Раздел II. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Тема 2.4. Геометрические характеристики плоских сечений

Занятие №1.

Учебные вопросы:
1. Статический момент площади
2. Полярный момент инерции
3. Осевой момент инерции
4. Момент инерции при параллельном переносе осей
5. Главные оси и главные моменты инерции

1. Статический момент площади

При некоторых деформациях прочность деталей зависит не только от площади поперечного сечения, но и от его формы. До сих пор мы изучали деформации, у которых напряжения зависели только от площади поперечного сечения. В дальнейшем для изучения деформаций кручения и изгиба нам потребуется знание некоторых других геометрических характеристик плоских фигур.

Статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния от них до этой оси (рис. 2.15).

Статический момент площади обозначим S с индексом соответствующей оси:

$$S_x = \int_A y\mathrm{d}A;\ \ S_y = \int_A x\mathrm{d}A.$$

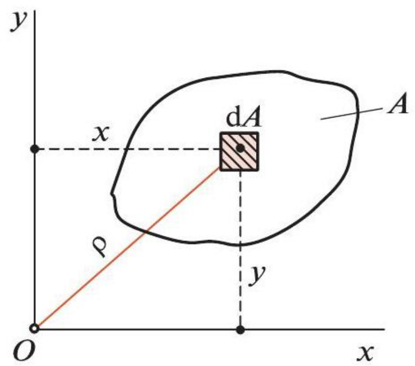

Рис. 2.15. Пример статического момента

В теоретической механике были выведены формулы для определения координат центра тяжести площади фигуры:

$$x_C = \frac{\sum(A_i x_i)}{\sum A_i};\ \ y_C = \frac{\sum(A_i y_i)}{\sum A_i}.$$

Так как в этих формулах под A_i можно понимать площадь $\mathrm{d}A$ элементарной площадки, то в пределе при $\mathrm{d}A$, стремящемся к нулю, выражения, стоящие в числителях правых частей формул, будут представлять собой статические моменты площади фигуры относительно осей y и x, а $\sum A_i$ есть площадь A всей фигуры. Следовательно,

$$S_x = \int_A y\mathrm{d}A = y_C A;\ \ S_y = \int_A x\mathrm{d}A = x_C A.$$

Статический момент площади фигуры относительно оси, лежащей в этой же плоскости, равен произведению площади фигуры на расстояние от ее центра тяжести до этой оси.

Размерность статического момента площади

$$[S] = [x_C][A] = \text{м} \cdot \text{м}^2 = \text{м}^3.$$

Крутов Д. В.

Статический момент площади фигуры может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю.

Очевидно, что статический момент площади относительно оси, проходящей через центр тяжести площади фигуры (центральной оси), в том числе относительно оси симметрии фигуры, **равен нулю**.

В теоретической механике установлено также, что в формулах для определения координат центра тяжести площади под A_i можно понимать площади конечных частей фигуры, а под x_i и y_i — координаты центров тяжести этих частей (т.е. применять метод разбиения). Отсюда следует, что при определении статического момента площади сложной фигуры также можно применять метод разбиения, т.е. **определять статический момент всей фигуры как алгебраическую сумму статических моментов отдельных ее частей**:

$$S = \sum S_i,$$

где S_i — статический момент площади каждой части фигуры.

Понятие о статическом моменте площади понадобится нам в дальнейшем для определения положения центров тяжести сечений и при определении касательных напряжений при изгибе.

2. Полярный момент инерции

Полярным моментом инерции плоской фигуры относительно полюса, лежащего в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до полюса (см. рис. 2.15).

Полярный момент инерции обозначим

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A.$$

Размерность полярного момента инерции

$$[I_p] = [\rho^2][A] = \text{м}^2 \cdot \text{м}^2 = \text{м}^4.$$

Полярный момент инерции — **величина всегда положительная и не равная нулю**.

Так как понятие полярного момента инерции понадобится нам при изучении деформаций кручения круглых валов, то выведем формулы для определения полярных моментов инерции круглого сплошного и кольцевого сечений, принимая за полюс центры этих фигур.

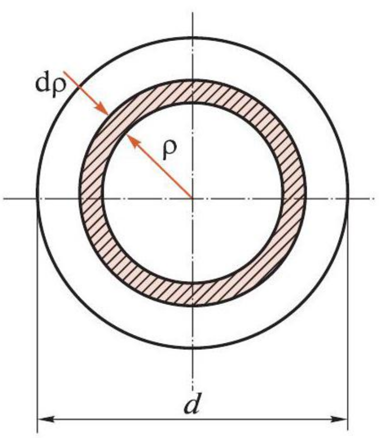

Рис. 2.16. Круг диаметром d

1. **Круг диаметром d** (рис. 2.16).

