Раздел I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 1. СТАТИКА

Тема 1.8. Центр тяжести

Занятие №1.

Учебные вопросы:
1. Центр параллельных сил
2. Определение положения центра тяжести
3. Методы нахождения центра тяжести
4. Положение центра тяжести некоторых фигур

1. Центр параллельных сил

Центром параллельных сил называется такая точка на линии действия равнодействующей системы параллельных сил, через которую проходит равнодействующая и в том случае, если все силы системы повернуть вокруг их точек приложения на один и тот же угол, сохраняя параллельность сил.

Покажем существование центра параллельных сил на системе двух сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ (рис. 1.46). На основании теоремы о сложении двух параллельных сил, направленных в одну сторону, определим равнодействующую этих сил и положение линии ее действия по формулам

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2;\ \frac{\boldsymbol{F}_1}{\boldsymbol{F}_2} = \frac{BC}{AC}.$$

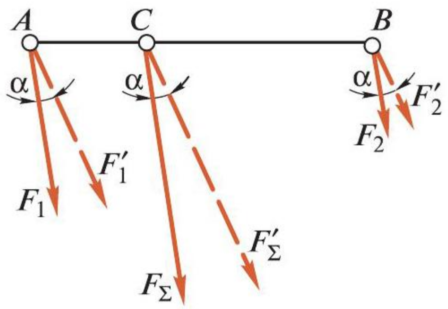

Рис. 1.46. Центр параллельных сил

Нетрудно увидеть, что точка C, лежащая на линии AB, соединяющей точки приложения данных сил, является центром двух параллельных сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, так как при повороте их на один и тот же угол α отношение плеч BC и CA не изменится и равнодействующая также пройдет через точку C.

Если дана система n параллельных сил, то равнодействующую этой системы можно найти, последовательно попарно складывая все силы. На линии действия равнодействующей системы параллельных сил также будет существовать точка, обладающая свойством центра параллельных сил. Выведем формулы для определения координат центра системы n параллельных сил.

Пусть даны пространственная система n параллельных сил и равнодействующая этой системы. Выберем систему осей координат и обозначим координаты точек приложения сил данной системы и координаты точки приложения равнодействующей (рис. 1.47).

Запишем моменты сил данной системы относительно оси y. Для того чтобы легче представить, чему равен момент силы относительно оси, следует мысленно перенести силу вдоль линии действия до положения, когда точка приложения силы окажется в плоскости координатных осей (рис. 1.47, сила $\boldsymbol{F}_1'$):

$$\boldsymbol{M}_y(\boldsymbol{F}_1) = \boldsymbol{F}_1 x_1,$$

$$\boldsymbol{M}_y(\boldsymbol{F}_1) = \boldsymbol{F}_1 x_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Крутов Д. В.

… … … … …

$$\boldsymbol{M}_y(\boldsymbol{F}_n) = \boldsymbol{F}_n x_n,$$

$$\boldsymbol{M}_y(\boldsymbol{F}_\Sigma) = \boldsymbol{F}_\Sigma x_C.$$

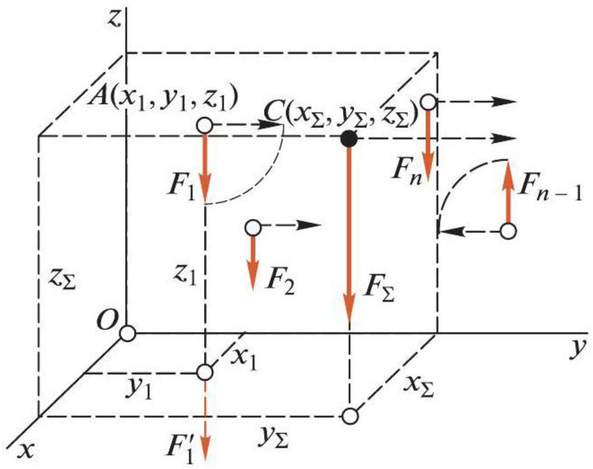

Рис. 1.47. Пространственная система n параллельных сил

Применим теорему о моменте равнодействующей относительно оси. Тогда

$$\boldsymbol{F}_\Sigma x_C = \boldsymbol{F}_1 x_1 + \boldsymbol{F}_2 x_2 + \boldsymbol{F}_3 x_3 + \ \ldots + \boldsymbol{F}_n x_n,$$

