубьев и окружной шаг по длине зуба неодинаковы, поэтому различают два окружных модуля:

m — средний делительный окружной модуль, причем $d = mz$, где z — число зубьев колеса;

m_e — внешний делительный окружной модуль, причем $d_e = m_e z$.

Внешний и средний модули пропорциональны соответствующим конусным расстояниям, поэтому

$$m_e = m \frac{R_e}{R}.$$

Для удобства измерений на чертежах задают внешние размеры зубьев и колес, а модуль m_e называют *производственным*, который можно (но не обязательно) округлить до стандартного значения.

В передачах с криволинейными и тангенциальными зубьями существуют *нормальные* внешний и средний модули m_{ne} и m_n .

Профилирование зубьев конических колес с прямыми и тангенциальными, а также колес с круговыми зубьями ведется в соответствии со стандартами на соответствующие исходные контуры. Исходный контур для прямозубых конических колес аналогичен исходному контуру для цилиндрических колес (см. рис. 33.7), за исключением радиального зазора $c = 0,2m_e$; внешняя высота головок зубьев $h_{ae} = m_e$, внешняя высота ножек $h_{fe} = 1,2m_e$, а внешняя высота зуба $h_a = 2,2m_e$.

Внешний диаметр вершин зубьев равен

$$d_{ae} = d_e + 2h_{ae} \cos \delta = m_e(z + 2 \cos \delta).$$

Очевидно, что при $\Sigma = 90^\circ$

$$R_e = \frac{\sqrt{d_{e1}^2 + d_{e2}^2}}{2} = m_e \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{2},$$

а также

$$R_e = d_e(2 \sin \delta), \quad R = R_e - \frac{b}{2}.$$

Углы делительных конусов ортогональных передач легко определяются в зависимости от числа зубьев ведущего и ведомого колес, а следовательно, от передаточного числа передачи:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{u} \quad \text{или} \quad u = \operatorname{ctg} \delta_1 = \operatorname{tg} \delta_2.$$

Ширину зубчатого венца b по стандарту рекомендуется принимать

$$b \leq 0,3R_e \quad \text{или} \quad b \leq 10m_e;$$

вычисленное значение округляется до целого числа, а при проектировании стандартных редукторов по ГОСТ 12289—76 значения b принимаются по стандарту.

Кроме ширины венца b стандарт на ортогональные конические передачи для редукторов устанавливает номинальные значения внешнего делительного диаметра колеса d_{e2} (в основном определяющего габаритные размеры редуктора) и номинальные значения передаточных чисел u (от $u = 1$ до $u = 6,3$, см. табл. 33.5).

Эквивалентные колеса. Зубья конических колес профилируют по эвольвенте так же, как и зубья цилиндрических, но коническая передача является пространственной, и поэтому точки ее сопряженных профилей лежат на сферической поверхности, которая не разворачивается на плоскость. Поэтому профилирование зубьев конических колес с незначительной погрешностью выполняется на поверхности *дополнительных конусов* (рис. 33.27), которые, мысленно разрезав по образующей, можно развернуть на плоскости.

Образующие дополнительных конусов перпендикулярны образующим делительных конусов, поэтому диаметры воображаемых прямозубых цилиндрических колес, называемые *эквивалентными колесами*, определяются по формулам

$$d_{v1} = \frac{d_{e1}}{\cos \delta_1}; \quad d_{v2} = \frac{d_{e2}}{\cos \delta_2},$$

где d_1 и d_2 — углы делительных конусов конических колес.

Числа зубьев эквивалентных колес, называемые *эквивалентными числами зубьев*, равны

$$z_{v1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1}; \quad z_{v2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2},$$

где z_1 и z_2 — действительные числа зубьев конических колес.

Эквивалентным числом зубьев пользуются при определении коэффициента формы зуба по табл. 33.7.

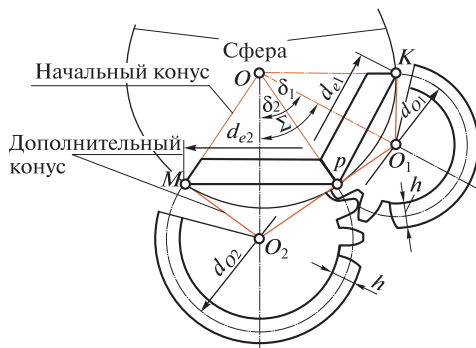


Рис. 33.27

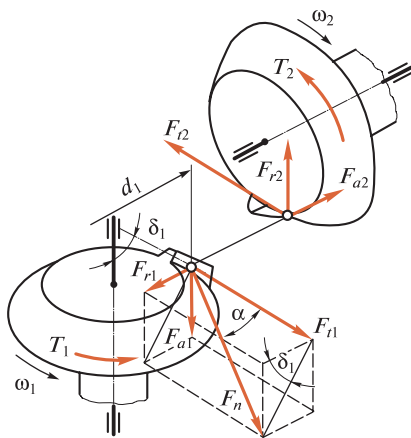


Рис. 33.28

Силы в конической передаче. При силовом расчете конических передач полагают, что равнодействующая сил нормального давления F_n приложена в среднем сечении зуба, а силами трения, как и ранее, пренебрегают. Разложим силу F_n на три взаимно-перпендикулярные составляющие по реальным направлениям (рис. 33.28), в результате чего получим:

окружная сила на шестерне и колесе

$$F_{t1} = \frac{2T_1}{d_1} = F_{t2};$$

радиальная сила на шестерне, численно равная осевой силе на колесе,

$$F_{r1} = F_{t1} \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_1 = F_{a2};$$

осевая сила на шестерне, численно равная радиальной силе колеса,

$$F_{a1} = F_{t1} \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_1 = F_{r2}.$$

Расчет зубьев конической передачи на контактную усталость. Критерии работоспособности и методика расчетов на прочность конических и цилиндрических передач аналогичны. Поэтому расчет зубьев конических передач сводится к расчету зубьев эквивалентной цилиндрической передачи с учетом установленного опытным путем коэффициента понижения нагрузочной способности конической передачи, равного 0,85. Модуль зубьев эквивалентного цилиндрического колеса принимается для прочностных расчетов равным модулю m в среднем сечении зуба, а диаметр делительной окружности эквивалентного колеса принимают равным диаметру среднего дополнительного конуса; эквивалентное число зубьев будет определяться по ранее выведенным формулам, а передаточное число эквивалентных колес u_v будет равно

$$u_v = \frac{z_{v2}}{z_{v1}} = \frac{z_2 \cos \delta_1}{z_1 \cos \delta_2} = u \operatorname{tg} \delta_2 = u^2,$$

так как при $\Sigma = 90^\circ \cos \delta_1 = \sin \delta_2$, а $\operatorname{tg} \delta_2 = u$.

Подставив в ранее выведенную формулу для проверочного расчета цилиндрических колес параметры эквивалентного колеса

$$u_v = u^2, \quad d_{v1} = \frac{d_1}{\cos \delta_1} = d_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_1} = \frac{d_1 \sqrt{u^2 + 1}}{u},$$

а также введя коэффициент понижения нагрузочной способности, равный 0,85, получим формулу для проверочного расчета зубьев конических прямозубых передач на контактную усталость:

$$\sigma_H = Z \sqrt{\frac{2T_1 \sqrt{u^2 + 1}}{0,85 b d_1^2 u}} K_{H\beta} K_{H\alpha} \leq [\sigma_H],$$

где $Z = 462 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}$ для стальных колес.

Формула для проектного расчета прямозубых конических передач на контактную усталость выглядит следующим образом:

$$d_1 = K_d \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\beta} \sqrt{u+1}}{0,85 \psi_{bd} [\sigma_H]^2 u^2}},$$

где для предварительных расчетов стальных колес $K_d = 7700 \text{ Па}^{1/3}$; $K_{H\beta} \approx 1,3$; коэффициент ширины колеса относительно среднего диаметра шестерни $\psi_{bd} \approx 0,166 \sqrt{u^2 + 1}$ (при наиболее распространенном $\psi_{bR} = 0,285$).

Поскольку основным размером, определяющим габаритные размеры конической передачи, является внешний диаметр колеса, то формулу для проектного расчета прямозубых передач можно преобразовать и использовать в следующем виде:

$$d_{e2} = K'_d \sqrt[3]{\frac{T_2 u}{0,85 [\sigma_H]^2}} K_{H\beta}.$$

Здесь d_{e2} — внешний делительный диаметр колеса ($d_{e2} \approx 1,17 d_2 = 1,17 d_1 u$); $K'_d = 16500 \text{ Па}^{1/3}$ для стальных колес.

Расчет зубьев конической передачи на усталость при изгибе. Основным видом проектного расчета закрытых конических передач с низкой и средней твердостью зубьев является расчет на контактную усталость активных поверхностей зубьев, а расчет на усталость зубьев при изгибе применяется как *проверочный*. Исключением являются передачи с высокой твердостью активных поверхностей зубьев ($H > 50 \text{ НРС}$, их нагрузочная способность лимитируется изгибной прочностью); параметры таких передач определяют из расчета зубьев на изгиб, причем основным расчетным параметром является модуль.

Проектным расчетом открытых передач также является расчет на усталость зубьев при изгибе.

Формула *проверочного расчета* на изгиб прямозубых конических передач имеет вид

$$\sigma_F = \frac{Y_F w_{Ft}}{0,85m} \leq [\sigma_F],$$

где Y_F — коэффициент формы зуба, определяемый по табл. 33.7 по эквивалентному числу зубьев z_v ; параметр $w_{Ft} = 2T_1 K_{F\beta} K_{F\alpha} / (d_1 b)$; m — средний модуль.

Формула *проектного расчета* на изгиб прямозубых конических передач имеет вид

$$m = K_m \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{F\beta} Y_{F1}}{0,85 u z_1^2 \psi_{bd} [\sigma_{F1}]}}$$

где $K_m = 1,4$; коэффициент неравномерности нагрузки $K_{F\beta}$ определяется по графику на рис. 33.23; числом зубьев шестерни задаются обычно $z_1 = 18 \dots 30$; $\psi_{bd} \approx 0,166\sqrt{u^2 + 1}$ (расчет ведется по шестерне).

По найденной величине среднего модуля определяется производственный модуль m_e , который можно округлить до стандартного значения по табл. 33.1.

Допускаемые напряжения для расчетов конических передач определяются так же, как и для цилиндрических.

Конические передачи с тангенциальными и криволинейными зубьями приближенно рассчитывают по тем же формулам, что и прямозубые, но по нормальному среднему модулю и с введением в знаменатель подкоренного выражения коэффициента K_k , учитывающего большую прочность этих зубьев. На основании опытных данных $K_{Hk} = 1,5$ — при расчетах зубьев на контактную усталость; $K_{Fk} = 1,0$ — при расчетах зубьев на изгиб. Коэффициент K_k вводится вместо коэффициента 0,85.

Гипоидная и спироидная передачи. Зубчатые передачи со скрещивающимися осями — *гиперболоидные*, так как их начальные конические поверхности, строго говоря, являются частью гиперболоидов вращения. У гипоидной передачи шестерня обычно является коническим колесом с тангенциальными или круговыми зубьями; у спироидной передачи коническая шестерня-червяк имеет винтовые зубья.

Достоинства гипоидных и спироидных передач заключаются в следующем: валы и их опоры для обоих колес могут быть выведены за пределы передачи в обоих направлениях (см. рис. 33.1, з), что исключает консольные нагрузки на валы; передачи характеризуются высокой нагрузочной способностью и плавностью работы.

Характерный *недостаток* гиперболоидных передач — повышенное скольжение активных поверхностей зубьев, вызванное смещением осей колес, отсюда сравнительно невысокий КПД и склонность к заеданию; такие передачи смазывают специальным противозадирным, так называемым гипоидным маслом, содержащим специальные присадки.

Гипоидные передачи широко применяют в автомобилях, тракторах, тепловозах, металлорежущих станках и в других машинах. Спиroidные передачи вследствие сложности изготовления и низкого КПД распространения не получили.

Конструкция конических колес. На рис. 33.29 показаны наиболее распространенные в конических редукторах конструкции колес (*а*) и вала-шестерни (*б*); насадные колеса небольшого диаметра делают монолитной конструкции (см. рис. 33.26). Для экономии высококачественной стали применяют бандажированные конструкции колес, у которых зубчатый венец насаживается на колесный центр, изготавливаемый из чугуна или стального литья.

В единичном и мелкосерийном производстве колеса небольшого (до 150 мм) диаметра изготавливают из прутков, а большого диаметра из поковок; в крупносерийном и массовом производстве заготовками стальных колес обычно являются штамповки. Чугунные колеса всегда изготавливают отливкой. Стальные колеса большого диаметра (более 500 мм) отливают или делают сварными.

Методы образования зубьев конических колес. Нарезание прямых и тангенциальных зубьев конических колес производится *методом обкатки* на зубострогальных станках (рис. 33.30, *а*). Для понимания процесса нарезания зубьев конического колеса вводится понятие о *плоском производящем колесе*, под которым понимается

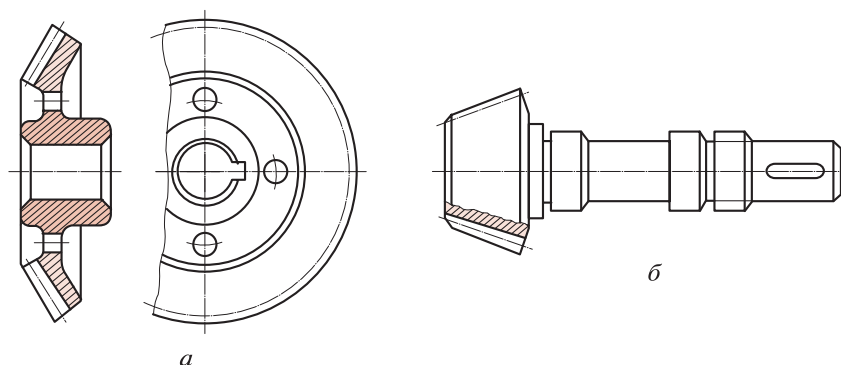


Рис. 33.29

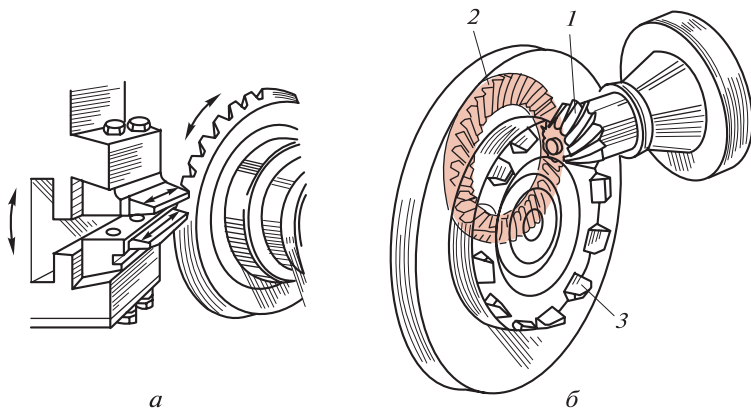


Рис. 33.30

воображаемое коническое колесо с прямолинейным профилем зубьев и углом при вершине делительного конуса $2\delta = 180^\circ$; сечение зубьев воображаемого колеса соответствует стандартному исходному контуру. На зубострогальных станках функции плоского производящего колеса выполняют два резца с прямолинейными кромками, движущимися возвратно-поступательно (движение резания), а резцовая головка получает согласованное возвратно-вращательное движение (движение обкатки). *Недостаток* зубострогальных станков — большое число холостых ходов и, следовательно, низкая производительность.

Круговые зубья нарезаются методом обкатки на специальных высокопроизводительных станках резцовой головкой. На рис. 33.30, б показано нарезание зубьев конической шестерни 1 резцовой головкой 3; тонкими линиями показано воображаемое плоское производящее колесо 2.

33.10. ПЕРЕДАЧИ С ЗАЦЕПЛЕНИЕМ НОВИКОВА

Звенья высших кинематических пар соприкасаются по линиям и точкам, а максимальные контактные напряжения вычисляются по формуле Герца, причем значение контактных напряжений зависит от приведенного радиуса кривизны поверхностей контакта — *чем больше приведенный радиус кривизны, тем меньше максимальные контактные напряжения.*

Приведенный радиус кривизны равен

$$\rho_{\text{пр}} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 \pm \rho_1},$$

где ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны в точке касания; знак «+» принимают при центрах кривизны, расположенных по разные стороны от точки контакта (внешнее касание), знак «-» — при центрах кривизны, расположенных по одну сторону (внутреннее касание).

Нагрузочная способность рассмотренного нами ранее эвольвентного зацепления ограничена из-за малых значений приведенного радиуса кривизны зубьев (в формуле для $\rho_{пр}$ в знаменателе ставится знак «+») и, следовательно, значительных контактных напряжений. Поэтому наряду с совершенствованием эвольвентного зацепления необходимы поиски новых видов зацеплений.

Изложенные соображения легли в основу предложенного инженером М.Л.Новиковым нового *кругового зацепления*, названного его именем.

На рис. 33.31 показаны две передачи с зацеплением Новикова: *а* — цилиндрическая, *б* — коническая. Как видно из рисунка, зуб одного колеса (обычно шестерни) *выпуклый*, а другого — *вогнутый*, причем профили зубьев в нормальном сечении очерчиваются дугами окружностей с небольшой разницей в радиусах, что дает *большие значения приведенных радиусов кривизны* (в формуле для $\rho_{пр}$ ставится знак «-») и *существенно уменьшает контактные напряжения*.

На рис. 33.32 показано круговое зацепление зубьев в нормальном сечении. Профили зубьев, очерченные дугами окружностей, *не являются сопряженными*, так как они не удовлетворяют требованиям основной теоремы зацепления (общая нормаль *NN* не будет все время проходить через полюс *П*), следовательно, *для обеспечения постоянства передаточного числа передача Новикова должна быть косозубой*.

Линия зацепления изображенной на рис. 33.32 передачи будет проходить через точку *К* и располагаться параллельно осям колес,

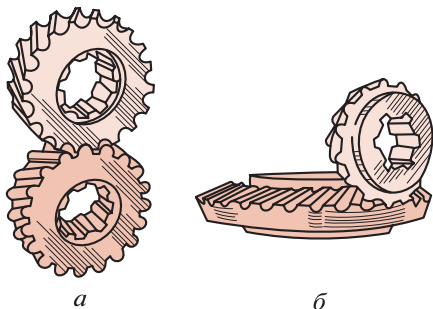


Рис. 33.31

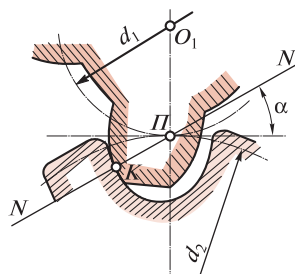


Рис. 33.32

а точка контакта зубьев будет перемещаться по этой линии, а не по общей нормали NN , как в эвольвентном зацеплении. Поэтому *торцовое перекрытие, а также геометрическое скольжение зубьев в передаче Новикова теоретически отсутствуют*; плавность работы обеспечивается за счет осевого перекрытия $\epsilon_\beta \geq 1,1$. Угол наклона зубьев обычно берется в пределах $\beta = 10 \dots 24^\circ$.

Первоначальный *точечный контакт зубьев в результате непродолжительной приработки переходит в контакт по значительной площадке*, что резко снижает контактные напряжения.

Различают передачи Новикова ОЛЗ (с одной линией зацепления) и передачи Новикова ДЛЗ (с двумя линиями зацепления); в последнем случае профиль зубьев обоих колес *выпукло-вогнутый*.

В передачах ДЛЗ, получивших наибольшее распространение, выпуклые головки шестерни и колеса одновременно взаимодействуют с вогнутыми ножками колеса и шестерни. Очевидно, что при прочих равных условиях нагрузочная способность передач ДЛЗ больше, чем передач ОЛЗ.

Исходный контур и расчет геометрии цилиндрических передач Новикова с двумя линиями зацепления стандартизованы; кроме того, для передач с одной и двумя линиями зацепления стандартизованы нормальные модули от 1,6 до 63 мм. Стандарт на расчет геометрии передач Новикова ДЛЗ ограничивает область применения этой передачи значениями: твердость зубьев $H \leq 320$ НВ, модуль $m \leq 16$ мм, окружная скорость $v \leq 20$ м/с. Нагрузочная способность передач Новикова ДЛЗ по условию контактной выносливости активных поверхностей зубьев примерно в два раза выше, чем у передач с эвольвентным зацеплением, а прочность зубьев на изгиб несколько ниже.

На рис. 33.33 показаны элементы зацепления круговых зубьев различной формы: *а* — выпуклый зуб (*1* — след линии зацепления, *2* — начальная точка контакта, *3* — контактная линия, *4* — площадка контакта); *б* — вогнутый зуб; *в* — выпукло-вогнутый зуб.

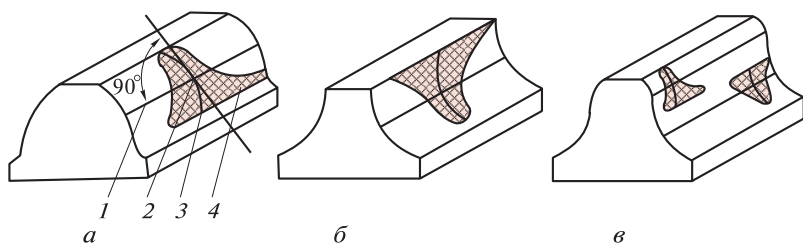


Рис. 33.33

Зубья шестерни и колеса передач ОЛЗ нарезают разными инструментами методом обкатки на зубофрезерных станках. Передачи ДЛЗ более технологичны, так как зубья обоих колес нарезают одним инструментом.

Виды повреждений зубьев и критерии работоспособности передач Новикова те же, что и для эвольвентных передач.

Габаритные размеры передач Новикова примерно на 25...30 % меньше, чем у равноценных эвольвентных.

Основной *недостаток* передач Новикова — повышенная чувствительность к перекосам осей и изменению межосевого расстояния, поэтому для них требуются высокая точность изготовления колес и высокая жесткость валов и опор.

33.11. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КОНИЧЕСКИХ РЕДУКТОРАХ

Редуктором называется закрытая зубчатая передача, предназначенная для понижения угловой скорости ведомого вала по сравнению с ведущим. Уменьшение угловой скорости сопровождается увеличением вращающего момента на ведомом валу. Для редуктора значения передаточного отношения и передаточного числа совпадают.

На схемах редукторов будем обозначать: входной — быстроходный вал, к которому присоединяется вал двигателя, — цифрой 1, а выходной — тихоходный вал — цифрой 2.

Редукторы бывают *одно-* и *многоступенчатые*. *Передаточное число многоступенчатого редуктора равно произведению передаточных чисел отдельных ступеней*

$$u_n = u_1 u_2 u_3 \dots u_n.$$

Передаточное число редуктора с одной ступеню в виде цилиндрической пары колес обычно не превышает $u_{\max} = 8$.

В тех случаях, когда необходимо передавать вращающий момент между валами со взаимно-перпендикулярным расположением осей, применяют одно- или двухступенчатые конические редукторы (рис. 33.34, а).

Передаточные числа таких редукторов с прямоугольными коническими

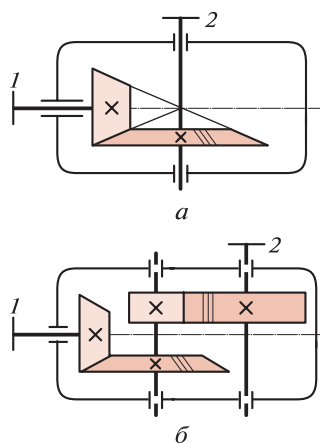


Рис. 33.34

колесами не превышают $u = 4$, а при косых и криволинейных зубьях — не более $u = 5$ (в редких случаях $u = 6$). При больших передаточных числах применяют коническо-цилиндрические редукторы (рис. 33.34, б).

Пример 33.1. Рассчитать основные параметры и размеры косозубой передачи одноступенчатого цилиндрического редуктора с прирабатывающимися зубьями. Мощность на ведущем валу $P_1 = 10$ кВт, частота вращения ведущего вала $n_1 = 1440$ мин⁻¹, номинальное передаточное число $u = 5$. Передача нереверсивная, нагрузка постоянная. Технический ресурс передачи $L_h = 1000$ ч.

Решение. В качестве материала для зубчатых колес выберем сталь 40X с различной термообработкой, а именно: для шестерни — улучшение, средняя твердость $H_1 = 325$ НВ; для колеса — улучшение, средняя твердость $H_2 = 270$ НВ.

Определяем допускаемые контактные напряжения для шестерни и колеса по формуле

$$[\sigma_H] = \frac{\sigma_{H \lim b} Z_N}{S_H},$$

где базовый предел контактной выносливости $\sigma_{H \lim b} = 2H_{\text{НВ}} + 70$ (см. табл. 33.8); коэффициенты долговечности

$$Z_{N1} = \sqrt[20]{\frac{N_{H \lim}}{N_{k1}}} = \sqrt[20]{\frac{31 \cdot 10^6}{86 \cdot 10^6}} = 0,95,$$

так как для шестерни база испытаний $N_{H \lim} = 31 \cdot 10^6$ циклов (см. табл. 33.9), а заданное число циклов $N_{k1} = 60n_1L_h = 60 \cdot 1440 \cdot 1000 = 86 \cdot 10^6$;

$$Z_{N2} = \sqrt[6]{\frac{N_{H \lim}}{N_{k2}}} = \sqrt[6]{\frac{20 \cdot 10^6}{17 \cdot 10^6}} = 1,03,$$

так как для колеса база испытаний $N_{H \lim} = 20 \cdot 10^6$ циклов (см. табл. 33.9), а заданное число циклов

$$N_{k2} = \frac{N_{k1}}{u} = \frac{86 \cdot 10^6}{5} \approx 17 \cdot 10^6;$$

коэффициент запаса прочности $S_H = 1,1$ (колеса с однородной структурой материала). Тогда для шестерни

$$[\sigma_{H1}] = (2 \cdot 325 + 70) \cdot 0,95 / 1,1 = 620 \text{ МПа};$$

для колеса

$$[\sigma_{H2}] = (2 \cdot 270 + 70) \cdot 1,03 / 1,1 = 570 \text{ МПа}.$$

Условное допускаемое контактное напряжение

$$[\sigma_H] = 0,45([\sigma_{H1}] + [\sigma_{H2}]) = 0,45(620 + 570) = 535 \text{ МПа},$$

что меньше $1,23[\sigma_{H2}] = 1,23 \cdot 570 = 700$ МПа.

Из расчета на контактную усталость определим делительный диаметр шестерни по формуле

$$d_1 = K_d \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\beta} (u+1)}{\Psi_{bd} [\sigma_H]^2 u^2}},$$

где $K_d = 6750 \text{ Па}^{1/3}$; $K_{H\beta} = 1,06$ (по графику б на рис. 33.22); $T_1 = P_1/\omega_1 = 30P_1/(\pi n_1) = 30 \cdot 10 \cdot 10^3/(\pi \cdot 1440) = 66,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $T_2 = T_1 u = 66,2 \cdot 5 = 331 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $\Psi_{bd} = 1,2$ при симметричном расположении опор, см. табл. 33.4 (при этом $\Psi_{bd} = 2\Psi_{bd}/(u+1) = 2 \cdot 1,2/(5+1) = 0,4$, что соответствует стандарту).

Тогда

$$d_1 = 6750 \sqrt[3]{\frac{331 \cdot 1,06(5+1)}{1,2 \cdot 535^2 \cdot 10^{12} \cdot 5^2}} = 0,042 \text{ м} = 42 \text{ мм}.$$

Принимаем предварительно $d_1 = 42$ мм, тогда $d_2 = u d_1 = 5 \cdot 42 = 210$ мм, а межосевое расстояние $a = (d_1 + d_2)/2 = (42 + 210)/2 = 126$ мм.

Принимаем ближайшее стандартное значение $a = 125$ мм и определяем нормальный модуль зацепления

$$m = (0,01 \dots 0,02)a = (0,01 \dots 0,02)125 = 1,25 \dots 2,5 \text{ мм}.$$

Принимаем стандартный нормальный модуль $m_n = 2$ мм.

Ширина венца колеса будет равна $b = \Psi_{bd} d_1 = 1,2 \cdot 42 = 50,4$ мм. Принимаем $b = 50$ мм.

Принимая коэффициент осевого перекрытия $\varepsilon_\beta = b \sin \beta / (\pi m_n) = 2$, определим предварительно угол наклона зубьев

$$\sin \beta = 2\pi m_n / b = 2\pi \cdot 2 / 50 = 0,2512; \beta = 14^\circ 33'.$$

Определяем суммарное число зубьев шестерни и колеса

$$z_1 + z_2 = 2a \cos \beta / m_n = 2 \cdot 125 \cos 14^\circ 33' / 2 = 120,48.$$

Принимаем $z_1 + z_2 = 120$, тогда числа зубьев шестерни и колеса будут равны $z_1 = 20$, $z_2 = 100$.

Так как стандартное межосевое расстояние должно быть выдержано точно, то скорректируем угол наклона зубьев по принятому суммарному их числу

$$\cos \beta = (z_1 + z_2) m_n / (2a) = 120 \cdot 2 / (2 \cdot 125) = 0,96;$$

$$\beta = 16^\circ 15,8' = 16,264^\circ.$$

Определяем основные геометрические размеры шестерни и колеса: делительный диаметр

$$d_1 = z_1 m_n / \cos \beta = 20 \cdot 2 / 0,96 = 41,67 \text{ мм};$$

$$d_2 = z_2 m_n / \cos \beta = 100 \cdot 2 / 0,96 = 208,33 \text{ мм},$$

причем межосевое расстояние

$$a = (d_1 + d_2)/2 = (41,67 + 208,33)/2 = 125 \text{ мм};$$

диаметры вершин зубьев

$$d_{a1} = d_1 + 2m_n = 41,67 + 2 \cdot 2 = 45,67 \text{ мм};$$

$$d_{a2} = d_2 + 2m_n = 208,33 + 2 \cdot 2 = 212,33 \text{ мм};$$

ширина венца колеса $b_2 = \psi_{ba}a = 0,4 \cdot 125 = 50 \text{ мм};$

шестерни $b_1 = 55 \text{ мм}.$

Определим окружную скорость колес передачи

$$v = \pi d_1 n_1 / 60 = \pi \cdot 41,67 \cdot 10^{-3} \cdot 1440 / 60 = 3,14 \text{ м/с}.$$

Для уменьшения динамических нагрузок и шума примем 8-ю степень точности изготовления колес.