Выделим бесконечно малую площадку $\mathrm{d}A$ в виде кольца шириной $\mathrm{d}\rho$, находящегося на расстоянии ρ от полюса (ρ — переменная величина). Тогда $\mathrm{d}A = 2\pi\rho\mathrm{d}\rho$. Определим полярный момент инерции:

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_0^{d/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 \mathrm{d}\rho = \frac{\pi d^4}{32};$$

Крутов Д. В.

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1 d^4.$$

2. **Кольцо размером $\boldsymbol{D \times d}$**:

$$I_p = \int\limits_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int\limits_{d/2}^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho \mathrm{d}\rho = 2\pi \int\limits_{d/2}^{D/2} \rho^3 \mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4);$$

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \approx 0{,}1(D^4 - d^4).$$

Полярный момент инерции кольцевого сечения можно вычислить как разность полярных моментов инерции большого и малого кругов.

3. Осевой момент инерции

Осевым моментом инерции плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат расстояний от них до этой оси (см. рис. 2.16).

Осевой момент инерции обозначим I с индексом, соответствующим оси:

$$I_x = \int\limits_A y^2 \mathrm{d}A; \quad I_y = \int\limits_A x^2 \mathrm{d}A.$$

Очевидно, что осевой и полярный моменты инерции имеют одинаковую размерность:

$$[I] = \text{м}^4.$$

Осевой момент инерции — **величина всегда положительная и не равная нулю**.

Сложим моменты инерции относительно двух взаимно-перпендикулярных осей x и y (см. рис. 2.16):

$$I_x + I_y = \int\limits_A y^2 \mathrm{d}A + \int\limits_A x^2 \mathrm{d}A = \int\limits_A (y^2 + x^2) \mathrm{d}A = \int\limits_A \rho^2 \mathrm{d}A = I_p;$$

$$I_x + I_y = I_p.$$

Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно-перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат.

Так как интеграл суммы равен сумме интегралов, то **момент инерции сложной фигуры можно вычислять как сумму моментов инерции простых фигур**, на которые разбивают сложную фигуру.

Вычислим осевые моменты инерции некоторых простых фигур.

1. **Прямоугольник размером $\boldsymbol{b \times h}$** (рис. 2.17):

Бесконечно малую площадку $\mathrm{d}A$ выделим в виде полоски шириной b и высотой $\mathrm{d}y$, тогда $\mathrm{d}A = b\mathrm{d}y$:

$$I_x = \int\limits_A y^2 \mathrm{d}A = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} y^2 b \mathrm{d}y = b \int\limits_{-h/2}^{+h/2} y^2 \mathrm{d}y = \frac{bh^3}{12};$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Для квадрата со стороной a — $I_x = a/12$.

2. **Круг диаметром d относительно осей x и y:**

В силу симметрии для круга $I_x = I_y$. Так как $I_x + I_y = I_p = \pi d^4/32$, то

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi}{64} d^4 \approx 0{,}05\, d^4.$$

3. **Кольцо размером $D \times d$ относительно осей x и y:**

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \approx 0{,}05\,(D^4 - d^4).$$

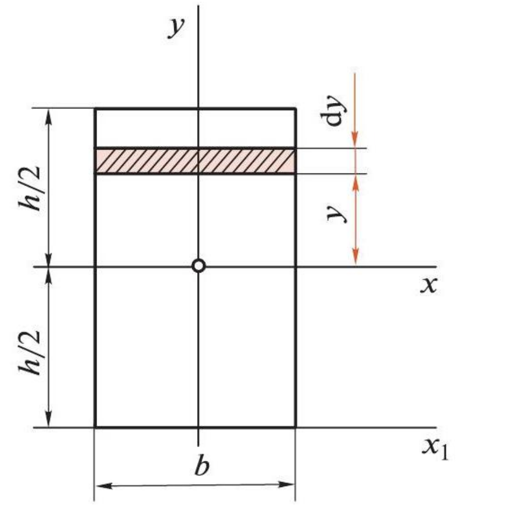

Рис. 2.17. Прямоугольник размером $b \times h$

4. Момент инерции при параллельном переносе осей

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются **центральными**. Момент инерции относительно центральной оси называется **центральным моментом инерции**.