откуда

$$x_C = \frac{\boldsymbol{F}_1 x_1 + \boldsymbol{F}_2 x_2 + \boldsymbol{F}_3 x_3 + \ \ldots + \boldsymbol{F}_n x_n}{\boldsymbol{F}_\Sigma}.$$

Записав моменты сил относительно оси x и вновь применив теорему о моменте равнодействующей, получим

$$y_C = \frac{\boldsymbol{F}_1 y_1 + \boldsymbol{F}_2 y_2 + \boldsymbol{F}_3 y_3 + \ \ldots + \boldsymbol{F}_n y_n}{\boldsymbol{F}_\Sigma}.$$

Для определения координаты z_C повернем все силы системы вокруг их точек приложения в одну сторону так, чтобы силы стали параллельны оси y. При этом точка C не изменит своего положения, так как она является центром параллельных сил данной системы.

Запишем моменты всех сил относительно оси x и применим теорему о моменте равнодействующей, в результате чего получим

$$z_C = \frac{\boldsymbol{F}_1 z_1 + \boldsymbol{F}_2 z_2 + \boldsymbol{F}_3 z_3 + \ \ldots + \boldsymbol{F}_n z_n}{\boldsymbol{F}_\Sigma}.$$

Равнодействующая системы параллельных сил равна их алгебраической сумме, т.е. $\boldsymbol{F}_\Sigma = \sum \boldsymbol{F}_i$. Применив сокращенную форму записи, получим формулы для определения координат центра параллельных сил в следующем виде:

$$x_C = \frac{\sum(\boldsymbol{F}_i\, x_i)}{\sum \boldsymbol{F}_i};\ y_C = \frac{\sum(\boldsymbol{F}_i\, y_i)}{\sum \boldsymbol{F}_i};\ z_C = \frac{\sum(\boldsymbol{F}_i\, z_i)}{\sum \boldsymbol{F}_i}.$$

Заметим, что в полученных формулах силы и моменты сил берут со знаком согласно ранее установленным правилам.

2. Определение положения центра тяжести

Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется **силой тяжести**.

Элементарной частицей тела называется такая малая частица, положение которой в пространстве определяется координатами одной точки. Рассмотрим тело, состоящее из большого количества элементарных частиц. Силы тяжести каждой частицы, направленные к центру Земли, образуют систему сходящихся сил, но для тел, размеры которых малы по сравнению с размерами Земли, с достаточной степенью точности можно считать эти силы **системой параллельных сил**.

Центром тяжести тела называется центр параллельных сил тяжести всех элементарных частиц тела.

Центр тяжести есть геометрическая точка, которая может лежать вне тела (например, кольцо, цилиндр с отверстием). Центр тяжести будем обозначать точкой C.

Координаты центра тяжести тела находят по тем же формулам, что и координаты центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum(\boldsymbol{G}_i\, x_i)}{\sum \boldsymbol{G}_i};\ y_C = \frac{\sum(\boldsymbol{G}_i\, y_i)}{\sum \boldsymbol{G}_i};\ z_C = \frac{\sum(\boldsymbol{G}_i\, z_i)}{\sum \boldsymbol{G}_i},$$

где $\boldsymbol{G}_i$ — сила тяжести каждой элементарной частицы тела;
x_i, y_i, z_i, — координаты частицы;
$\sum \boldsymbol{G}_i$ — сила тяжести всего тела.

