Раздел I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 3. Динамика

Тема 1.13. Основы кинетостатики

Занятие №1.

Учебные вопросы:
1. Метод кинетостатики
2. Силы инерции в криволинейном движении

1. Метод кинетостатики

Представим себе материальную точку массой m, движущуюся с ускорением a под действием какой-то системы активных и реактивных сил, равнодействующая которых равна F.

Воспользуемся одной из известных нам формул (основным уравнением динамики) для того, чтобы уравнения движения записать в форме уравнений равновесия (метод кинетостатики):

$$F = ma.$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$F + (-ma) = 0.$$

Выражение, стоящее в скобках, обозначается $F^{\text{ин}}$ и называется **силой инерции**:

$$F^{\text{ин}} = -ma.$$

Сила инерции есть вектор, равный произведению массы точки на ее ускорение и направленный в сторону, противоположную ускорению. Тогда

$$F + F^{\text{ин}} = 0 \text{ или } \sum(F, F^{\text{ин}}) = 0.$$

Это равенство, являющееся математическим выражением принципа, который носит имя французского ученого Ж. Д'Аламбера (1717—1783), можно рассматривать как уравнение равновесия материальной точки. Следует подчеркнуть, что полученное равенство, хотя и названо уравнением равновесия, в действительности является видоизмененным уравнением движения материальной точки.

Следует отметить, что до Д'Аламбера над общим методом, с помощью которого уравнениям динамики придается форма уравнений статики, работали члены Петербургской Академии наук Я. Герман (1716) и Л.Эйлер (1737).

Принцип Д'Аламбера формулируется так: **активные и реактивные силы, действующие на материальную точку, вместе с силами инерции образуют систему взаимно уравновешенных сил, удовлетворяющую всем условиям равновесия**.

Такое состояние точки (или тела) называется **относительным механическим равновесием**.

Следует помнить, что сила инерции приложена к рассматриваемой материальной точке **условно**, но для связи, вызывающей ускорение, она в определенном смысле является **реальной**. Обладая свойством инерции, всякое тело стремится сохранять свою скорость по модулю и направлению неизменной, в результате чего оно будет действовать на связь, вызывающую ускорение, с силой, равной силе инерции. В качестве примера действия сил инерции можно привести случаи разрушения маховиков при достижении ими критической угловой скорости. Во всяком вращающемся теле действуют силы инерции, так как каждая частица этого тела имеет ускорение, а соседние частицы являются для нее связями.

Поясним это на примере. Пусть к телу (рис. 1.67), лежащему на горизонтальной плоскости, привязана нить, способная выдерживать силу тяжести G этого тела. Если к нити приложить силу R статически (постепенно), то тело будет поднято вверх и нить не оборвется; если силу R приложить динамически (внезапно, рывком), то нить оборвется. Это явление объясняется следующим образом.

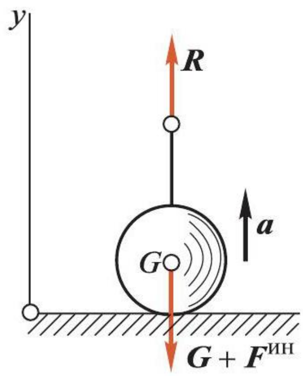

Рис. 1.67. Пример действия сил инерции

Чтобы поднять груз, нужно сообщить ему какое-то ускорение a. Для определения величины натяжения нити применим принцип Д'Аламбера и составим уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0;\;\; R - G - F^{\text{ин}} = 0,$$

откуда

$$R = G + F^{\text{ин}} = G + ma.$$

В первом случае грузу сообщается небольшое ускорение и сила инерции, увеличивающая натяжение нити, невелика; во втором случае ускорение, сообщаемое телу, значительное и сила инерции соответственно возрастает. В обоих случаях сила инерции не увеличивает давление на опору, так как приложена к телу условно.

Отметим, что **весом тела** называется сила, с которой тело вследствие притяжения Земли действует на опору (или подвес), удерживающую его от свободного падения. **Если тело и опора неподвижны, то вес тела равен его силе тяжести**.

2. Силы инерции в криволинейном движении

В криволинейном движении точки полное ускорение равно векторной сумме касательного и нормального ускорений (рис. 1.68).

