Раздел II. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Тема 2.5. Кручение

Занятие №1.

Учебные вопросы:
1. Понятие о кручении круглого цилиндра
2. Напряжения и деформации при кручении
3. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

1. Понятие о кручении круглого цилиндра

Кручением называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только **крутящий момент**.

Деформации кручения возникают, если к прямому брусу в плоскостях, перпендикулярных оси, приложить пары сил. Моменты этих пар будем называть **вращающими**, или **скручивающими**. Вращающий момент обозначается T.

Так как на кручение работают валы, обычно имеющие круглое или кольцевое сечение, то рассмотрим кручение круглого цилиндра (рис. 2.19).

Изготовим из резины (для большей наглядности) прямой круговой цилиндрический брус и жестко защемим один его конец; нанесем на его поверхности сетку линий, состоящую из образующих и окружностей, а затем приложим к свободному концу бруса пару сил, действующую в плоскости, перпендикулярной оси, т.е. подвергнем брус деформации кручения. При этом:

1) ось цилиндра, называемая **осью кручения**, останется прямолинейной;

2) диаметры окружностей, нанесенных на поверхности цилиндра до деформации, при деформации останутся такими же, и расстояние между окружностями не изменится;

3) образующие цилиндра обратятся в винтовые линии.

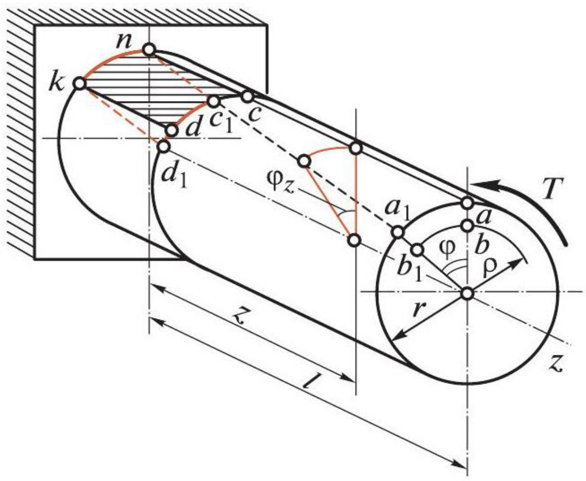

Рис. 2.19. Валы, имеющий круглое сечение

Из этого можно заключить, что при кручении круглого цилиндра справедлива гипотеза плоских сечений, а также предположить, что радиусы окружностей остаются при деформации прямыми. Так как в поперечных сечениях бруса нет продольных сил, то расстояния между сечениями не изменяются.

Из сказанного выше следует, что деформация кручения круглого цилиндра заключается в повороте поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси кручения, причем углы поворота их прямо пропорциональны расстояниям от закрепленного сечения. Угол поворота сечения равен углу закручивания части цилиндра, заключенной между данным сечением и заделкой. Угол φ поворота концевого сечения называется **полным углом закручивания цилиндра**.

Относительным углом закручивания φ_o называется отношение угла закручивания φ_z к расстоянию z от данного сечения до заделки. Если брус длиной l имеет постоянное сечение и нагружен скручивающим моментом на конце (т.е. состоит из одного участка), то

$$\varphi_o = \frac{\varphi_z}{z} = \frac{\varphi}{l} = \text{const}.$$

Крутов Д. В.

Рассматривая тонкий слой материала на поверхности бруса, ограниченный любой ячейкой сетки (например, ячейкой $kncd$ на рис. 2.19), видим, что эта ячейка при деформации перекашивается, принимая положение knc_1d_1.

Аналогичную картину мы наблюдали при изучении деформации сдвига.

На этом основании заключаем, что при кручении также возникает деформация сдвига, но не за счет поступательного, а в результате вращательного движения одного поперечного сечения относительно другого. Следовательно, при кручении в поперечных сечениях возникают только **касательные внутренние силы**, образующие крутящий момент.

Крутящий момент есть результирующий момент относительно оси бруса внутренних касательных сил, действующих в поперечном сечении. Для наглядного изображения распределения крутящих моментов вдоль оси бруса строят **эпюры крутящих моментов**.

Крутящий момент в сечениях бруса определяется с помощью метода сечений. Так как равномерно вращающийся вал, как и неподвижный брус, находится в равновесии, то очевидно, что внутренние силы, возникающие в поперечном сечении, должны уравновешивать внешние моменты, действующие на рассматриваемую часть бруса. Отсюда следует, что **крутящий момент в любом поперечном сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов**, **приложенных к брусу справа или слева от сечения**.

Эпюры крутящих моментов дают возможность определить опасное сечение. В частности, если брус имеет постоянное поперечное сечение, то опасными будут сечения на участке, где возникает наибольший крутящий момент.