В случае **однородных тел** по таким же формулам можно определять координаты **центра тяжести** объемов, площадей и линий. Например, для абсциссы x_C получим следующие формулы:

1) сила тяжести элементарной частицы, выраженная через ее объем $\boldsymbol{V}_i$ равна

$$\boldsymbol{G}_i = \gamma \boldsymbol{V}_i,$$

где γ — удельная сила тяжести (для однородного тела — величина постоянная). Тогда

$$x_C = \frac{\sum(\boldsymbol{G}_i\, x_i)}{\sum \boldsymbol{G}_i} = \frac{\gamma \sum(\boldsymbol{V}_i\, x_i)}{\gamma \sum \boldsymbol{V}_i},$$

следовательно, **для объема**

$$x_C = \frac{\sum(\boldsymbol{V}_i\, x_i)}{\sum \boldsymbol{V}_i};$$

2) если тело представляет собой однородную пластинку толщиной h, то сила тяжести элементарной частицы, выраженная через площадь $\boldsymbol{A}_i$, равна

$$\boldsymbol{G}_i = \gamma h \boldsymbol{A}_i,$$

тогда

$$x_C = \frac{\sum(\boldsymbol{G}_i\, x_i)}{\sum \boldsymbol{G}_i} = \frac{\gamma h \sum(\boldsymbol{V}_i\, x_i)}{\gamma h \sum \boldsymbol{V}_i},$$

следовательно, **для площади**

$$x_C = \frac{\sum(\boldsymbol{A}_i\, x_i)}{\sum \boldsymbol{A}_i};$$

3) если тело представляет собой однородную проволоку постоянного поперечного сечения $\boldsymbol{A}$ то сила тяжести элементарной частицы, выраженная через длину l_i, равна

$$\boldsymbol{G}_i = \boldsymbol{A} l_i,$$

тогда

$$x_C = \frac{\sum(\boldsymbol{G}_i\, x_i)}{\sum \boldsymbol{G}_i} = \frac{\gamma \boldsymbol{A} \sum(l_i\, x_i)}{\gamma \boldsymbol{A} \sum l_i},$$

следовательно, **для линии**

$$x_C = \frac{\sum(l_i\, x_i)}{\sum l_i}.$$

3. Методы нахождения центра тяжести

Рассмотрим три метода нахождения центра тяжести: метод симметрии, метод разбиения и метод отрицательных масс.

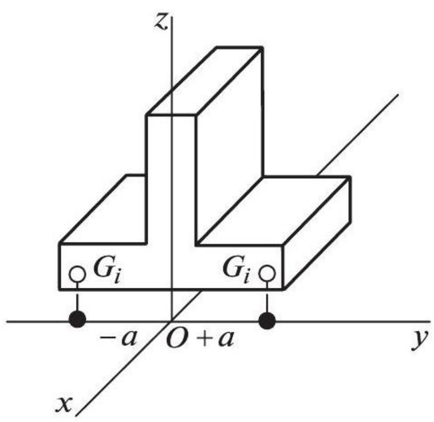

Рис. 1.48. Рисунок к методу симметрии

Метод симметрии

Представим себе однородное тело, которое имеет плоскость симметрии. Выберем такую систему координат, чтобы оси x и z лежали в плоскости симметрии (рис. 1.48).

В этом случае каждой элементарной частице силой тяжести $\boldsymbol{G}_i$ с абсциссой $y_i = +a$ соответствует такая же элементарная частица с абсциссой $y_i = +a$, тогда

$$y_C = \frac{\sum(\boldsymbol{G}_i\, y_i)}{\sum \boldsymbol{G}_i} = 0.$$

Отсюда следует вывод: **если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости**.

Аналогично можно доказать и следующие положения:

– если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела лежит на этой оси;

– если однородное тело имеет две оси симметрии, то центр тяжести находится в точке их пересечения;

– центр тяжести однородного тела вращения лежит на оси вращения.

Метод разбиения

Этот метод заключается в том, что тело разбивают на наименьшее число частей, силы тяжести положение центров тяжести которых известны, после чего применяют приведенные ранее формулы.

