# Раздел II. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## Тема 2.6. Поперечный изгиб

**Занятие №1**.

**Учебные вопросы**:
1. Понятие о чистом изгибе прямого бруса
2. Изгибающий момент и поперечная сила
3. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

### 1. Понятие о чистом изгибе прямого бруса

**Чистым изгибом** называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только **изгибающий момент**.

Деформация чистого изгиба будет, например, иметь место, если к прямому брусу в плоскости, проходящей через ось, приложить две равные по величине и противоположные по знаку пары сил.

На изгиб работают балки, оси, валы и другие детали конструкций (определение балки известно из теоретической механики). В дальнейшем почти всегда мы будем рассматривать такие брусья, у которых имеется по крайней мере одна плоскость симметрии и плоскость действия нагрузок совпадает с ней. В этом случае деформация изгиба происходит в плоскости действия внешних сил, и изгиб называется **прямым** в отличие от косого изгиба.

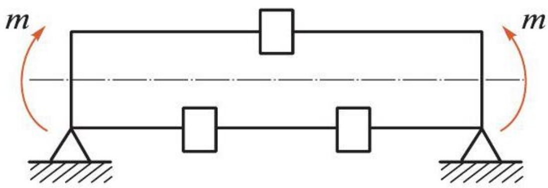


**Рис. 2.23**. Балка, свободно лежащая на двух опорах

При изучении деформации изгиба будем мысленно представлять себе, что балка состоит из бесчисленного количества волокон, параллельных оси. Для того чтобы получить представление о деформации изгиба, проведем два опыта.

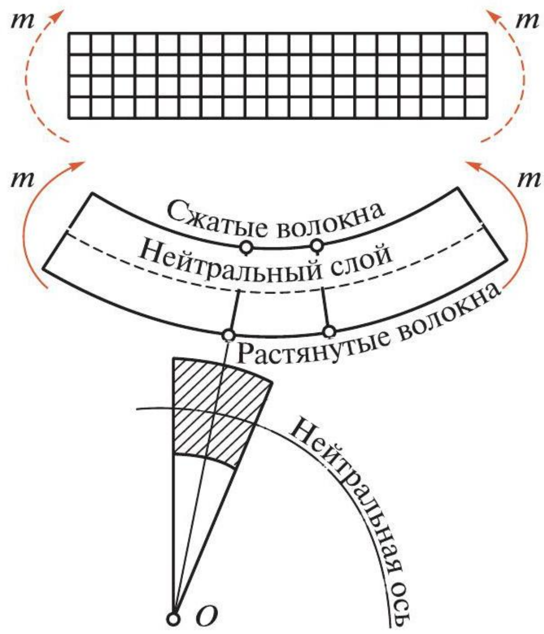


**Рис. 2.24**. Призматический брус прямоугольного сечения

1. Балку, свободно лежащую на двух опорах, в верхней и нижней частях которой предварительно сделаны пазы и в них помещены точно пригнанные по размеру пазов бруски, подвергнем деформации изгиба (рис. 2.23). В результате этого бруски, расположенные на выпуклой стороне, выпадут из пазов, а бруски, расположенные на вогнутой стороне, будут зажаты.

2. На боковую поверхность призматического резинового (для большей наглядности) бруса прямоугольного сечения нанесем сетку продольных и поперечных прямых линий и подвергнем этот брус деформации чистого изгиба (рис. 2.24). В результате можно видеть следующее:

а) поперечные прямые линии останутся при деформации прямыми, но повернутся навстречу друг к другу;

б) продольные прямые линии, а также ось бруса искривятся;

в) сечения бруса расширятся в поперечном направлении на вогнутой стороне и сузятся на выпуклой стороне.

Из этих опытов можно сделать вывод, что **при чистом изгибе справедлива гипотеза плоских сечений**; **волокна**, **лежащие на выпуклой стороне**, **растягиваются**, **лежащие на вогнутой стороне — сжимаются**, а на границе между ними лежит **нейтральный слои** волокон, которые только **искривляются**, **не изменяя своей длины**.

Полагая справедливой гипотезу о ненадавливании волокон, можно утверждать, что **при чистом изгибе в поперечном сечении бруса возникают только нормальные напряжения растяжения и сжатия**, **неравномерно распределенные по сечению**.

Искривление волокон и оси бруса происходит за счет неравномерного распределения нормальных напряжений по поперечному сечению.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется **нейтральной осью** (н. о.). На нейтральной оси нормальные напряжения **равны нулю**.

## 2. Изгибающий момент и поперечная сила

Как известно из теоретической механики, опорные реакции балок определяют, составляя и решая уравнения равновесия статики для всей балки. Будем помнить, что при определении внутренних сил реакции связей учитываются наравне с активными внешними силами, действующими на балку.

Для определения внутренних силовых факторов применим метод сечений, причем изображать балку будем только одной линией — осью, к которой приложены активные и реактивные силы. Рассмотрим два случая.

1. К балке приложены **две равные и противоположные по знаку пары сил** (рис. 2.25).

