Раздел I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 2. Кинематика

Тема 1.9. Кинематика точки

Занятие №1.

Учебные вопросы:
1. Основные понятия кинематики и некоторые сведения из теории относительности
2. Способы задания движения точки
3. Скорость и ускорение точки
4. Теоремы о проекции ускорения на касательную и нормаль, скорости и ускорения на оси координат

1. Основные понятия кинематики и некоторые сведения из теории относительности

Кинематика — часть теоретической механики, в которой изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

Когда в механике говорят о движении тела, то подразумевают под этим изменение с течением времени его положения в пространстве по отношению к другим телам. Обычно с телом, по отношению к которому изучают движение, связывают какую-нибудь систему координат, которую вместе с выбранным способом измерения времени называют **системой отсчета**. Если координаты всех точек тела в выбранной системе отсчета остаются все время неизменными, то тело находится в покое. Если рассматривается движение тела по отношению к условно неподвижной системе отсчета, то движение называют **абсолютным**; движение тела по отношению к подвижной системе отсчета называют **относительным**. В мире все находится в непрерывном движении, поэтому все движения являются относительными, однако условно можно представить себе и абсолютное движение, например движение по отношению к Земле.

Итак, движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство и время, как и движение, согласно учению диалектического материализма, суть формы существования материи.

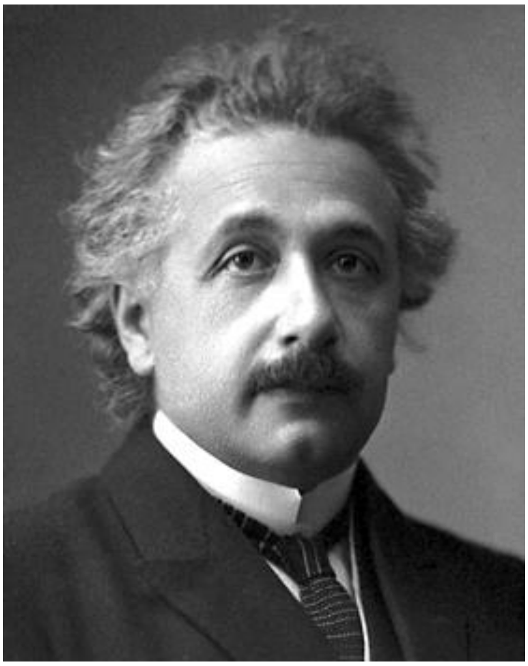

Рис. 1.52. Альберт Эйнштейн (1921 г.)

Классическая механика полагает, что пространство и время имеют абсолютный, независимый друг от друга характер и что их свойства не зависят от распределения и движения материи.

К началу XX в. значительно расширились познания людей о свойствах материи, в результате чего возникли новые представления о формах существования материи, а в 1905—1916 гг. А. Эйнштейном была создана теория относительности.

Альберт Эйнштейн (14 марта 1879 —18 апреля 1955) — физик-теоретик, один из основателей современной теоретической физики, лауреат Нобелевской премии по физике 1921 года, общественный деятель-гуманист.

Почётный доктор около 20 ведущих университетов мира, член многих Академий наук, в том числе иностранный почётный член АН СССР (1926).

А. Эйнштейн — автор более 300 научных работ по физике, а также около 150 книг и статей в области истории и философии науки, публицистики и других. Он разработал несколько монументальных физических теорий:

- Специальная теория относительности (1905).
- В её рамках — закон взаимосвязи массы и энергии:
- Общая теория относительности (1907—1916).
- Квантовая теория фотоэффекта.
- Квантовая теория теплоёмкости.
- Квантовая статистика Бозе—Эйнштейна.
- Статистическая теория броуновского движения, заложившая основы теории флуктуаций.
- Теория индуцированного излучения.
- Теория рассеяния света на термодинамических флуктуациях в среде.

Он также предсказал гравитационные волны и «квантовую телепортацию», предсказал и измерил гиромагнитный эффект Эйнштейна—де Хааза. С 1933 года работал над проблемами космологии и единой теории поля. Активно выступал против войны, против применения ядерного оружия, за гуманизм, уважение прав человека, взаимопонимание между народами.

Эйнштейну принадлежит решающая роль в популяризации и введении в научный оборот новых физических концепций и теорий. В первую очередь это относится к пересмотру понимания физической сущности пространства и времени и к построению новой теории гравитации взамен ньютоновской. Эйнштейн также, вместе с Планком, заложил основы квантовой теории. Эти концепции, многократно подтверждённые экспериментами, образуют фундамент современной физики.