Теорема.

Момент инерции относительно какой-либо оси равен сумме момента инерции относительно центральной оси, параллельной данной, и произведения площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

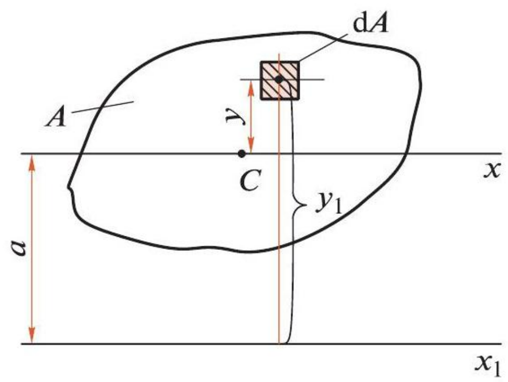

Рис. 2.18. Рисунок к доказательству теоремы момента инерции

Пусть дана произвольная плоская фигура, площадь которой A, центр тяжести расположен в точке C, а центральный момент инерции относительно оси x будет I_x. Вычислим момент инерции фигуры относительно оси x_1 параллельной центральной и отстоящей от нее на расстоянии a (рис. 2.18):

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 \mathrm{d}A + \int_A (y + a)^2 \mathrm{d}A,$$

откуда

$$I_{x_1} = \int_A y^2 \mathrm{d}A + 2a \int_A y \mathrm{d}A + a^2 \int_A \mathrm{d}A.$$

Первое слагаемое есть момент инерции фигуры относительно оси x, т.е. I_x; второе слагаемое содержит статический момент площади относительно оси x, а он равен нулю, так как ось x — центральная; третье слагаемое после интегрирования будет равно $a^2 A$. В результате получим

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A;$$

теорема доказана.

Нужно помнить то обстоятельство, что последней формулой можно пользоваться только в тех случаях, когда одна из параллельных осей — центральная.

Анализируя полученную формулу, можно сделать вывод, **что из множества параллельных осей момент инерции будет наименьшим относительно центральной оси**.

Пользуясь доказанной теоремой, выведем формулу для вычисления момента инерции прямоугольника относительно оси x_1 проходящей через основание (см. рис. 2.17):

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A = \frac{bh^2}{12} + \frac{h^2 bh}{4} = \frac{bh^3}{3}.$$

5. Главные оси и главные моменты инерции

Представим себе плоскую фигуру, моменты инерции которой относительно осей координат равны I_x и I_y а полярный момент инерции относительно начала координат равен I_p. Как было установлено ранее,

$$I_x + I_y = I_p.$$

Если оси координат поворачивать в своей плоскости вокруг начала координат, то полярный момент инерции останется неизменным, а осевые моменты инерции будут изменяться, причем

$$I_x + I_y = \text{const}.$$

Если сумма двух переменных величин остается постоянной, то одна из них уменьшается, а другая увеличивается. Следовательно, при каком-то положении осей один из осевых моментов достигает максимального, а другой — минимального значения.

Оси, относительно которых моменты инерции имеют максимальное и минимальное значения, называются **главными осями инерции**.

Момент инерции относительной главной оси называется **главным моментом инерции**.

Если главная ось проходит через центр тяжести фигуры, то она называется **главной центральной осью**, а момент инерции относительно этой оси — **главным центральным моментом инерции**.

Особо важным является то обстоятельство, что если фигура имеет ось симметрии, то эта ось всегда будет одной из главных центральных осей.

Введем еще одну геометрическую характеристику плоского сечения.

Центробежным моментом инерции плоской фигуры называется взятая по всей площади фигуры сумма произведений элементарных площадок на произведение расстояний этих площадок до двух данных взаимно-перпендикулярных осей:

$$I_{xy} = \int\limits_A xy\,\mathrm{d}A,$$

где x, y — расстояния от площадки $\mathrm{d}A$ до осей y и x.

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и в частном случае равным нулю. Если взаимно-перпендикулярные оси x и y или одна из них являются осью симметрии плоской фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю. Центробежный момент инерции входит в формулы для определения положения главных осей несимметричных сечений.

В таблицах стандартов на профили прокатных сталей содержится геометрическая характеристика, которая называется **радиусом инерции сечения**. Она используется при изучении внецентренного растяжения или сжатия, а также продольного изгиба и вычисляется по формулам

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

где I_x, I_y — осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей;
A — площадь сечения.

Крутов Д. В.