Проверим зубья на усталость при изгибе. Прежде всего определим эквивалентное число зубьев

$$z_{v1} = z_1 / \cos^3 \beta = 20 / 0,96^3 \approx 22;$$

$$z_{v2} = z_2 / \cos^3 \beta = 100 / 0,96^3 \approx 122.$$

По табл. 33.7 находим коэффициенты формы зуба $Y_{F1} = 4,01$ (интерполяция), $Y_{F2} = 3,6.$

Определяем допускаемые напряжения изгиба для шестерни и колеса по формуле

$$[\sigma_F] = \sigma_{F \text{ lim } b} Y_A Y_N / S_F,$$

где базовый предел выносливости при изгибе $\sigma_{F \text{ lim } b} = 1,75 H_{HB}$ (см. табл. 33.8); коэффициент реверсивности нагрузки $Y_A = 1$ (передача неревверсивная); коэффициент долговечности $Y_N = 1$ (так как заданное число циклов $N_k > N_{F \text{ lim } b} = 4 \cdot 10^6$ циклов); коэффициент запаса прочности $S_F = 1,7.$ Тогда

для шестерни $[\sigma_{F1}] = 1,75 \cdot 325 \cdot 1 \cdot 1 / 1,7 = 334 \text{ МПа};$

для колеса $[\sigma_{F2}] = 1,75 \cdot 270 \cdot 1 \cdot 1 / 1,7 = 278 \text{ МПа}.$

Сравнительная оценка прочности колес на изгиб:

для шестерни $[\sigma_{F1}] / Y_{F1} = 334 / 4,01 = 83;$

для колеса $[\sigma_{F2}] / Y_{F2} = 278 / 3,6 = 77.$

Проверочный расчет будем вести по колесу, зубья которого менее прочные. Проверяем напряжения изгиба колеса по условию

$$\sigma_F = Y_F Y_\beta w_{F1} / m_n \leq [\sigma_F],$$

где коэффициент формы зуба $Y_F = 3,6;$ коэффициент наклона зуба $Y_\beta = 1 - \beta^\circ / 140 = 1 - 16,264 / 140 = 0,88;$ удельная окружная сила $w_{F1} = 2 T_1 K_{F\beta} K_{Fv} / (d_1 b) = 2 \cdot 66,2 \cdot 1,14 \cdot 1,09 / (41,67 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-3}) = 79 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$ (так как вращающий момент $T_1 = 66,2 \text{ Н} \cdot \text{м},$ коэффициент неравномерности нагрузки $K_{F\beta} = 1,14,$

см. график *б* на рис. 33.23 при $\psi_{bd} = 1,2$; коэффициент динамичности нагрузки $K_{Fv} = 1,09$, см. табл. 33.3 при 8-й степени точности и окружной скорости 3,14 м/с, интерполяция; делительный диаметр шестерни $d_1 = 41,67$ мм; ширина венца $b = 50$ мм; нормальный модуль $m_n = 2$ мм. Тогда

$$\sigma_{F2} = 3,6 \cdot 0,88 \cdot 79 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10^{-3}) = 125 \cdot 10^6 \text{ Па} = 125 \text{ МПа} < [\sigma_{F2}] = 278 \text{ МПа}.$$

Прочность зубьев на изгиб обеспечена.

Окончательно проверим зубья на контактную усталость по формуле

$$\sigma_H = 376 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{2T_1(u+1)}{d_1^2 b u}} K_{H\beta} K_{Hv} \leq [\sigma_H].$$

Здесь $T_1 = 66,2$ Н·м; $K_{H\beta} = 1,06$ (по графику *б* на рис. 33.22); $K_{Fv} = 1,04$ (по табл. 33.2); $b = 50$ мм.

Тогда

$$\sigma_H = 376 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{2 \cdot 66,2(5+1)}{41,67^2 \cdot 10^{-9} \cdot 50 \cdot 5}} 1,06 \cdot 1,04 = 532 \cdot 10^6 \text{ Па} = 532 \text{ МПа} < [\sigma_H] = 535 \text{ МПа}.$$

33.12. ПЛАНЕТАРНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Планетарными называют передачи, имеющие колеса с перемещающимися геометрическими осями.

На рис. 33.35, *а, б* изображена схема четырехзвенной простейшей планетарной зубчатой передачи, состоящей из вращающегося *центрального колеса 1* с неподвижной геометрической осью; *сателлитов 2*, оси которых перемещаются; *неподвижного* колеса *3* с внутренними зубьями; вращающегося *водила h*, на котором установ-

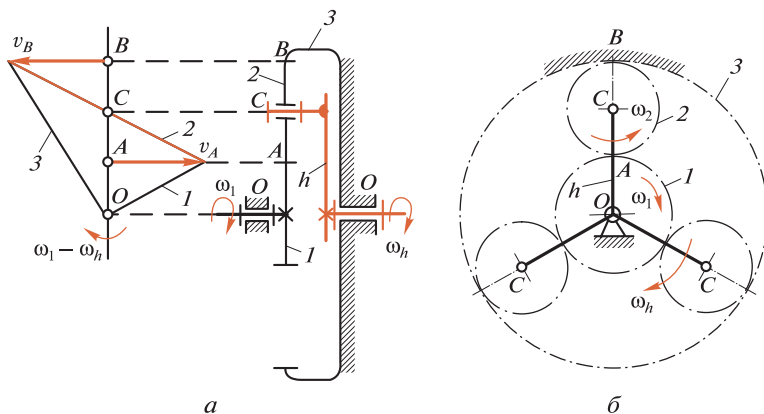


Рис. 33.35

лены сателлиты. Очевидно, что при работе планетарной передачи сателлиты 2 совершают сложное (плоскопараллельное) движение.

Ведущим в планетарной передаче может быть либо центральное колесо, либо водило. При заданной угловой скорости ведущего звена угловые скорости всех остальных звеньев получают вполне определенные значения, поэтому рассматриваемая *планетарная передача имеет постоянное передаточное отношение*.

Если в планетарной передаче (рис. 33.35) освободить неподвижное колесо 3 и сообщить ему дополнительное вращение, то рассматриваемый механизм превратится в *дифференциальный*, передаточное отношение которого будет одновременно зависеть от угловых скоростей двух звеньев.

Планетарные передачи могут быть одно- и многоступенчатыми.

Достоинства планетарных передач заключаются в малой массе и габаритных размерах конструкций по сравнению с непланетарными зубчатыми передачами, а также в возможности получения больших передаточных чисел (до 1 000 и более). Использование в передаче нескольких равномерно расположенных сателлитов распределяет передаваемую мощность на несколько потоков и позволяет уравновесить радиальные нагрузки на валы и их опоры.

Недостатки планетарных передач: повышенные требования к точности изготовления и сборки конструкции, а также сравнительно невысокий КПД у многоступенчатых передач.

Планетарные зубчатые механизмы широко распространены в машиностроении и приборостроении.

Передаточное отношение. Для определения передаточного отношения u изображенной на рис. 33.35 передачи воспользуемся методом обращения движений (в применении к планетарным передачам он называется методом Виллиса).

Пусть ведущим звеном передачи является зубчатое колесо 1, вращающееся с угловой скоростью ω_1 ; угловую скорость водила обозначим ω_H .

Мысленно сообщим всему механизму вращательное движение противоположно направлению вращения водила с угловой скоростью ω_H . При этом водило остановится и планетарная передача превратится в передачу с неподвижными геометрическими осями, причем ведущее колесо 1 будет вращаться с угловой скоростью $\omega_1 - \omega_H$, а колесо 3 — с угловой скоростью ω_H .

При остановленном водиле построим график окружных скоростей точек вертикального радиуса колес, как показано на рис. 33.35, а. Из этого графика видно, что окружные скорости всех колес будут равны, т. е. $v_A = v_B$.

Обозначив радиусы колес 1 и 3 r_1 и r_3 , получим

$$v_A = (\omega_1 - \omega_h)r_1, v_B = \omega_h r_3.$$

Приравняв правые части этих равенств, учитывая, что радиусы зубчатых колес пропорциональны числам их зубьев, получим формулу для определения передаточного отношения u планетарной передачи (при ведущем колесе 1):

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_h} = 1 + \frac{z_3}{z_1},$$

где z_1, z_3 — числа зубьев центрального и неподвижного колес.

В подавляющем большинстве случаев на практике применяют планетарные передачи (с постоянным передаточным отношением), составленные из цилиндрических зубчатых колес. Конические зубчатые колеса используют преимущественно в дифференциальных механизмах.

Конический дифференциал. Этот механизм широко используется в автомобилях, тракторах, металлорежущих станках, счетно-решающих устройствах. На рис. 33.36 изображена схема автомобильного дифференциала. Он состоит из конических зубчатых колес 6 и 7 , которые насажены на ведущие полуоси автомобиля и сцепляются с сателлитом 4 , свободно сидящим на оси, закрепленной во вращающемся водиле h . Водило приводится в движение от двигателя с помощью конической зубчатой пары 3 и 2 .

Если автомобиль движется по прямой и ровной дороге и силы сцепления колес 1 и 5 с дорогой одинаковы, то угловые скорости полуосей также будут одинаковы и равны угловой скорости водила. При движении автомобиля на закруглениях колесо, движущееся по внешней кривой, проходит больший путь, чем колесо, движущееся по вну-

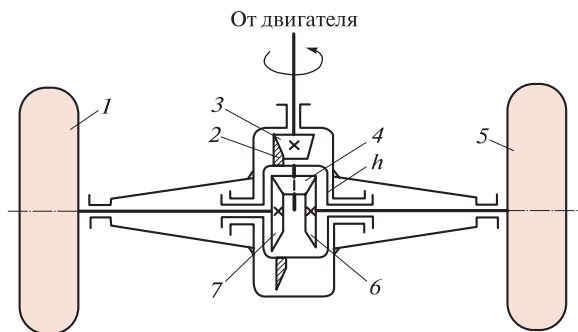


Рис. 33.36

тренной кривой. Если оба колеса автомобиля закрепить на одной оси, то неизбежно скольжение покрышек по дороге и их повышенный износ. При наличии дифференциала сателлит 4 обкатывает колеса *б* и *7* и одновременно вращается вокруг своей оси, в результате чего угловые скорости полуосей и ведущих колес автомобиля окажутся различными и скольжение покрышек по дороге будет предотвращено.

33.13. ВОЛНОВЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Волновыми называют механические передачи, содержащие контактирующие между собой гибкое и жесткое звенья и обеспечивающие передачу и преобразование движения путем деформирования гибкого звена. Волновые передачи бывают *фрикционные*, *зубчатые* и *винтовые*.

Принцип передачи и преобразования движения путем волнового деформирования одного из звеньев механизма впервые предложен в 1947 г. инженером А. И. Москвитиным.

На рис. 33.37 представлены две схемы фрикционного варианта волновой передачи, состоящей из жесткого колеса *б*, гибкого колеса *г* и роликового генератора волн *h*, причем наружный диаметр недеформированного гибкого колеса несколько меньше внутреннего диаметра жесткого колеса; охватывающий размер по роликам сделан таким, чтобы деформированное гибкое колесо было прижато роликами к жесткому колесу. В схеме *а* с ведомым валом соединено жесткое колесо, а в схеме *б* — гибкое; в обеих схемах с ведущим валом соединен двухволновой генератор. При вращении генератора волны контакта перемещаются по окружности гибкого колеса, прижимают его

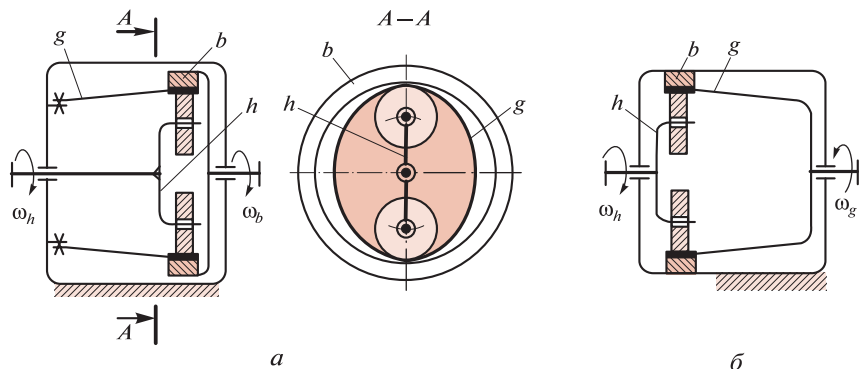


Рис. 33.37

к жесткому колесу и за счет сил трения вызывают вращение ведомого звена. Если обкатка гибкого колеса по жесткому происходит без проскальзывания, то за один оборот генератора ведомое звено повернется на угол, соответствующий разности длин окружностей контактирующих поверхностей жесткого и гибкого колес, следовательно, передаточное число будет равно отношению длины окружности ведомого звена к разности длин окружностей колес (отношение длин окружностей в дальнейшем заменим отношением диаметров). У волновой передачи по схеме *a* (см. рис. 33.37) направления вращения ведущего и ведомого звеньев совпадают, по схеме *b* — противоположны.

У зубчатых волновых передач гибкие колеса имеют наружные, а жесткие колеса — внутренние зубья. В настоящее время такие передачи имеют основное распространение.

Достоинства волновых зубчатых передач заключаются в возможности получения значительных передаточных чисел, небольшой массе и габаритных размерах конструкции, высокой кинематической точности передачи, являющейся результатом многопарного зацепления зубьев. Волновые зубчатые передачи долговечны и имеют более низкий уровень шума по сравнению с обычными зубчатыми передачами.

К *недостаткам* волновых зубчатых передач следует отнести сложную технологию изготовления деталей и отсутствие конструкций, у которых оси пересекаются или скрещиваются.

Волновые передачи применяются в станкостроении, подъемно-транспортных машинах, химическом машиностроении, авиационной и ракетной технике, промышленных роботах и др.

Передаточное отношение. В волновой фрикционной передаче передаточное отношение зависит от разности диаметров жесткого и гибкого колес и равно отношению диаметра ведомого колеса к разности диаметров колес. Заменяя отношение диаметров колес отношением чисел их зубьев, получим передаточное отношение *u* для волновой зубчатой передачи:

при ведомом жестком колесе

$$u = \frac{\omega_h}{\omega_b} = \frac{z_b}{z_b - z_g};$$

при ведомом гибком колесе

$$u = \frac{\omega_h}{\omega_g} = \frac{z_g}{z_b - z_g},$$

где z_b, z_g — числа зубьев жесткого и гибкого колес.

Очевидно, что для увеличения передаточного отношения разность чисел зубьев колес должна быть возможно меньшей, причем

она должна быть равной или кратной числу волн деформации генератором гибкого колеса во избежание интерференции (наложения) зубьев.

Элементы зацепления. Качество зацепления волновых зубчатых передач в основном зависит от профиля зубьев, формы генератора и размера деформации гибкого колеса.

Исследования прочности гибкого колеса показали, что напряжения в его ободе существенно уменьшаются с увеличением ширины впадины по окружности впадин.

Наиболее распространенными являются зубья эвольвентного профиля с уменьшенной высотой и широкой впадиной у гибкого колеса, причем зубья жесткого колеса нарезаются стандартным инструментом, а зубья гибкого колеса — модифицированным инструментом, отличающимся от стандартного только высотой головки зуба. Такой профиль принят в нашей стране для стандартных волновых редукторов общего назначения. Наиболее стабильную деформацию гибкого колеса обеспечивает кулачковый генератор волн h (рис. 33.38). Эти конструкции генераторов просты, технологичны и обеспечивают требования взаимозаменяемости.

Для уменьшения трения между кулачковым генератором и гибким колесом g располагают тела качения, например гибкий шариковый подшипник (рис. 33.39).

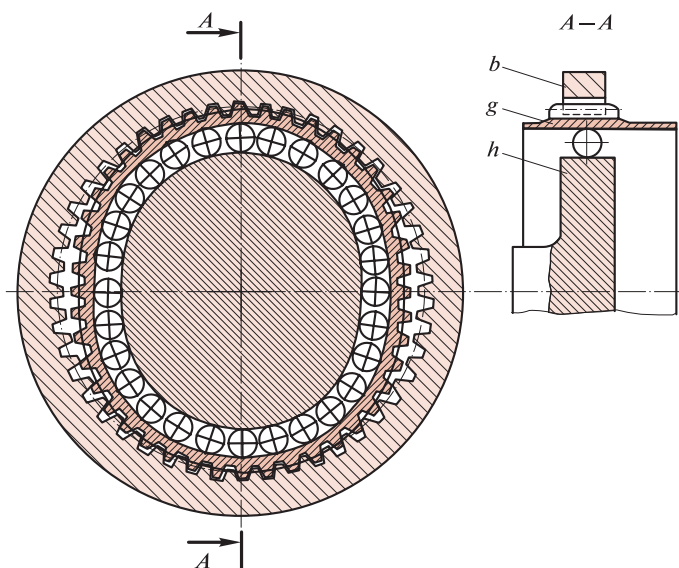


Рис. 33.38

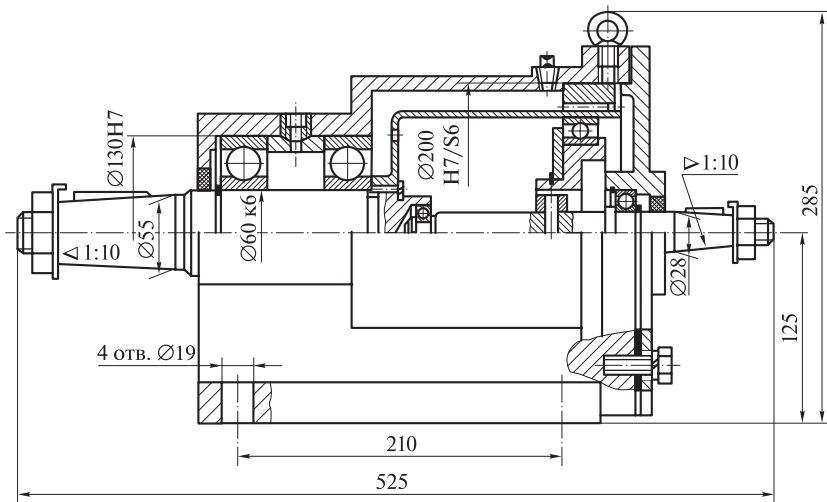


Рис. 33.39

Гибким называется подшипник с тонкостенными кольцами, допускающий радиальную деформацию колец, соизмеримую с их толщиной, и обеспечивающий передачу вращательного движения при деформированных кольцах. Основные размеры и обозначения радиальных шариковых гибких подшипников для кулачковых генераторов зубчатых волновых передач общего назначения регламентированы стандартом.

На рис. 33.39 показана конструкция стандартного волнового зубчатого редуктора ВЗ-160.

33.14. СМАЗЫВАНИЕ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

Смазочные материалы характеризуются двумя основными свойствами: *маслянистостью*, или липкостью, — способностью образовывать на сопряженных поверхностях устойчивые тонкие пленки и *вязкостью*, или внутренним трением, — способностью сопротивления сдвигу слоев масла.

Основным смазочным материалом для зубчатых передач являются жидкие нефтяные и синтетические масла.

Смазывание передач уменьшает потери на трение, увеличивает износостойкость трущихся поверхностей, предохраняет детали от коррозии, уменьшает нагрев и шум при работе передачи. Чаще всего смазывание низко- и среднескоростных передач редукторов

осуществляется окунанием колеса в масляную ванну на глубину, не-много превышающую высоту зуба. В высокоскоростных передачах осуществляют принудительное циркуляционное смазывание поли-ванием зоны зацепления с помощью насоса.

Объем масляной ванны примерно 0,4...0,8 л на 1 кВт передавае-мой мощности.

Для смазывания зубчатых передач обычно применяют тяжелые, средние и легкие индустриальные масла; гипоидные передачи сма-зывают специальным гипоидным маслом, обладающим повышенной вязкостью и противозадирными свойствами.

Глава 34

ЧЕРВЯЧНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

34.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Червячной передачей называется механизм, служащий для преобразования вращательного движения между валами со скрещивающимися осями. Обычно червячная передача (рис. 34.1) состоит из *червяка 1* и сопряженного с ним *червячного колеса 2*. Угол скрещивания осей обычно равен 90° ; неортогональные передачи встречаются редко. Червячные передачи относятся к передачам зацеплением, в которых движение осуществляется по принципу винтовой пары. Червячную передачу можно получить из рассмотренной ранее винтовой зубчатой передачи, если уменьшить число зубьев одного из косозубых колес до $z_1 = 1 \dots 4$ и увеличить их угол наклона к оси, превратив таким образом косозубое колесо в винт (червяк). Поэтому червячные передачи относят к категории *зубчато-винтовых*.

Все применяемые в дальнейшем термины, определения и обозначения, относящиеся к червячным передачам, соответствуют стандартам «Передачи червячные» и «Передачи зубчатые».

Витки червяка и зубья червячного колеса соприкасаются обычно по линиям и поэтому представляют собой высшую кинематическую пару. Обычно ведущее звено червячной передачи — червяк, но существуют механизмы, в которых ведущим звеном является червячное колесо.

Достоинства червячных передач: компактность конструкции и возможность получения больших передаточных чисел в одноступенчатой передаче (до $u = 300$ и более); высокая кинематическая точность и повышенная плавность работы; малая интенсивность шума и виброактивности; возможность обеспечения самоторможения.

Недостатки червячных передач: значительное геометрическое скольжение в зацеплении и связанные с этим тре-

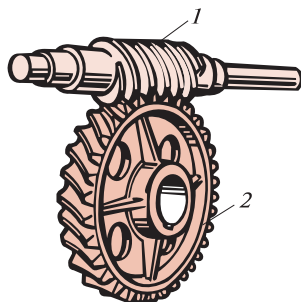


Рис. 34.1

ние, повышенный износ, склонность к заеданию, нагрев передачи и сравнительно низкий КПД (от $\eta = 0,5$ до $0,95$); необходимость применения для ответственных передач дорогостоящих и дефицитных антифрикционных цветных металлов. Указанные недостатки ограничивают мощность червячных передач (обычно до 60 кВт).

Червячные передачи находят широкое применение, например, в металлорежущих станках, подъемно-транспортном оборудовании, транспортных машинах, а также в приборостроении.

Витки червяка нарезают резцом на токарно-винторезном или дисковой фрезой на резьбофрезерном станке; после нарезания резьбы и термообработки рабочие поверхности витков нередко шлифуют и полируют, что существенно повышает нагрузочную способность передачи. Зубья червячного колеса нарезают методом обкатки червячными фрезами на зубофрезерных станках; режущий инструмент в этом случае подобен червяку, снабженному режущими кромками и гранями (производящий червяк). Такая технология изготовления обеспечивает линейный контакт между витками червяка и зубьями червячного колеса.

На рис. 34.2 схематически изображены основные виды червячных передач: *а* — цилиндрическая червячная передача, у которой делительные и начальные поверхности цилиндрические (такие передачи имеют наибольшее распространение); *б* — глобоидная передача, у которой делительная поверхность червяка торообразная, а колеса — цилиндрическая (такие передачи нетехнологичны); *в* — червячно-реечная передача (по сравнению с зубчато-реечной такая передача обеспечивает большую плавность работы и имеет большую жесткость; оси червяка и рейки могут располагаться под углом или быть параллельны; передачи применяют в продольно-строгальных, тяжелых фрезерных и горизонтально-расточных станках).

Для цилиндрических червячных передач установлены 12 степеней точности и соответствующие нормы точности изготовления

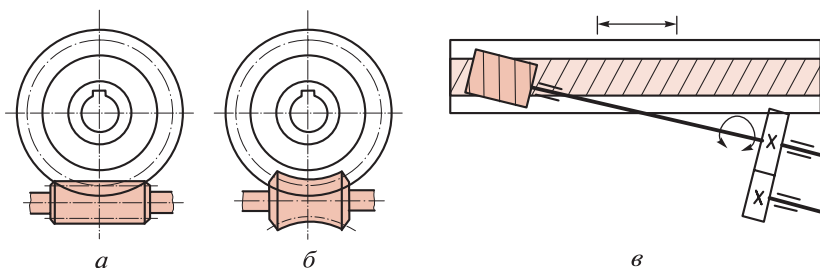


Рис. 34.2

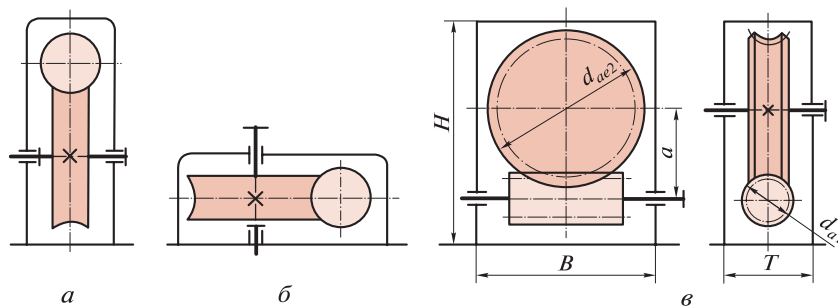


Рис. 34.3

и монтажа передач. Независимо от степени точности передач назначают нормы бокового зазора между витками червяка и зубьями колеса.

Для глобоидных передач установлено три степени точности: 6, 7 и 8, для каждой из которых назначают нормы точности изготовления червяка, колеса и монтажа передач. Независимо от степени точности устанавливают нормы бокового зазора.

Силовые червячные передачи обычно изготавливают по 6—8-й степеням точности.

Конструктивно червячные передачи чаще всего делают в закрытом исполнении. На рис. 34.3 приведены схемы наиболее часто встречающихся червячных редукторов: *а* — с верхним расположением червяка, *б* — с боковым расположением червяка, *в* — с нижним расположением червяка.

34.2. ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧ

В этом и последующих подразделах в основном рассматриваются вопросы, относящиеся к цилиндрическим червячным передачам, расчет геометрии которых, как и расчет геометрии глобоидных передач, стандартизован.

Цилиндрические червяки бывают следующих видов (в скобках приводятся краткие стандартные термины): *архимедов* червяк (червяк *ЗА*), теоретический торцовый профиль которого — архимедова спираль; *конволютный* червяк (червяк *ZN*), теоретический торцовый профиль которого — конволюта (удлиненная или укороченная эвольвента); *эвольвентный* червяк (червяк *ZJ*), теоретический торцовый профиль которого — эвольвента.

В дальнейшем в основном будут рассматриваться передачи с архимедовыми червяками, являющимися наиболее распространенными.

Червячное зацепление в сечении средней торцевой плоскостью червячного колеса (содержащей ось червяка) может быть представлено как *плоское зубчато-реечное зацепление*, поэтому проектирование червячной передачи в значительной степени подобно проектированию реечного зацепления.

Боковые поверхности витков архимедова червяка *в осевом сечении очерчены прямыми линиями* и представляют собой равнобокую трапецию с углом при вершине, равным 40° , т. е. угол профиля витка $\alpha = 20^\circ$.

Существенным *недостатком* архимедовых червяков (в отличие от эвольвентных) является невозможность шлифования боковых поверхностей витков плоской стороной шлифовального круга, так как в нормальном сечении виток имеет фасонный профиль. Поэтому в основном архимедовы червяки изготавливают с нешлифованными витками. Конволютные червяки теоретически имеют в нормальном сечении прямолинейный профиль витка, поэтому их шлифуют коническими кругами на резьбошлифовальных станках. Витки эвольвентных червяков шлифуют на специальных червячно-шлифовальных станках.

При прочих равных условиях форма профиля витков червяка мало влияет на нагрузочную способность передачи, поэтому технология изготовления является решающим фактором при выборе профиля витков.

Как все винты, червяки могут быть одно- или многозаходными и иметь правое или левое направления резьбы. Чаще применяют червяки с правой нарезкой.

Параметры и элементы витков цилиндрических червяков и червячных фрез рассчитываются на основании ГОСТ «Передачи червячные цилиндрические. Исходный червяк и исходный производящий червяк».

Геометрия червяка. На рис. 34.4 изображен архимедов червяк и показаны его основные размеры. Основным расчетным параметром червяка (и червячного колеса) является расчетный *модуль m* — линейная величина, в π раз меньшая расчетного *шага червяка p* , т. е.

$$m = \frac{p}{\pi}.$$

Модули m определяются в осевом сечении червяка и выбирают согласно ГОСТ «Передачи червячные цилиндрические. Модули и коэффициенты диаметра червяка», извлечение из которого приведено в табл. 34.1 (первый ряд следует предпочитать второму).

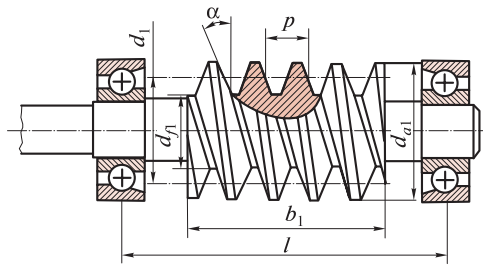


Рис. 34.4

Делительный диаметр червяка принимается кратным модулю:

$$d_1 = qm,$$

где q — коэффициент диаметра червяка, стандартные величины которого приведены в табл. 34.2 (первый ряд следует предпочитать второму); кроме указанных в таблице, стандарт допускает применение значений $q = 7,5$ и $q = 12$.

Многозаходные червяки характеризуются также *ходом* p_z , причем $p_z = pz_1$, где z_1 — число заходов; p — шаг червяка.

Очевидно, что у однозаходных червяков *шаг* и *ход* равны между собой.

Делительный *угол подъема* линии витка обозначается γ и определяется следующим образом:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{p_z}{\pi d_1} = \frac{\pi m z_1}{\pi m q} = \frac{z_1}{q}.$$

В машиностроении (например, в зубофрезерных станках) применяют *разноходовые* цилиндрические червяки, разноименные по-

Таблица 34.1

Модули, мм											
1-й ряд	1,0	1,25	1,6	2,0	2,5	3,15	4,0	5,0	6,3	8,0	10
2-й ряд	1,5	—		3,0		3,5		6,0	7,0	12	

Таблица 34.2

Коэффициент диаметра червяка						
1-й ряд	8,0	10,0	12,5	16,0	20,0	25,0
2-й ряд	7,1	9,0	11,2	14,0	18,0	22,4

верхности витков которых имеют разный ход, т.е. имеют неодинаковые (отличающиеся на десятые доли градуса) углы подъема линии витка. У разноходовых червяков толщина по хорде витка неодинакова, что дает возможность за счет осевого перемещения червяка выбирать зазор, образовавшийся в результате износа зубьев червячного колеса. Разноходовые червяки характеризуются *средним ходом*, т.е. ходом средней линии витка.

В соответствии со стандартом на исходный червяк устанавливаются следующие основные параметры витков червяка: $\alpha = 20^\circ$ — угол профиля витка в осевом сечении; $h_{a1} = m$ — высота головки витка червяка; $h_{f1} = 1,2m$ — высота ножки витка червяка; $h_1 = h_{a1} + h_{f1} = 2,2m$ — высота витка червяка.

Остальные размеры нарезанной части червяка определяются так:

диаметр вершин витков червяка

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1} = qm + 2m = m(q + 2);$$

диаметр впадин червяка

$$d_{f1} = d_1 - 2h_{f1} = qm - 2 \cdot 1,2m = m(q - 2,4);$$

длина b_1 нарезанной части червяка:

при числе заходов $z_1 = 1$ и $z_1 = 2$

$$b_1 \geq (11 + 0,06z_2)m;$$

при числе заходов $z_1 = 4$

$$b_1 \geq (12,5 + 0,09z_2)m,$$

где z_2 — число зубьев червячного колеса (для шлифуемых и фрезеруемых червяков полученную величину b_1 следует увеличить на 25 мм — при $m < 10$ мм; на 35...40 мм — при $m = 10 \dots 16$ мм; на 50 мм — при $m > 16$ мм).

Применение трехзаходных червяков стандартами не предусматривается.

Геометрия червячного колеса. На рис. 34.5 изображено червячное колесо в зацеплении с червяком и показаны основные размеры колеса, а именно:

диаметр делительной окружности червячного колеса

$$d_2 = mz_2;$$

диаметр вершин зубьев червячного колеса в среднем сечении

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2} = mz_2 + 2m = m(z_2 + 2);$$

диаметр впадин червячного колеса в среднем сечении

$$d_{f2} = d_2 - 2h_{f2} = mz_2 - 2 \cdot 1,2m = m(z_2 - 2,4);$$

наибольший диаметр червячного колеса

$$d_{ae2} \leq d_{a2} + \frac{6m}{z_1 + 2}.$$

Ширину венца червячного колеса b_2 определяют в зависимости от диаметра вершин и числа заходов червяка:

$$\text{при } z_1 \leq 3 \quad b_2 \leq 0,75d_{a1};$$

$$\text{при } z_1 = 4 \quad b_2 \leq 0,67d_{a1}.$$

На рис. 34.5 тонкими линиями изображено червячное колесо, представляющее собой цилиндрическое косозубое колесо. Такая конструкция передачи характеризуется точечным контактом, следовательно, малой нагрузочной способностью и поэтому применяется в несилowych передачах.