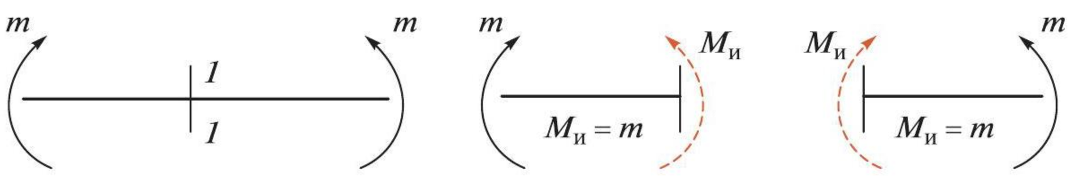


**Рис. 2.25**. Балка с приложенными парами сил

Рассматривая равновесие части балки, расположенной слева или справа от сечения $1$—$1$, видим, что во всех поперечных сечениях возникает только изгибающий момент $M_и$, равный внешнему моменту. Таким образом, это случай чистого изгиба.

Изгибающий момент есть результирующий момент относительно нейтральной оси внутренних нормальных сил, действующих в поперечном сечении балки.

Обратим внимание на то, что изгибающий момент имеет разное направление для левой и правой частей балки. Это говорит о **непригодности** правила знаков статики при определении знака изгибающего момента.

2. К балке приложены **активные и реактивные силы**, **перпендикулярные оси** (рис. 2.26).

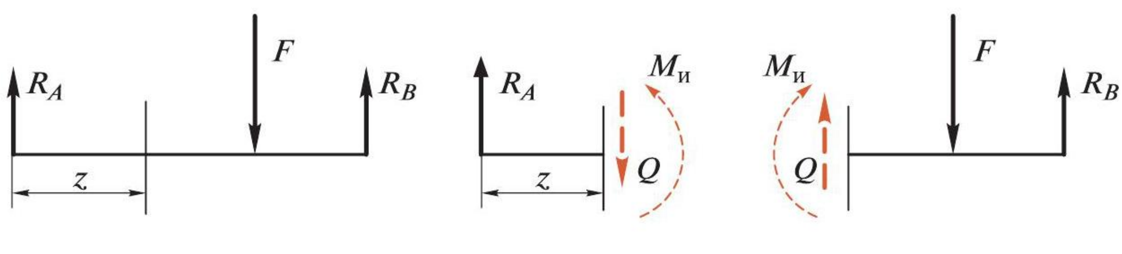


**Рис. 2.26**. Балка с приложенными активными и реактивными силами, перпендикулярными оси

Рассматривая равновесие частей балки, расположенных слева и справа, видим, что в поперечных сечениях должны действовать изгибающий момент $M_и$ и поперечная сила $Q$. Из этого следует, что в рассматриваемом случае в точках поперечных сечений действуют не только нормальные напряжения, соответствующие изгибающему моменту, но и касательные, соответствующие поперечной силе.

Поперечная сила есть равнодействующая внутренних касательных сил в поперечном сечении балки.

Обратим внимание на то, что поперечная сила имеет противоположное направление для левой и правой частей балки, что говорит о **непригодности** правила знаков статики при определении знака поперечной силы.

Изгиб, при котором в поперечном сечении балки действуют изгибающий момент и поперечная сила, называется поперечным.

В общем случае при поперечном изгибе изгибающий момент и поперечная сила в разных сечениях могут иметь неодинаковое значение.

У балки, находящейся в равновесии под действием плоской системы сил, алгебраическая сумма моментов всех активных и реактивных сил относительно любой точки равна нулю; следовательно, сумма моментов внешних сил, действующих на балку левее сечения, численно равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на балку правее сечения.

Таким образом, изгибающий момент в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов относительно центра тяжести сечения всех внешних сил, действующих справа или слева от сечения.

У балки, находящейся в равновесии под действием плоской системы сил, перпендикулярных оси (т.е. системы параллельных сил), алгебраическая сумма всех внешних сил равна нулю; следовательно, сумма внешних сил, действующих на балку левее сечения, численно равна сумме сил, действующих на балку правее сечения.

Таким образом, поперечная сила в сечении балки численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих справа или слева от сечения.

Так как правила знаков статики неприемлемы для установления знаков изгибающего момента и поперечной силы, установим для них другие правила знаков, а именно:

– если внешняя нагрузка стремится изогнуть балку выпуклостью вниз, то изгибающий момент в сечении считается положительным, и наоборот, если внешняя нагрузка стремится изогнуть балку выпуклостью вверх, то изгибающий момент в сечении считается отрицательным (рис. 2.27);

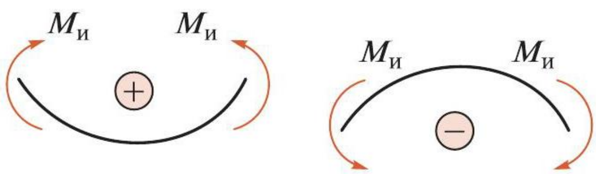


**Рис. 2.27**. Правило знаков для изгибающих моментов

– если сумма внешних сил, лежащих по левую сторону от сечения, дает равнодействующую, направленную вверх, то поперечная сила в сечении считается положительной, если равнодействующая направлена вниз, то поперечная сила в сечении считается отрицательной; для части балки, расположенной справа от сечения, знаки поперечной силы будут противоположными (рис. 2.28).