Крутящий момент полагаем **положительным**, если при взгляде со стороны сечения результирующий момент внешних пар, приложенных к рассматриваемой части бруса, будет направлен против часовой стрелки, и наоборот.

Пользуясь принципом смягченных граничных условий, будем полагать, что в поперечном сечении, где приложен вращающий момент, значения крутящего момента меняются скачкообразно.

2. Напряжения и деформации при кручении

Представим себе, что прямой круговой цилиндр, подвергаемый деформации кручения, состоит из бесконечно большого количества волокон, параллельных оси. Полагаем, что при кручении справедлива гипотеза о ненадавливании волокон.

Зная, что при кручении происходит деформация сдвига, естественно считать, что в точках поперечного сечения бруса возникают только касательные напряжения τ, перпендикулярные радиусу, соединяющему эти точки с осью кручения. Существование нормальных напряжений в продольном сечении исключено, так как справедлива гипотеза о ненадавливании волокон; нормальные напряжения в поперечном сечении не возникают, так как нет продольной силы.

На рис. 2.19 видно, что абсолютный сдвиг сечения волокна a равен дуге aa_1, а сечения волокна b — дуге bb_1:

$$\cup\, bb_1 = \rho\varphi;\ \ \cup\, aa_1 = r\varphi,$$

где ρ — расстояние от волокна b до оси кручения;
φ — полный угол закручивания, рад;
r — радиус цилиндра.

Так как радиусы сечения при кручении остаются прямыми, то величина абсолютного сдвига сечения волокон прямо пропорциональна их расстоянию от оси кручения.

Относительный сдвиг сечения волокна $b\gamma_\rho = \rho\varphi/l = \varphi_o\rho$.

Применим формулу закона Гука при сдвиге: $\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\varphi_o\rho$.

При $\rho = 0$ $\tau = 0$, т.е. на оси кручения касательные напряжения равны нулю.

При $\rho = r$ $\tau = \tau_{\max}$, т.е. касательные напряжения достигают **максимального значения** у волокон, наиболее удаленных от оси кручения:

$$\tau_{\max} = G\varphi_o\rho.$$

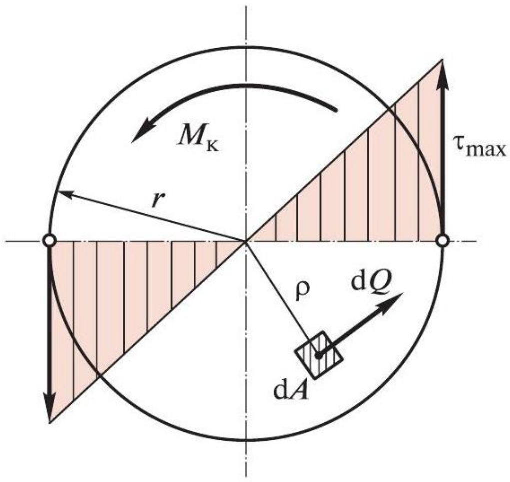

Рис. 2.19. Эпюра распределения напряжений вдоль радиуса сечения

Так как относительный угол закручивания φ_o есть величина постоянная для данного цилиндрического бруса, то касательные напряжения при кручении прямо пропорциональны расстоянию от точек сечения до оси кручения. Эпюра распределения напряжений вдоль радиуса сечения имеет вид треугольника (рис. 2.20).

Если брус состоит из одного участка, т.е. имеет постоянное сечение и постоянный по длине участка крутящий момент, то касательные напряжения в данном волокне будут по всей длине цилиндра одинаковы.

Перейдем к выводу формул для определения угла закручивания и напряжений в поперечном сечении в зависимости от крутящего момента.

Рассечем брус, изображенный на рис. 2.19, поперечной плоскостью, находящейся на расстоянии z от заделки, и рассмотрим полученное сечение (см. рис. 2.20). Выделим в сечении бесконечно малую площадку $\mathrm{d}A$ на расстоянии ρ от оси кручения. Сила $\mathrm{d}Q$, действующая на эту площадку, перпендикулярна радиусу и равна

$$\mathrm{d}Q = \tau_\rho \mathrm{d}A$$

Определим момент внутренних сил относительно оси кручения, т.е. крутящий момент

$$M_к = \int_A \mathrm{d}Q\rho = \int_A \tau_\rho \mathrm{d}A\rho = \int_A G\varphi_o\rho \mathrm{d}A = G\varphi_o \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = G\varphi_o I_p,$$

откуда найдем относительный угол закручивания

$$\varphi_o = \frac{M_к}{GI_p}.$$

Полный угол закручивания φ, рад, цилиндра длиной l:

$$\varphi = \frac{M_к l}{GI_p}.$$

Произведение GI_p называется **жесткостью сечения при кручении**.

