Раздел II. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Тема 2.5. Кручение

Занятие №2.

Учебные вопросы:
4. Потенциальная энергия деформации при кручении
5. Расчет цилиндрических винтовых пружин

4. Потенциальная энергия деформации при кручении

Представим себе круглый цилиндрический брус постоянного сечения, жестко защемленный одним концом и нагруженный на другом конце моментом, приложенным статически, т.е. медленно возрастающим от нуля до какого-то значения T. Полагаем, что момент остается в пределах, когда нагрузка и деформация пропорциональны, т.е. справедлив закон Гука.

Вращающий момент T вызывает в брусе деформацию кручения и при этом совершает работу W, которая аккумулируется в виде потенциальной энергии деформации Π, причем, пренебрегая незначительными потерями энергии, можно считать, что $W = \Pi$.

Работа в случае статического нагружения равна

$$W = \frac{T\varphi}{2},$$

где φ — полный угол закручивания бруса.

Так как $T = M_к$, то

$$\Pi = W = \frac{T\varphi}{2} = M_к \frac{M_к l}{2GI_p} = \frac{M_к^2 l}{2GI_p}.$$

При одновременном действии нескольких моментов или ступенчатом изменении размеров поперечного сечения брус разбивают на участки и потенциальную энергию деформации всего бруса определяют как сумму потенциальных энергий отдельных его участков.

5. Расчет цилиндрических винтовых пружин

В технике наиболее распространены цилиндрические винтовые пружины из стали круглого поперечного сечения, работающие на растяжение или сжатие. Покажем, как рассчитывают такие пружины, имеющие небольшой угол α подъема витков ($\alpha \leq 15°$).

Рассмотрим цилиндрическую винтовую пружину с диаметром D винтовой оси, диаметром d проволоки и числом витков n, сжимаемую силой F (рис. 2.21).

Для определения внутренних силовых факторов применим метод сечений. Рассечем пружину плоскостью, проходящей через ось, и отбросим нижнюю часть пружины (рис. 2.22). Ввиду того что угол α подъема витков мал, будем считать сечение витка поперечным, т. е. кругом диаметра d.

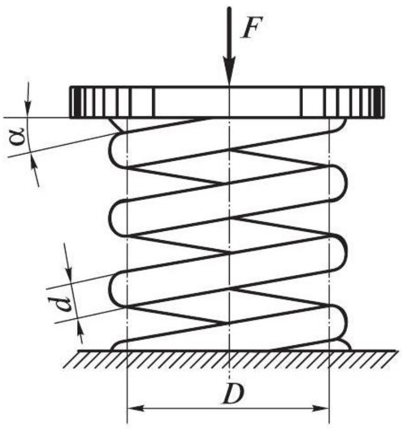

Рис. 2.21. Цилиндрическая винтовая пружина

Крутов Д. В.

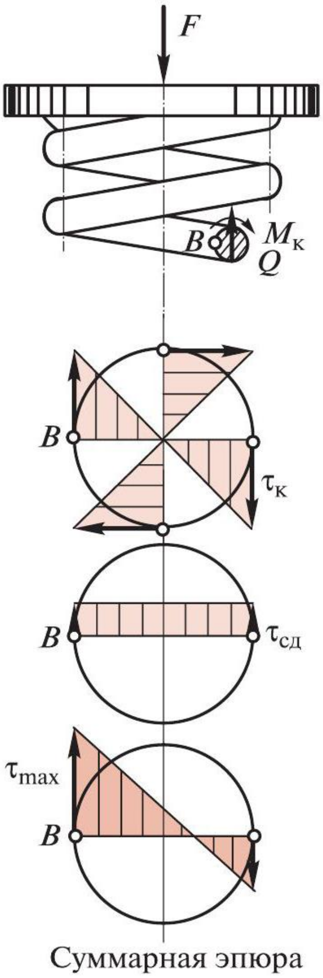

Рис. 2.22. Цилиндрическая винтовая пружина, рассеченная плоскостью

Рассматривая равновесие верхней части пружины, видим, что в поперечном сечении витка возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила $Q = F$ и крутящий момент $M_к = FD/2$. Отсюда следует, что в поперечном сечении витка действуют только касательные напряжения сдвига и кручения.

Будем считать, что напряжения сдвига распределены по сечению равномерно, а напряжения кручения определяются, как при кручении прямого кругового цилиндра. Эпюры распределения напряжений сдвига и кручения, а также эпюра суммарных напряжений в точках горизонтального диаметра сечения представлены на рис. 2.22.

Из суммарной эпюры видно, что наибольшие касательные напряжения возникают в точке B, ближайшей к оси пружины:

$$\tau_{max} = \tau_{сд} + \tau_к = \frac{Q}{A} + \frac{M_к}{W_p} = \frac{F}{\pi d^2/4} + \frac{FD/2}{\pi d^3/16};$$

$$\tau_{max} = \frac{8FD}{\pi d^3}\left(\frac{d}{2D} + 1\right).$$

Если пружина имеет относительно большой средний диаметр и изготовлена из относительно тонкой проволоки, то первое слагаемое в скобках (соответствующее напряжению сдвига) значительно меньше единицы и им можно пренебречь; тогда

$$\tau_{max} \approx \frac{8FD}{\pi d^3}.$$

Формула для приближенного расчета цилиндрических винтовых пружин имеет вид

$$\tau_{max} \approx \frac{8FD}{\pi d^3} \le [\tau].$$

Так как пружины обычно изготовляют из высококачественной стали, допускаемое напряжение берут в пределах

$$[\tau] = 200 \dots 1000 \text{ МПа}.$$

Далее выведем формулу для определения уменьшения высоты (осадки) λ пружины. Разбивая пружину на бесконечно малые участки длиной dl, которые ввиду малости длины будем считать прямолинейными, и учитывая только потенциальную энергию деформации кручения, получим:

$$П = \int_0^l \frac{M_к^2 dl}{2GI_p} = \frac{M_к^2 l}{2GI_p},$$

где $l = \pi Dn$ — длина проволоки пружины.

Крутов Д. В.

Работа силы F, приложенной к пружине статически, будет равна $W = F\lambda/2$. Так как $W = \Pi$, $M_к = FD/2$, $I_p = \pi d^4/32$, то

$$\frac{F\lambda}{2} = \frac{(FD/2)^2 \pi D n}{2G\pi d^4/32},$$

откуда

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}.$$

Эту формулу можно записать в таком виде:

$$\lambda = \frac{F}{c},$$

где $c = \dfrac{Gd^4}{8D^3 n}$ — коэффициент жесткости пружины.

При $\lambda = 1$ $c = F$, поэтому **коэффициент жесткости численно равен силе**, **вызывающей осадку**, **равную единице длины**.

Отношение среднего диаметра витков к диаметру проволоки обозначают $c_п$ и называют **индексом пружины**: $c_п = D/d$.

Обычно индекс пружины $c_п = 4 \dots 2$.