ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

РАЗДЕЛЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

- Теория множеств
- Элементы математической логики
- Основы теории графов

Спектр приложений

- Информационные технологии
- Компьютеры
- Естествознание

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Понятие множества.

Множество *– это совокупность, собрание каких – либо объектов, объединяемых общим признаком или свойством.*

Примеры:

Множество всех студентов данного курса.

Множество телевизоров с цветным изображением в данной аудитории.

Множество всех натуральных чисел.

Обозначение множества:

A, B, C, …, X, Y, …

Обозначение элементов множества:

a, b, c, …, x, y, …

$a \in A$ *Элемент a является элементом множества A*

$a \overline{\in} A$ *Элемент a не является элементом множества A*

Специальные названия множеств:

Числовые множества.	Элементами множества являются числа.
Отрезок.	$[a;b]$
Полуинтервал.	$[a;b), (a;b]$
Множество всех целых положительных чисел	1,2,3,…,n,… - натуральный ряд. N
Множество всех действительных чисел.	R, $(-\infty;+\infty)$

Конечные множества	Бесконечные множества
• Множество листьев на дереве. • Множество слушателей в данной аудитории.	• Множество точек на плоскости. • N, R.

Формы задания множества:

1. *Указание всех элементов множества.*

$$A = \{1,2,3\}$$

Если число элементов бесконечно, то используется многоточие.

$$N = \{1,2,3,\ldots\}$$

2. *Описание элементов определяющим свойством P(x), общим для всех элементов.* $A = \{x : P(x)\}$

$$A = \{x : x = 2k, k = 1,2,\ldots\} = \{2,4,6,\ldots\}$$

Равные множества.

Если множества А и В состоит из одних и тех же элементов, то А=В.

$$\{1,2\} = \{2,1\}$$

Если каждый элемент множества В является элементом множества А, то В есть подмножество А.

$$B \subset A$$

Пример. Множество чётных чисел есть подмножество множества целых чисел.

Теорема 1.

$$Если \quad B \subset A \quad и \quad A \subset B, \quad то \quad A = B.$$

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым. $\varnothing$

Пример. Множество людей на Солнце.

Множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$

Теорема 2.

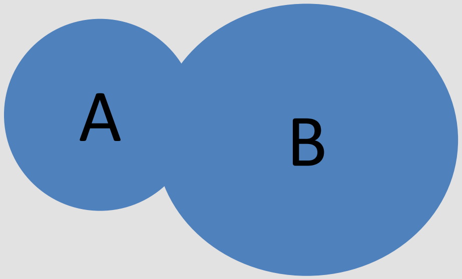
Пустое множество является подмножеством любого множества А.

Операции над множествами.

Пусть даны два множества A и B.

Определение 1. Объединением или суммой этих множеств называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

Обозначение: $C = A \cup B$

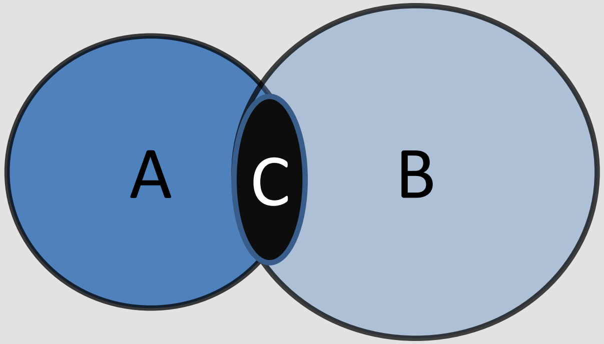


$A \cup A;\qquad A \subset A \cup B;\qquad B \subset A \cup B.$

Пример: $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

Определение 2. *Пересечением или произведением множеств А и В называется множество С, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству А, и множеству В.*