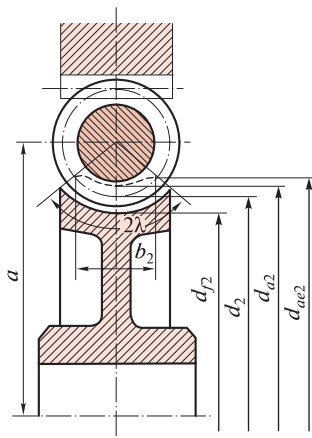


Рис. 34.5

Наиболее распространены червячные передачи, у которых зубья колеса имеют вогнутую форму и охватывают червяк по дуге с углом $2\lambda = 60 \dots 110^\circ$. При этом образуется *линейный контакт* витков червяка и зубьев колеса, в результате чего значительно повышается нагрузочная способность передачи.

Межосевое расстояние червячной передачи

$$a = 0,5(d_1 + d_2) = 0,5m(q + z_2).$$

В силовых червячных передачах рекомендуется принимать следующие значения числа зубьев червячного колеса:

$$z_2 \geq 22 \text{ — при однозаходном червяке};$$

$$z_2 \geq 26 \text{ — при многозаходном червяке}.$$

Кинематика червячных передач. Выше говорилось о том, что червячное зацепление в сечении средней торцевой плоскостью колеса можно рассматривать как плоское зубчато-реечное зацепление, причем скорость v_1 осевого перемещения витков червяка равна окружной скорости v_2 червячного колеса на делительной окружности.

Так как за каждый оборот червяка сечение витка смещается в осевом направлении на величину хода резьбы $p_z = pz_1$, то $v_1 = pz_1n_1 = \pi mz_1n_1$; червячное колесо имеет окружную скорость $v_2 = \pi d_2n_2 = \pi mz_2n_2$.

Так как $v_1 = v_2$, то $z_1 n_1 = z_2 n_2$ или $z_1 \omega_1 = z_2 \omega_2$.

Следовательно, *передаточное число* червячной передачи

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Передаточное число червячной передачи равно отношению числа зубьев червячного колеса к числу витков червяка.

В силовых передачах, в частности в стандартных передачах редукторов, передаточные числа принимают в пределах $u = 8 \dots 80$.

Основные параметры (межосевые расстояния a , номинальные передаточные числа u , сочетания модулей m , коэффициентов диаметра червяка q и чисел заходов z_1) цилиндрических червячных передач для редукторов регламентированы ГОСТ 2144—76*. Указанный стандарт предусматривает применение одно-, двух- и четырехзаходных червяков, обычно с линией витков правого направления, наименьшее число зубьев червячного колеса, предусмотренное стандартом, $z_2 = 32$.

Скольжение в зацеплении. На рис. 34.6, *a* изображены векторы окружных скоростей червяка и червячного колеса, обозначенные соответственно $v_{\text{ч}}$ и $v_{\text{к}}$. Приняв вращение червяка за абсолютное, а вращение червячного колеса за переносное движение, согласно известной из теоретической механики теореме о сложении скоростей можно построить параллелограмм скоростей, изображенный на рис. 34.6, *a*, где v_s — вектор относительной скорости скольжения витка червяка по зубу колеса, причем

$$v_s = \sqrt{v_{\text{ч}}^2 + v_{\text{к}}^2} = \frac{v_{\text{ч}}}{\cos \gamma},$$

здесь γ — угол подъема линии витка червяка.

Как видно из рисунка, *скорость скольжения в червячном зацеплении больше окружной скорости червяка.* Именно в этом со-

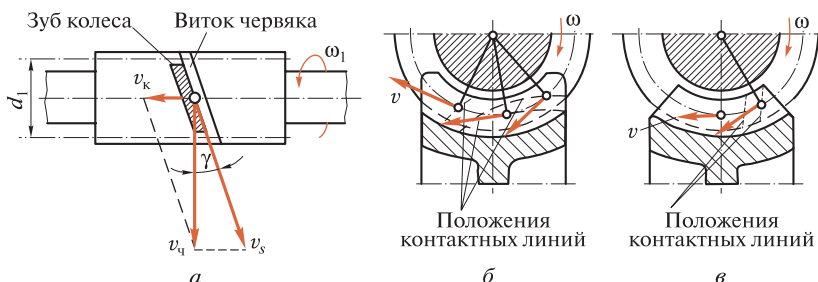


Рис. 34.6

стоит коренное отличие червячной передачи от зубчатой, у которой скорость скольжения значительно меньше окружной скорости.

На рис. 34.6 показаны контактные линии, лежащие на боковой поверхности зубьев колеса цилиндрической передачи (б) и глобоидной передачи (в), а также изображены проекции v векторов скольжения, которые по модулю и направлению близки к окружной скорости червяка. При работе передачи контактные линии перемещаются относительно витков червяка и зубьев колеса.

Угол наклона контактных линий к вектору скорости скольжения имеет большое значение для работоспособности червячной передачи, так как от этого угла зависит характер трения.

Если угол наклона контактных линий к вектору скорости скольжения мал или равен нулю, то условия для гидродинамической смазки неблагоприятны, так как слой смазочного материала течет вдоль линий контакта, и масляный клин не способен создать подъемную силу, чтобы предотвратить соприкосновение трущихся поверхностей, следовательно, в этом случае будет *полужидкостное трение*.

Если скорость скольжения направлена поперек линии контакта (см. рис. 34.6, в), то создаются благоприятные условия для образования масляного клина, обладающего значительной подъемной силой, и возникает режим *жидкостного трения*. Именно поэтому *нагрузочная способность глобоидных передач примерно в 1,5 раза выше, чем цилиндрических передач с червяками*, витки которых очерчены линейчатыми поверхностями (архимедовы, эвольвентные и конволютные червяки).

Однако технология изготовления и сборки глобоидных червячных передач значительно сложнее, чем цилиндрических; кроме того, глобоидные передачи чувствительны к погрешностям монтажа и деформациям звеньев. Указанные особенности глобоидных передач приводят к тому, что область их применения сужается за счет использования более технологичных червячных цилиндрических передач с *вогнутым профилем витков червяка*. Такие передачи имеют нагрузочную способность в 1,3—1,5 раза выше, чем у ранее рассмотренных цилиндрических червячных передач.

Трение в червячном зацеплении подобно трению в клинчатом ползуне, поэтому оно характеризуется приведенным коэффициентом трения $f' = \operatorname{tg} \varphi'$, где φ' — приведенный угол трения.

Эффективность действия масляного клина возрастает с увеличением скорости скольжения, поэтому f' и φ' зависят от скорости скольжения, т. е. уменьшаются с увеличением этой скорости.

Так, например, при скорости скольжения $v_s = 0,1$ м/с приведенный коэффициент трения $f' = 0,1$, а при $v_s = 10$ м/с, $f' = 0,02$.

Таблица 34.3

v_s , м/с	φ'	v_s , м/с	φ'	v_s , м/с	φ'
0,01	5° 40' ... 6° 50'	1,50	2° 20' ... 2° 50'	4,0	1° 20' ... 1° 40'
0,10	4° 30' ... 5° 10'	2,00	2° 00' ... 2° 30'	7,0	1° 00' ... 1° 30'
0,50	3° 10' ... 3° 40'	2,5	1° 40' ... 2° 20'	10,0	0° 55' ... 1° 20'
1,00	2° 30' ... 3° 10'	3,0	1° 30' ... 2° 00'	15,0	0° 48' ... 1° 00'

Значение приведенного коэффициента трения кроме скорости скольжения зависит также от материалов червяка и червячного колеса, шероховатости активных поверхностей, качества смазки. Ориентировочные значения приведенного угла трения φ' (для червячных пар сталь — оловянная бронза) в зависимости от скорости скольжения v_s приведены в табл. 34.3 (меньшие значения для шлифованных червяков; для колес из безоловянных бронз значения увеличивают примерно на 40 %).

34.3. СИЛЫ В ЧЕРВЯЧНОМ ЗАЦЕПЛЕНИИ. КПД

Как известно из теоретической механики, полная реакция негладкой поверхности отклоняется от нормали на величину угла трения. Поэтому сила R взаимодействия витка червяка и зуба червячного колеса (равная векторной сумме силы нормального давления и силы трения) будет отклоняться от средней плоскости червячного колеса на угол $\gamma + \varphi'$ (рис. 34.7), где γ — угол подъема линии витка; φ' — приведенный угол трения.

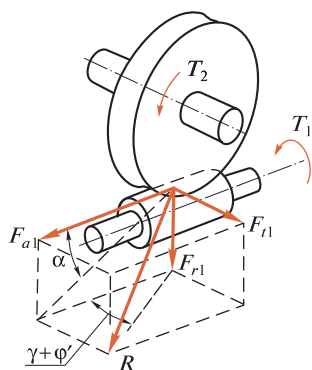


Рис. 34.7

Разложим силу R на три взаимно-перпендикулярные составляющие по реальным направлениям, в результате чего получим:

окружную силу на червяке, численно равную осевой силе на червячном колесе,

$$F_{t1} = \frac{2T_1}{d_1} = F_{a2};$$

осевую силу на червяке, численно равную окружной силе на червячном колесе,

$$F_{r2} = \frac{2T_2}{d_2} = F_{a1};$$

радиальную силу на червяке и червячном колесе

$$F_{r1} = F_{r2} = F_{a1} \operatorname{tg} \alpha.$$

В приведенных формулах T_1, T_2 — вращающие моменты на валу червяка и червячного колеса; d_1, d_2 — диаметры делительных цилиндров червяка и червячного колеса; α — угол профиля витка червяка в осевом сечении.

Вращающие моменты на валах червяка и червячного колеса связаны зависимостью $T_2 = T_1 \eta u$, где η — КПД передачи; u — передаточное число.

Коэффициент полезного действия червячной передачи определяется потерями на трение в зацеплении, потерями на перемешивание и разбрызгивание масла и потерями в опорах валов, причем в червячных передачах последние два вида потерь отдельно не учитываются, так как они относительно невелики и зафиксированы при экспериментальном определении значений φ' , приведенных в табл. 34.3.

Потери на трение в червячном зацеплении определяются так же, как и в винтовой паре, поэтому КПД червячной передачи при ведущем червяке определяем по формуле

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + \varphi')},$$

где γ — угол подъема линии витка; φ' — приведенный угол трения, определяемый по табл. 34.3.

Так как η возрастает с увеличением угла γ , то КПД *червячных передач повышается с увеличением числа заходов червяка.*

При *проектных расчетах*, когда элементы конструкции и размеры червяка и червячного колеса еще неизвестны, ориентировочно можно принимать следующие значения КПД:

при $z_1 = 1$	$\eta = 0,7 \dots 0,75;$
при $z_1 = 2$	$\eta = 0,75 \dots 0,82;$
при $z_1 = 3$	$\eta = 0,82 \dots 0,87;$
при $z_1 = 4$	$\eta = 0,87 \dots 0,92.$

34.4. РАСЧЕТ ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧ

Основными критериями работоспособности червячных передач являются износостойкость активных поверхностей и изгибная прочность зубьев червячного колеса.

В связи с большими скоростями скольжения червячным передачам свойственно *механическое изнашивание* и особенно *изнаши-*

вание при заедании и его опасной форме — задире. Износостойкость и изгибная прочность витков стальных червяков с высокой твердостью активных поверхностей обычно не лимитируют нагрузочную способность червячной передачи. Исходные положения для расчета червячных передач аналогичны применяемым при стандартном расчете зубчатых передач, причем в приводимых в дальнейшем формулах червяк полагается стальным, а венец червячного колеса — бронзовым или чугунным.

Расчет передачи на контактную усталость. В основу расчета положены формула Герца для определения наибольшего контактного напряжения σ_H и нормальная нагрузка на единицу длины контактных линий.

Формула для *проверочного расчета* червячных передач на контактную усталость имеет вид

$$\sigma_H = \frac{170\,000}{z_2/q} \sqrt{\left(\frac{1+z_2/q}{a}\right)^3} KT_2 \leq [\sigma_H],$$

где z_2 — число зубьев червячного колеса; q — коэффициент диаметра червяка; a — межосевое расстояние; T_2 — вращающий момент на валу червячного колеса; $[\sigma_H]$ — допускаемое контактное напряжение; K — коэффициент нагрузки: при постоянной нагрузке $K = 1$, при переменной нагрузке $K = 1,1 \dots 1,3$ (большие значения для высокоскоростных передач). Коэффициент нагрузки при расчете червячных передач сравнительно невелик, так как они работают плавно, бесшумно и хорошо прирабатываются.

При проектном расчете основным расчетным параметром является межосевое расстояние a . Приравняв контактное напряжение σ_H допускаемому $[\sigma_H]$, получим формулу для *проектного расчета* цилиндрических червячных передач:

$$a = (1 + z_2/q)^3 \sqrt{\left(\frac{170\,000}{[\sigma_H] z_2/q}\right)^2} KT_2,$$

причем ориентировочно принимают $q \approx z_2/4$ и округляют до ближайшего стандартного значения по табл. 34.2; z_2 определяют в результате кинематического расчета передачи (для стандартных редукторов $z_{2\min} = 32$).

Упрощенно последнюю формулу для *проектного расчета* можно записать в следующем виде:

$$a = 6100 \sqrt[3]{\frac{KT_2}{[\sigma_H]^2}},$$

а формулу для *проверочного расчета* записать так:

$$\sigma_H = \frac{480\,000}{d_2} \sqrt{\frac{KT_2}{d_1}} \leq [\sigma_H].$$

По величине межосевого расстояния определяют расчетный модуль m по формуле

$$m = \frac{2a}{q + z_2},$$

округляя его до ближайшего стандартного значения по табл. 34.1.

После установления основных параметров передачи определяют размеры червяка и колеса, вычисляют скорость скольжения, находят расчетное значение КПД и вращающего момента на валу червячного колеса, а затем проводят проверочный расчет, сравнивая расчетное контактное напряжение с допусковым, причем недогрузка желательна не более 10 %, а перегрузка не должна превышать 5 %.

Расчет зубьев червячного колеса на усталость при изгибе. Указанный расчет является *проверочным*, причем червячное колесо рассматривается как косозубое; за счет дугообразной формы зубья червячного колеса полагаются приблизительно на 40 % прочнее.

Формула для *проверочного расчета* зубьев червячного колеса на усталость при изгибе имеет вид

$$\sigma_F = \frac{1,5KT_2Y_{F2} \cos \gamma}{m^3 q z_2} \leq [\sigma_F],$$

где K — коэффициент нагрузки, принимаемый таким же, как и при расчете на контактную усталость; Y_{F2} — коэффициент формы зуба, принимаемый по табл. 34.4 по эквивалентному числу зубьев; γ — угол подъема линии витка червяка; $[\sigma_F]$ — допусковое напряжение изгиба, принимаемое для реверсивной работы в зависимости от предела выносливости при симметричном цикле изменения напряжений, а для нереверсивной работы — в зависимости от предела выносливости при отнулевом цикле (указания по выбору допусковых напряжений будут рассмотрены далее).

Эквивалентное число зубьев z_{2v} вычисляется как для косозубых колес, а именно:

Таблица 34.4

z_{2v}	20	24	26	28	30	32	35	37	40	45	50	60	80	100	150	300
Y_{F2}	1,98	1,88	1,85	1,80	1,76	1,71	1,64	1,61	1,55	1,48	1,45	1,40	1,34	1,30	1,27	1,24

$$z_{2v} = \frac{z_2}{\cos^3 \gamma},$$

где γ — угол наклона линии зуба червячного колеса, равный углу подъема линии витка червяка.

Проверка червяка на прочность и жесткость. При проверочном расчете тело червяка рассматривают как цилиндрический брус круглого сечения, лежащий на двух опорах и работающий на изгиб и кручение.

На рис. 34.8 изображена расчетная схема червяка, к которому в среднем сечении приложены окружная сила F_t , осевая сила F_a , радиальная сила F_r , а также приложен вращающий момент T_1 . Очевидно, что силы F_r и F_a изгибают червяк в вертикальной плоскости, а сила F_t создает крутящий момент и изгибает вал в горизонтальной плоскости. Эпюры изгибающих и крутящих моментов показаны на рис. 34.8. Кроме указанных внутренних силовых факторов в сечениях червяка будет действовать продольная сила, равная осевой силе F_a ; напряжения растяжения и сжатия, соответствующие продольной силе, сравнительно невелики, и их можно не учитывать.

Из эпюр изгибающих моментов видно, что опасным будет сечение в середине пролета, и что результирующий изгибающий момент в этом сечении равен

$$M_{из} = \sqrt{\left(\frac{F_r l}{4} + \frac{F_a d_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{F_t l}{4}\right)^2}.$$

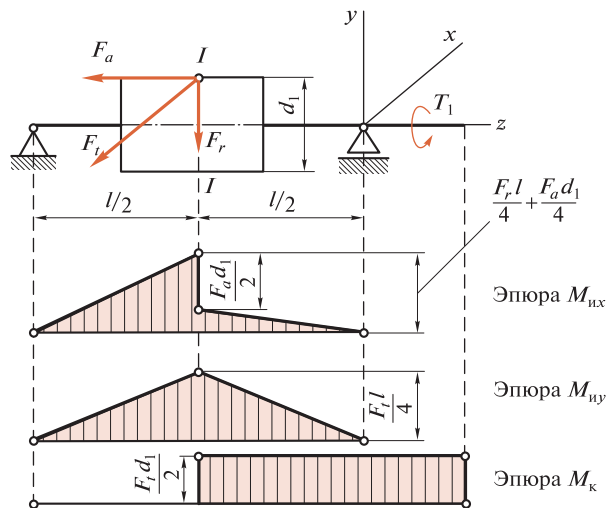


Рис. 34.8

Максимальные напряжения изгиба

$$\sigma_H = \frac{M_{и}}{W} = \frac{M_{и}}{0,1d_f^3},$$

где W — момент сопротивления изгибу; d_f — диаметр впадины витков червяка.

Максимальные напряжения кручения

$$t_k = \frac{M_k}{W_p} = \frac{T_1}{0,2d_f^3},$$

где W_p — момент сопротивления кручению.

Применив, например, энергетическую теорию, *условие прочности* червяка можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{и}^2 + 3\tau_k^2} \leq [\sigma_{-1и}],$$

где $[\sigma_{-1и}] = 45 \dots 60$ МПа — допускаемое напряжение изгиба для стального червяка (при симметричном цикле изменения напряжений).

Значительные прогибы червяка вызывают недопустимую концентрацию нагрузки в зацеплении, поэтому максимальные прогибы ограничиваются допускаемыми значениями, выражаемыми в долях модуля червяка.

Приблизительно максимальный прогиб (называемый стрелой прогиба и обозначаемый f) можно рассчитывать по формуле, выведенной в сопротивлении материалов для двухопорной балки постоянного сечения, а именно:

$$f = y_{\text{max}} R l^3 (48 E I),$$

где $R = \sqrt{F_t^2 + F_r^2}$ — равнодействующая окружной и радиальной силы; l — расстояние между опорами вала червяка (если подшипниковый узел червяка еще не сконструирован, то принимают $l \approx (0,8 \dots 1,0)d_2$); E — модуль продольной упругости материала червяка; $I = \pi d_f^4 / 64$ — осевой момент инерции сечения червяка.

Условие жесткости червяка запишется в следующем виде:

$$f \leq [f] = 0,01m,$$

где $[f]$ — допускаемая стрела прогиба; m — расчетный модуль.

Если расчетная стрела прогиба f превышает допускаемую величину, то нужно увеличить коэффициент диаметра червяка q либо (если возможно) уменьшить расстояние l между опорами.

Тепловой расчет и смазывание червячных передач. Механическая энергия, потерянная в передачах, переходит в тепловую, вы-

зывающую нагрев деталей и масла. Ввиду невысокого КПД червячные передачи работают с большим тепловыделением. Однако нагрев масла до температуры свыше 95° приводит к резкому снижению его вязкости и защитных свойств и, следовательно, к появлению опасности заедания передачи. Поэтому температура масла в картере передачи не должна превышать допускаемую $[t_m] \leq 95^\circ\text{C}$.

Для нормальной работы передачи необходимо обеспечение *теплового баланса*, т.е. чтобы количество теплоты, выделяющееся в результате превращения механической энергии в тепловую, не превышало количество теплоты, отводимой от передачи естественным или искусственным путем.

Количество теплоты Q_1 , выделяющейся в передаче,

$$Q_1 = (1 - \eta)P,$$

где P — мощность на ведущем валу; η — КПД передачи.

Количество теплоты Q_2 , отводимой через стенки редуктора в окружающую среду естественным путем,

$$Q_2 = AK_T(t_m - t_0),$$

где A — площадь поверхности охлаждения корпуса редуктора (без учета днища); $K_T = 8 \dots 17 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ)$ — коэффициент теплоотдачи стенок (большие значения при хорошей циркуляции воздуха в помещении); t_m — температура масла; $t_0 = 20^\circ\text{C}$ — расчетная температура окружающей среды.

Площадь A поверхности охлаждения корпуса редуктора определяется по формуле (см. рис. 34.3, в и 34.5):

$$A = 2H(B + T) + BT,$$

где $H = 2a + 0,4d_{ae2}$ — высота корпуса; $B = 1,3d_{ae2}$ — длина корпуса; $T = 2d_{a1}$ — ширина корпуса.

Если $Q_2 \geq Q_1$, то естественного охлаждения достаточно, в противном случае нужно увеличить поверхность охлаждения, сделав стенки корпуса ребристыми (в этом случае при расчете учитывают 50 % площади поверхности ребер).

При достаточном естественном охлаждении соблюдается следующее условие:

$$t_m = \frac{(1 - \eta)P}{AK_T} + t_0 \leq [t_m].$$

Если естественного охлаждения недостаточно, т.е. $t_m > [t_m]$, то применяется искусственное охлаждение, при котором коэффициент теплоотдачи значительно повышается.

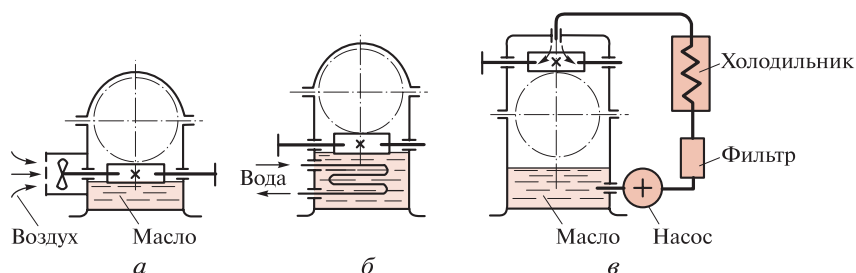


Рис. 34.9

Для зубчатых и маломощных червячных передач обычно достаточно естественного охлаждения; для червячных передач большой мощности с невысоким КПД и для всех глобоидных передач применяют искусственное охлаждение.

Основные способы искусственного охлаждения показаны на рис. 34.9: *а* — воздушное охлаждение с помощью вентилятора, встроенного в корпус редуктора; *б* — водяное охлаждение с помощью змеевика с проточной водой, встроенного в корпус редуктора; *в* — циркуляционное охлаждение масла с применением специальных холодильников.

34.5. МАТЕРИАЛЫ И ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Ранее было установлено, что кинематической паре червяк — червячное колесо свойственны большие скорости скольжения, превышающие окружную скорость червяка, и, как следствие, механическое изнашивание, в частности изнашивание при заедании и усталостное изнашивание. Поэтому *при выборе материалов червячной пары необходимо обеспечить хорошие антифрикционные и противозадирные свойства*. Наилучшие результаты достигаются при сочетании высокотвердой стальной поверхности с антифрикционным материалом, обладающим необходимой объемной прочностью, например бронзой.

В малоответственных передачах червяк делают из среднеуглеродистых сталей (например, марок 45, 40Х и др.), подвергнутых нормализации или улучшению, причем твердость активных поверхностей витков $H \leq 320$ НВ. Более высокая нагрузочная способность передачи получается, если червяк из среднеуглеродистой стали (например, марок 45Х, 40ХН, 35ХГСА и др.) подвергнуть поверхностной или

объемной закалке до твердости $H \geq 45$ HRC. Наилучшие результаты достигаются, если червяк изготовить из низкоуглеродистой стали (например, марок 20X, 18ХГТ, 12ХН3А и др.) с последующей цементацией и закалкой до твердости $H \geq 56$ HRC, шлифованием и полированием витков. Червяки из азотируемых сталей (38Х2МЮА, 38Х2Ю и др.) не требуют шлифования витков, а только полируются. Для передач с колесами очень больших диаметров целесообразно червяки делать бронзовыми, а червячные колеса — чугунными.

Конструктивно червяки чаще всего изготавливают как единое целое с валом и лишь в редких случаях — насадными. В целях экономии цветных металлов червячные колеса чаще всего делают составными: на чугунный или стальной центр насаживается бронзовый венец.

Для неотчетственных, слабонагруженных и тихоходных передач при скоростях скольжения $v_s < 2$ м/с возможно изготовление червячного колеса из чугуна или пластмасс (текстолит, полиамиды).

Наилучшими антифрикционными и противозадирными свойствами обладают *оловянные бронзы* (например, БрО10Ф1, БрО10Н1Ф1 и др.), однако они дороги и дефицитны, и поэтому применяются только для ответственных передач с высокими скоростями скольжения ($v_s > 7$ м/с). Нагрузочная способность передач с червячными колесами из оловянных бронз лимитируется усталостным изнашиванием и от скорости скольжения практически не зависит, поэтому верхний предел этой скорости для таких передач не ограничивают, а допускаемые контактные напряжения от нее не зависят. Наряду с этим срок службы венцов червячных колес в значительной степени зависит от способа отливки заготовок (в песок, в кокиль, центробежная), поэтому допускаемые напряжения зависят от способа отливки и, кроме того, от твердости активной поверхности витков червяка. Значения допускаемых контактных напряжений $[\sigma_{H0}]$ для червячных колес из оловянных бронз и стальных червяков при базе испытаний $N_{H \lim} = 10^7$ циклов нагружения приведены в табл. 34.5. Для определения значения допускаемого контактного напряжения $[\sigma_H]$ при заданном числе циклов N_K , отличном от базы испытаний, в расчет вводится коэффициент долговечности Z_N , тогда

$$[\sigma_H] = [\sigma_{H0}]Z_N.$$

Здесь $Z_N = \sqrt[3]{10^7/N_K}$; $N_K = 60nL_h \leq 25 \cdot 10^7$, где n — частота вращения червячного колеса; L_h — заданная долговечность передачи, ч.

Более высокими механическими характеристиками, но существенно худшими (по сравнению с оловянными бронзами) противозадирными свойствами обладают *безоловянные бронзы* (например, БрА9Ж4Л, БрА10Ж4Н4Л и др.), поэтому их применяют для менее

Таблица 34.5

Материал и способ отливки	[σ_{H0}], МПа, при твердости поверхности витков червяка HRC	
	< 45	≥ 45
БрО10Ф1, в песок	130	160
БрО10Ф1, в кокиль	190	225
БрО10Н1Ф1, центробежная	210	250

ответственных передач при скоростях скольжения $v_s < 7$ м/с. Нагрузочная способность передач с червячными колесами из безоловянных бронз (а также из чугунов) лимитируется изнашиванием при заедании и зависит от скорости скольжения. Значения допускаемых контактных напряжений [σ_H] для червячных колес из чугуна или безоловянной бронзы и стальных червяков выбирают независимо от числа циклов нагружений по табл. 34.6.

Допускаемые напряжения изгиба [σ_F] для зубьев червячного колеса устанавливаются в зависимости от материала, способа отливки и характера нагружения (реверсивное, нереверсивное). Значения [σ_{F0}] при базе испытаний $N_{lim} = 10^6$ циклов нагружений приведены в табл. 34.7. Для определения значения допускаемого напряжения изгиба при расчетном числе циклов N_K табличное значение [σ_{F0}] следует умножить на коэффициент долговечности Y_N , равный

$$Y_N = \sqrt[9]{10^6/N_K} \leq 1;$$

если $N_K < 10^6$, то его принимают равным базе испытаний $N_{lim} = 10^6$; если $N_K > 25 \cdot 10^7$, то принимают $N_K = 25 \cdot 10^7$.

Таблица 34.6

Материал		[σ_H], МПа, при скорости скольжения, м/с						
червяка	червячного колеса	0,25	0,5	1	2	3	4	6
Сталь 20; 20Х цементуемая ($H > 45$ HRC)	СЧ15, СЧ18	160	130	115	90	—	—	—
Сталь 45, Ст6	СЧ15, СЧ18	140	110	90	70	—	—	—
Сталь 60 закаленная	БрА9Ж4Л	—	250	230	210	180	160	120

Таблица 34.7

Материал и способ отливки	[$\sigma_{\text{д}}$], МПа, при нагружении	
	нереверсивном	реверсивном
БрО10Ф1, в песок	40	29
БрО10Ф1, в кокиль	58	42
БрО10Н1Ф1, центробежный	65	46
БрА9Ж4Л, в песок	76	64
СЧ10, »	34	21
СЧ15, »	38	24
СЧ18, »	43	27

Заметим, что при определении допускаемого напряжения изгиба способ нагружения имеет существенное значение.

Глава 35

ЦЕПНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

35.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ И ДЕТАЛИ ПЕРЕДАЧ

Цепной передачей называется механизм, служащий для преобразования вращательного движения между параллельными валами при помощи двух жесткозакрепленных на них зубчатых колес — звездочек и надетой на них бесконечной цепи (рис. 35.1).

Цепь — многосвязная гибкая связь, которая может использоваться для перемещения грузов (тяговые цепи), подвески или подъема и опускания грузов (грузовые цепи), для передачи движения (приводные цепи). В дальнейшем мы будем рассматривать только *приводные цепи*, которые используются в цепных передачах.

Достоинства цепных передач заключаются в том, что они позволяют передавать вращение удаленным (до 8 м) валам, а также приводить в движение одной цепью несколько валов; в цепной передаче отсутствует проскальзывание, а радиальная нагрузка на валы в два раза меньше, чем в ременной передаче; цепные передачи имеют высокий КПД (при благоприятных условиях $\eta = 0,97 \dots 0,99$), мо-

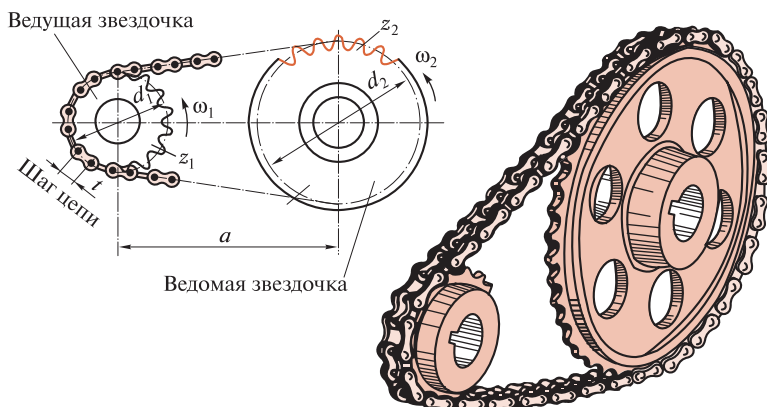


Рис. 35.1

гут осуществлять передачу значительных мощностей (до нескольких тысяч киловатт), допускают скорости движения цепи до 35 м/с и передаточные числа до $u = 10$.