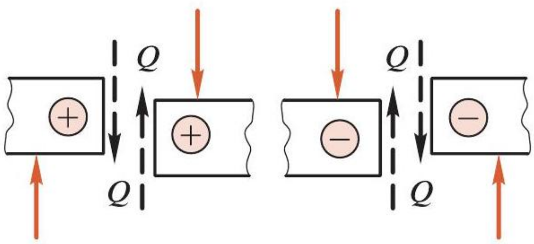


**Рис. 2.28**. Правило знаков для поперечных сил

Пользуясь этими правилами, следует мысленно представлять себе сечение балки жестко защемленным, а связи отброшенными и замененными реакциями.

Подчеркнем, что при определении опорных реакций пользуются правилами знаков статики; при определении знаков изгибающего момента и поперечной силы — правилами знаков сопротивления материалов.

Правило знаков для изгибающих моментов иногда называют «правилом дождя» (имея в виду, что в случае выпуклости вниз образуется воронка, в которой задержится дождевая вода, и наоборот).

### 3. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Для наглядного изображения распределения вдоль оси балки поперечных сил и изгибающих моментов строят эпюры, которые дают возможность определить предположительно опасное сечение балки и установить значения поперечной силы и изгибающего момента в этом сечении.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов можно строить двумя способами.

**Первый способ** заключается в том, что сначала составляют аналитические выражения поперечных сил и изгибающих моментов для каждого участка как функций текущей координаты $z$ поперечного сечения:

$$Q = f_1(z);\ M_{\text{и}} = f_2(z).$$

Затем по полученным уравнениям строят эпюры.

**Второй способ** заключается в построении эпюр по характерным точкам и значениям поперечных сил и изгибающих моментов на границах участков. Применяя этот способ, в большинстве случаев можно обойтись без составления уравнений поперечных сил и изгибающих моментов. При наличии некоторого опыта второй способ предпочтительнее.

При построении эпюр следует руководствоваться приведенными ниже правилами:

1. Эпюру моментов строят на **сжатом волокне**, т.е. положительные моменты (и положительные поперечные силы) откладывают вверх от оси, а отрицательные — вниз.

2. Пользуясь принципом смягченных граничных условий, будем полагать, что в сечении, где приложена сосредоточенная сила, значение **поперечной силы** меняется **скачкообразно**, причем скачок равен модулю этой силы.

3. На том же основании будем полагать, что в сечении, где приложена пара сил (момент), значение **изгибающего момента** меняется **скачкообразно**, причем скачок равен моменту пары.

4. Правильность построения эпюр следует проверять с помощью теоремы Журавского.

Как известно из математики, если $M_{\text{и}} = f(z)$, то

$$\frac{\mathrm{d}M_{\text{и}}}{\mathrm{d}z} = \operatorname{tg}\alpha,$$

где $\alpha$ — угол, который составляет касательная к эпюре моментов с положительным направлением оси $z$.

Согласно теореме Журавского,

$$Q = \frac{\mathrm{d}M_{\text{и}}}{\mathrm{d}z} = \operatorname{tg}\alpha$$

(масштабы $M_{\text{и}}$ и $z$ полагаем численно равными единице), следовательно, если угол $\alpha$ острый, то $Q > 0$ и **изгибающий момент** на участке **возрастает**, если угол $\alpha$ тупой, то $Q < 0$ и **изгибающий момент** на участке **убывает**, если $\alpha = 0$ на всем участке, то $M_{\text{и}} = \text{const}$, $Q = 0$ и на этом участке возникает **чистый изгиб**, если $\alpha = 0$ в одной точке эпюры моментов, то в этом сечении $Q = 0$, а изгибающий момент имеет **экстремальное** (максимальное или минимальное) **значе-**

**ние**. В сечении, где на эпюре поперечных сил имеется скачок, на эпюре изгибающих моментов будет резкое изменение направления касательной.

Чтобы правила знаков для изгибающих моментов и поперечных сил не противоречили знакам, полученным на основании теоремы Журавского, при проверке эпюр следует ось $z$ мысленно всегда направлять **слева направо**.

5. На участке, где нет распределенной нагрузки, **эпюра моментов** представляет собой **наклонную прямую**, а **эпюра поперечных сил — прямую, параллельную оси**.
6. На участке, где приложена равномерно распределенная нагрузка, **эпюра моментов** представляет собой **параболу**, а **эпюра поперечных сил — наклонную прямую**.
7. На конце балки **изгибающий момент** равен нулю, если там не приложена пара сил.
8. При построении эпюры для консольных балок начало координат удобно брать на конце консоли, что нередко дает возможность обойтись без определения опорных реакций. В сечении, соответствующем заделке, **поперечная сила равна реактивной силе**, **а изгибающий момент — реактивному моменту**.