Допустим, что мы разбили тело силой тяжести $\boldsymbol{G}$ на три части $\boldsymbol{G}'$, $\boldsymbol{G}''$, $\boldsymbol{G}'''$, абсциссы центров тяжести этих частей x_C', x_C'', x_C''' известны. Формула для определения абсциссы центра тяжести всего тела

$$x_C = \frac{\sum(\boldsymbol{G}_i\, x_i)}{\sum \boldsymbol{G}_i}.$$

Перепишем ее в следующем виде:

$$x_C \sum(\boldsymbol{G}_i) = \sum(\boldsymbol{G}_i\, x_i)$$

или

$$\boldsymbol{G} x_C = \sum(\boldsymbol{G}_i\, x_i).$$

Последнее равенство запишем для каждой из трех частей тела отдельно:

$$\boldsymbol{G}' x_C' = \sum(\boldsymbol{G}_i'\, x_i');\ \boldsymbol{G}'' x_C'' = \sum(\boldsymbol{G}_i''\, x_i'');\ \boldsymbol{G}''' x_C''' = \sum(\boldsymbol{G}_i'''\, x_i''').$$

Сложив правые и левые части этих трех равенств, получим

$$\boldsymbol{G}' x_C' + \boldsymbol{G}'' x_C'' + \boldsymbol{G}''' x_C''' = \sum(\boldsymbol{G}_i'\, x_i') + \sum(\boldsymbol{G}_i''\, x_i'') + \sum(\boldsymbol{G}_i'''\, x_i''') = \sum(\boldsymbol{G}_i\, x_i).$$

Но правая часть последнего равенства представляет собой произведение $\boldsymbol{G}x_C$, так как

$$\boldsymbol{G} x_C = \sum(\boldsymbol{G}_i\, x_i),$$

следовательно,

$$x_C = \frac{\boldsymbol{G}' x_C' + \boldsymbol{G}'' x_C'' + \boldsymbol{G}''' x_C'''}{\boldsymbol{G}},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично,

$$y_C = \frac{\boldsymbol{G}' y_C' + \boldsymbol{G}'' y_C'' + \boldsymbol{G}''' y_C'''}{\boldsymbol{G}},$$

$$z_C = \frac{\boldsymbol{G}' z_C' + \boldsymbol{G}'' z_C'' + \boldsymbol{G}''' z_C'''}{\boldsymbol{G}}.$$

Полученные формулы аналогичны формулам для определения координат центров тяжести для объема, площади и линии. Поэтому в исходные формулы можно подставлять не силы тяжести элементарных частиц $\boldsymbol{G}_i$, а силы тяжести конечных частей; под координатами x_i, y_i, z_i понимают координаты центров тяжести частей, на которые тело разбито.

Метод отрицательных масс

Этот метод заключается в том, что тело, имеющее свободные полости, считают сплошным, а массу свободных полостей — отрицательной. Вид формул для определения координат центра тяжести тела при этом не меняется.

Таким образом, **при определении центра тяжести тела, имеющего свободные полости, следует применять метод разбиения, но считать массу свободных полостей отрицательной**.

4. Положение центра тяжести некоторых фигур

Прямоугольник

Так как прямоугольник имеет две оси симметрии, то центр тяжести его площади находится в точке пересечения этих осей, иначе говоря, **в точке пересечения диагоналей** прямоугольника.

Треугольник

Пусть дан треугольник ABD (рис. 1.49). Разобьем его на элементарные (бесконечно узкие) полоски, параллельные стороне AD. Центр тяжести каждой полоски будет лежать на медиане Bd, следовательно, на этой медиане будет лежать центр тяжести всей площади треугольника. Разбив треугольник на элементарные полоски, параллельные стороне AB, увидим, что искомый центр тяжести лежит и на медиане aD, следовательно, центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.

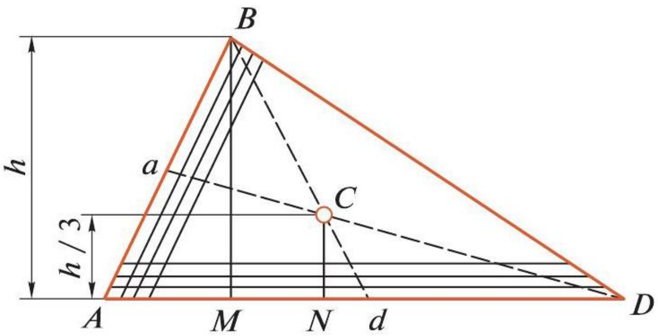

Рис. 1.49. Центр тяжести треугольника

Из геометрии известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в соотношении 1:2 от основания. Из подобия треугольников CNd и BMd получим

$$CN = \frac{h}{3}.$$

Следовательно, центр тяжести площади треугольника лежит на расстоянии **одной трети высоты от каждого основания**.