Касательное ускорение $a_\tau = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho$, полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Каждому ускорению соответствует своя сила инерции:

$F_\tau^{\text{ин}} = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ — касательная (тангенциальная);

$F_n^{\text{ин}} = \dfrac{mv^2}{\rho}$ — нормальная, или центробежная;

$F^{\text{ин}} = ma$ — полная

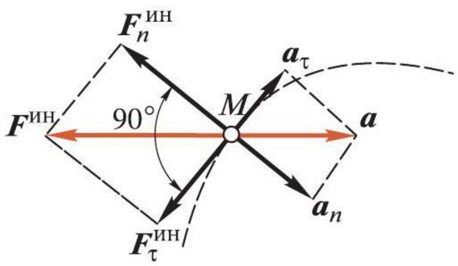

Рис. 1.68. Полное ускорение в криволинейном движении точки

В качестве примера рассмотрим равномерное движение по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, камня силой тяжести G, привязанного к невесомой нити длиной r, расположенной в той же плоскости (рис. 1.69). Чтобы нить оставалась в плоскости движения камня, предполагается, что он скользит по идеальной гладкой горизонтальной плоскости. Скорость камня обозначим v. Тогда $F_n^{\text{ин}} = mv^2/r$ — центробежная сила инерции (эта сила натягивает нить); $R = mv^2/r$ — центростремительная сила, приложенная к камню (эта сила удерживает камень на окружности).

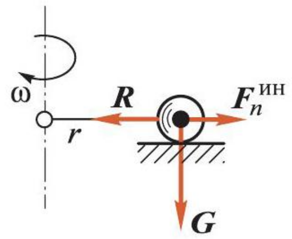

Рис. 1.69. Равномерное движение по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости

Центробежная и центростремительная силы (действие и противодействие) по третьему закону Ньютона равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Очевидно, что касательная сила инерции$F_\tau^{ин}$ в этом случае равна нулю, так как $v = \text{const}$.

Из опыта известно, что при достаточной скорости нить может разорваться и камень полетит по касательной к окружности, т.е. по направлению имеющейся в момент разрыва скорости. Это доказывает, что центробежная сила инерции есть реальная сила для связи, но к телу она приложена условно.

Внутри тел, движущихся с ускорением, также возникают внутренние силы инерции, так как для каждой частицы тела соседние частицы являются связями.

Найдем, чему равно натяжение нити, если камень движется по окружности, лежащей в вертикальной плоскости (рис. 1.70). Для определения натяжения R нити применим принцип Д'Аламбера, т.е. приложим к камню нормальную силу инерции $F_n^{ин}$ и касательную силу инерции $F_\tau^{ин}$.

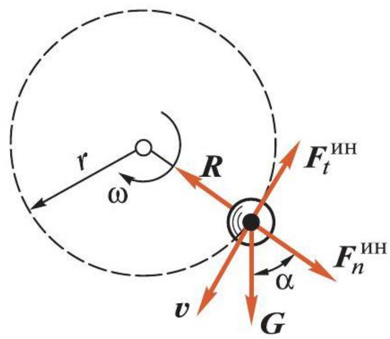

Рис. 1.70. Равномерное движение по окружности, лежащей в вертикальной плоскости

Спроецируем все силы на направление нити, в результате чего получим

$$R - G\cos\alpha - F_n^{ин} = 0,$$

откуда

$$R = F_n^{ин} + G\cos\alpha = \frac{mv^2}{r} + G\cos\alpha.$$

Натяжение нити максимальное при $\alpha = 0$, т.е. когда камень находится в нижнем положении:

$$R_{\max} = \frac{mv^2}{r} + G.$$

Натяжение нити минимальное при $\alpha = \pi$ рад, т.е. когда камень находится в верхнем положении:

$$R_{\min} = \frac{mv^2}{r} - G.$$

Заметим, что под влиянием силы тяжести камня модуль его скорости v будет меняться и достигать наименьшего значения в верхнем положении и наибольшего — в нижнем.

Если выразить линейную скорость камня через угловую скорость нити $v = \omega r$, то формула центробежной силы инерции примет вид

$$F_n^{ин} = m\omega^2 r.$$