Недостатки цепных передач: повышенная виброактивность и шум при работе вследствие пульсации скорости цепи и динамических нагрузок; интенсивный износ шарниров вследствие трения и трудностей смазывания, вытягивание цепи вследствие износа шарниров и удлинения пластин.

Цепные передачи широко применяют в металлорежущих и деревообрабатывающих станках, в нефтяном, горном, транспортном, сельскохозяйственном машиностроении и других отраслях. Цепные передачи выполняют как *понижающими*, так и *повышающими*; широко известна, например, повышающая передача к заднему колесу велосипеда. Ответственные цепные передачи выполняют *закрытыми*, заключенными в жесткий корпус, который служит масляной ванной.

Исходной расчетной характеристикой всех цепей является *шаг цепи t , измеряемый по хорде делительной окружности звездочки*.

Приводные цепи бывают роликовые, втулочные, зубчатые и фасоннозвенные; первые три вида цепей стандартизованы.

На рис. 35.2 показаны элементы двухзвездной передачи однорядной *роликовой цепи*, которая состоит из *наружного звена I* (собранного из двух наружных пластин 1 и валиков 2, неподвижно закрепленных в отверстиях наружных пластин) и *внутреннего звена II* (состоящего из двух внутренних пластин 3, втулок 4, неподвижно закрепляемых в отверстиях внутренних пластин, и роликов 5, свободно надеваемых на втулки). Ролики, перекатываясь по зубьям звездочек, уменьшают их износ.

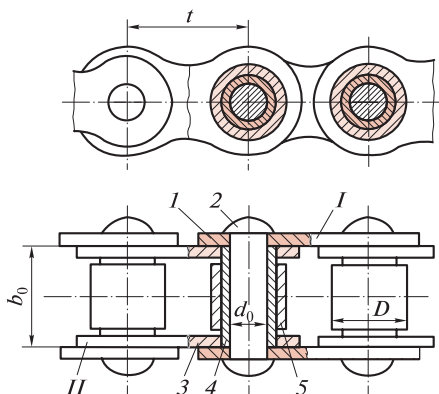


Рис. 35.2

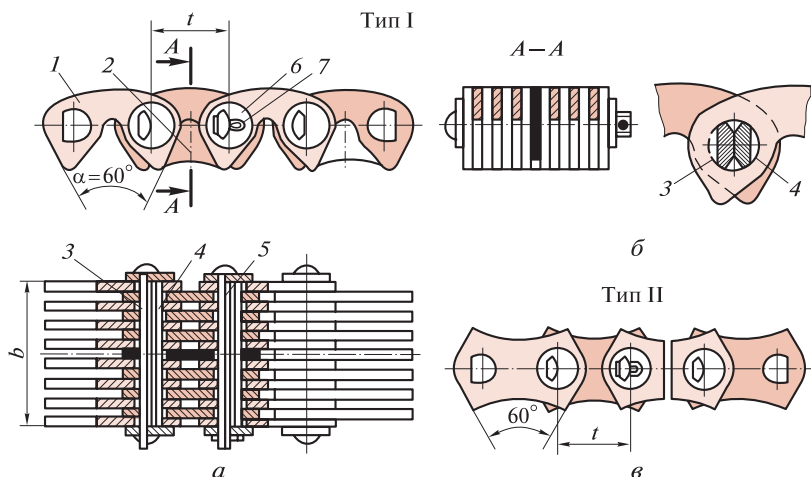


Рис. 35.3

Наружное и внутреннее звенья в сборе образуют вращательную кинематическую пару. Пластины имеют форму тел равного сопротивления.

Втулочная цепь отличается от роликовой тем, что у первой нет роликов, а диаметр валиков и длина втулок несколько больше, благодаря чему при прочих равных условиях среднее давление в шарнирах втулочной цепи меньше. Втулочные цепи дешевле роликовых, но износостойкость их ниже.

Роликовые и втулочные цепи могут быть однорядными и многорядными.

Пластины втулочных и роликовых цепей изготавливают из закаливаемых до невысокой твердости сталей, валики и втулки — из цементуемых сталей, а ролики — из тех и других с закалкой до высокой твердости.

Зубчатые цепи с шарнирами качения изготавливают согласно стандарту. На рис. 35.3, а показаны три проекции звеньев зубчатой цепи типа I (с односторонним зацеплением), состоящей из рабочей пластины 1; направляющей пластины 2, предотвращающей сползание цепи со звездочки; удлиненной призмы 3; внутренней призмы 4; соединительной призмы 5; шайбы 6 и шплинта 7. На рис. 35.3, б показан шарнир качения 3—4. Пластины цепи имеют зубообразную форму, рабочие грани пластин расположены под углом 60° .

На рис. 35.3, в показана зубчатая цепь типа II (с двусторонним зацеплением); эта конструкция предусмотрена стандартом для цепей с большими шагами.

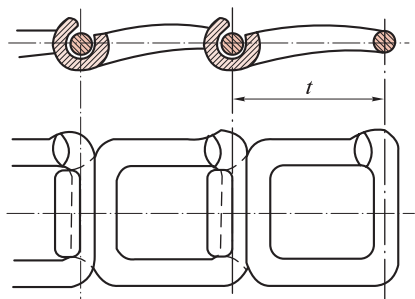


Рис. 35.4

Зубчатые цепи по сравнению с роликовыми работают более плавно и с меньшим шумом, обеспечивают высокую кинематическую точность, обладают большей надежностью и нагрузочной способностью. Зубчатая цепь с одним и тем же шагом может быть использована в большом диапазоне мощностей за счет изменения рабочей ширины (см. рис. 35.3) в значительных пределах. Такие цепи имеют высокий КПД (до 0,98), менее подвержены вытягиванию, но их масса и стоимость значительно больше, чем у роликовых цепей. Зубчатые цепи целесообразно применять при больших значениях передаваемой мощности и высокой скорости движения цепи, которая допускается до 35 м/с.

Пластины зубчатых цепей изготавливают из стали 50, обеспечивая твердость 38...45 HRC, а призмы из сталей 15 или 20 с последующей цементацией и закалкой до твердости 52...60 HRC.

Фасоннозвенные цепи применяют при малых скоростях в условиях плохой смазки и защиты, при отсутствии жестких требований к габаритным размерам передачи, например в сельскохозяйственных машинах. На рис. 35.4 показана *крючковая* цепь, допускающая свободное разъединение звеньев. Звенья фасоннозвенных цепей отливают из ковкого чугуна и в дальнейшем не обрабатывают.

Звездочки роликовых и втулочных, а также зубчатых цепей профилируют и изготавливают в соответствии с государственными стандартами.

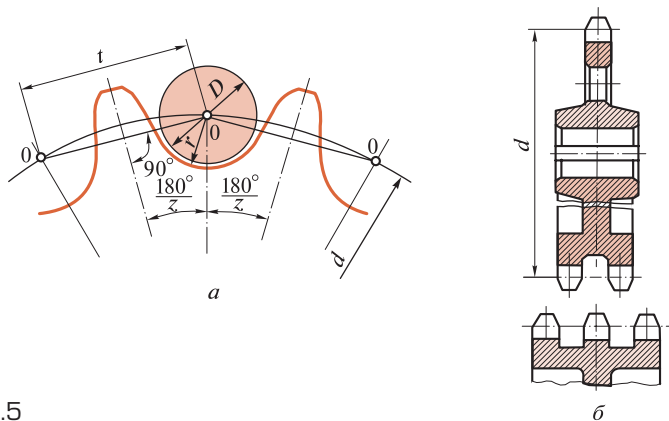


Рис. 35.5

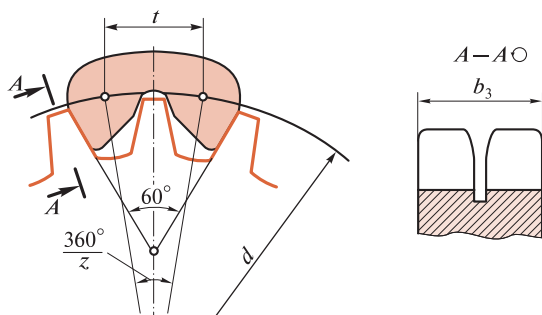


Рис. 35.6

На рис. 35.5, *a* показан стандартный профиль зубьев звездочки для роликовой цепи, где d — диаметр делительной окружности звездочки; t — шаг цепи; D — диаметр ролика; радиус впадины звездочки $r = 0,5025D + 0,05$ мм. На рис. 35.5, *б* показаны конструкции звездочек для одно-, двух- и трехрядной цепи.

На рис. 35.6 показаны стандартный профиль зубьев и сечение звездочки для зубчатой цепи типа I, в середине зубьев сделана прорезь для направляющих пластин.

Материалами для изготовления звездочек служит чугун (серый, ковкий, антифрикционный, высокопрочный) — для звездочек с большим числом зубьев и для цепей сельскохозяйственных машин; стали цементуемые — при динамических нагрузках; стали закаливаемые — при работе без резких толчков и ударов. Кроме того, для изготовления звездочек применяют пластмассы и композиционные материалы.

Диаметр делительной окружности звездочки, на которой располагаются оси шарниров, равен

$$d = t / \sin \frac{180^\circ}{z},$$

где t — шаг цепи; z — число зубьев звездочки.

35.2. ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА ПЕРЕДАЧ

Передаточное отношение цепной передачи:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

где ω_1 , ω_2 , z_1 , z_2 — угловые скорости и числа зубьев ведущей и ведомой звездочек.

Так как $d_2/d_1 = \sin \frac{180^\circ}{z_1} / \sin \frac{180^\circ}{z_2} \neq z_2/z_1$, то *передаточное отношение и нельзя определять как отношение диаметров делительных окружностей звездочек.*

Передаточное отношение, вычисленное по вышеприведенным формулам, является *средним за оборот*; в пределах поворота звездочки на угловой шаг $360^\circ/z$ мгновенное передаточное отношение не остается постоянным.

За один оборот звездочки цепь проходит путь zt , а время одного оборота равно $2\pi/\omega$, тогда *средняя скорость* цепи v равна

$$v = \frac{\omega z t}{2\pi} = \frac{n z t}{60},$$

где t — шаг цепи; n — частота вращения; ω — угловая скорость звездочки.

Из схемы цепной передачи (рис. 35.7) видно, что скорость цепи определяется горизонтальной составляющей v_r окружной скорости v_o звездочки, причем

$$v_r = v_o \cos \gamma; \quad v_b = v_o \sin \gamma.$$

При повороте звездочки на половину углового шага, т.е. на $180^\circ/z$, шарнир цепи, находящийся во впадине зуба звездочки, окажется в верхнем положении, вектор окружной скорости займет горизонтальное положение, причем $v_r = v_o$, а $v_b = 0$; при дальнейшем вращении звездочки горизонтальная составляющая v_r будет уменьшаться, а вертикальная составляющая v_b — увеличиваться, но изменит направление.

Таким образом, за время поворота звездочки на угловой шаг скорость цепи возрастет от значения $v_o \cos \frac{180^\circ}{z}$ до v_o , а затем умень-

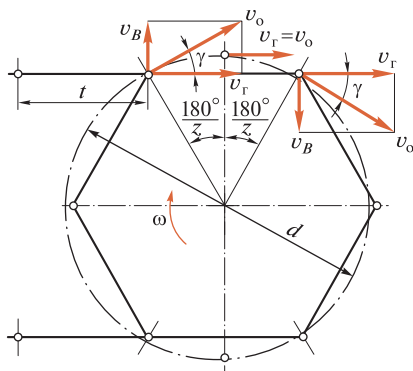


Рис. 35.7

шится до первоначального значения, что приведет к соответствующим изменениям угловой скорости ведомой звездочки и мгновенного передаточного отношения. Вертикальная составляющая v_b при этом изменяется в пределах $\pm v_o \sin \frac{180^\circ}{z}$, что приводит к соударению шарниров цепи о впадины звездочки, поперечным колебаниям цепи и динамическим нагрузкам на всю передачу.

Вертикальная составляющая $v_b = \pm v_o \sin \frac{180^\circ}{z}$ является скоростью удара шарнира и впадины зуба. Очевидно, что с уменьшением числа зубьев звездочки увеличиваются скорость и сила ударов, возрастают колебания передаточного отношения и увеличиваются динамические нагрузки в передаче. Кроме того, с уменьшением числа зубьев звездочки увеличивается угол относительного поворота соседних звеньев, что способствует изнашиванию шарниров. Поэтому числа зубьев малой звездочки ограничиваются минимальными значениями, несмотря на то, что с уменьшением числа зубьев звездочек уменьшаются габаритные размеры передачи.

Минимальное число зубьев малой звездочки для роликовых и втулочных цепей определяют в зависимости от передаточного числа u по эмпирической формуле

$$z_{1\min} = 29 - 2u;$$

для зубчатых цепей $z_{1\min}$ принимается на 20...30% выше.

Число зубьев большой звездочки $z_2 \approx uz_1$. Следует отметить, что при нечетном числе зубьев хотя бы одной из звездочек и четном числе звеньев цепи изнашивание зубьев и шарниров более равномерно.

Число звеньев цепи предварительно определяется по формуле

$$z_{\text{ц}} = \frac{2a}{t} + \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{t(z_2 - z_1)^2}{4\pi^2 a}.$$

Чтобы не применять переходное звено, расчетное число звеньев цепи должно быть округлено до четного числа.

Длина цепи $L = z_{\text{ц}} t$.

Окончательное значение межосевого расстояния равно

$$a = 0,25t \left[z_{\text{ц}} - \frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{\left(z_{\text{ц}} - \frac{z_1 + z_2}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{z_2 - z_1}{\pi} \right)^2} \right].$$

35.3. КРИТЕРИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ И РАСЧЕТ ЦЕПНЫХ ПЕРЕДАЧ

Основным критерием работоспособности приводных цепей является износостойкость их шарниров.

Расчет передач с втулочными и роликовыми цепями. Как показывают теоретические и экспериментальные исследования, нагрузочная способность цепи прямо пропорциональна давлению в шарнирах, а долговечность — обратно пропорциональна. Поэтому

Таблица 35.1

ω_1 , рад/с	[p], МПа, при шаге цепи t , мм			
	12,7 ... 15,875	19,05 ... 25,4	31,75 ... 38,1	44,45 ... 50,8
5,2	34,3	34,3	34,3	34,3
21	30,9	29,2	28,1	25,7
42	28,1	25,7	23,7	20,6
63	25,7	22,9	20,6	17,2
84	23,7	20,6	18,1	14,7
105	22,0	18,6	16,3	—
126	20,6	17,2	14,7	—
167	18,1	14,7	—	—

му в основу расчета цепных передач положено условие, по которому можно вести *проверочный расчет* передачи:

$$p = \frac{KF_t}{mA_{\text{оп}}} \leq [p],$$

где p — расчетное среднее давление в шарнире; $F_t = 2T/d$ — передаваемая окружная сила; T — вращающий момент; d — диаметр делительной окружности звездочки (если задана мощность P передачи, то $F_t = P/v$, где v — скорость цепи); $A_{\text{оп}} = d_0 b_0 \approx (0,25 \dots 0,28)t_2$ — площадь проекции опорной поверхности шарнира; d_0 — диаметр валика; b_0 — длина втулки; $[p]$ — допускаемое среднее давление в шарнирах, установленное для типовой передачи, работающей в средних условиях эксплуатации, при постоянной нагрузке и долговечности 3 000 ... 5 000 ч; K — коэффициент эксплуатации, учитывающий конкретные особенности рассчитываемой передачи; m — число рядов цепи.

Допускаемое среднее давление $[p]$ в шарнире в зависимости от угловой скорости ω_1 малой звездочки и шага цепи t приведены в табл. 35.1.

Коэффициент эксплуатации

$$K = K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6,$$

где K_1 — коэффициент динамичности нагрузки (при спокойной нагрузке $K_1 = 1$, при толчках $K_1 = 1,2 \dots 1,5$, при сильных ударах $K_1 = 1,8$); K_2 — коэффициент, учитывающий межосевое расстояние ($K_2 = 1$ при $a = (30 \dots 50)t$; $K_2 = 1,25$ при $a < 30t$; $K_2 = 0,9$ при $a > 50t$); K_3 —

коэффициент, учитывающий способ смазывания (при непрерывном смазывании $K_3 = 0,8$, при капельном $K_3 = 1$, при периодическом $K_3 = 1,5$); K_4 — коэффициент режима работы (односменная $K_4 = 1$, двухсменная $K_4 = 1,25$, трехсменная $K_4 = 1,45$); K_5 — коэффициент, учитывающий наклон межосевой линии к горизонту (при угле наклона не более 70° $K_5 = 1$, при угле наклона более 70° $K_5 = 1,25$, так как при вертикальном расположении передачи увеличивается давление в шарнирах за счет массы цепи); K_6 — коэффициент монтажа передачи (передвигающиеся опоры — $K_6 = 1$, при наличии оттяжных звездочек или нажимных роликов $K_6 = 1,15$, нерегулируемое натяжение — $K_6 = 1,25$).

При *проектном расчете* ориентировочное значение шага цепи t определяется по формуле

$$t \geq 2,8 \sqrt[3]{\frac{KT_1}{z_1 [p] m}},$$

где T_1 — вращающий момент на ведущей звездочке, имеющей число зубьев z_1 ; m — число рядов цепи.

Поскольку допускаемое давление $[p]$ в шарнирах, в свою очередь, зависит от шага цепи (табл. 35.1), последний выбирается по табл. 35.2 в зависимости от *рекомендуемой* угловой скорости малой звездочки.

Усилия в передаче. В цепной передаче в отличие от ременной предварительное натяжение обычно не требуется, поэтому силы F_1 и F_2 , действующие на ведущую и ведомую ветви цепи, равны

$$F_1 = F_t + F_q + F_v; F_2 = F_q + F_v,$$

где $F_t = 2T/d$ — окружная сила; $F_q = k_f q g a$ — натяжение от провисания ведомой ветви цепи; q — масса одного метра цепи; g — ускоре-

Таблица 35.2

Число зубьев z_1	ω_{\max} , рад/с, при шаге t , мм							Примечания
	12,7	15,875	19,05	25,4	31,75	38,1	44,45	
<i>Для втулочных и роликовых цепей</i>								
≥ 15	180	140	120	80	60	45	35	Максимально допускаемые
	130	110	95	75	55	40	30	Рекомендуемые
<i>Для зубчатых цепей</i>								
≥ 17	340	280	230	170	140	—	—	Максимально допускаемые

ние свободного падения; a — межосевое расстояние; k_f — коэффициент провисания цепи (для горизонтальных передач $k_f = 6$, для вертикальных $k_f = 1$, при угле наклона 40° $k_f = 3$, так как чем меньше угол наклона, тем больше провисание цепи); $F_v = qv^2$ — натяжение от центробежных сил, где $v = \omega z t / (2\pi) = n z t / 60$ — скорость цепи.

Влияние на натяжение цепи динамических нагрузок учитывается в расчетах введением коэффициента динамичности K_1 .

При средних скоростях движения цепи (до 15 м/с) нагрузка R на валы цепной передачи равна

$$R = kF_t,$$

где $k = 1,15$ для горизонтальной и $k = 1,05$ для вертикальной передач. Эту силу можно считать направленной по линии центров.

В ответственных передачах цепи проверяют на статическую прочность по формуле

$$s_{\text{ст}} = \frac{Q}{K_1 F_t + F_q + F_v} \leq [s_{\text{ст}}],$$

где Q — разрушающая нагрузка; $[s_{\text{ст}}]$ — допускаемый коэффициент запаса статической прочности цепи ($[s_{\text{ст}}] = 10 \dots 20$ для втулочных и роликовых цепей; $[s_{\text{ст}}] = 20 \dots 40$ для зубчатых цепей; данные значения для средних скоростей и средних сроков службы цепи; большие значения для более тяжелых цепей).

Глава 36

ПЕРЕДАЧА ВИНТ – ГАЙКА

36.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Передачей винт – гайка называется механическая передача, состоящая из винта и гайки и предназначенная для преобразования вращательного движения в поступательное или наоборот.

Достоинства передачи винт – гайка: простота, компактность и технологичность конструкции, большой выигрыш в силе, возможность получения медленного движения при высокой точности перемещений, большая нагрузочная способность, плавность и бесшумность работы.

Недостатки передачи заключаются в значительном трении в резьбовой паре, вызывающем повышенный ее износ и сравнительно низкий КПД. Скорость скольжения в резьбовой паре больше скорости осевого перемещения в 10 – 40 раз.

Передача винт – гайка применяется в металлорежущих станках (механизмы подачи), винтовых прессах, грузоподъемных машинах, прокатных станах, тисках, домкратах, измерительных приборах, рабочих органах роботов и др.

Конструкция деталей. Передачи винт – гайка делятся на *передачи скольжения* (рис. 36.1) и *передачи качения* (рис. 36.2).

Винты передачи делятся на *грузовые*, применяемые для создания больших осевых сил, и *ходовые*, применяемые для осуществления точных перемещений.

Винты силовых передач при реверсивной нагрузке имеют трапецидальную резьбу, имеющую более высокий КПД благодаря меньшему углу профиля (см. гл. 29). Для получения точных перемещений в механизмах приборов применяют треугольную резьбу с мелким шагом.

Гайки винтовой пары скольжения могут быть цельными (для грузовых или неточных ходовых винтов)

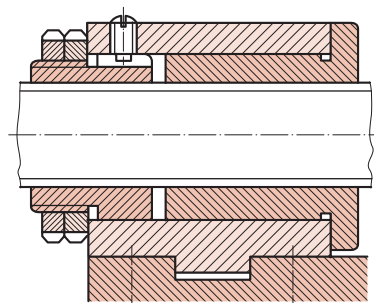


Рис. 36.1

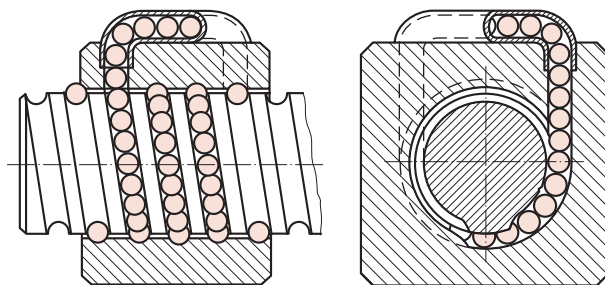


Рис. 36.2

и составными (для механизмов точных перемещений). На рис. 36.1 показана составная гайка, имеющая возможность устранения зазора в резьбе за счет смещения подвижной части гайки относительно неподвижной. Гайка ходового винта токарно-винторезного станка (маточная гайка) имеет разъем по диаметральной плоскости, что дает возможность периодического расцепления винта и гайки.

Чтобы обеспечить износостойкость передачи и увеличить ее КПД, материалы винта и гайки должны представлять собой *антифрикционную пару*. Поэтому винты изготавливают из углеродистых или легированных сталей, а гайки делают из алюминиевых и оловянных бронз, серого или антифрикционного чугуна; винты ответственных передач закаливают, азотируют, а резьбу шлифуют. Рабочие поверхности винта и гайки в зависимости от условий работы передачи смазывают пластичным или жидким смазочным материалом.

Для уменьшения трения и износа применяют шариковые винтовые пары качения (см. рис. 36.2), имеющие высокую нагрузочную способность, малые потери на трение и высокую кинематическую

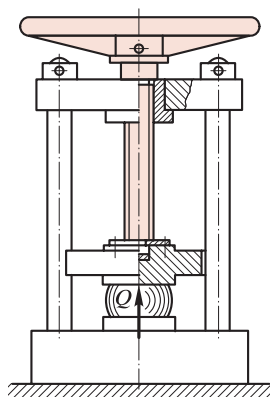


Рис. 36.3

точность. В таких винтовых парах шарики циркулируют по замкнутому каналу, соединяющему первый и последний витки винтовой канавки гайки.

На рис. 36.3 показан ручной винтовой пресс, позволяющий создавать давление в несколько десятков килоньютон. Винт имеет однозаходную резьбу с малым углом подъема, чтобы обеспечить самоторможение и большой выигрыш в силе.

На рис. 36.4 изображена ручная дрель, у которой ведущее звено — гайка 1 — перемещается возвратно-поступательно вдоль винта 2, приводя во вращение закрепленное

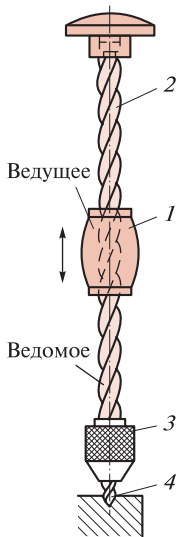


Рис. 36.4

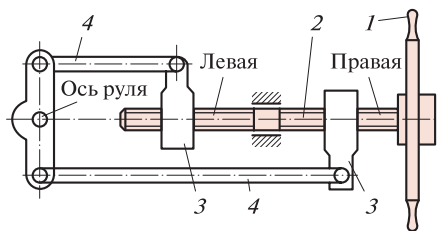


Рис. 36.5

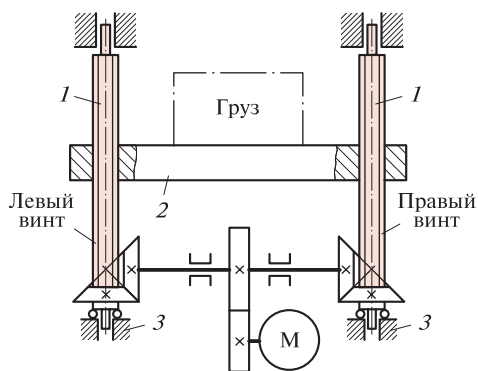


Рис. 36.6

в патроне 3 сверло 4; вместо сверла может быть поставлена отвертка. Резьба винта многозаходная с большим углом подъема.

На рис. 36.5 показана схема рулевого управления речного судна. При вращении штурвала 1 вращается винт 2, имеющий на одном конце левую, а на другом — правую резьбу; гайки 3, перемещаясь поступательно в противоположные стороны, посредством тяг 4 поворачивают руль.

На рис. 36.6 показана схема электрифицированного домкрата. Электродвигатель через зубчатые передачи передает вращение винтам 1, имеющим правую и левую резьбу, и смонтированным на упорных подшипниках 3. При своем вращении винты 1 поднимают и опускают платформу 2 с грузом. За один оборот винтов груз получает осевое перемещение, равное ходу резьбы (для однозаходных резьб ход равен шагу). Зная частоту вращения вала электродвигателя и передаточные числа зубчатых передач, легко вычислить скорость платформы.

36.2. СИЛОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ПЕРЕДАЧЕ

Силовые соотношения в резьбовой паре передачи винт — гайка определяются теми же формулами, что и в резьбовых соединениях (см. гл. 29).

Момент M_p сил в резьбе равен

$$M_p = 0,5Qd_2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi'),$$

где Q — осевая сила; d_2 — средний диаметр резьбы; ψ — угол подъема резьбы; φ' — приведенный угол трения ($\varphi' = \operatorname{arctg} f'$; приведенный коэффициент трения $f' = f/\cos \alpha'$, где f — коэффициент трения скольжения; α' — половина угла профиля резьбы).

Для метрической резьбы $\alpha' = 30^\circ$, для трапецеидальной $\alpha' = 15^\circ$, для упорной $\alpha' = 3^\circ$, для прямоугольной $\alpha' = 0$. Таким образом, момент сил в резьбе при прочих равных условиях будет *наименьшим у прямоугольной резьбы*.

Для расчета передач скольжения с однозаходными винтами можно принимать $f \approx 0,1$, что соответствует $\varphi \approx 6^\circ$.

В гл. 29 было показано, что если $\psi < \varphi'$, то резьба, а следовательно, и передача винт — гайка, будет *самотормозящей*, т. е. при любой осевой силе Q относительное движение винта и гайки окажется невозможным.

Как известно из теоретической механики, КПД η_p резьбовой пары определяется по формуле

$$\eta_p = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg}(\psi + \varphi')}.$$

Отметим, что с уменьшением угла подъема резьбы ψ КПД резьбовой пары уменьшается, и наоборот.

Кроме потерь в резьбе в передачах винт — гайка существуют потери, связанные с трением в опорах. Таким образом, общий КПД η передачи винт — гайка равен

$$\eta = \eta_p \eta_{\text{оп}},$$

где $\eta_{\text{оп}}$ — коэффициент, учитывающий потери в опорах (для ходовых винтов металлорежущих станков $\eta_{\text{оп}} \approx 0,92$, для домкратов и винтовых прессов $\eta_{\text{оп}} \approx 0,6$).

Если на опорном торце трение скольжения заменено трением качения, то потерями на опоре можно пренебречь. Для передач винт — гайка с трением качения в резьбе условно можно полагать коэффициент трения $f \approx 0,01$.

36.3. РАСЧЕТ ПЕРЕДАЧИ ВИНТ — ГАЙКА

Чаще всего причиной выхода из строя передачи скольжения винт — гайка является износ резьбы. Кроме того, передача может

выйти из строя в результате недостаточной прочности и устойчивости тела винта.

Основным критерием работоспособности передач скольжения является износостойкость резьбы.

Расчет резьбы на износостойкость. Расчет ведется исходя из предположения, что осевая нагрузка Q распределена по рабочим виткам резьбы равномерно. Условие износостойкости резьбы винта и гайки записывается следующим образом:

$$p_{и} = \frac{Q}{\pi d_2 h z_{в}} < [p_{и}],$$

где d_2 — средний диаметр резьбы; h — рабочая высота профиля резьбы; $z_{в}$ — число витков резьбы гайки; $p_{и}$, $[p_{и}]$ — расчетное и допускаемое среднее давление в резьбе (для пары сталь — бронза $[p_{и}] = 8 \dots 13$ МПа; для пары сталь — чугун $[p_{и}] = 5 \dots 9$ МПа; большие значения для закаленной стали или антифрикционного чугуна).

По вышеприведенной формуле выполняется *проверочный расчет* резьбы на износостойкость.

Введем понятия *относительной высоты гайки* $\psi_H = H_r/d_2$ и *относительной рабочей высоты профиля резьбы* $\psi_h = h/p$, где H_r — высота гайки; p — шаг резьбы. Число витков гайки $z_{в} = H_r/p$. После подстановки этих выражений в формулу для проверочного расчета получим формулу для *проектного расчета* резьбы на износостойкость:

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{Q}{\pi \psi_H \psi_h [p_{и}]}}.$$

Для цельных гаек $\psi_H = 1,2 \dots 2,5$; для составных и разъемных $\psi_H = 2,5 \dots 3,5$ (большие значения для резьб меньших диаметров). Для стандартной трапецеидальной резьбы $\psi_h = 0,5$; для упорной $\psi_h = 0,75$; для треугольной $\psi_h = 0,541$; прямоугольная резьба не стандартизована, для нее принимают шаг $p = 0,25d_2$.

Полученный расчетом средний диаметр резьбы заменяют ближайшим стандартным значением и устанавливают остальные стандартные параметры резьбы винта и гайки.

Ход p_n резьбы обычно определяют кинематическим расчетом в зависимости от заданной скорости v поступательного движения и угловой скорости ω винта или гайки по формуле $p_n \approx 2\pi v/\omega$.

Резьба, параметры которой определены из расчета на износостойкость, обычно имеет избыточный запас прочности на срез, поэтому проверка резьбы винта и гайки на эту деформацию обычно не производится.

Расчет винта на прочность. Этот расчет выполняется как проверочный. Так как тело винта одновременно подвергается сжатию (или растяжению) и кручению, то согласно энергетической теории условие прочности винта записывается так:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{\text{сж}}^2 + 3\tau_{\text{к}}^2} \leq [\sigma_{\text{р}}].$$

Здесь $\sigma_{\text{сж}} = 4Q/(\pi d_1^2)$, $\tau_{\text{к}} = M_{\text{р}}/(0,2d_1^3)$, где Q — осевая сила; d_1 — внутренний диаметр резьбы; $M_{\text{р}}$ — момент сил в резьбе.