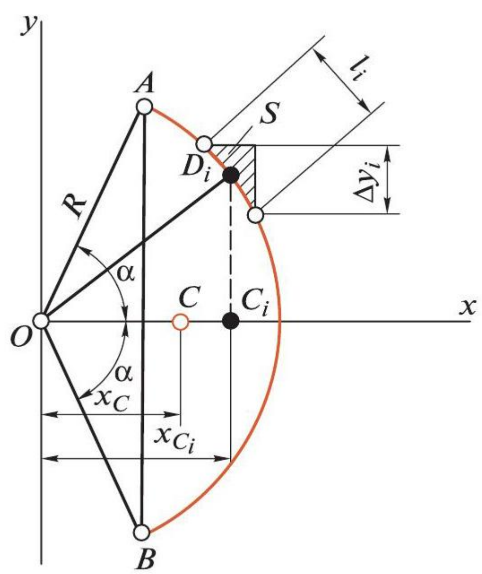

Рис. 1.50. Центр тяжести дуги окружности

Дуга окружности

Возьмем дугу AB окружности радиусом R с центральным углом 2α (рис. 1.50). Систему координат выберем так, чтобы начало координат было в центре окружности, а ось x делила дугу пополам, тогда $y_C = 0$ вследствие симметрии дуги относительно оси x. Определим x_C.

Разобьем дугу AB на элементарные части l_i, одна из которых изображена на рисунке. Тогда

$$x_C = \frac{\sum(l_i\, x_{C_i})}{\sum l_i}.$$

Дугу l_i вследствие малости примем за отрезок прямой. Из подобия ΔOD_iC_i и элементарного ΔS (на рисунке заштрихован) получим

$$\frac{l_i}{\Delta y_i} = \frac{R}{x_{C_i}} \text{ или } l_i x_{C_i} = R\Delta y_i.$$

Крутов Д. В.

Тогда

$$x_C = \frac{\sum(l_i\, x_{C_i})}{\sum l_i} = \frac{\sum(R\Delta y_i)}{l} = \frac{R\sum(\Delta y_i)}{l} = R\frac{AB}{l},$$

так как $\sum(\Delta y_i) = AB$, $\sum l_i = l$ — длина дуги AB. Но $AB = 2R\sin\alpha$, а $l = 2R\alpha$, следовательно,

$$x_C = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}.$$

При $\alpha = \pi/2$ рад (полуокружность)

$$x_C = \frac{2R}{\pi}.$$

Круговой сектор

Возьмем сектор радиусом R с центральным углом 2α (рис. 1.51). Проведем оси координат, как показано на рисунке, тогда $y_C = 0$. Определим x_C, для чего разобьем сектор на ряд элементарных секторов, каждый из которых вследствие малости дуги l_i примем за равнобедренный треугольник с высотой R. Тогда центр тяжести каждого элементарного сектора будет лежать на дуге радиуса $2R/3$ и задача определения центра тяжести сектора сведется к определению центра тяжести дуги окружности радиуса $2R/3$, следовательно,

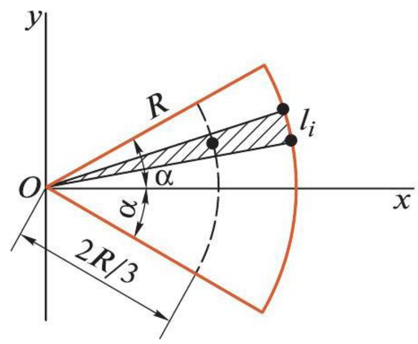

Рис. 1.51. Центр кругового сектора

$$x_C = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}.$$

При $\alpha = \pi/2$ рад (полукруг)

$$x_C = \frac{4R}{3\pi}.$$