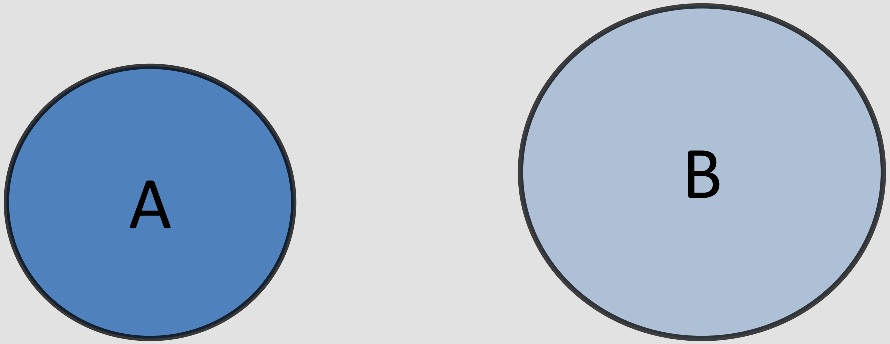
Обозначение: $C = A \cap B$



$A \cap A = A; \quad (A \cap B) \subset A; \quad (A \cap B) \subset B.$

Пример: $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

Определение 3. ***Множества, пересечение которых пусто, называются непересекающимися.***



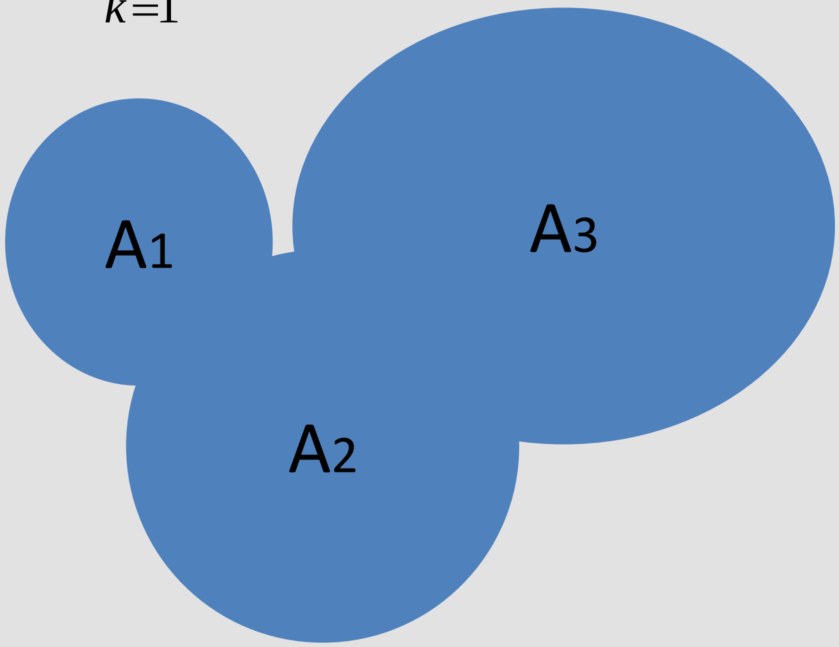
Пример: $\{1,2,3\} \cap \{5,6,7\} = \varnothing$

Множество C называется объединением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если C состоит из множеств A_k, $k = 1,2,\ldots,n$.

Обозначение: $C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Пример:



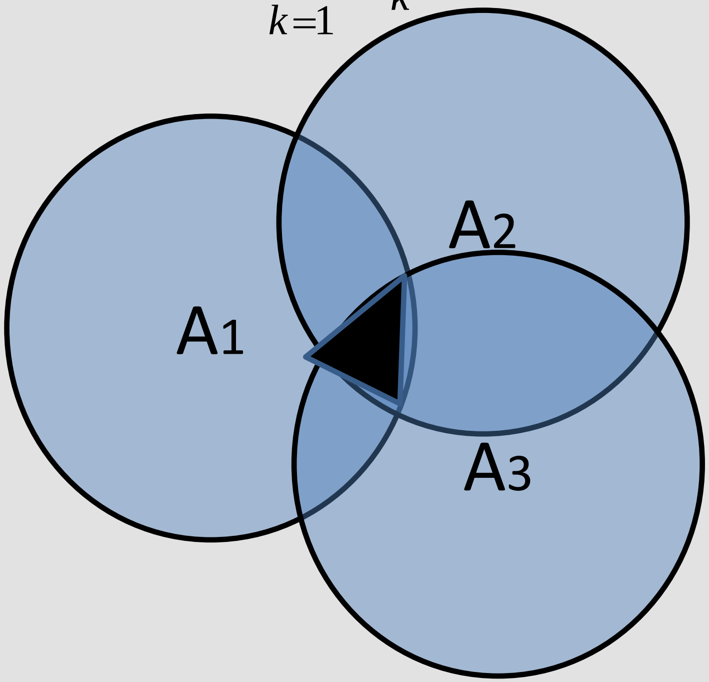
Множество С называется пересечением или общей частью множеств A_1, A_2, ..., A_n, если оно состоит из всех тех элементов , которые принадлежат всем множествам множеств A_k, $k = 1,2,\dots,n$.