Приближенно можно провести проверочный расчет винта на прочность по расчетной осевой силе $Q_{\text{расч}} = 1,3Q$ (см. расчет затянутых болтов) по условию

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{4Q_{\text{расч}}}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_{\text{р}}].$$

Расчет винта на устойчивость. Этот расчет также выполняется как проверочный для работающих на сжатие длинных винтов. Условие устойчивости имеет вид

$$\sigma_{\text{сж}} = \frac{4Q}{\pi d_1^2} \leq \varphi[\sigma_{\text{сж}}].$$

Здесь φ — коэффициент продольного изгиба, зависящий от материала и гибкости λ стержня (см. сопротивление материалов). Гибкость стержня определяется по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{i},$$

где μ — коэффициент приведения длины (для двухопорных винтов $\mu = 1$; если опорной является гайка, то $\mu = 2$); l — расчетная длина винта (для двухопорных винтов — расстояние между опорами; если опорой является гайка, то расстояние от середины гайки до свободного конца); i — радиус инерции сечения (для винта $i = d_1/4$).

Допускаемое напряжение $[\sigma_{\text{сж}}] = \sigma_{\text{т}}/[s]$, где $[s] = 2 \dots 4$ — допускаемый коэффициент запаса прочности.

Расчет гайки. Высота гайки $H_{\text{г}} = \psi_H d_2$; наружный диаметр D определяется из условия ее прочности на растяжение и кручение:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{4Q_{\text{расч}}}{\pi(D^2 - d^2)} \leq [\sigma_{\text{р}}],$$

где $Q_{\text{расч}} = 1,3Q$; d — наружный диаметр резьбы. Отсюда

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,3Q}{\pi[\sigma_{\text{р}}]} + d^2}.$$

Глава 37

ВАЛЫ И ОСИ

37.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Вал — деталь машин, предназначенная для передачи вращающего момента вдоль своей осевой линии. В большинстве случаев валы поддерживают вращающиеся вместе с ними детали (зубчатые колеса, шкивы, звездочки и др.). Некоторые валы (например, гибкие, карданные, торсионные) не поддерживают вращающиеся детали. Валы машин, которые кроме деталей передач несут рабочие органы машины, называются *коренными*. Коренной вал станков с вращательным движением инструмента или изделия называется *шпинделем*. Вал, распределяющий механическую энергию по отдельным рабочим машинам, называется *трансмиссионным*. В отдельных случаях валы изготовляют как единое целое с цилиндрической или конической шестерней (вал-шестерня) или с червяком (вал-червяк).

По форме геометрической оси валы бывают *прямые*, *коленчатые* и *гибкие* (с изменяемой формой оси). Простейшие прямые валы имеют форму тел вращения. На рис. 37.1 показаны *гладкий* (а) и *ступенчатый* (б) валы.

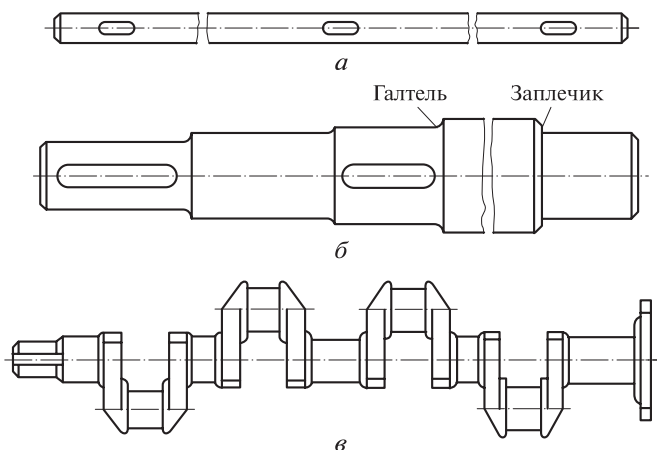


Рис. 37.1

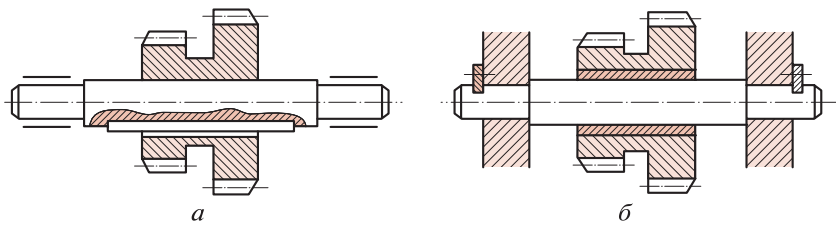


Рис. 37.2

чатый (б) прямые валы, а также *коленчатый* вал (в). Ступенчатые валы являются наиболее распространенными. Для уменьшения массы или для размещения внутри других деталей валы иногда делают с каналом по оси; в отличие от сплошных такие валы называют *полыми*.

Ось — деталь машин и механизмов, служащая для поддержания вращающихся частей, но *не передающая полезный крутящий момент*. Оси бывают *вращающиеся* (рис. 37.2, а) и *неподвижные* (рис. 37.2, б). Вращающаяся ось устанавливается в подшипниках. Примером вращающихся осей могут служить оси железнодорожного подвижного состава, примером невращающихся — оси неведущих колес автомобиля.

Из определений видно, что при работе валы всегда вращаются и испытывают деформации кручения или изгиба и кручения, а оси — только деформацию изгиба.

Конструктивные элементы валов и осей (рис. 37.3). Опорная часть вала или оси называется *цапфой*. Концевая цапфа называется *шипом*, а промежуточная — *шейкой*. Концевая цапфа, предназначенная нести преимущественную осевую нагрузку, называется *пятой*. Шипы и шейки вала опираются на *подшипники*, опорной частью для пяты является *подпятник*. По форме цапфы могут быть цилиндрическими, коническими, шаровыми и плоскими (пяты). Кольцевое утолщение вала, составляющее с ним единое целое, называется *буртиком*.

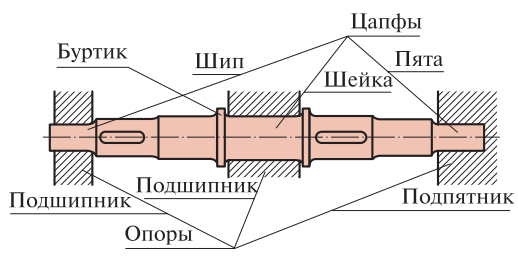


Рис. 37.3

Переходная поверхность от одного сечения к другому, служащая для упора насаживаемых на вал деталей, называется *заплетником*. Для уменьшения концентрации напряжений и повышения прочности переходы в местах изменения диаметра вала или оси делают плавными. Криволинейную поверхность плавного перехода от меньшего сечения к большему называют *галтелью* (см. рис. 37.1, б). Галтели бывают постоянной и переменной кривизны. Галтель вала, углубленную за плоскую часть заплетника, называют *поднутрением*.

Форма вала по длине определяется распределением нагрузок, т.е. эпюрами изгибающих и крутящих моментов, условиями сборки, и технологией изготовления. Переходные участки валов между соседними ступенями разных диаметров нередко выполняют с полукруглой канавкой для выхода шлифовального круга.

Посадочные концы валов, предназначенные для установки деталей, передающих вращающий момент в машинах, механизмах и приборах, стандартизованы.

Материалы валов и осей. Требованиям работоспособности валов и осей наиболее полно удовлетворяют углеродистые и легированные стали, а в ряде случаев — высокопрочные чугуны. Выбор материала, термической и химико-термической обработки определяется конструкцией вала и опор, техническими условиями на изделие и условиями его эксплуатации.

Для большинства валов применяют термически обработанные стали 45 и 40Х, а для ответственных конструкций сталь 40ХН, 30ХГТ и др. Валы из этих сталей подвергают улучшению или поверхностной закалке ТВЧ.

Быстроходные валы, вращающиеся в подшипниках скольжения, требуют высокой твердости цапф, поэтому их изготавливают из цементуемых сталей 20Х, 12Х2Н4А, 18ХГТ или азотируемых сталей типа 38Х2МЮА и др. Наибольшую износостойкость имеют хромированные валы.

Обычно валы подвергают токарной обработке с последующим шлифованием посадочных поверхностей и цапф. Иногда посадочные поверхности и галтели полируют или упрочняют поверхностным наклепом (обработка шариками или роликами).

37.2. РАСЧЕТ ВАЛОВ И ОСЕЙ

При работе валы и вращающиеся оси даже при постоянной внешней нагрузке испытывают знакопеременные напряжения изгиба симметричного цикла, следовательно, возможно усталостное

разрушение валов и вращающихся осей. Чрезмерная деформация валов может нарушить нормальную работу зубчатых колес и подшипников, следовательно, *основными критериями работоспособности валов и осей являются сопротивление усталости материала и жесткость*. Практика показывает, что разрушение валов быстроходных машин обычно происходит в результате усталости материала.

Для окончательного расчета вала необходимо знать его конструкцию, тип и расположение опор, места приложения внешних нагрузок. Вместе с тем, подбор подшипников можно осуществить, только когда известен диаметр вала. Поэтому *расчет валов выполняется в два этапа: предварительный (проектный) и окончательный (проверочный)*.

Предварительный расчет валов. Проектный расчет производится *только на кручение*, причем для компенсации напряжений изгиба и других неучтенных факторов принимают значительно пониженные значения допускаемых напряжений кручения, например для выходных участков валов редукторов $[\tau_k] = (0,025 \dots 0,03)\sigma_b$, где σ_b — временное сопротивление материала вала. Тогда диаметр вала определится из условия прочности

$$\tau_k = \frac{M_k}{0,2d^3} \leq [\tau_k],$$

откуда

$$d \leq \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2[\tau_k]}}$$

Полученное значение диаметра округляется до ближайшего стандартного размера согласно ГОСТ «Нормальные линейные размеры», устанавливающего четыре ряда основных и ряд дополнительных размеров; последние допускаются применять лишь в обоснованных случаях. Так, из ряда *Ra40* указанного стандарта в диапазоне от 16 до 100 мм предусмотрены следующие основные нормальные линейные размеры: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 45, 48, 50, 53, 56, 60, 63, 67, 71, 75, 80, 85, 90, 95, 100.

Так как промышленность изготавливает подшипники качения с диаметром отверстия 35; 55; 65; 70 мм в указанном диапазоне, то разрешается использовать для цапф валов и осей эти дополнительные размеры.

При проектировании редукторов диаметр выходного конца ведущего вала можно принять равным диаметру вала электродвигателя, с которым вал редуктора будет соединен муфтой.

После установления диаметра выходного конца вала назначается диаметр цапф вала (несколько больше диаметра выходного конца) и производится подбор подшипников. Диаметр посадочных поверхностей валов под ступицы насаживаемых деталей для удобства сборки принимают больше диаметров соседних участков. В результате этого ступенчатый вал по форме оказывается близок к брусу равного сопротивления.

Расчетные схемы валов и осей (рис. 37.4, *a—д*). При составлении расчетной схемы валы и оси рассматривают как балки, шарнирно закрепленные в жестких опорах, одна из которых подвижная. Нагрузки, передаваемые валам и осям со стороны насаженных на них деталей, полагают сосредоточенными и приложенными в середине ступицы (см. рис. 37.4, *д*). Силы трения в подшипниках не учитывают, силами тяжести валов, осей и насаженных на них деталей обычно пренебрегают. Кроме того, в большинстве случаев пренебрегают усилиями, растягивающими или сжимающими вал.

Оси координат на расчетной схеме следует направлять вдоль векторов основных внешних сил. Если угол между плоскостями действия внешних сил не превышает 30° , то эти силы на расчетной схеме можно совмещать в одну плоскость.

Радиальные реакции подшипников, а следовательно, и условные опоры полагают расположенными следующим образом (см. рис. 37.4): *a* — у подшипников скольжения на расстоянии $0,3 \dots 0,4$ его длины от внутреннего торца, так как вследствие деформаций валов и осей давление по длине подшипника распределено неравномерно; *б* — у радиальных подшипников качения в середине их ширины; *в*, *г* — у радиально-упорных подшипников качения в точках *O* пересечения с осью вала нормали к площадке контакта в ее середине (размер *a*, определяющий расстояние точки *O* от клейме-

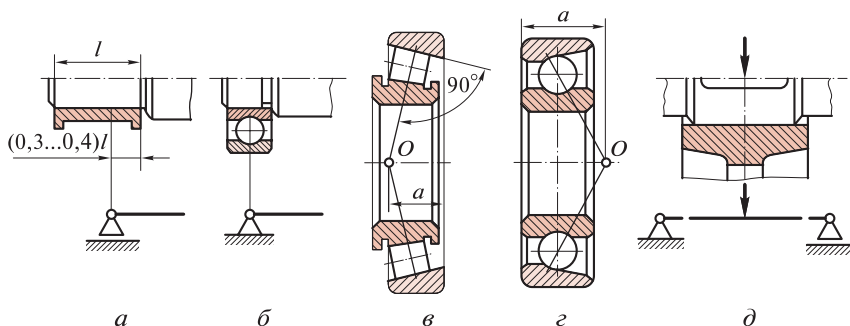


Рис. 37.4

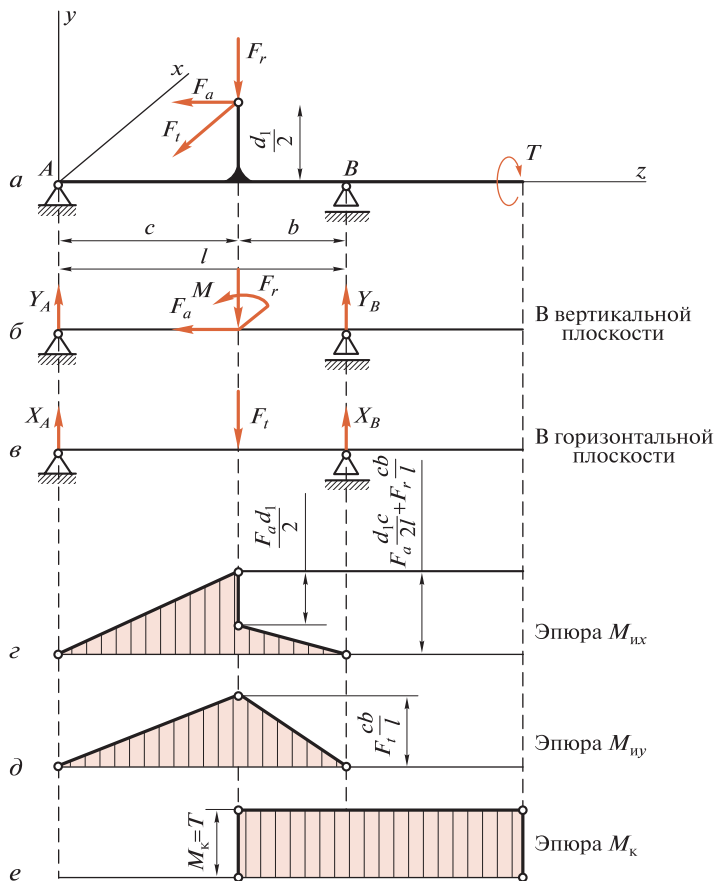


Рис. 37.5

ного торца подшипника, вычисляется по формулам в зависимости от размеров подшипника).

На рис. 37.5, $a—e$ представлена расчетная схема ведущего вала цилиндрического редуктора с косозубыми колесами, нагруженного вращающим моментом T , окружной силой F_t , радиальной силой F_r и осевой силой F_a . Здесь же представлены эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях и эпюра крутящих моментов. Суммарный изгибающий момент в любом сечении вала определяется как геометрическая сумма изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскостях по формуле

$$M_{из} = \sqrt{M_{из}^2 + M_{из}^2}.$$

Одновременное действие изгибающего и крутящего моментов учитывается значением эквивалентного момента, например по гипотезе наибольших касательных напряжений,

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}.$$

Окончательный расчет валов. Проверочный расчет валов выполняется на усталость и жесткость (расчеты на колебания мы рассматривать не будем).

Упрощенный проверочный расчет валов на усталость исходит из предположения, что не только нормальные, но и касательные напряжения изменяются по симметричному (наиболее неблагоприятному) циклу. Этот вид расчета дает неточность на несколько процентов *в сторону увеличения запаса прочности вала*. Условие сопротивления усталости имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{0,1d^3} \leq [\sigma_{-1и}],$$

где $\sigma_{\text{экв}}$ — эквивалентное напряжение в проверяемом сечении; $M_{\text{экв}}$ — эквивалентный момент; d — диаметр вала в этом сечении; $[\sigma_{-1и}]$ — допускаемое напряжение на изгиб при симметричном цикле изменения напряжений (табл. 37.1).

Расчетный диаметр вала в проверяемом сечении определяется по формуле

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{экв}}}{0,1[\sigma_{-1и}]}}$$

и сравнивается с принятым при конструировании вала диаметром.

Если проверяемое сечение вала ослаблено шпоночной канавкой, то расчетный диаметр вала следует увеличить на 7... 10 %.

Таблица 37.1

Материал	Временное сопротивление $\sigma_{\text{в}}$, МПа	Допускаемые напряжения, МПа	
		$[\sigma_{\text{и}}]$	$[\sigma_{-1и}]$
Углеродистая сталь	400	130	40
	500	170	45
	600	200	55
	700	230	65
Легированная сталь	800	270	75
	1000	330	90

Приведенные для проектного и проверочного расчета валов формулы и рекомендации используются и для расчета осей с учетом только нормальных напряжений изгиба, так как $M_k = 0$. Допускаемое напряжение $[\sigma_{и}]$ для невращающихся и $[\sigma_{-и}]$ — для вращающихся осей выбирают по табл. 37.1.

Уточненный проверочный расчет валов на усталость исходит из предположения, что нормальные напряжения изменяются по симметричному, а касательные — по асимметричному циклу. Этот расчет заключается в определении фактического коэффициента запаса прочности в предположительно опасных сечениях с учетом характера изменения напряжений, влияния абсолютных размеров деталей, концентрации напряжений, шероховатости и упрочнения поверхностей. Условие сопротивления усталости имеет вид

$$s = \frac{s_{\sigma} s_{\tau}}{\sqrt{s_{\sigma}^2 + s_{\tau}^2}} \geq [s],$$

где s_{σ} , s_{τ} — коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям (их вычисление рассматривалось в сопротивлении материалов); $[s]$ — допускаемый коэффициент запаса прочности; для валов передач $[s] \geq 1,3$.

В большинстве случаев можно ограничиться упрощенным проверочным расчетом валов. По известному эквивалентному напряжению в предположительно опасном сечении легко определить случаи, когда условия сопротивления усталости заведомо выполняются. Уточненный проверочный расчет на усталость производить нет необходимости, если

$$\sigma_{\text{экр}} \leq \frac{\sigma_{-и}}{K[s]} \approx [\sigma_{-и}],$$

где $\sigma_{-и}$ — предел выносливости гладкого образца при симметричном цикле нагружения; K — коэффициент снижения предела выносливости, определяемый по формуле

$$K = \frac{K_{\sigma} + \frac{1}{K_F} - 1}{K_d K_v},$$

где K_{σ} — эффективный коэффициент концентрации напряжений; K_d — коэффициент влияния абсолютных размеров поперечного сечения; K_F — коэффициент влияния шероховатости поверхности; K_v — коэффициент влияния поверхностного упрочнения. Значения указанных коэффициентов приводятся в справочной литературе и учебниках для валов.

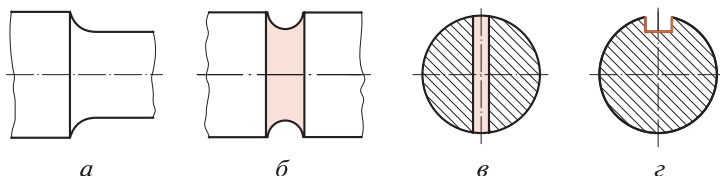


Рис. 37.6

На рис. 37.6 показаны основные концентраторы напряжений в валах и осях: *а* — галтель, *б* — выточка, *в* — поперечное отверстие, *г* — шпоночная канавка.

Проверочный расчет на усталость ведется по номинальной длительно действующей нагрузке без учета кратковременных перегрузок (например, в период пуска или при динамических и ударных воздействиях), повторяемость которых невелика и не может вызвать усталостное разрушение.

Расчет на статическую прочность. В случаях возможности возникновения кратковременных пиковых нагрузок *для предупреждения остаточных деформаций* проводится проверочный расчет на статическую прочность по условию

$$\sigma_{\text{экв max}} = K_{\text{п}} \sigma_{\text{экв}} \leq \frac{\sigma_{\text{T}}}{[s_{\text{T}}]},$$

где $K_{\text{п}}$ — коэффициент перегрузки, равный отношению максимального момента двигателя к его номинальному значению (при наличии предохранительного устройства $K_{\text{п}}$ зависит от момента, при котором срабатывает это устройство); σ_{T} — предел текучести материала; $[s_{\text{T}}]$ — допускаемый коэффициент запаса прочности по пределу текучести. Обычно принимают $[s_{\text{T}}] = 1,2 \dots 1,8$.

Расчет валов и осей на жесткость. Под действием приложенных активных и реактивных сил валы изгибаются и скручиваются. Деформации валов при изгибе характеризуются прогибом y и углами поворота α поперечных сечений (рис. 37.7).

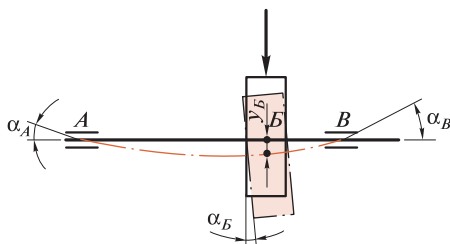


Рис. 37.7

Максимальный прогиб вала или оси называется *стрелой прогиба* и обозначается f . Деформация кручения вала характеризуется углом закручивания φ .

В результате прогиба и поворота сечений вала изменяется взаимное положение зубчатых венцов передач (см. рис. 37.7) и элементов подшипников, что вызывает неравномерность распределения нагрузок по ширине венцов зубчатых колес и длине подшипников скольжения, перекося колец подшипников качения. Деформация кручения валов вызывает неравномерность распределения нагрузки по длине шлицов в шлицевых соединениях по длине венцов валов-шестерен, может быть причиной потери точности ходовых винтов токарно-винторезных станков и причиной возникновения крутильных колебаний валов.

Деформация валов мало влияет на работу ременных и цепных передач, поэтому валы таких передач на жесткость не проверяют. Короткие валы, например валы редукторов, на жесткость обычно не проверяют, так как прогибы и углы закручивания таких валов невелики и жесткость их обеспечена.

Условия жесткости валов записывают следующим образом:

$$y \leq [y]; \quad f \leq [f]; \quad \alpha \leq [\alpha]; \quad \varphi_0^{\circ} \leq [\varphi_0^{\circ}].$$

Здесь $[y]$ — допускаемый прогиб (в месте установки зубчатых колес, $[y] \leq 0,01m$, где m — модуль зацепления); $[f]$ — допускаемая стрела прогиба (для валов общего назначения в станкостроении $[f] \leq 0,0003l$, где l — длина пролета); $[\alpha]$ — допускаемый угол поворота сечения вала (для подшипников скольжения $[\alpha] = 0,001$ рад, для подшипников качения $[\alpha] \leq 0,05$ рад и в значительной мере зависит от типа подшипника; для валов зубчатых передач для сечений в опорах $[\alpha] = 0,001$ рад); $[\varphi_0^{\circ}]$ — допускаемый угол закручивания вала ($[\varphi_0^{\circ}] = 0,25 \dots 1$ °/м и зависит от требований и условий работы конструкции).

Условие жесткости осей записывается так:

$$f \leq [f],$$

здесь $[f] \leq 0,002l$, где l — расстояние между опорами.

Пример 37.1. Рассчитать ведущий вал цилиндрического редуктора с козубыми колесами, расчетная схема которого представлена на рис. 37.5, *a*. Дано: диаметр делительной окружности шестерни $d_1 = 100$ мм, $b = 50$ мм, $c = 90$ мм, радиальная сила $F_r = 960$ Н, осевая сила $F_a = 370$ Н, вращающий момент на валу $T = 131$ Н·м.

Решение. Из проектного расчета на кручение определим диаметр d_b выходного участка вала, приняв материал сталь 45 с временным сопротивлением $\sigma_b = 730$ МПа. Тогда допускаемое напряжение на кручение

$$[\tau_k] = (0,025 \dots 0,03)\sigma_b \approx 20 \text{ МПа},$$

а расчетный диаметр вала (учитывая, что $M_k = T$) будет равен

$$d_b \geq \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{131}{0,2 \cdot 20 \cdot 10^6}} = 0,032 \text{ м} = 32 \text{ мм}.$$

Принимаем диаметр цапф $d = 35$ мм в соответствии со стандартом на подшипники качения.

Диаметр свободных участков вала примем равным 40 мм, а посадочный диаметр вала под шестерню равным 45 мм.

Далее, выбрав оси координат, построим эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях, эпюру крутящих моментов и определим эквивалентный момент в месте посадки шестерни (опасное сечение), предварительно вычислив окружную силу:

$$F_t = \frac{2T}{d_1} = \frac{2 \cdot 131}{0,1} = 2620 \text{ Н};$$

$$M_{\text{из}} = \frac{F_r \cdot cb}{l} + \frac{F_a d_1 c}{2l} = \frac{960 \cdot 0,09 \cdot 0,05}{0,14} + \frac{370 \cdot 0,1 \cdot 0,09}{2 \cdot 0,14} = 42,7 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{изу}} = \frac{F_t \cdot cb}{l} = \frac{2620 \cdot 0,09 \cdot 0,05}{0,14} = 84,4 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{экв}} = \sqrt[3]{M_{\text{из}}^2 + M_{\text{изу}}^2 + M_k^2} = \sqrt[3]{42,7^2 + 84,4^2 + 131^2} = 162 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Приняв по табл. 37.1 допускаемое напряжение $[\sigma_{-1и}] = 65$ МПа, определим диаметр посадочного места из упрощенного проверочного расчета на усталость:

$$d_p = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{экв}}}{0,1[\sigma_{-1и}]}} = \sqrt[3]{\frac{162}{0,1 \cdot 65 \cdot 10^6}} = 0,0292 \text{ м} = 29,2 \text{ мм}.$$

Так как в месте посадки шестерни на валу будет шпоночный паз, то, увеличив расчетный диаметр на 10%, в результате получим $d_p \approx 32$ мм. Сравнивая расчетный диаметр с принятым из конструктивных соображений, видим, что сопротивление усталости вала обеспечено со значительным запасом.

Еще более прочной будет конструкция, если шестерню изготовить как единое целое с валом. Конструкцию вала-шестерни, соответствующую этому примеру, см. на рис. 38.21.

Глава 38

ОПОРЫ ВАЛОВ И ОСЕЙ

38.1. ПОДШИПНИКИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Валы и вращающиеся оси монтируют на опорах, которые определяют положение вала или оси, обеспечивают вращение, воспринимают нагрузки и передают их основанию машины. Основной частью опор являются *подшипники*, которые могут воспринимать радиальные, радиально-осевые и осевые нагрузки; в последнем случае опора называется *подпятником*, а подшипник носит название *упорного*.

Подшипники вращающихся осей некоторых транспортных средств (например, железнодорожных вагонов) с преобладающей вертикальной нагрузкой называют *буксами*.

По принципу работы различают *подшипники скольжения*, в которых цапфа вала скользит по опорной поверхности, и *подшипники качения*, в которых между поверхностью вращающейся детали и опорной поверхностью расположены тела качения.

От качества подшипников в значительной степени зависит работоспособность, долговечность и КПД машин.

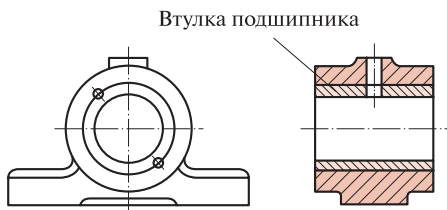
Подшипники, работающие по принципу трения скольжения, называются *подшипниками скольжения*.

Простейшим подшипником скольжения является отверстие, расточенное непосредственно в корпусе машины, в которое обычно вставляют втулку (вкладыш) из антифрикционного материала.

Достоинства подшипников скольжения: малые габаритные размеры в радиальном направлении, хорошая восприимчивость ударных и вибрационных нагрузок, возможность применения при очень высоких частотах вращения вала и в прецизионных машинах, большая долговечность в условиях жидкостного трения, возможность использования при работе в воде или агрессивной среде.

Недостатки подшипников скольжения: большие габаритные размеры в осевом направлении, значительный расход смазочного материала и необходимость систематического наблюдения за процессом смазывания, необходимость применения дорогостоящих и дефицитных антифрикционных материалов для вкладышей.

Рис. 38.1



Вышеперечисленные достоинства и недостатки определяют применение подшипников скольжения, например в молотах, поршневых машинах, турбинах, центрифугах, координатно-расточных станках, для валов очень больших диаметров, а также для валов тихоходных машин. КПД подшипников скольжения $\eta = 0,95 \dots 0,99$.

Существует очень много конструкций подшипников скольжения, которые подразделяются на два вида: неразъемные и разъемные. *Неразъемный* подшипник (рис. 38.1) состоит из корпуса и втулки, которая может быть неподвижно закреплена в корпусе подшипника или свободно заложена в него («плавающая» втулка). Неразъемные подшипники используют главным образом в тихоходных машинах, приборах и т.д. Их основные преимущества — простота конструкции и низкая стоимость. Если корпус подшипника выполнен в виде фланца с опорной плоскостью, нормальной к оси вала, то такой подшипник называют *фланцевым*.

Разъемный подшипник (рис. 38.2) состоит из основания и крышки корпуса, разъемного вкладыша, смазочного устройства и болтового или шпилечного соединения основания с крышкой. Износ вкладышей в процессе работы компенсируется поджатием крышки к основанию. Разъемные подшипники значительно облегчают

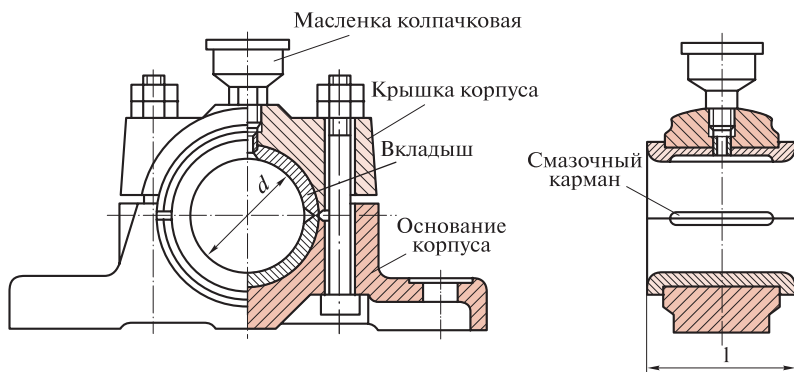


Рис. 38.2

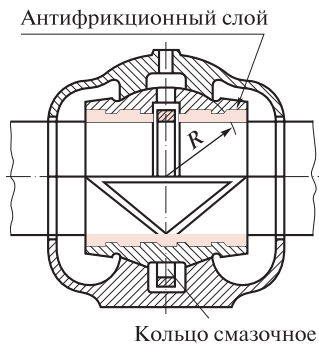


Рис. 38.3

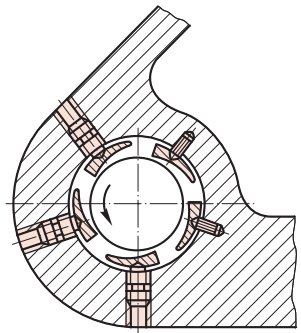


Рис. 38.4

сборку и являются незаменимыми для конструкций с коленчатыми валами. Разъемные подшипники широко применяются в общем и особенно тяжелом машиностроении.