Теория относительности — это современная физическая теория пространства и времени; с ней тесно связаны такие понятия, как движение, масса, энергия и др. В основу теории относительности положен принцип постоянства скорости света, согласно которому скорость света в вакууме постоянна и не зависит от скорости источника света. Теория относительности, к настоящему времени подтвержденная громадным количеством опытных фактов и применяющаяся на практике, устанавливает, что пространство и время связаны между собой в единую пространственно-временную форму существования материи, имеющую абсолютный характер, не зависящую от системы отсчета; пространство и время в отдельности являются понятиями относительными, зависящими от системы отсчета, например от скорости ее движения.

Таким образом, в теории относительности понятия длины тела и промежутка времени являются понятиями относительными, зависящими от скорости движения тела. Эти зависимости выражаются следующими формулами:

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}; t = t_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где l — продольный размер движущегося тела;
l_0 — продольный размер покоящегося тела;
v — скорость движения тела;
c — скорость света в вакууме (300000 км/с);
t — промежуток времени при движении по земным часам;
t_0 — промежуток времени в покое.

Итак, у движущегося тела продольные размеры сокращаются, а промежутки времени между двумя событиями удлиняются, т.е. происходит замедление времени.

Из теории относительности следует, что на Земле и на космической ракете время течет по-разному, т.е. ход любых часов и протекание любых биологических процессов на ракете происходит медленнее, чем на Земле.

В 1958 г. немецкий физик Р. Л. Мёссбауэр открыл способ изготовления «ядерных часов», отмеряющих время с погрешностью 10^{-12} с. В 1964 г. профессор А. Туликов (МГУ) открыл новое физическое явление, названное «эффект теней». Если до этого открытия экспериментаторы умели измерять время с погрешностью от 10^{-12} до 10^{-13} с, то с помощью «эффекта теней» можно измерять время с погрешностью до 10^{-18} с. Опыты показали, что при быстром движении ход «ядерных часов» несколько замедляется.

Несмотря на возникновение теории относительности, классическая механика не потеряла своего значения, так как при скоростях движения, далеких от скорости света, результаты, даваемые классической механикой, мало отличаются от результатов механики теории относительности и вполне пригодны для практики. Классическая механика является частным (предельным) случаем механики теории относительности.

2. Способы задания движения точки

Знание законов движения тела означает знание законов движения каждой его точки, поэтому изучение кинематики начнем с изучения движения геометрической точки.

Траекторией точки называется множество (геометрическое место) положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета.

В зависимости от формы траектории движение точки бывает двух видов: **прямолинейное** и **криволинейное**. Рассмотрим два способа задания движения точки: естественный и координатный.

Естественный способ заключается в том, что движение точки задается ее траекторией, началом отсчета и уравнением движения по этой траектории (законом движения).

Уравнение движения в общем виде записывается следующим образом:

$$s = f(t),$$

где s — расстояние точки от начального положения, являющееся функцией времени;
t — время движения точки от начального момента.

Зная траекторию точки и уравнение движения по этой траектории, можно определить положение точки в любой момент времени, для чего следует в равенство $s = f(t)$ подставить время.

При своем движении точка проходит некоторый путь, также являющийся функцией времени. Следует подчеркнуть, что путь, пройденный точкой, совпадает с расстоянием от начала отсчета лишь тогда, когда точка все время движется в одном направлении и начало ее движения совпадает с началом отсчета.

Координатный способ заключается в том, что движение точки задается движением ее проекций вдоль осей координат.

Уравнения плоского движения точки в координатной форме записываются следующим образом:

$$x = f(t); y = f_1(t).$$

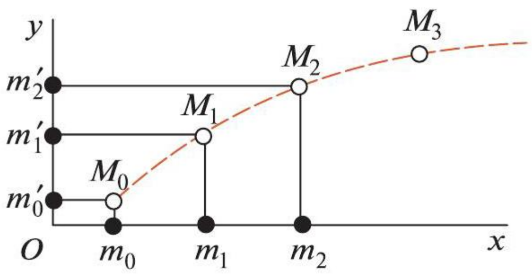

Рис. 1.53. Координатный способ задания движения точки

Зная уравнения движения точки в координатной форме, можно, подставив в эти уравнения время, определить положение проекций точки, а следовательно, и самой точки в любой момент времени (рис. 1.53).

Для того чтобы при координатном способе задания движения точки определить уравнение траектории $y = f(t)$, необходимо из уравнений движения исключить время.

Международная система единиц (СИ) устанавливает в качестве единицы длины **метр** (м), а в качестве единицы времени — **секунду** (с).

3. Скорость и ускорение точки

Скорость есть кинематическая мера движения точки, характеризующая быстроту изменения ее положения.