$$C = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

Обозначение:

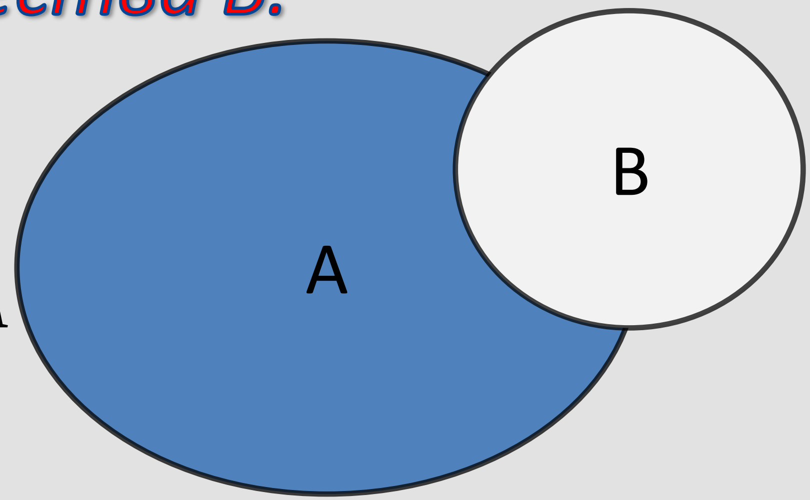
$$C = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

Пример:



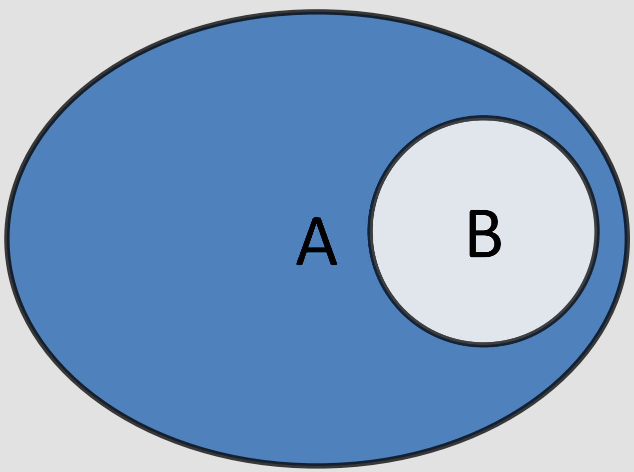
Определение 4. **Разностью множеств А и В называется совокупность тех элементов множества А, которые не являются элементами множества В.**

Обозначение: А\В.



Пример:

$$A \setminus B \subset A$$



A\B=A

Если $A \subset B$, то разность A\B называется дополнением множества A до множества B.