На рис. 38.3 изображен *самоустанавливающийся* подшипник скольжения, у которого сопряженные поверхности вкладыша и корпуса выполнены по сфере радиуса R . Сферическая поверхность позволяет вкладышу самоустанавливаться, компенсируя неточности монтажа и деформации вала, обеспечивая тем самым равномерное распределение нагрузки по длине вкладыша. Такие подшипники применяются при большой длине цапф.

На рис. 38.4 показан *сегментный* подшипник с качающимися вкладышами. Такие подшипники хорошо центрируют вал и обеспечивают стабильную работу подшипниковых узлов, поэтому их применяют для быстроходных валов, особенно при опасности возникновения вибраций.

На рис. 38.5 показан *упорный* подшипник скольжения (подпятник), предназначенный в основном для восприятия осевых нагрузок.

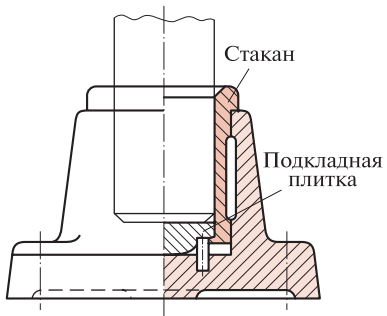


Рис. 38.5

Корпуса подшипников обычно изготавливаются из чугуна. Вкладыши изготавливают из *подшипниковых материалов*, которые должны иметь малый коэффициент трения скольжения по стальной поверхности вала, обеспечивать малый износ трущихся поверхностей и выдерживать достаточные удельные давления. Подшипниковые материалы бывают *металлические* (баббиты, бронзы, антифрикционные чугуны,

пористые спекаемые материалы), *неметаллические* (текстолит, древесно-слоистые пластики и др.), *комбинированные* (пористые металлы, пропитанные пластмассой; пластмассы с наполнителем из металла или графита; слоистые материалы типа металл — пластмасса).

Втулки подшипников скольжения (металлические, биметаллические и из спекаемых материалов) стандартизованы.

Стандартизованы также корпуса неразъемных подшипников скольжения, корпуса и вкладыши разъемных подшипников скольжения с двумя крепежными отверстиями.

38.2. СМАЗЫВАНИЕ И РАСЧЕТ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

В процессе работы подшипников скольжения может происходить *абразивный износ* вкладышей и цапф, *заедание* вследствие нагрева подшипника и *усталостное изнашивание* при пульсирующих нагрузках.

Основным критерием работоспособности подшипников скольжения является износостойкость трущейся пары.

Смазывание подшипников скольжения. Для уменьшения потерь энергии на преодоление трения, обеспечения износостойкости, отвода теплоты из зоны контакта, удаления продуктов изнашивания и предохранения от коррозии применяют смазывание трущихся поверхностей.

Смазочные материалы бывают *твердые* (графит, слюда), *пластичные* (литол, солидол, констаин), *жидкие* (органические и минеральные масла) и *газообразные* (воздух, газы). Наиболее распространены жидкие и пластичные смазочные материалы. Нередко к смазочному материалу для придания ему новых свойств добавляют другие вещества, называемые *присадками*, например, противозадирные, противоизносные, антикоррозионные и другие присадки.

Различают смазочные масла промышленные, моторные, компрессорные, трансмиссионные, турбинные, приборные, часовые и др.

Для смазывания подшипников скольжения быстроходных валов применяют менее вязкие сорта масел, для подшипников тихоходных валов и при ударных нагрузках применяют более вязкие сорта масел или пластичные смазочные материалы.

Для распределения смазочного материала по длине вкладыша и сбора продуктов износа предусматриваются смазочные карманы и канавки (см. рис. 38.2 и 38.3). Подача смазочного материала в зону смазывания осуществляется самотеком или под давлением

с помощью разнообразных смазочных устройств. На рис. 38.3 показано непрерывное смазывание подшипника с помощью кольца, частично погруженного в масло и увлекаемого во вращение валом.

На рис. 38.6 представлены: *а* — *наливная масленка* с поворотной крышкой; *б* — *пресс-масленка*, через которую жидкий или пластичный смазочный материал периодически подается с помощью смазочного шприца; *в* — *колпачковая масленка* для периодической подачи пластичной смазки за счет подвинчивания колпачка; *г* — *масленка непрерывной подачи* пластичной смазки с помощью поршня, находящегося под действием пружины.

В герметически закрытых механизмах может применяться *смазывание разбрызгиванием* движущимися деталями или *смазывание погружением*, при котором поверхность трения полностью или частично помещена в ванну с жидким смазочным материалом.

Кроме указанных выше для подшипников применяются следующие методы смазывания: капельное, масляным туманом, набивкой, фитильное, контактное и циркуляционное. При последнем жидкий смазочный материал многократно циркулирует от смазочного насоса к поверхностям трения, по пути фильтруясь и охлаждаясь.

При работе машины трение между цапфой вала и вкладышем подшипника при жидком смазочном материале может происходить в условиях жидкостной, полужидкостной и граничной смазки.

Жидкостной называется смазка, при которой поверхности трения деталей, находящихся в относительном движении, полностью разделены жидким смазочным материалом. При жидкостной смазке толщина слоя масла больше суммарной высоты неровностей профиля рабочих поверхностей цапфы и вкладыша, поэтому всю нагрузку несет масляный слой и *значительно снижаются трение и изнашивание рабочих поверхностей*. Так как жидкость несжимаема, то при жидкостной смазке это объемное свойство масла про-

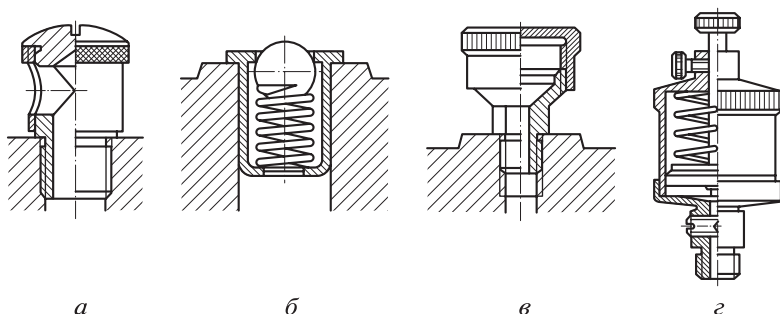


Рис. 38.6

является в полной мере и нагрузочная способность слоя смазочного материала оказывается очень высокой. Сопротивление движению при жидкостной смазке определяется только внутренним трением в смазочном материале, зависящем от его вязкости.

Если жидкостная смазка осуществляется частично, то она называется *полужидкостной*.

Благодаря маслянистости смазочный материал способен образовывать на сопряженных поверхностях тонкие пленки, называемые *граничными слоями*. Свойства масла в граничном слое резко отличаются от его объемных свойств. Граничный слой обладает высокой прочностью и может выдерживать давление до 3 000 МПа и более.

Граничной называется смазка, при которой трение и износ между поверхностями, находящимися в относительном движении, определяются свойствами этих поверхностей и свойствами смазочного материала, отличными от объемных.

Следует помнить, что при повышении температуры вязкость масла уменьшается, увеличивается возможность разрушения граничных пленок и появления чистого контакта цапфы и вкладыша, что может привести к схватыванию материала и заеданию подшипника.

Очевидно, что для работы подшипников скольжения наиболее благоприятным является режим жидкостной смазки. Однако большинство подшипников скольжения работает в условиях полужидкостной или граничной смазки. В подшипниках скольжения, постоянно работающих при жидкостной смазке, в периоды пусков или остановок могут осуществляться другие виды смазки.

Расчет подшипников скольжения. Расчет подшипников, работающих в условиях полужидкостной и граничной смазки, условно ведут по допускаемому среднему давлению $[p]$ на трущихся поверхностях (этот расчет гарантирует невыдавливаемость смазочного материала) и по допускаемому произведению $[pv]$ среднего давления на скорость скольжения v , т.е. окружную скорость цапфы (этот расчет гарантирует нормальный тепловой режим и отсутствие заедания). Среднее давление в подшипнике предполагается равномерно распределенным по диаметральному сечению цапфы (рис. 38.7) и равным

$$p = \frac{R}{dl},$$

где R — радиальная нагрузка на подшипник;
 d — диаметр цапфы; l — длина цапфы.

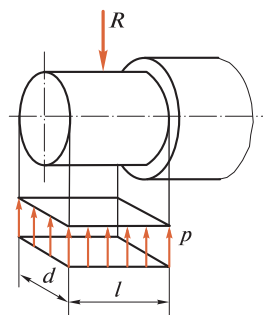


Рис. 38.7

Формулы для проверочного расчета имеют такой вид:

$$p = \frac{R}{dl} \leq [p]; \quad pv \leq [pv].$$

Для *приближенных расчетов* подшипников скольжения можно принимать следующие ориентировочные значения $[p]$, МПа и $[pv]$, МН/(м·с):

Для стали	По чугуну	$[p] \approx 3$	$[pv] \approx 3$
То же	По бронзе	$[p] \approx 5$	$[pv] \approx 8$
»	По баббиту	$[p] \approx 8$	$[pv] \approx 20$

При *неудовлетворительных результатах* проверочного расчета меняются размеры цапфы или материал вкладыша.

При *проектном расчете* задаются относительной длиной подшипника $\psi = l/d$; при *несамоустанавливающемся* вкладыше $\psi = 0,4 \dots 1,2$; при *самоустанавливающемся* вкладыше $\psi = 1,5 \dots 2,5$ (меньшие значения для быстроходных валов и при значительных нагрузках). Так как диаметр цапфы определяется из расчета вала на прочность или жесткость, то расчет подшипника скольжения сводится к определению его длины.

Подпятники скольжения рассчитываются по аналогичной методике, но ввиду худших условий отвода теплоты допускаемые значения $[p]$ и $[pv]$ уменьшаются на 20 ... 30 %.

Понятие о гидростатической и гидродинамической смазке. *Гидростатической* называется жидкостная смазка, при которой полное разделение поверхностей трения осуществляется в результате поступления жидкости в зазор между ними под *внешним давлением* (например, от насоса).

Гидродинамической называется жидкостная смазка, при которой полное разделение поверхностей трения осуществляется в результате давления, *самовозникающего* в слое жидкости при относительном движении поверхностей.

На рис. 38.8, *а* изображен невращающийся вал, опирающийся на подшипник скольжения, заполненный смазочным маслом. Обратим внимание на то, что зазор между валом и подшипником

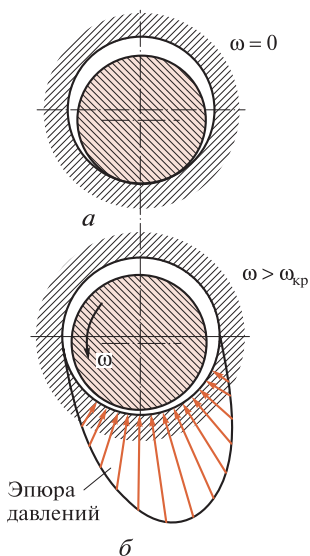


Рис. 38.8

имеет клиновидную форму. После пуска машины благодаря маслянистости и вязкости масло будет увлекаться вращающимся валом и нагнетаться в клиновидный зазор, в результате чего в масляном слое возникнет избыточное давление, возрастающее с увеличением угловой скорости вала. Избыточное давление создает гидродинамическую подъемную силу. После достижения критического значения угловой скорости цапфа вала всплывает в масле и смещается в сторону вращения, как показано на рис. 38.8, б. С увеличением угловой скорости вала, а также вязкости масла увеличивается толщина разделяющего масляного слоя; с увеличением радиальной нагрузки на цапфу толщина масляного слоя уменьшается.

Расчет подшипников скольжения в условиях жидкостной смазки выполняется на основе гидродинамической теории, основоположником которой является русский ученый Н. П. Петров, награжденный за эту работу в 1884 г. Ломоносовской премией.

Так как все жидкости и газы обладают вязкостью, то в качестве смазочного материала можно применять, например, воду или воздух (газодинамическая смазка).

38.3. ПОДШИПНИКИ КАЧЕНИЯ

Подшипники, работающие по принципу трения качения, называются *подшипниками качения*. В настоящее время такие подшипники имеют наибольшее распространение. Подшипники качения стандартизованы и в массовых количествах выпускаются специализированными заводами. Подшипники качения изготавливают в большом диапазоне типоразмеров с наружным диаметром от 2 мм до 2,8 м и массой от долей грамма до нескольких тонн.

В большинстве случаев подшипник качения (рис. 38.9) состоит из наружного и внутреннего колец с дорожками качения, тел качения (шарики или ролики) и сепаратора, удерживающего тела качения на определенном расстоянии друг от друга. В некоторых случаях для уменьшения радиальных размеров одно или оба кольца подшипника могут отсутствовать; в этих случаях тела качения перемещаются непосредственно по канавкам вала или корпуса.

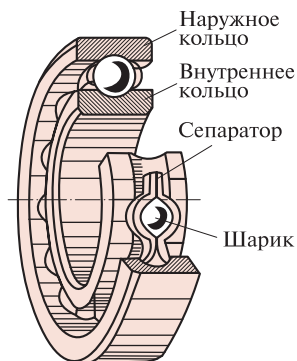


Рис. 38.9

Достоинства подшипников качения: малые потери на трение и незначительный нагрев, малый расход смазки, небольшие габаритные размеры в осевом направлении, невысокая стоимость (массовое производство) и высокая степень взаимозаменяемости.

К *недостаткам* подшипников качения относятся чувствительность к ударным и вибрационным нагрузкам, большие габаритные размеры в радиальном направлении, малая надежность в высокоскоростных приводах.

На рис. 38.10 показаны различные тела качения: *a* — шарик; *б*, *д* — цилиндрические ролики (короткий, если отношение его длины к диаметру меньше или равно 2,5; длинный, у которого отношение длины к диаметру больше 2,5; игольчатый, если его диаметр не более 6 мм, а длина в 3—10 раз больше диаметра); *в* — конический ролик; *г* — бочкообразный ролик; *е* — витой ролик, хорошо воспринимающий ударную нагрузку.

Кольца и тела качения обычно изготавливают из подшипниковых сталей с высоким содержанием хрома, например ШХ15, ШХ20СГ, 18ХГТ и др. Сепараторы штампуют из качественной углеродистой конструкционной стали. Массивные сепараторы для высокоскоростных подшипников изготавливают из латуни, бронзовых и алюминиевых сплавов, текстолита, магниевого чугуна и др.

Кольца и тела качения подшипников закаливаются до твердости 60...65 HRC.

Классификация подшипников качения может осуществляться по многим признакам, а именно:

по форме тел качения (шариковые, цилиндрические и конические роликовые, игольчатые);

по числу рядов тел качения (однорядные, двухрядные и многорядные);

по направлению воспринимаемой нагрузки (радиальные, радиально-упорные, упорно-радиальные, упорные, комбинированные);

по возможности самоустановки (самоустанавливающиеся, несамоустанавливающиеся);

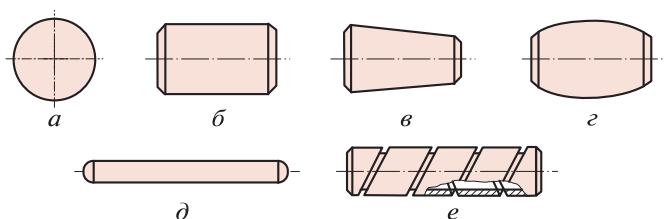


Рис. 38.10

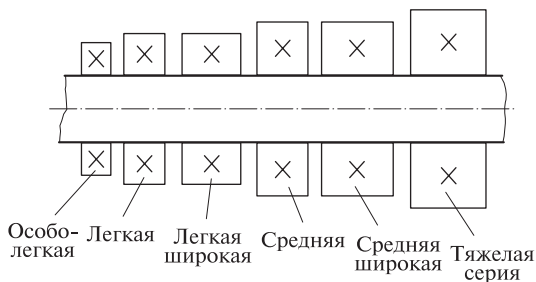


Рис. 38.11

по габаритным размерам (серии диаметров и ширин);
по конструктивным особенностям (с контактным уплотнением, с защитной шайбой, с фланцем на наружном кольце и т.д.).

ГОСТ 520—2011 устанавливает для подшипников качения следующие *классы точности* (в порядке повышения точности): 0; 6; 5; 4 и 2. Нормальный класс точности обозначается цифрой 0, сверхвысокий класс точности обозначается 2. В общем машиностроении обычно применяют подшипники класса точности 0.

На рис. 38.11 показаны относительные размеры подшипников некоторых серий и ширин при одном и том же внутреннем диаметре (подшипники изображены упрощенно в соответствии с ГОСТ 2.420—69). Принцип образования и обозначения размерных серий (сочетаний серий диаметров и ширин) подшипников качения стандартизован.

Кроме названных на рис. 38.11, есть серии сверхлегкая, а также (в зависимости от ширины) особоузкая, узкая и особоширокая. Подшипники разных серий отличаются размерами колец, тел качения и нагрузочной способностью.

Подшипник качения маркируют путем нанесения на торец кольца ряда цифр и букв, условно обозначающих внутренний диаметр подшипника, его серию, тип, конструктивную разновидность и в некоторых случаях ряд дополнительных сведений, характеризующих специальные условия изготовления данного подшипника, например класса точности, радиального зазора, осевого биения, момента трения, шумности и др.

Система условных обозначений шариковых и роликовых подшипников устанавливается ГОСТ 3189—89. Порядок отсчета цифр в условном обозначении подшипника ведется справа налево. Первые две цифры справа обозначают внутренний диаметр подшипников диаметром от 20 до 495 мм, причем обозначение получается путем деления значения диаметра на 5. Подшипники с внутрен-

ним диаметром 10 мм обозначаются 00; 12 мм — 01; 15 мм — 02; 17 мм — 03. Третья цифра справа от условного обозначения указывает серию диаметров подшипника, например: 1 — особо легкая, 2 — легкая, 3 — средняя, 4 — тяжелая. Четвертая цифра справа определяет тип подшипника, например: 0 — шариковый радиальный, 2 — цилиндрический роликовый радиальный с короткими роликами, 6 — шариковый радиально-упорный, 7 — конический роликовый и т.д. Пятая и шестая цифры справа обозначают конструктивную разновидность подшипника. Седьмая цифра справа указывает серию ширин, например: узкая, нормальная, широкая и др. Нули, стоящие в обозначении левее значащих цифр, не показывают.

Итак, основное условное обозначение подшипников качения ведется цифрами по следующей схеме:

(7)	(6—5)	(4)	(3)	(2—1)
Серия ширин	Конструктивная разновидность	Тип подшипника	Серия диаметров	Внутренний диаметр

Примеры обозначения подшипников:

208 — шариковый радиальный (0) легкой серии (2) с внутренним диаметром 40 мм (5×8);

2312 — цилиндрический роликовый радиальный с короткими роликами (2) средней серии (3) с внутренним диаметром 60 мм (5×12);

2007109 — конический роликовый (7) особолегкой серии (1) широкий (2) с внутренним диаметром 45 мм (5×9). КПД одной пары подшипников качения $\eta = 0,99 \dots 0,995$.

Основные типы подшипников качения. Наиболее дешевыми и распространенными в машиностроении являются *шариковые радиальные однорядные* подшипники (см. рис. 38.9) способные воспринимать также осевую нагрузку в обоих направлениях, если она не превышает одной трети радиальной нагрузки. Эти подшипники допускают угловое смещение внутреннего кольца относительно наружного до $10'$.

Цилиндрический роликовый подшипник с короткими цилиндрическими роликами (рис. 38.12, а) допускает только радиальную нагрузку. Нагрузочная способность таких подшипников по сравнению с однорядными шариковыми больше примерно в 1,5 раза, а долговечность в 3,5 раза. Подшипник допускает осевое смещение колец, но не допускает их угловое смещение.

Конический роликовый подшипник (рис. 38.12, б) с коническими роликами воспринимает радиальную и осевую нагрузку (радиально-упорный подшипник), обладает большой нагрузочной способ-

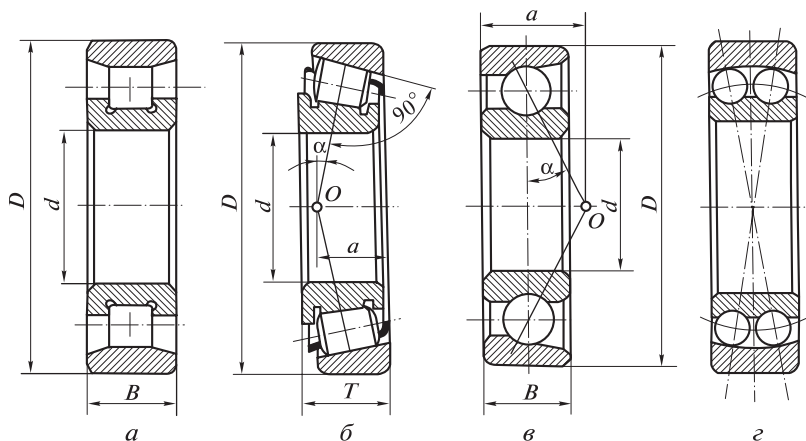


Рис. 38.12

ностью, не допускает угловое смещение колец. Если угол контакта $\alpha \geq 45^\circ$, то подшипник называется упорно-радиальным.

Радиально-упорный шариковый подшипник (рис. 38.12, в) обладает по сравнению с коническими роликоподшипниками несколько меньшей нагрузочной способностью. Стандартные радиально-упорные шарикоподшипники выпускаются с углами контакта $\alpha = 12; 26$ и 36° .

Следует заметить, что применение более дешевых шариковых подшипников не гарантирует экономичность конструкции, так как более дорогие роликовые подшипники дают возможность уменьшить размеры и массу подшипниковых узлов и значительно увеличить их долговечность.

Сферический шариковый подшипник (рис. 38.12, з) имеет сферическую дорожку качения на наружном кольце, благодаря чему допускает значительное (до $2...3^\circ$) угловое смещение колец. Эти подшипники предназначены в основном для радиальной, но воспринимают и небольшую осевую нагрузку.

Кроме шариковых существуют *сферические роликовые* подшипники с бочкообразными роликами.

Для обеспечения возможности *самоустанавливаться* при монтаже, компенсируя при этом несоосность посадочных мест, радиальные шариковые и роликовые подшипники могут быть изготовлены со *сферической посадочной поверхностью наружного кольца*.

На рис. 38.13 изображен *упорный шариковый подшипник*, предназначенный для восприятия односторонней осевой нагрузки. Кольцо с внутренним диаметром d , монтируемое на вал и имеющее

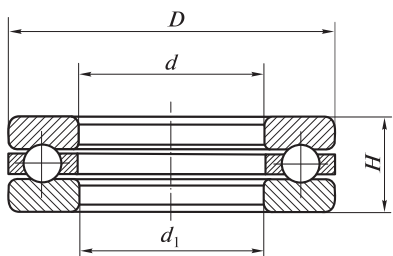


Рис. 38.13

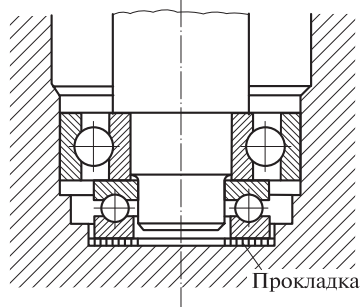


Рис. 38.14

зазор с корпусом, называется *тугим*, кольцо с внутренним диаметром d_1 , предназначенное для посадки в корпус и имеющее зазор с валом, называется *свободным*. Упорный подшипник может быть *самоустанавливающимся* за счет сферической поверхности базового торца. Упорные подшипники могут быть роликовыми. Для восприятия осевой нагрузки в обоих направлениях существуют *двойные упорные* подшипники качения.

Кроме перечисленных существуют подшипники *игльчатые с витыми роликами*, радиально-упорные шариковые с *разъемным* (внутренним или наружным) *кольцом*, с *контактным уплотнением*, с *защитными шайбами* и другие конструктивные разновидности.

На рис. 38.14 показан *подпятник качения*, смонтированный из радиального и упорного шарикоподшипников качения. Для компенсации возможных перекосов вала под свободное кольцо упорного подшипника положена прокладка из мягкого металла или линолеума.

38.4. ПОДБОР ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ

В процессе эксплуатации подшипников качения может происходить *усталостное изнашивание* дорожек качения в результате многократного циклического контактного нагружения. В результате действия ударных нагрузок, а также вибрационных нагрузок при невращающемся подшипнике (например, при транспортировке машины) или при больших перегрузках на дорожках качения могут возникать *пластические деформации* в виде вмятин. При отсутствии надежной защиты от попадания инородных частиц происходит *абразивное изнашивание* подшипника, характерное для

дорожных, строительных и сельскохозяйственных машин. При недостаточной смазке, перегрузке, а также при неправильном монтаже может происходить *заедание* и *задиры* на поверхностях тел качения и колец подшипника. Распространенными причинами отказов в работе подшипников являются *разрушение* сепараторов, колец и тел качения.

Основными критериями работоспособности подшипников качения являются износостойкость рабочих поверхностей и долговечность подшипника, а также сопротивление пластическим деформациям.

Выбор типа и размеров подшипника качения определяется следующими основными факторами:

характером нагрузки (постоянная, переменная, ударная), ее величиной и направлением;

диаметром цапф вала и частотой его вращения;

долговечностью измеряемой в миллионах оборотов или часах работы подшипника (обозначается соответственно L или L_h) до начала усталостного разрушения материала на одном из колец или тел вращения;

нагрузочной способностью подшипника, определяемой его статической и динамической грузоподъемностью.

Методы расчета *статической* грузоподъемности и эквивалентной статической нагрузки, методы расчета *динамической* грузоподъемности, эквивалентной динамической нагрузки и долговечности подшипников качения устанавливаются стандартами. *Статической* называется нагрузка, действующая на невращающийся подшипник.

Обычный критерий оценки эксплуатационных свойств подшипников качения — *базовая долговечность*, при которой не менее 90% идентичных подшипников, работающих в одинаковых условиях, должны достигнуть или превысить определенную долговечность. Иначе говоря, *базовой является долговечность при 90%-ной надежности*. Базовая долговечность, млн оборотов, обозначается L_{10} .

Расчетная долговечность при других уровнях надежности называется *скорректированной* и обозначается, например, при 95%-ной надежности L_5 . В дальнейшем мы имеем дело только с базовой долговечностью и поэтому соответствующие индексы будем опускать.

Базовой динамической грузоподъемностью называется постоянная нагрузка, которую подшипник качения может воспринимать при базовой долговечности, составляющей 1 млн оборотов. Базовая динамическая грузоподъемность бывает радиальная и осевая, обозначаемая соответственно C_r и C_a .

Эквивалентной динамической нагрузкой называется постоянная нагрузка, под действием которой подшипник качения будет иметь такую же долговечность, как и в действительных условиях нагружения. Эквивалентная динамическая нагрузка бывает радиальная и осевая, обозначаемая соответственно P_r и P_a .

Подбор радиальных и радиально-упорных подшипников основан на C_r и P_r , а упорных и упорно-радиальных — на C_a и P_a . Для упрощения записей в дальнейшем индексы при C и P мы будем опускать, что недоразумения не вызовет.

В отличие от динамических параметров базовая статическая грузоподъемность и эквивалентная статическая нагрузки обозначаются соответственно C_0 и P_0 .

Статическая и динамическая грузоподъемность, а также предельная частота вращения при жидкой и пластичной смазке для каждого типоразмера стандартных подшипников качения приведены в каталогах.

При частоте вращения вала $n < 10$ мин⁻¹ действующую нагрузку рассматривают как статическую и подшипники подбирают *по статической грузоподъемности* по условию

$$P_0 \leq C_0.$$

При $n \geq 10$ мин⁻¹ подбор подшипников качения ведется по динамической грузоподъемности по условию

$$C_{тр} \leq C,$$

где $C_{тр}$ — требуемая величина динамической грузоподъемности, Н; C — динамическая грузоподъемность подшипника, указанная в таблицах.

Требуемую величину динамической грузоподъемности определяют в зависимости от эквивалентной динамической нагрузки P и требуемой долговечности (L , млн оборотов, или L_h , ч) по таким формулам:

для шариковых подшипников

$$C_{тр} = P\sqrt[3]{L} \quad \text{или} \quad C_{тр} = P\sqrt[3]{60nL_h \cdot 10^{-6}};$$

для роликовых подшипников

$$C_{тр} = PL^{0,3} \quad \text{или} \quad C_{тр} = P(60nL_h \cdot 10^{-6})^{0,3},$$

где n — частота вращения кольца подшипника, мин⁻¹.

Для стандартных редукторов общего назначения установлена следующая базовая долговечность подшипников (90%-ный технический ресурс):

10 000 ч — для зубчатых редукторов;
 5 000 ч — для червячных редукторов.

Эквивалентную динамическую нагрузку P вычисляют по формуле

$$P = (XVF_r + YF_a)K_6K_T,$$

где X — коэффициент радиальной нагрузки; Y — коэффициент осевой нагрузки; V — коэффициент вращения (при вращении относительно вектора нагрузки внутреннего кольца $V = 1$, наружного кольца — $V = 1,2$); F_r, F_a — радиальная и осевая нагрузки, Н; K_6 — коэффициент безопасности (для редукторов $K_6 = 1,3 \dots 1,5$); K_T — температурный коэффициент (при t до 100°C $K_T = 1$).

Расчет по вышеприведенной формуле ведут с учетом следующего:

для цилиндрических роликовых подшипников $F_a = 0, X = 1$;

для упорных подшипников $F_r = 0, Y = 1$;

для шариковых радиальных, радиально-упорных и конических роликовых подшипников $X = 1, Y = 0$, если $F_a/VF_r \leq e$ (расчет ведется только по радиальной нагрузке); при $F_a/VF_r > e$ значения коэффициентов X и Y определяются по каталогу на подшипники (e — вспомогательный коэффициент, указанный в каталоге).

При определении осевых нагрузок F_a , действующих на радиально-упорные подшипники, *помимо внешней осевой силы A следует учитывать осевые составляющие S реакций подшипников*, возникающие под действием радиальных нагрузок F_r . Эти составляющие вычисляются по формулам:

для радиально-упорных шарикоподшипников $S = eF_r$;

для конических роликоподшипников $S = 0,83eF_r$.

Суммарная осевая нагрузка на подшипник зависит от условий его нагружения. На рис. 38.15 показана схема вала, установленного на двух радиально-упорных подшипниках, причем индексом 2 обозначен подшипник, воспринимающий внешнюю осевую силу A . При такой индексации сила A и осевая составляющая S_1 реакции подшипника 1 всегда направлены в одну сторону и суммарные осевые нагрузки F_{a1} и F_{a2} будут зависеть от соотношения $A + S_1$ и S_2 . Если $A + S_1 > S_2$, то вал сдвинется ко второму подшипнику, осевая сила $A + S_1$ создаст на втором подшипнике радиальную силу, уравновешивающую внешнюю радиальную нагрузку, и осевая составляющая S_2 перестает существовать. Тогда осевая нагрузка на первый подшипник останется равной S_1 , а суммарная осевая нагрузка на второй подшипник будет равна $A + S_1$. Если

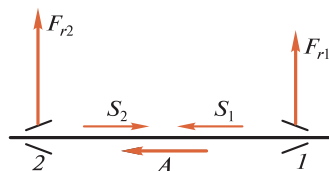


Рис. 38.15

$A + S_1 < S_2$, то вал сдвинется к первому подшипнику, составляющая S_1 перестанет существовать, осевая нагрузка на второй подшипник останется равной S_2 , а суммарная осевая нагрузка на первый подшипник будет равна $S_2 - A$. Итак,

если $A + S_1 > S_2$, то $F_{a1} = S_1$, $F_{a2} = A + S_1$;

если $A + S_1 < S_2$, то $F_{a1} = S_2 - A$, $F_{a2} = S_2$.