Итак, мы установили, что полный угол закручивания круглого цилиндра прямо пропорционален крутящему моменту, длине цилиндра и обратно пропорционален жесткости сечения при кручении. Так как при выводе последней формулы мы применяли закон Гука, она справедлива в пределах, когда нагрузка и деформация прямо пропорциональны.

Для цилиндрического бруса, имеющего несколько участков, отличающихся материалом, размерами поперечного сечения, значением крутящего момента, полный угол закручивания равен алгебраической сумме углов закручивания отдельных участков:

$$\varphi = \sum\varphi_i.$$

Выведем формулу для определения напряжений:

$$\tau_\rho = G\varphi_o\rho = \frac{GM_\text{к}\rho}{GI_p} = \frac{M_\text{к}\rho}{I_p}.$$

При $\rho = r$ напряжения достигнут максимального значения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_\text{к}r}{I_p} = \frac{M_\text{к}}{I_p/r} = \frac{M_\text{к}}{W_p}.$$

где $W_p = I_p/r$ — момент сопротивления сечения кручению (или полярный момент сопротивления).

Момент сопротивления сечения кручению равен отношению полярного момента инерции к радиусу сечения.

Размерность момента сопротивления кручению

$$[W_p] = \frac{[I_p]}{[r]} = \text{м}^3.$$

Итак, напряжения и деформации при кручении круглого цилиндра определяют по формулам

$$\tau_{\max} = \frac{M_\text{к}}{W_p}; \quad \varphi = \frac{M_\text{к}l}{GI_p}.$$

Обратим внимание на то, что эти формулы по структуре аналогичны формулам для определения напряжений и деформаций при растяжении, сжатии и применимы лишь для участков бруса, имеющих одинаковый материал, постоянные поперечное сечение и крутящий момент.

По закону парности касательных напряжений, последние возникают не только в поперечных, но и в продольных сечениях, поэтому, например, в деревянных брусьях при кручении возникают трещины вдоль волокон (древесина плохо работает на скалывание вдоль волокон).

Из эпюры распределения касательных напряжений при кручении видно, что внутренние волокна бруса испытывают небольшие напряжения, поэтому валы иногда делают пустотелыми, чем достигается значительный выигрыш в массе при незначительной потере прочности.

Определим момент сопротивления кручению для круглого и кольцевого сечений.

1. **Круг диаметром d**:

$$W_p = \frac{I_p}{0{,}5d} = \frac{\pi d^4}{32 \cdot 0{,}5d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2d^3.$$

2. **Кольцо размером $D \times d$**:

$$W_p = \frac{I_p}{0{,}5D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32 \cdot 0{,}5D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \approx 0{,}2\frac{(D^4 - d^4)}{D}.$$

Отметим, что если полярный момент инерции кольцевого сечения можно определить как разность моментов инерции большого и малого кругов, то момент сопротивления кручению **нельзя определять** как разность моментов сопротивлений этих кругов.

3. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Условие **прочности** бруса при кручении заключается в том, что наибольшее возникающее в нем касательное напряжение не должно превышать допускаемое. Расчетная формула на прочность при кручении имеет вид

$$\tau = M_{\text{к}}/W_p < [\tau_{\text{к}}]$$

и читается так: **касательное напряжение в опасном сечении**, **определенное по формуле $\boldsymbol{\tau = M_{\text{к}}/W_p}$, не должно превышать допускаемое**.

Допускаемое напряжение при кручении выбирают в зависимости от допускаемого напряжения при растяжении:

для сталей

$$[\tau_{\text{к}}] = (0{,}55 \dots 0{,}6)[\sigma_{\text{р}}];$$

для чугунов

$$[\tau_{\text{к}}] = (1 \dots 1{,}2)[\sigma_{\text{р}}].$$

Кроме требования прочности к валам предъявляется требование **жесткости**, заключающееся в том, что угол закручивания 1 м длины вала не должен превышать определенной величины во избежание, например, пружинения валов.

Допускаемый угол закручивания 1 м длины вала задается в градусах и обозначается $[\varphi_{\text{о}}°]$. Расчетная формула на жесткость при кручении имеет вид

$$\varphi_{\text{о}}° = \frac{180°}{\pi}\frac{M_{\text{к}}}{GI_p} \le [\varphi_{\text{о}}°].$$

Величины допускаемых углов закручивания зависят от назначения вала; их обычно принимают в пределах: $[\varphi_{\text{о}}°] = 0{,}25 \dots 1\ °/\text{м}$.

С помощью полученных расчетных формул выполняют три вида расчетов конструкций на прочность и жесткость при кручении — проектный, проверочный и определение допускаемой нагрузки.