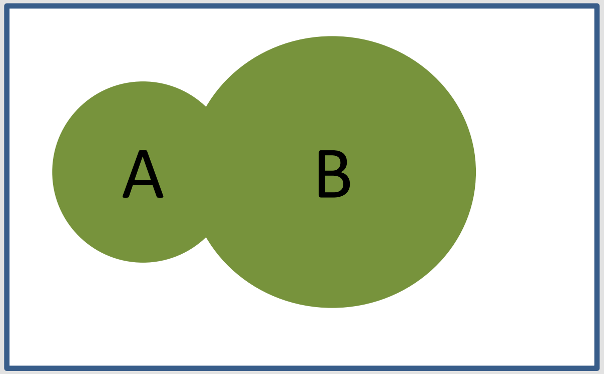
Обозначение: $\overline{A}$

Если $A \subset U$, то $U = A + \overline{A}$

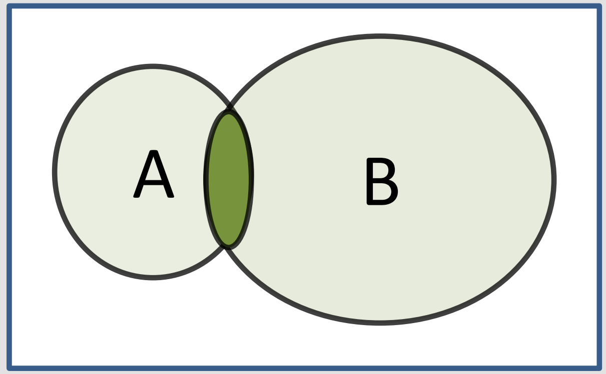
Множество U разбито на два множества на A и $\overline{A}$

$$U = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, A_i \cap A_j = \emptyset$$

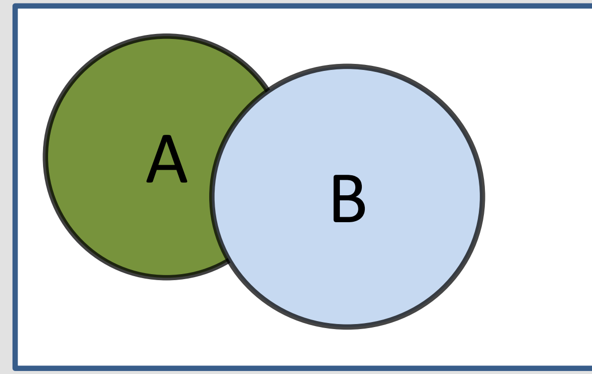
Диаграммы Эйлера – Венна.



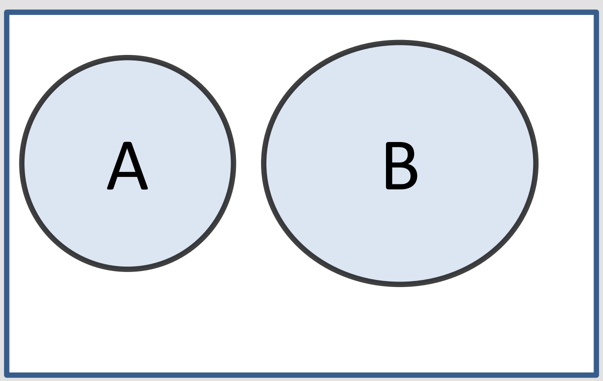
$$A \cup B$$



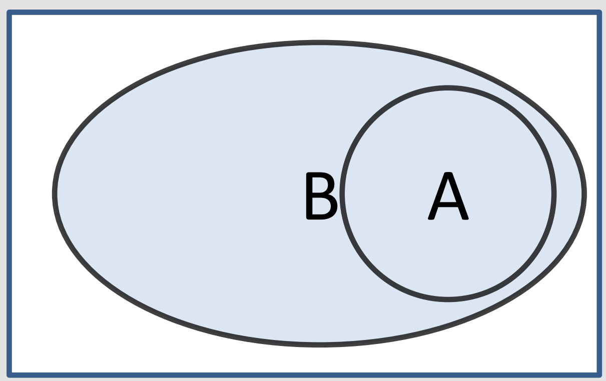
$$A \cap B$$



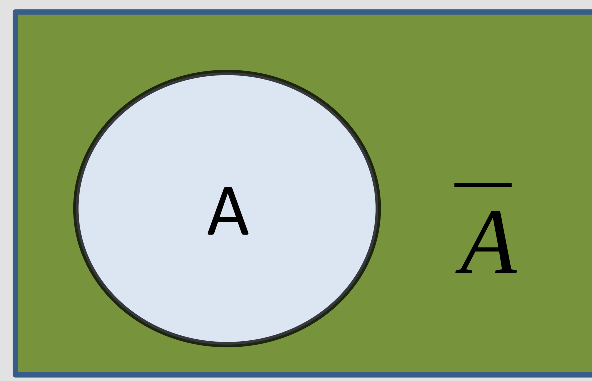
$$A \setminus B$$



$$A \cap B = \varnothing$$



$$A \subset B$$



$$\overline{A}$$

- универсальное множество.