Напомним, что радиальную реакцию радиально-упорного подшипника полагают приложенной в точке O пересечения с осью вала нормали в середине контактной площадки (см. рис. 38.12, б, в). Положение точки O определяется размером a , вычисляемым для однорядных подшипников по формулам:

для радиально-упорных шарикоподшипников:

$$a = 0,5B + 0,25(d + D) \operatorname{tg} \alpha;$$

для конических роликоподшипников

$$a = 0,5T + \frac{(d + D)e}{6},$$

где a — расстояние от клейменого торца подшипника до точки приложения радиальной реакции; B , d , D , T — размеры подшипника; α — угол контакта и e — вспомогательный коэффициент, указанные в каталоге.

Таким образом, для определения радиальных реакций радиально-упорных подшипников необходимо *сначала сделать предварительный выбор подшипников*, затем произвести эскизную компоновку узла, далее определить реакции опор, собственные осевые составляющие S от действия радиальных нагрузок, суммарные осевые нагрузки, действующие на каждую опору, и *затем выполнить проверочный расчет более нагруженного подшипника на долговечность* (технический ресурс).

Долговечность L , млн оборотов, динамическая грузоподъемность C и эквивалентная динамическая нагрузка P связаны эмпирической зависимостью

$$L = \left(\frac{C}{P} \right)^P,$$

где $P = 3$ для шарикоподшипников, $P = 10/3$ для роликоподшипников.

Долговечность L_h , ч, вычисляется так:

$$L_h = \frac{10^6 L}{60n},$$

где n — частота вращения, мин^{-1} .

Для облегчения расчетов в справочниках приведены (отдельно для шариковых и роликовых подшипников) таблицы, позволяющие определить долговечность L_h подшипников в зависимости от отношения динамической грузоподъемности к эквивалентной нагрузке C/P и частоты вращения вала. По этим же таблицам легко определить требуемую динамическую грузоподъемность по известной частоте вращения вала, заданной долговечности подшипника и вычисленной эквивалентной динамической нагрузке.

38.5. КОНСТРУИРОВАНИЕ ПОДШИПНИКОВЫХ УЗЛОВ

Работоспособность подшипников качения в значительной степени зависит от рациональности конструкции подшипникового узла, качества его монтажа и регулировки.

Кольцо подшипника, вращающееся относительно вектора нагрузки, устанавливается на вал или в корпус посадкой с небольшим натягом во избежание обкатывания этого кольца по сопряженной поверхности и ее изнашивания; другое кольцо подшипника соединяется посадкой с очень малым зазором, достаточным для возможности осевых перемещений кольца при монтаже и температурных деформациях валов.

На рис. 38.16 показаны схемы установки подшипников качения на валах и в корпусах. Для относительно *длинных валов* (длина превышает восьмикратный наибольший диаметр) применяют схемы *а* и *б*. В этих схемах левая опора закреплена в корпусе и называется *фиксирующей*, а второй подшипник имеет возможность осевого

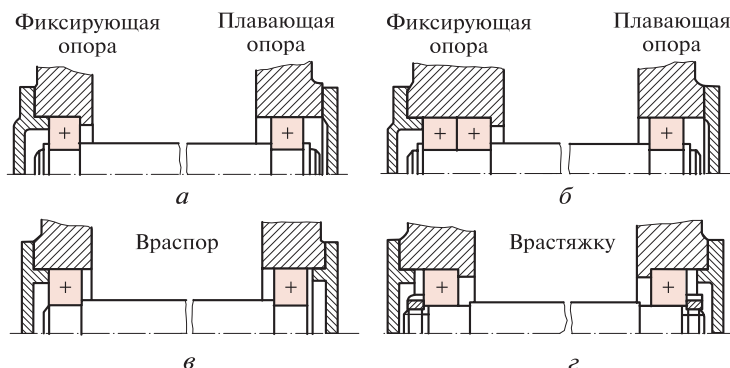


Рис. 38.16

перемещения в корпусе (для компенсации температурных удлинений и укорочений вала), и такую опору называют *плавающей*. Для длинных валов, нагруженных значительной осевой силой, два радиально-упорных подшипника устанавливают в фиксирующей опоре (одноименными торцами друг к другу), а в плавающей опоре ставят радиальный подшипник (схема б).

При относительно *коротких валах* применяется наиболее простая и широко используемая в машиностроении установка подшипников *враспор* (схема в). Во избежание защемления вала при его температурном удлинении между крышкой подшипника и одним из наружных колец оставляется небольшой зазор (0,1 ... 0,2 мм). Этот зазор регулируется изменением толщины набора прокладок под крышку подшипника. При установке подшипников по этой схеме перепад температур вала и корпуса не должен превышать 20 °С.

Защемление вала в связи с его температурным удлинением невозможно при установке подшипников *врастяжку* (схема г); ее применяют при относительно коротких валах. Недостаток схемы — неудобство регулировки подшипников перемещением их внутренних колец, установленных на вал посадкой с натягом.

Для уменьшения потерь в результате трения, отвода теплоты, защиты от коррозии, уменьшения шума при работе применяют смазывание подшипников качения, причем используют жидкие и пластичные смазочные материалы.

Заметим, что роликовые подшипники более требовательны к качеству смазки, чем шарикоподшипники.

При выборе смазочного материала необходимо учитывать следующие факторы: размеры подшипника и частоту его вращения, величину нагрузки, рабочую температуру узла и состояние окружающей среды. Для подшипников, работающих с окружной скоростью до 4...5 м/с, можно применять и жидкие, и пластичные смазочные материалы, при больших скоростях рекомендуется жидкая смазка. Чем выше нагрузка на подшипник, тем вязкость масла или консистентность пластичного смазочного материала должна быть больше, так как при этом прочность его граничного слоя увеличивается. Следует учитывать, что с повышением рабочей температуры вязкость и консистентность смазочного материала понижаются. При загрязненной окружающей среде рекомендуются пластичные смазочные материалы.

Для предотвращения вытекания смазочного материала и защиты подшипников от попадания извне пыли, грязи и влаги применяются *уплотнительные устройства*. По принципу действия эти устройства подразделяют на контактные, щелевые, лабиринтные, центробежные и комбинированные.

Контактные уплотнения стандартизованы и имеют широкое распространение. На рис. 38.17, *а* показано уплотнение *войлочным кольцом* прямоугольного сечения, помещаемым в канавку трапецевидальной формы. Этот вид уплотнения рекомендуется главным образом при пластичном смазочном материале и окружной скорости вала до 5 м/с. Его не рекомендуется применять в ответственных конструкциях, при избыточном давлении с одной стороны, повышенной загрязненности среды и при температуре свыше 90 °С.

На рис. 38.17, *б* показано контактное уплотнение в виде *резиновой манжеты* с поджимной пружиной; манжета армирована металлическим каркасом и допускает скорость 20 м/с. Манжеты применяют при любом смазочном материале.

На рис. 38.17, *в* показано бесконтактное *щелевое* уплотнение с концентричными канавками, заполняемыми пластичным смазочным материалом. Применяется при окружной скорости вала до 5 м/с. При большой частоте вращения вала (скорость свыше 5 м/с) канавки можно сделать винтообразными, в этом случае они будут играть роль маслооткачивающих канавок.

На рис. 38.17, *г* показано бесконтактное *лабиринтное* уплотнение, пригодное для любого смазочного материала и при любой ча-

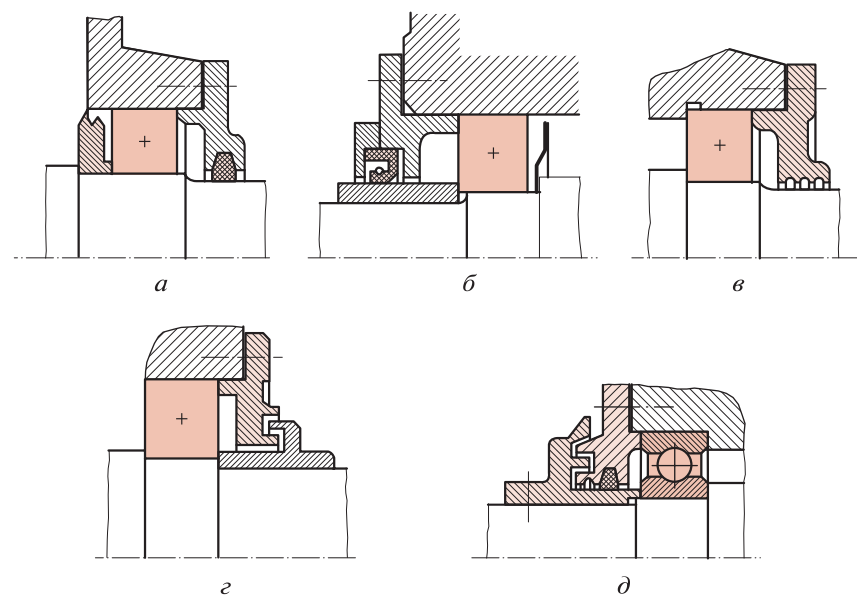


Рис. 38.17

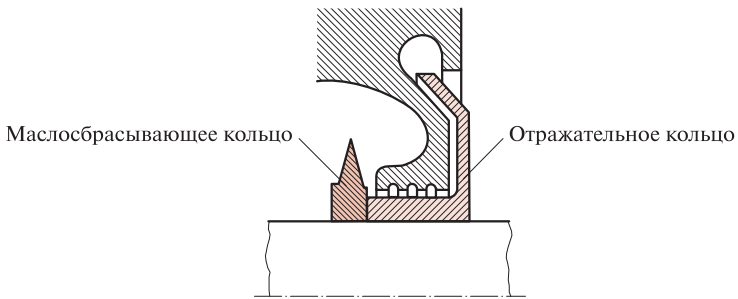


Рис. 38.18

стоте вращения вала. Зазор в лабиринте заполняется пластичным смазочным материалом.

Центробежные уплотнения применяют главным образом при жидком смазочном материале и окружной скорости вала более 7 м/с. В качестве примеров можно привести маслосбрасывающее и отражательное кольца (рис. 38.18).

В ответственных конструкциях и при тяжелых условиях эксплуатации применяют *комбинированные* уплотнения (рис. 38.17, д).

На рис. 38.19 показаны современные весьма эффективные *торцовые уплотнения*: *а* — уплотнение, в котором кольцо 1 из антифрикционного материала поджимается пружиной 3 к закаленному стальному кольцу 2, а резиновое кольцо 4 осуществляет статическое уплотнение; *б* — уплотнение эластичной стальной шайбой.

На рис. 38.20 показана конструкция подшипникового узла ведущего вала цилиндрической косозубой передачи, установленного на радиальных шарикоподшипниках, с левой — плавающей и правой — фиксирующей опорой. Смазывание подшипников — пластичным смазочным материалом. Уплотнение канавочное с мазедерживающими кольцами.

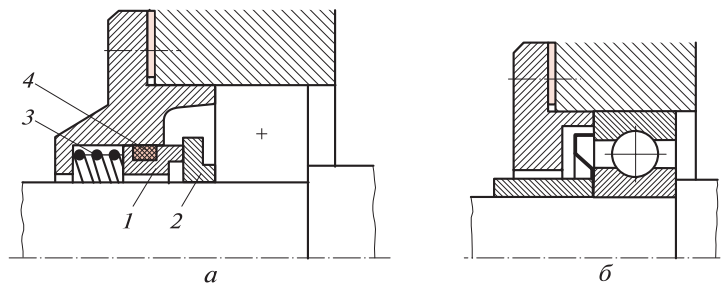


Рис. 38.19

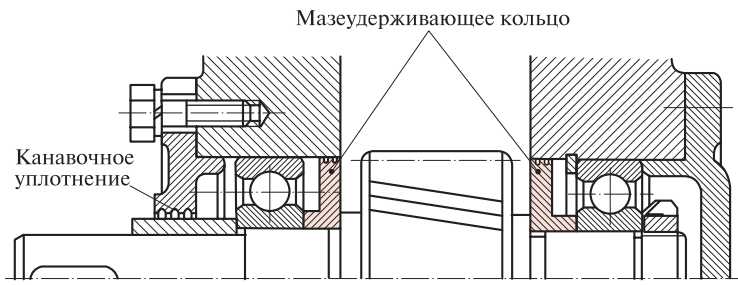


Рис. 38.20

На рис. 38.21 показан ведущий вал цилиндрической косозубой передачи, смонтированный на радиально-упорных конических роликоподшипниках. Смазывание подшипников — разбрызгиванием масла шестерней. Уплотнение — резиновая армированная манжета.

На рис. 38.22 представлен вал-шестерня конической передачи, смонтированный на радиально-упорных конических шарикоподшипниках двумя способами: широкими торцами наружных колец

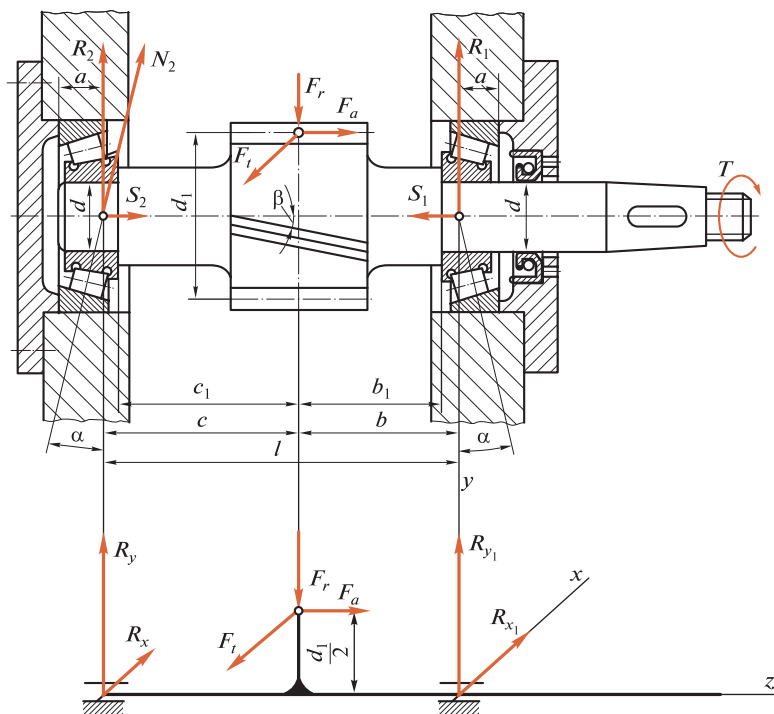


Рис. 38.21

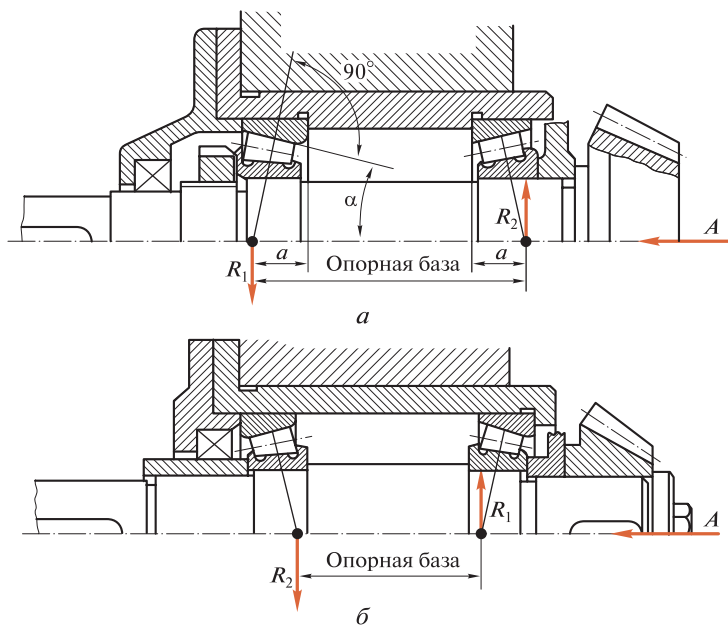


Рис. 38.22

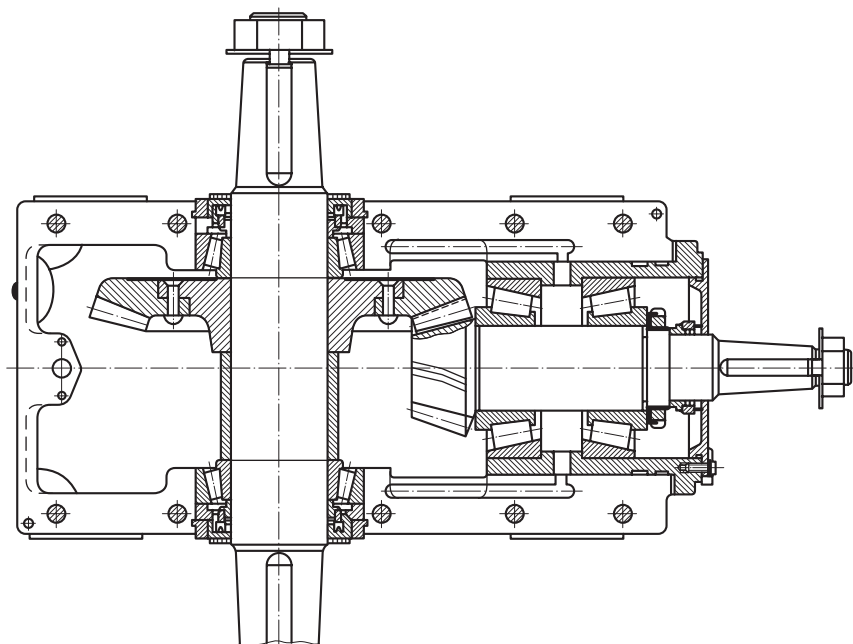


Рис. 38.23

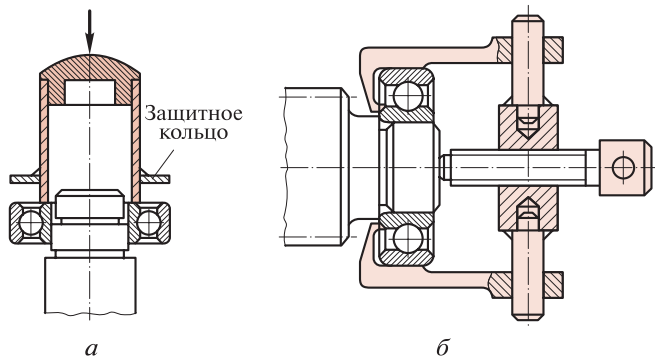


Рис. 38.24

внутри (а) и наоборот (б). При первом способе *опорная база вала больше*, реакции опор и нагрузка на подшипники меньше, поэтому такое расположение подшипников предпочтительно.

На рис. 38.23 показан конический редуктор, у которого вал-шестерня смонтирован на подшипниках по первому способу, а ведомый — по второму.

При монтаже и демонтаже подшипников качения не допускается передача усилий через тела качения, поэтому необходимо пользоваться соответствующими приспособлениями. На рис. 38.24 показаны: а — монтажное приспособление, б — съемочное.

Пример 38.1. Подобрать конические роликоподшипники для вала-шестерни косозубой цилиндрической передачи редуктора (см. рис. 38.21).

Дано: частота вращения вала-шестерни $n = 1450 \text{ мин}^{-1}$;

$$F_t = 2620 \text{ Н}, F_r = 960 \text{ Н}, F_a = 370 \text{ Н};$$

$$d = 35 \text{ мм}, d_1 = 100 \text{ мм}, b_1 = 45 \text{ мм}, c_1 = 85 \text{ мм},$$

рабочая температура подшипников 60°C , нагрузка с умеренными толчками, требуемая долговечность подшипников 25 000 ч.

Решение. Предварительно принимаем для быстроходного вала редуктора роликоподшипники конические однорядные средней серии 7307 с размерами $d = 35 \text{ мм}$, $D = 80 \text{ мм}$, $T = 23 \text{ мм}$, $e = 0,32$ ($\alpha = 12^\circ$). Расстояние от торца подшипника до точки приложения радиальной реакции (см. рис. 38.12, б):

$$a = 0,5T + (d + D)e/6 = 0,5 \cdot 23 + (35 + 80)0,32/6 \approx 18 \text{ мм}.$$

Далее находим размеры c и b , определяющие положение точек приложения радиальных реакций подшипников (см. рис. 38.21):

$$c = c_1 + T - a = 85 + 23 - 18 = 90 \text{ мм};$$

$$b = b_1 + T - a = 45 + 23 - 18 = 50 \text{ мм}.$$

Найдем реакции опор (индексом 2 обозначен подшипник, воспринимающий осевую нагрузку $A = F_a = 370$ Н):

в плоскости zOx

$$R_{x1} = F_c/l = 2620 \cdot 90/140 = 1680 \text{ Н};$$

$$R_{x2} = F_b/l = 2620 \cdot 50/140 = 940 \text{ Н};$$

в плоскости zOy

$$R_{y2} = (F_r b + F_a d_1/2)/l = (960 \cdot 50 + 370 \cdot 100/2)/140 = 475 \text{ Н};$$

$$R_{y1} = F_r - R_{y2} = 960 - 475 = 485 \text{ Н}.$$

Полные радиальные реакции:

$$R_1 = F_{r1} = \sqrt{R_{x1}^2 + R_{y1}^2} = \sqrt{1680^2 + 485^2} = 1750 \text{ Н};$$

$$R_2 = F_{r2} = \sqrt{R_{x2}^2 + R_{y2}^2} = \sqrt{940^2 + 475^2} = 1050 \text{ Н}.$$

На рис. 38.21 полные радиальные реакции условно совмещены с плоскостью чертежа.

Вычислим осевые составляющие S_1 и S_2 реакций подшипников. Так как $e = 0,32$ (эта величина в каталоге), то

$$S_1 = 0,83eF_{r1} = 0,83 \cdot 0,32 \cdot 1750 = 462 \text{ Н};$$

$$S_2 = 0,83eF_{r2} = 0,83 \cdot 0,32 \cdot 1055 = 278 \text{ Н}.$$

Осевые нагрузки F_{a1} и F_{a2} подшипников определяем, учитывая, что $A + S_1 > S_2$:

$$F_{a1} = S_1 = 462 \text{ Н};$$

$$F_{a2} = A + S_1 = 370 + 462 = 832 \text{ Н}.$$

Определяем эквивалентные динамические нагрузки P_1 и P_2 подшипников:

для правого подшипника

$$F_{a1}/F_{r2} = 462/1750 = 0,264 < e = 0,32, \text{ поэтому } X_1 = 1, Y_1 = 0;$$

для левого подшипника

$$F_{a2}/F_{r2} = 832/1055 = 0,79 > e = 0,32,$$

поэтому $X_2 = 0,4; Y_2 = 1,88$ (по каталогу).

Тогда при $K_6 = 1,5, K_T = 1$ будем иметь:

$$P_1 = (X_1 F_{r1} + Y_1 F_{a1}) K_6 K_T = 1750 \cdot 1,5 = 2625 \text{ Н};$$

$$P_2 = (X_2 F_{r2} + Y_2 F_{a2}) K_6 K_T = (0,4 \cdot 1055 + 1,88 \cdot 832) 1,5 = 2980 \text{ Н}.$$

Требуемую динамическую грузоподъемность определяем для более нагруженного (левого) подшипника:

$$C_{\text{тр}} = P_2(60nL_n \cdot 10^{-6})^{0,3} = 2980(60 \cdot 1450 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6})^{0,3} \approx 30\,000 \text{ Н.}$$

Сравнивая требуемую динамическую грузоподъемность с данными каталога, видим, что для данного вала можно принять роликоподшипники конические легкой серии 7207, имеющие динамическую грузоподъемность $C = 35\,200 \text{ Н}$ (для подшипника 7307 $C = 54\,000 \text{ Н}$).

Габаритные размеры и угол контакта подшипника 7207 отличаются от соответствующих размеров принятого предварительно подшипника 7307, а именно: $d = 35 \text{ мм}$, $D = 72 \text{ мм}$, $T = 18 \text{ мм}$, $e = 0,37$ ($\alpha = 14^\circ$).

Глава 39

МЕХАНИЧЕСКИЕ МУФТЫ

39.1. НАЗНАЧЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ МУФТ

Приводными муфтами (обычно просто муфтами) называются устройства, служащие для кинематической и силовой связи валов в приводах машин и механизмов. Муфты передают с одного вала на другой вращающий момент *без изменения его величины и направления*, а также компенсируют монтажные неточности и деформации геометрических осей валов, разъединяющих валы без остановки двигателя, предохраняют машину от поломок в аварийных режимах, в некоторых случаях поглощают толчки и вибрации, ограничивают частоту вращения и т. д.

На рис. 39.1 показаны возможные погрешности при монтаже валов (несоосность валов): *а* — радиальное смещение Δ ; *б* — осевое смещение λ ; *в* — угловое смещение δ . Указанные погрешности могут существовать одновременно.

Муфты приводов машин классифицируют по многим признакам. По принципу действия муфты подразделяют на *четыре класса*:

1 — *нерасцепляемые* (не допускающие разъединения валов при работе машины);

2 — *управляемые* (допускающие возможность управления муфтой);

3 — *самодействующие* (автоматически срабатывающие в результате изменения заданного режима работы);

4 — *прочие* (все муфты, не входящие в первые три класса).

Классы муфт (кроме четвертого) подразделяют на *группы* (механические, гидродинамические, электромагнитные), *подгруппы* (жесткие, компенсирующие, упругие, предохранительные, обгонные и др.),

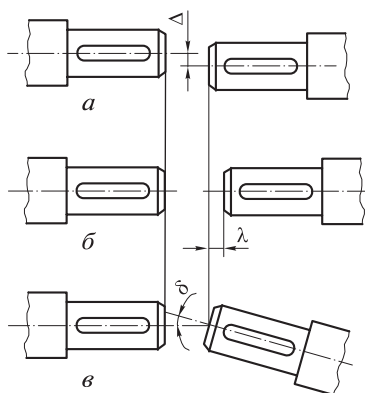


Рис. 39.1

виды (фрикционные, с разрушаемым элементом и др.) и *конструктивные исполнения* (кулачковые, шариковые, зубчатые, фланцевые, втулочно-пальцевые и многие другие).

В общем случае муфта состоит из ведущей и ведомой полумуфт и соединительных элементов. В механических муфтах в качестве соединительного элемента используют твердые (жесткие или упругие) тела. В гидродинамических муфтах функции соединительного элемента выполняет жидкость, в электромагнитных — электромагнитное поле.

В дальнейшем мы будем рассматривать только наиболее распространенные механические муфты, большинство из которых стандартизовано.

39.2. КОНСТРУКЦИЯ И РАСЧЕТ МУФТ

Нерасцепляемые жесткие и компенсирующие муфты. Среди этих муфт наиболее простыми, дешевыми и малогабаритными являются муфты *втулочные* (рис. 39.2), относящиеся к подгруппе *жестких*, не допускающих относительного смещения между ведущей и ведомой частями и не уменьшающих динамические нагрузки. Недостатком этих муфт является необходимость строгой соосности валов и смещения одного из них при монтаже и демонтаже.

ГОСТ 24246—96 предусматривает изготовление втулочных муфт в четырех исполнениях (см. рис. 39.2): 1 — с цилиндрическим посадочным отверстием и штифтами; 2 — с призматическими шпонками

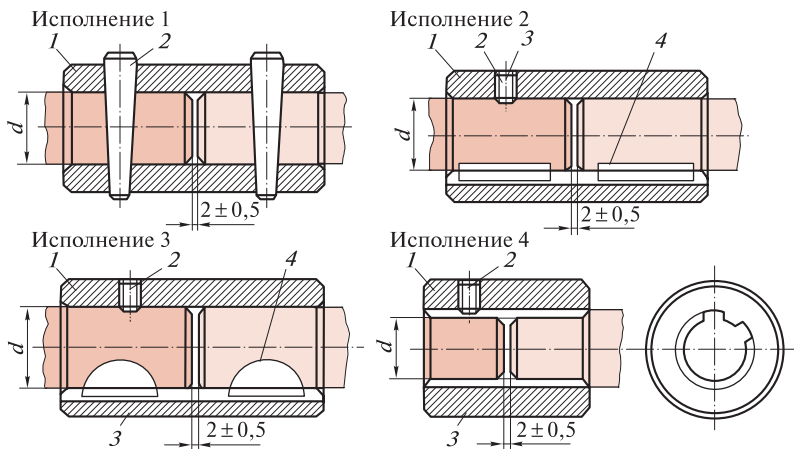


Рис. 39.2

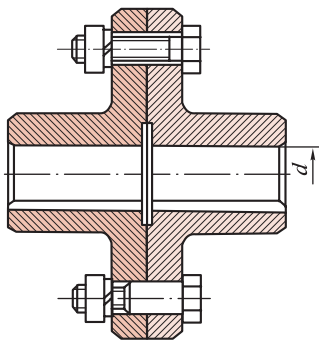


Рис. 39.3

ми; 3 — с сегментными шпонками; 4 — с шлицевым посадочным отверстием.

Втулка 1 муфт исполнений 2, 3 и 4 предохраняется от смещения в осевом направлении установочным винтом 2, который стопорится пружинным кольцом 3. Диапазон номинальных вращающих моментов от 1 до 12 500 Н·м при диаметрах d посадочных концов валов от 6 до 105 мм. Ограничений по частоте вращения муфта не имеет. Материал втулок — сталь 45.

На рис. 39.3 показана жесткая *фланцевая* муфта, применяемая для соединения соосных валов. Эти муфты изготавливают из стали и чугуна. Диапазон вращающих моментов от 8 до 40 000 Н·м. Диапазон диаметров валов от 12 до 250 мм. Посадочные отверстия для валов могут быть цилиндрическими или коническими.

На рис. 39.4 изображена *кулачково-дисковая* муфта, применяемая для соединения валов диаметром от 16 до 150 мм, при номинальных вращающих моментах от 16 до 16 000 Н·м. Муфта допускает угловое смещение геометрических осей валов до $0^\circ 30'$ и их радикальное вращение от 0,6 до 3,6 мм (в зависимости от диаметра вала), поэтому она относится к подгруппе *компенсирующих* муфт. Посадочные отверстия для валов могут быть цилиндрическими или коническими. Кулачково-дисковая муфта состоит из полумуфт 1 и 2, плавающего диска 3 и кожуха 4. Обычно полумуфты и диск изготавливают из углеродистых или легированных (хромистых) сталей.