Как известно из физики, при равномерном движении скорость измеряется длиной пути, пройденного за единицу времени:

$$v = \frac{s}{t} = \mathrm{const}.$$

(предполагается, что начала отсчета пути и времени совпадают).

Размерность скорости

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{длина}}{\text{время}} = \text{метр в секунду} = \text{м/с}.$$

Скорость есть величина векторная. При прямолинейном равномерном движении скорость постоянна и по модулю, и по направлению, а вектор ее совпадает с траекторией (рис. 1.54).

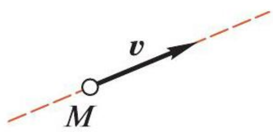

Рис. 1.54. Прямолинейное равномерное движение точки

При криволинейном движении скорость точки по направлению меняется. Для того чтобы установить направление вектора скорости при криволинейном движении, разобьем траекторию на бесконечно малые участки пути, которые можно считать вследствие их малости прямолинейными. Тогда на каждом участке условная скорость $v_п$ такого прямолинейного движения будет направлена по хорде. В пределе при Δs, стремящемся к нулю, хорда совпадает с касательной, следовательно, **скорость в каждый момент времени направлена по касательной к траектории в сторону движения** (рис. 1.55).

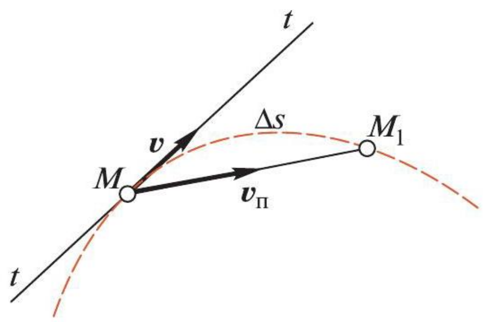

Рис. 1.55. Криволинейное движение точки

При неравномерном движении точки модуль ее скорости меняется. Представим себе точку, движение которой задано естественным способом уравнением

$$s = f(t).$$

Если за небольшой промежуток времени Δt точка прошла путь Δs, то ее средняя скорость равна

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Средняя скорость не дает представления об истинной скорости в каждый данный момент времени (истинную скорость иначе называют мгновенной). Чем меньше промежуток времени, за который определяется средняя скорость, тем ближе она к истинной.

Истинная скорость есть предел, к которому стремится средняя скорость при Δt, стремящемся к нулю:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Таким образом, числовое значение скорости равно

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Истинная скорость при любом движении точки равна первой производной координаты (т.е. расстояния от начала отсчета перемещения) **по времени**.

Движение, в котором скорость с течением времени возрастает, называют **ускоренным**; движение, в котором скорость с течением времени уменьшается, — **замедленным**.

Пусть точка из положения M, двигаясь неравномерно, за время Δt перешла в положение M_1 (см. рис. 1.55). Дугу MM_1 обозначим Δs. Отрезок MM_1 назовем вектором перемещения точки M. Допустим, что точка M перешла за время Δt в положение M_1 двигаясь по хорде и притом равномерно, тогда скорость такого прямолинейного движения будет

$$v_{\text{п}} = \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

Перейдем к пределу, умножив предварительно числитель и знаменатель правой части на Δs, и представим предел произведения как произведение пределов:

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{п}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM_1}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Так как при Δt, стремящемся к нулю, Δs также стремится к нулю, то первый предел (предел отношения хорды к соответствующей дуге) равен единице. Второй предел дает первую производную пути по времени, т.е. истинную скорость, причем вектор $v_{\text{п}}$ в пределе будет направлен по касательной, т.е. совпадет с вектором истинной скорости v. Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{п}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = v.$$

Следовательно, **предел вектора условной скорости** $v_{\text{п}}$, равный пределу отношения вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени, когда последний стремится к нулю, равен вектору истинной скорости точки.

Ускорение есть кинематическая мера изменения вектора скорости точки.

Ускорение есть величина векторная. При прямолинейном движении точки вектор скорости всегда совпадает с траекторией и поэтому вектор изменения скорости также совпадает с траекторией.

Из курса физики известно, что ускорение представляет собой изменение скорости в единицу времени. Если за небольшой промежуток времени Δt скорость точки изменилась на Δv, то среднее ускорение

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Среднее ускорение не дает представления об истинном ускорении в каждый данный момент времени (истинное ускорение иначе называют мгновенным). Чем меньше промежуток времени, за который определяют среднее ускорение, тем ближе оно к истинному. Истинное ускорение есть предел, к которому стремится среднее ускорение при Δt, стремящемся к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Таким образом, учитывая, что $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, получаем

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}.$$

Истинное ускорение в прямолинейном движении равно первой производной скорости или второй производной координаты (расстояния от начала отсчета перемещения) **по времени**.