Для соединения валов, установленных друг к другу под углом до 45° , применяют *шарнирные* муфты (рис. 39.5). ГОСТ 5147—80 регламенти-

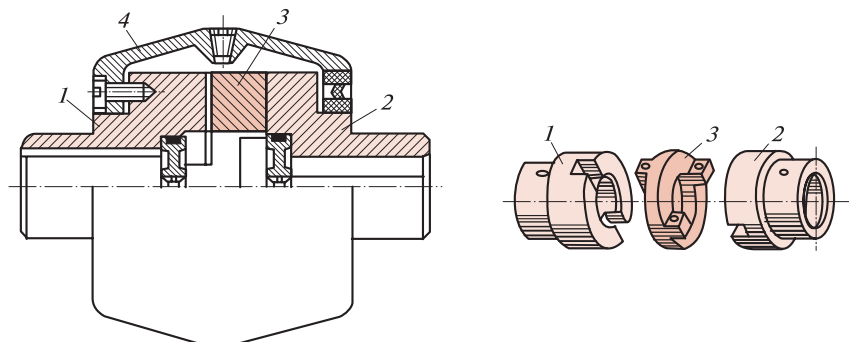


Рис. 39.4

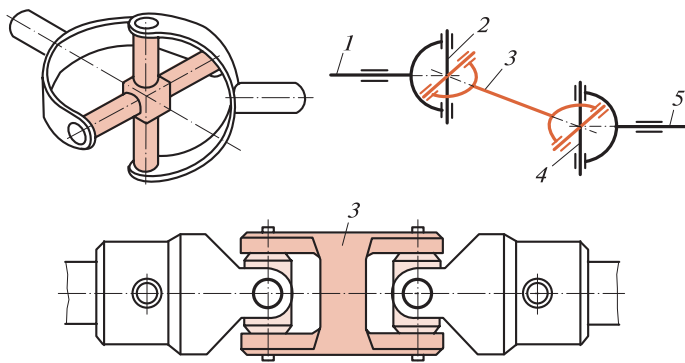


Рис. 39.5

рует основные параметры, конструкцию и размеры малогабаритных шарнирных муфт общего назначения для передачи номинального вращающего момента от 11,23 до 1 120 Н·м, а также предусматривает изготовление двух типов шарнирных муфт: одинарных и сдвоенных с промежуточной спаренной вилкой 3 (см. рис. 39.5). Эти муфты широко применяются в автомобилестроении (карданная передача).

Шарнирные муфты компенсируют неточность монтажа узлов, деформации рамы и рессор в транспортных машинах, поэтому их можно отнести к подгруппе компенсирующих муфт.

Пространственное изображение одинарной, схематическое и конструктивное изображения сдвоенной шарнирной муфты представлены на рис. 39.5. Ведущий вал 1 заканчивается вилкой, соединенной с крестовиной 2; вторая переключина крестовины соединена с вилкой ведомого вала одинарной муфты или со спаренной вилкой 3, если муфта сдвоенная.

У одинарной муфты при равномерном вращении ведущего вала ведомый вал будет вращаться *неравномерно*. Если муфта сдвоенная, а ведущий вал 1 и ведомый вал 5 параллельны (или образуют равные углы со спаренной вилкой 3), то при *равномерном вращении ведущего вала ведомый вал тоже вращается равномерно*. Детали шарнирной муфты изготавливаются из сталей 20Х и 40Х.

Нерасцепляемые упругие муфты. Упругие муфты обладают двумя очень важными свойствами, а именно: *демпфирующей способностью*, снижающей динамические нагрузки, и *способностью компенсировать несоосность валов*. На рис. 39.6 изображена муфта *упругая со звездочкой*, применяемая для соединения соосных цилиндрических валов при передаче номинального вращающего момента от 2,5 до 400 Н·м и уменьшении динамических нагруз-

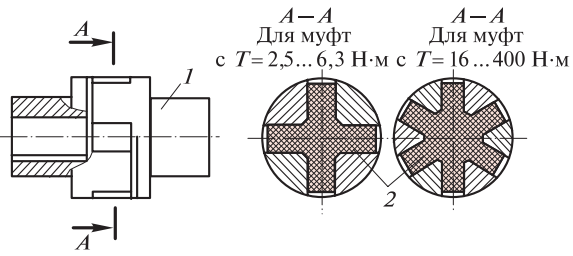


Рис. 39.6

зок; диаметры валов от 6 до 48 мм. Муфта допускает в зависимости от диаметра вала: частоту вращения до $5\,500\text{ мин}^{-1}$, радиальное смещение осей валов до 0,4 мм, угловое смещение до $1^\circ 30'$.

Муфта состоит из двух полу муфт *1*, изготовляемых из стали 35, и резиновой звездочки *2* (с четырьмя или шестью выступами).

На рис. 39.7 показана муфта упругая с торообразной оболочкой. Муфта предназначена для соединения соосных валов и передачи номинального вращающего момента от 20 до 40 000 Н·м, уменьшения динамических нагрузок и компенсации смещений валов диаметром от 14 до 240 мм. В зависимости от диаметра вала муфта допускает частоту вращения до $3\,000\text{ мин}^{-1}$, осевое смещение до 11 мм, радиальное смещение до 5 мм, угловое смещение до $1^\circ 30'$.

Муфта состоит из двух полу муфт *1*, резиновой торообразной оболочки *2*, прижатой кольцами и болтами к полу муфрам. Посадочные отверстия для валов могут быть цилиндрическими или коническими. Эта муфта допускает кратковременную перегрузку в 2—3 раза; она проста и надежна в эксплуатации, является лучшей из известных упругих муфт.

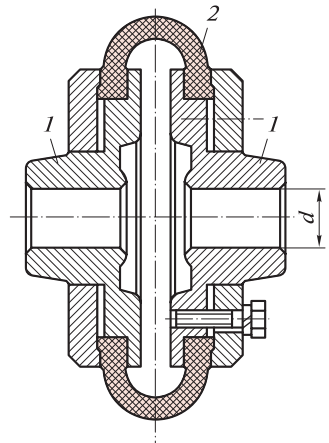


Рис. 39.7

На рис. 39.8 изображена муфта упругая втулочно-пальцевая. Муфта применяется для соединения соосных валов и передачи номинального вращающего момента от 6,34 до 16 000 Н·м и уменьшения динамических нагрузок; диаметры валов от 9 до 160 мм. В зависимости от диаметра вала муфта допускает частоты вращения до $8\,800\text{ мин}^{-1}$, радиальное смещение осей валов до 0,6 мм, угловое смещение до $1^\circ 30'$.

Муфта состоит из двух чугунных полу муфт *1*, в отверстиях которых закреплены стальные пальцы с надеты-

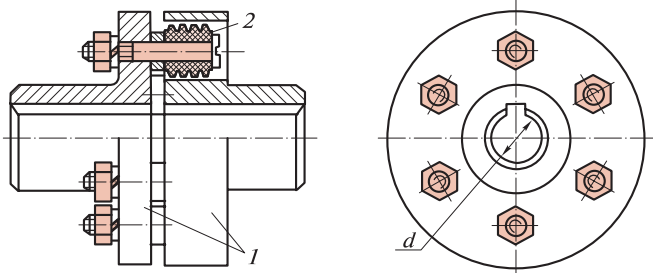


Рис. 39.8

ми на них кольцами и резиновыми гофрированными втулками 2. Металлический контакт полумуфт отсутствует, что обеспечивает плавную работу муфты и электрическую изоляцию валов. Посадочные отверстия для валов могут быть цилиндрическими или коническими.

Управляемые муфты. Механические муфты этого класса бывают *синхронные* (допускающие переключение только при равных или почти равных угловых скоростях ведущей и ведомой частей) и *асинхронные* (позволяющие производить переключение при различных угловых скоростях ведущей и ведомой частей). У асинхронных муфт вращающий момент передается за счет сил трения, поэтому такие муфты называют *фрикционными*. Они дают возможность плавного сцепления ведущего и ведомого валов под нагрузкой.

На рис. 39.9, *а* показана простейшая *дисковая фрикционная муфта*, имеющая одну пару поверхностей трения. Левая полумуфта закреплена на ведущем валу неподвижно, а полумуфта, сидящая на ведомом валу, подвижна в осевом направлении (подвижная полумуфта может быть расположена и на ведущем валу). Следует заметить, что фрикционные муфты не допускают несоосность валов. Центровка полумуфт достигается либо их расположением на одном валу, либо с помощью специальных центрирующих колец

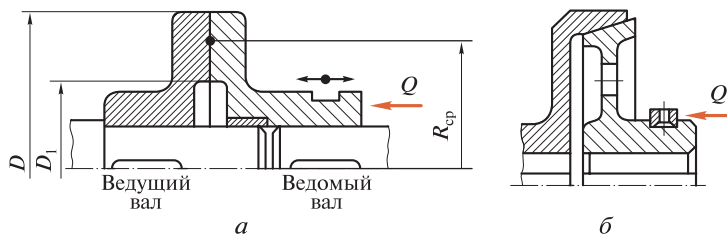


Рис. 39.9

(см. рис. 39.9, а). Для соединения валов к подвижной полумуфте с помощью механизма управления прикладывается осевая сила Q .

Во время включения фрикционной муфты неизбежно проскальзывание трущихся поверхностей, сопровождающееся выделением теплоты. Поэтому фрикционные материалы, применяемые в муфтах, должны быть износостойкими и теплостойкими. Прочность сцепления в муфте зависит от коэффициента трения и его стабильности при изменении скорости скольжения, давления и температуры.

Условие работоспособности (т.е. отсутствия пробуксовывания) фрикционной муфты записывается так:

$$M_{\text{тр}} \geq KT,$$

где $M_{\text{тр}}$ — момент трения на полумуфтах; $K = 1,25 \dots 1,5$ — коэффициент запаса сцепления; T — вращающий момент, передаваемый муфтой (произведение KT называют *расчетным вращающим моментом*). Момент трения

$$M_{\text{тр}} = fQR_{\text{ср}},$$

где f — коэффициент трения скольжения; Q — осевая сила; $R_{\text{ср}} = (D + D_1)/4$ — средний радиус рабочей поверхности дисков.

Осевая сила, необходимая для включения муфты,

$$Q \geq \frac{4KT}{f(D + D_1)}.$$

На рис. 39.9, б показана схема *конической фрикционной муфты*.

Для уменьшения осевой силы нажатия Q и увеличения передаваемого вращающего момента широко применяют *многодисковые фрикционные муфты*, имеющие несколько пар поверхностей трения (рис. 39.10). В этой муфте имеется две группы дисков: наружные, соединенные шлицами или зубьями с полумуфтой 1, и внутренние, соединенные таким же способом с другой полумуфтой. На правый крайний диск действует сила нажатия Q , передаваемая от механизма управления с помощью отводки 3 и качающегося рычага 2.

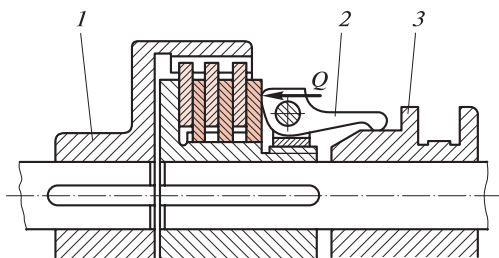


Рис. 39.10

В автомобилях широко применяют дисковые фрикционные муфты с двумя поверхностями трения (муфта состоит из одного диска и двух полу муфт), имеющие сравнительно хорошую расцепляемость; в тракторах находят широкое применение многодисковые муфты.

Самодействующие муфты. К этому классу относятся муфты предохранительные, обгонные и центробежные.

На рис. 39.11 показана стандартизованная *кулачковая предохранительная* муфта общего назначения; кроме того, стандартизованы предохранительные *шариковая* и *фрикционная многодисковая* муфты. Эти муфты предназначены для предохранения привода при передаче вращающего момента от 4 до 400 Н·м в любом пространственном положении; диаметры валов от 8 до 48 мм, допускаемая частота вращения до 1 600 мин⁻¹ и зависит от диаметра вала.

Во избежание случайных выключений предохранительные муфты рассчитывают по *предельному вращающему моменту*, превышающему расчетный момент на 25%, т.е. $T_{пр} = 1,25T_p$. При достижении предельного вращающего момента происходит размыкание полу муфт. Регулировка муфт осуществляется гайкой со стопорной шайбой.

На рис. 39.12 изображена предохранительная дисковая муфта с *разрушаемым элементом* (срезным штифтом). В этой муфте при перегрузке штифт 3 срезается кромками стальных закаленных втулок 4, установленных в полу муфтах 1 и 2. Для возобновления работы машины вывинчивают пробку и разрушенный штифт заменяют новым. Иногда в муфте ставится два срезных штифта. Усилие F , срезающее штифт, определим по формуле

$$F = \frac{T_{пр}}{r},$$

где $T_{пр}$ — предельный вращающий момент; r — расстояние от оси вала до оси штифта. Диаметр $d_{ш}$ штифта определяется из расчета его на срез.

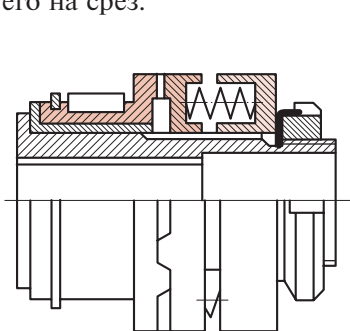


Рис. 39.11

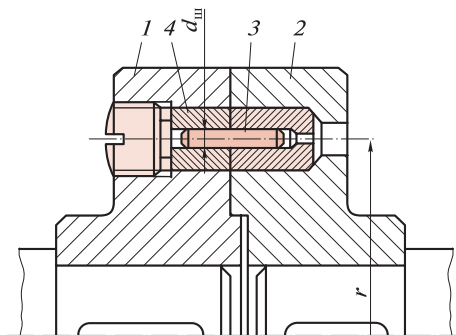


Рис. 39.12

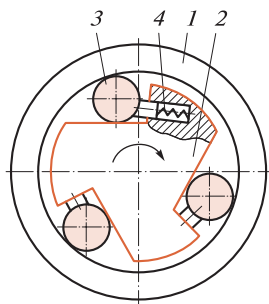


Рис. 39.13

На рис. 39.13 показана схема работы *обгонной муфты*, которая передает вращающий момент только в одном направлении (в данном случае по часовой стрелке). Муфта состоит из обоймы 1, звездочки 2, роликов или шариков 3 и толкателя 4 со слабой пружиной, удерживающего ролик в постоянном соприкосновении с обоймой. При вращении звездочки по часовой стрелке под действием сил трения ролик увлекается в сторону сужения паза и заклинивается, в результате чего образуется жесткое соединение звездочки с обоймой. При вращении звездочки против часовой стрелки (или если обойма начнет вращаться по часовой стрелке с большей угловой скоростью, чем звездочка) произойдет автоматическое размыкание кинематической цепи привода.

Фрикционные обгонные муфты бесшумны и могут работать при больших частотах вращения. Их применяют в автомобилях, мотоциклах, велосипедах, станках и др. В велосипеде обгонная муфта позволяет колесу свободно катиться по дороге при неподвижных педалях и передавать на колесо вращающий момент при вращающихся педалях, поэтому ее называют *муфтой свободного хода*.

Центробежные муфты применяют для автоматического соединения и разъединения валов при достижении определенной частоты вращения. Источник усилий в них — центробежные силы.

На практике нередко применяют комбинированные муфты, например сочетания упругих муфт с предохранительными или управляемыми.

Расчет муфт. Стандартные и нормализованные муфты на практике подбирают по каталогам в зависимости от диаметра соединяемых валов и расчетного вращающего момента T_p по условию

$$T_p = KT \leq T_n,$$

где K — коэффициент перегрузки, учитывающих режим работы и ответственность конструкции; T — наибольший, длительно действующий вращающий момент; T_n — номинальный вращающий момент, указанный в каталоге.

Для приводов от электродвигателя можно принимать: при спойной нагрузке $K = 1,0 \dots 1,5$; при переменной нагрузке $K = 1,5 \dots 2$; при ударной и реверсивной нагрузке $K = 2,5 \dots 3$ и более. Для фрикционных муфт вместо коэффициента перегрузки вводится коэффициент запаса сцепления $k = 1,25 \dots 1,5$.

Пример 39.1. Определить диаметр $d_{\text{ш}}$ срезного штифта предохранительной муфты (см. рис. 39.13), если передаваемый вращающий момент $T = 90 \text{ Н} \cdot \text{м}$, число штифтов — один, его материал — сталь 45 с пределом прочности при сдвиге $\tau_{\text{в}} = 390 \text{ МПа}$. Расстояние от оси вала до оси штифта $r = 30 \text{ мм}$. Муфта работает при переменной нагрузке.

Решение. Определим предельный вращающий момент, приняв коэффициент перегрузки $K = 2$ (нагрузка переменная):

$$T_{\text{пр}} = 1,25KT = 1,25 \cdot 2 \cdot 90 = 225 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Далее определим силу F , срезающую штифт:

$$F = \frac{T_{\text{пр}}}{r} = \frac{225}{30 \cdot 10^{-3}} = 7\,500 \text{ Н}.$$

Из расчета штифта на срез определяем его диаметр:

$$d_{\text{ш}} = \sqrt{\frac{4F}{\pi\tau_{\text{в}}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7\,500}{\pi \cdot 390 \cdot 10^6}} = 0,00494 \text{ м} = 4,94 \text{ мм}.$$

Принимаем штифт диаметром 5 мм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анурьев В. И.* Справочник конструктора-машиностроителя : в 3 т. / под ред. И. Н. Жестковой. — 8-е изд., перераб. и доп. — М. : Машиностроение, 2001. — Т. 1. — 920 с. ; Т. 2. — 912 с. ; Т. 3. — 864 с.
2. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. — М. : Наука, 1988. — 640 с.
3. *Бать М. И.* Теоретическая механика в примерах и задачах : учеб. пособие : в 2 ч. / М. И. Бать, Г. Д. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — М. : Наука, 1984. — Ч. 1. — 512 с. ; Ч. 2. — 644 с.
4. *Беляев Н. М.* Сопrotивление материалов / Н. М. Беляев. — М. : Наука, 1976. — 608 с.
5. *Бутенин Н. В.* Курс теоретической механики : учебник : в 2 ч. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. — М. : Наука, 1979. — Ч. 1. — 272 с. ; ч. 2. — 544 с.
6. *Вольмир А. С.* Сопrotивление материалов / А. С. Вольмир, Ю. П. Григорьев, А. И. Станкевич. — М. : Дрофа, 2007. — 592 с.
7. *Гернет М. М.* Курс теоретической механики / М. М. Гернет. — М. : Высш. шк., 1973. — 482 с.
8. *Гузенков П. П.* Детали машин / П. П. Гузенков. — М. : Высш. шк., 1986. — 352 с.
9. *Гулиа Н. В.* Детали машин : учебник / Н. В. Гулиа, В. Г. Клоков, С. А. Юрков. — М. : Лань, 2010. — 415 с.
10. *Дарков А. В.* Сопrotивление материалов : учебник / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. — М. : Высш. шк., 1975. — 654 с.
11. *Дунаев П. Ф.* Конструирование узлов и деталей машин : учеб. пособие / П. Ф. Дунаев, О. П. Леликов. — М. : Высш. шк., 1985. — 416 с.
12. *Куклин Н. Г.* Детали машин : учебник / Н. Г. Куклин, Г. С. Куклина, В. К. Житков. — М. : Высш. шк., 2008. — 408 с.
13. *Мещерский И. В.* Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. — М. : Наука, 1998. — 448 с.
14. *Никитин Н. Н.* Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. — М. : Высш. шк., 1990. — 607 с.
15. *Степин П. А.* Сопrotивление материалов / П. А. Степин. — М. : Высш. шк., 1988. — 366 с.
16. *Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. — М. : Высш. шк., 2010. — 416 с.
17. *Феодосьев В. И.* Сопrotивление материалов / В. И. Феодосьев. — М. : Изд-во МГТУ, 2005. — 592 с.
18. *Эрдеди А. А.* Детали машин : учебник / А. А. Эрдеди, Н. А. Эрдеди. — 5-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2012. — 288 с.
19. *Эрдеди А. А.* Теоретическая механика. Сопrotивление материалов : учеб. пособие / А. А. Эрдеди, Н. А. Эрдеди. — 13-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2012. — 320 с.

Предисловие.....	4
ЧАСТЬ I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	5
РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ. СТАТИКА	6
Глава 1. Основные положения и аксиомы статики	6
1.1. Основные понятия статики	6
1.2. Основные аксиомы статики	8
1.3. Теорема о равновесии плоской системы трех непараллельных сил	12
1.4. Связи и реакции связей. Принцип освобождаемости	13
1.5. Распределенные нагрузки	16
1.6. Принцип отвердевания	16
Глава 2. Плоская система сходящихся сил.....	18
2.1. Геометрический способ определения равнодействующей и геометрическое условие равновесия	18
2.2. Проекции силы на оси координат и аналитические условия равновесия	21
Глава 3. Плоская система параллельных сил и момент силы	26
3.1. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону	26
3.2. Сложение двух неравных антипараллельных сил	27
3.3. Момент силы относительно точки	28
Глава 4. Плоская система пар сил	30
4.1. Пара сил и момент пары	30
4.2. Основные свойства пары сил	31
4.3. Эквивалентные пары	32
4.4. Опоры и опорные реакции балок	34
Глава 5. Плоская система произвольно расположенных сил	36
5.1. Лемма о параллельном переносе силы.....	36
5.2. Приведение плоской системы произвольно расположенных сил к данному центру	37
5.3. Свойства главного вектора и главного момента	39
5.4. Различные случаи приведения плоской системы произвольно расположенных сил.....	41
5.5. Аналитические условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил.....	41
Глава 6. Трение	45
6.1. Понятие о трении.....	45
6.2. Трение скольжения	46
6.3. Трение на наклонной плоскости	49

6.4. Трение качения.....	52
6.5. Устойчивость к опрокидыванию	55
Глава 7. Пространственная система сил	57
7.1. Система сходящихся сил и проекции силы на оси координат в пространстве.....	57
7.2. Разложение силы по трем осям координат и условия равновесия системы сходящихся сил.....	58
7.3. Момент силы относительно оси	61
7.4. Аналитические условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил	62
7.5. Теорема о моменте равнодействующей относительно оси (теорема Вариньона).....	65
Глава 8. Центр тяжести	66
8.1. Центр параллельных сил	66
8.2. Определение положения центра тяжести	68
8.3. Методы нахождения центра тяжести.....	69
8.4. Положение центра тяжести некоторых фигур	71
РАЗДЕЛ ВТОРОЙ. КИНЕМАТИКА	75
Глава 9. Кинематика точки	75
9.1. Основные понятия кинематики и некоторые сведения из теории относительности	75
9.2. Некоторые определения теории механизмов и машин.....	77
9.3. Способы задания движения точки	79
9.4. Скорость точки	81
9.5. Ускорение точки в прямолинейном движении	84
9.6. Ускорение точки в криволинейном движении.....	85
9.7. Понятие о кривизне кривых линий	86
9.8. Теорема о проекции ускорения на касательную и нормаль	87
9.9. Виды движения точки в зависимости от ускорений	90
9.10. Теоремы о проекциях скорости и ускорения на координатные оси.....	91
Глава 10. Простейшие движения твердого тела	93
10.1. Поступательное движение	93
10.2. Вращение вокруг неподвижной оси	95
10.3. Различные случаи вращательного движения.....	99
10.4. Сравнение формул кинематики для поступательного и вращательного движений.....	101
10.5. Преобразование вращательных движений.....	102
Глава 11. Сложное движение точки	106
11.1. Понятие о сложном движении точки.....	106
11.2. Теорема о сложении скоростей.....	107
Глава 12. Плоскопараллельное движение твердого тела	109
12.1. Понятие о плоскопараллельном движении.....	109
12.2. Метод мгновенных центров скоростей.....	110
12.3. Свойства мгновенного центра скоростей.....	111
12.4. Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное	114

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ. ДИНАМИКА.....	118
Глава 13. Основы динамики материальной точки	118
13.1. Аксиомы динамики	118
13.2. Принцип независимости действия сил. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	121
13.3. Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту	124
Глава 14. Основы кинестатики	129
14.1. Метод кинестатики.....	129
14.2. Силы инерции в криволинейном движении	131
Глава 15. Работа и мощность	136
15.1. Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути	136
15.2. Работа переменной силы на криволинейном участке пути	137
15.3. Теорема о работе силы тяжести.....	138
15.4. Работа постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу.....	139
15.5. Мощность.....	140
15.6. Коэффициент полезного действия	140
Глава 16. Энергетические теоремы динамики материальной точки	143
16.1. Теорема об изменении количества движения	143
16.2. Теорема об изменении кинетической энергии.....	144
16.3. Закон сохранения механической энергии	148
Глава 17. Основы динамики системы материальных точек	151
17.1. Уравнение поступательного движения твердого тела	151
17.2. Уравнение вращательного движения твердого тела.....	152
17.3. Кинетическая энергия твердого тела.....	156
17.4. Сравнение формул динамики для поступательного и вращательного движений твердого тела	158
17.5. Понятие о балансировке вращающихся тел.....	162
17.6. Некоторые сведения о механизмах.....	164
ЧАСТЬ II. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ	171
Глава 18. Теоретические основы сопротивления материалов	172
18.1. Исходные понятия.....	172
18.2. Основные гипотезы и допущения	174
18.3. Виды нагрузок и основных деформаций	176
18.4. Метод сечений. Напряжение	178
Глава 19. Растяжение и сжатие	183
19.1. Напряжения и продольная деформация при растяжении и сжатии.....	183
19.2. Закон Гука при растяжении и сжатии	186
19.3. Поперечная деформация при растяжении и сжатии	189
19.4. Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали	190
19.5. Потенциальная энергия деформации при растяжении	194
19.6. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии.....	195
19.7. Растяжение под действием собственного веса	198
19.8. Статически неопределимые задачи.....	200
19.9. Смятие. Контактные напряжения.....	202
Глава 20. Сдвиг (срез)	206
20.1. Напряжения при сдвиге	206

20.2. Расчеты на прочность при сдвиге	207
20.3. Деформация и закон Гука при сдвиге	209
20.4. Закон парности касательных напряжений	210
20.5. Напряжения в наклонных сечениях при растяжении. Главные напряжения	211
Глава 21. Геометрические характеристики плоских сечений	214
21.1. Статический момент площади	214
21.2. Полярный момент инерции	215
21.3. Осевой момент инерции	216
21.4. Момент инерции при параллельном переносе осей	218
21.5. Главные оси и главные моменты инерции	219
Глава 22. Кручение	221
22.1. Понятие о кручении круглого цилиндра	221
22.2. Напряжения и деформации при кручении	223
22.3. Расчеты на прочность и жесткость при кручении	226
22.4. Потенциальная энергия деформации при кручении	228
22.5. Расчет цилиндрических винтовых пружин	229
Глава 23. Изгиб	232
23.1. Понятие о чистом изгибе прямого бруса	232
23.2. Изгибающий момент и поперечная сила	233
23.3. Дифференциальные зависимости при изгибе	236
23.4. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов	237
23.5. Нормальные напряжения при чистом изгибе	241
23.6. Расчеты на прочность при изгибе	244
23.7. Касательные напряжения при изгибе	249
23.8. Упругая линия балки	255
23.9. Балки равного сопротивления изгибу	261
Глава 24. Сочетание основных деформаций (сложное сопротивление)	264
24.1. Изгиб и растяжение или сжатие	264
24.2. Гипотезы прочности	267
24.3. Изгиб и кручение	271
Глава 25. Прочность и жесткость при динамических нагрузках	275
25.1. Сопротивление усталости материалов	275
25.2. Влияние факторов на предел выносливости	278
25.3. Расчеты на сопротивление усталости	281
25.4. Сопротивление материалов при инерционной и ударной нагрузке	282
Глава 26. Продольный изгиб	287
26.1. Общие сведения	287
26.2. Формулы Эйлера и Ясинского	288
26.3. Расчеты прямолинейных стержней на устойчивость	291
ЧАСТЬ III. ДЕТАЛИ И УЗЛЫ МАШИН	293
Глава 27. Основные принципы проектирования деталей машин	294
27.1. Общие сведения о проектировании машин	294
27.2. Стандартизация и взаимозаменяемость деталей машин	295
27.3. Технологичность конструкций и экономичность деталей машин	296
27.4. Критерии работоспособности и изнашивание деталей машин	298

27.5. Краткие сведения о конструкционных машиностроительных материалах.....	302
Глава 28. Неразъемные соединения деталей	304
28.1. Клепаные соединения.....	304
28.2. Сварные соединения.....	307
28.3. Клееные и паяные соединения.....	310
Глава 29. Разъемные соединения деталей	315
29.1. Общие сведения о резьбовых соединениях.....	315
29.2. Расчет крепежных резьбовых соединений.....	327
29.3. Шпоночные соединения.....	331
29.4. Шлицевые соединения.....	337
29.5. Клиновые и штифтовые соединения.....	340
Глава 30. Общие сведения о механических передачах	344
Глава 31. Фрикционные передачи	348
31.1. Общие сведения.....	348
31.2. Цилиндрическая фрикционная передача.....	350
31.3. Фрикционные вариаторы.....	352
Глава 32. Ременные передачи	354
32.1. Общие сведения.....	354
32.2. Плоскоременные передачи.....	362
32.3. Клиноременные передачи.....	364
32.4. Зубчато-ременные передачи.....	370
32.5. Шкивы и натяжные устройства.....	371
Глава 33. Зубчатые передачи	376
33.1. Общие сведения.....	376
33.2. Основы теории зубчатого зацепления.....	379
33.3. Цилиндрическая прямозубая передача.....	385
33.4. Цилиндрические передачи с косыми и шевронными зубьями.....	389
33.5. Материалы, конструкция цилиндрических колес и методы образования зубьев.....	393
33.6. Критерии работоспособности зубчатых колес и расчетная нагрузка.....	401
33.7. Расчет цилиндрических передач на прочность.....	407
33.8. Расчет допускаемых напряжений.....	414
33.9. Конические зубчатые передачи.....	416
33.10. Передачи с зацеплением Новикова.....	424
33.11. Общие сведения о цилиндрических и конических редукторах.....	427
33.12. Планетарные передачи.....	431
33.13. Волновые передачи.....	434
33.14. Смазывание зубчатых передач.....	437
Глава 34. Червячные передачи	439
34.1. Общие сведения.....	439
34.2. Геометрия и кинематика червячных передач.....	441
34.3. Силы в червячном зацеплении. КПД.....	448
34.4. Расчет червячных передач.....	449
34.5. Материалы и допускаемые напряжения.....	455
Глава 35. Цепные передачи	459
35.1. Общие сведения и детали передач.....	459

35.2. Геометрия и кинематика передач.....	463
35.3. Критерии работоспособности и расчет цепных передач	465
Глава 36. Передача винт — гайка	469
36.1. Общие сведения	469
36.2. Силовые соотношения в передаче	471
36.3. Расчет передачи винт — гайка.....	472
Глава 37. Валы и оси	475
37.1. Общие сведения.....	475
37.2. Расчет валов и осей	477
Глава 38. Опоры валов и осей	486
38.1. Подшипники скольжения.....	486
38.2. Смазывание и расчет подшипников скольжения.....	489
38.3. Подшипники качения	493
38.4. Подбор подшипников качения	498
38.5. Конструирование подшипниковых узлов	503
Глава 39. Механические муфты	512
39.1. Назначение и классификация муфт.....	512
39.2. Конструкция и расчет муфт	513
Список литературы	522

Учебное издание

Эрдеди Алексей Алексеевич,

Эрдеди Наталия Алексеевна

Техническая механика

Учебник

Редактор *М. С. Кубай*

Технический редактор *Н. И. Горбачева*

Компьютерная верстка: *Д. В. Федотов*

Корректор *С. Ю. Свиридова*

Изд. № 101116576. Подписано в печать 27.08.2013. Формат 60 × 90/16.

Гарнитура «Ньютон». Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 33,0.

Тираж 3000 экз. Заказ №

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru

129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1.

Тел./факс: (495)648-0507, 616-0029.

Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. АЕ51. Н 16476 от 05.04.2013.

Отпечатано с электронных носителей издательства.

ОАО «Тверской полиграфический комбинат», 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.

Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34. Телефон/факс: (4822) 44-42-15.

Home page — www.tverpk.ru Электронная почта (E-mail) — sales@tverpk.ru