Размерность ускорения

$$[a] = \frac{[s]}{[t]^2} = \frac{\text{длина}}{\text{время в квадрате}} = \text{метр на секунду в квадрате} = \text{м/с}^2.$$

При движении точки по криволинейной траектории скорость меняет свое направление. Представим себе точку M, которая за время Δt, двигаясь по криволинейной траектории, переместилась в положение M_1 (рис. 1.56).

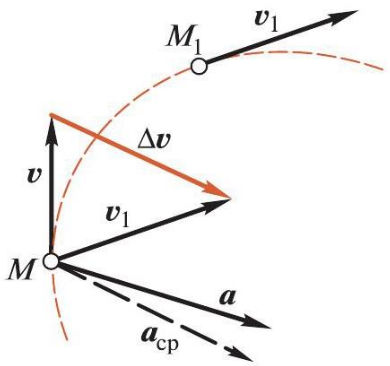

Рис. 1.56. Движении точки по криволинейной траектории

Вектор приращения (изменения) скорости обозначим Δv, тогда

$$\Delta v = v_1 - v.$$

Для нахождения вектора Δv перенесем вектор v_1 в точку M и построим треугольник скоростей. Определим вектор среднего ускорения:

$$a_{ср} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Вектор $a_{ср}$ параллелен вектору Δv, так как от деления векторной величины на скалярную направление вектора не меняется.

Вектор истинного ускорения есть предел, к которому стремится отношение вектора приращения скорости к соответствующему промежутку времени, когда последний стремится к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Таким образом, **истинное ускорение точки в криволинейном движении равно векторной производной скорости по времени**. Из рис. 1.56 видно, что вектор ускорения в криволинейном движении всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

4. Теоремы о проекции ускорения на касательную и нормаль, скорости и ускорения на оси координат

Проекция полного ускорения на нормаль к траектории называется **нормальным ускорением**; проекция полного ускорения на касательную к траектории называется **касательным ускорением**. Касательное ускорение иногда называют тангенциальным (рис. 1.57).

Теорема

Нормальное ускорение равно квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке, касательное ускорение — первой производной скорости по времени.

Крутов Д. В.

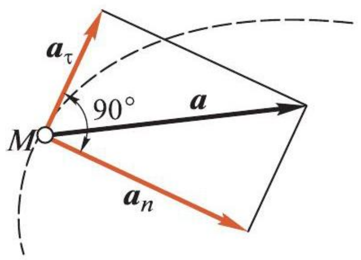

Рис. 1.57. Нормальное и касательное ускорения

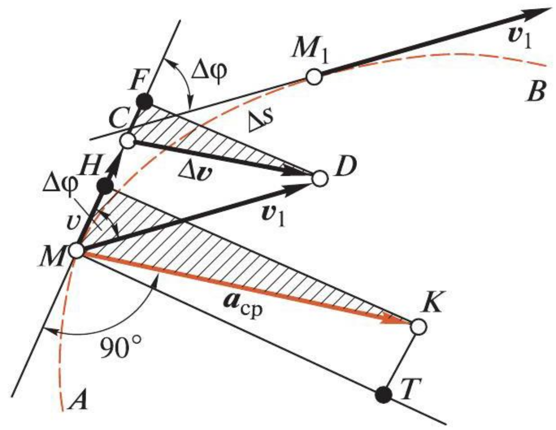

Рис. 1.58. Рисунок к доказательству теоремы

Пусть задано плоское движение точки M по траектории AB (рис. 1.58). За время Δt точка перешла из положения M в положение M_1, пройдя при этом путь $\Delta s = \cup\, MM_1$.

Вектор приращения скорости за время Δt равен

$$\Delta v = v_1 - v.$$

Определим вектор среднего ускорения:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

отложим этот вектор из точки M параллельно вектору Δv.

Спроецируем вектор $a_{\text{ср}}$ на касательную и нормаль, точку D так же спроецируем на касательную.

Рассмотрим подобные треугольники CDF и MKH.

Из подобия этих треугольников имеем

$$\frac{HK}{FD} = \frac{MH}{CF} = \frac{a_{\text{ср}}}{\Delta v} = \frac{\Delta v}{\Delta t \Delta v} = \frac{1}{\Delta t},$$

откуда

$$HK = \frac{FD}{\Delta t};\; MH = \frac{CF}{\Delta t}.$$

Перейдем к пределу при Δt, стремящемся к нулю (при этом $\Delta\varphi$ и Δs также стремятся к нулю):

$$\lim_{\Delta t \to 0} HK = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{FD}{\Delta t} = a_n \quad \text{(нормальное ускорение);}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} MH = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{CF}{\Delta t} = a_\tau \quad \text{(касательное ускорение).}$$