- Пусть $A=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$,

$$B=\{4;3;2;1;0;-1;-2\},$$

$$C=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$$

$$а)A\cup B;б)A\cap B;в)A\cup C;г)A\cap C;д)B\cup C$$

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Определение: предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, называется высказыванием.

Примеры:

«3 + 5 = 8» – истинно;

«7 – простое число» – истинно;

«Волга впадает в Чёрное море» – ложно;

«Существуют внеземные цивилизации» – либо истинно, либо ложно;

«В романе Л.Н.Толстого «Война и мир» 3851385 букв» - либо истинно, либо ложно.

Обозначение: p, q, x, y и т.д.

Обозначение: истина – «И», ложь – «Л».

Сложное или составное высказывание
Составлено с помощью союзов «и», «или» и частицы «не» из простых высказываний.

Пример.

«Москва стоит на берегу Оби» – ложно.

«Новосибирск стоит на берегу Оби» - истинно.

«Москва не стоит на берегу Оби» – истинно.

«Москва стоит на берегу Оби или Новосибирск стоит на берегу Оби» – истинно.

«Москва стоит на берегу Оби и Новосибирск стоит на берегу Оби» - ложно.

Операции над высказываниями

Определение. Отрицанием высказывания p называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание p ложно.

Обозначение. $\overline{p}$

Читается «не p»

Таблица истинности

p	$\overline{p}$
Л	И
И	Л

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

Определение. Конъюнкцией двух высказываний p и q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Обозначение. $p \wedge q$

Читается «p и q»

Таблица истинности

p	**q**	$p \wedge q$
Л	Л	Л
И	Л	Л
Л	И	Л
И	И	И

Определение. Дизъюнкцией двух высказываний p и q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Обозначение. $p \vee q$

Читается «p или q»

Таблица истинности

p	q	$p \vee q$
Л	Л	Л
И	Л	И
Л	И	И
И	И	И

Определение. Импликацией двух высказываний p и q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда p истинно, а q ложно.

Обозначение. $p \to q$

Таблица истинности

p	q	$p \to q$
Л	Л	И
И	Л	Л
Л	И	И
И	И	И

Читается

«p влечёт q»

«если p, то q»

«из p следует q»

p – посылка импликации

q – заключение импликации

Определение. Эквиваленцией двух высказываний p и q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинные значения p и q совпадают.

Обозначение. p~q

Читается
«p эквивалентно q»

Таблица истинности

p	**q**	**p~q**
Л	Л	И
И	Л	Л
Л	И	Л
И	И	И

$$f(x,y)=\bar{x}\vee\bar{y};$$

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
Л	Л			
И	Л			
Л	И			
И	И			

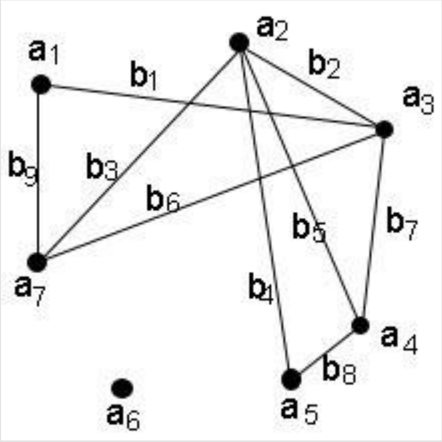
p	$\bar{p}$
Л	И
И	Л

p	q	$p \vee q$
Л	Л	Л
И	Л	И
Л	И	И
И	И	И

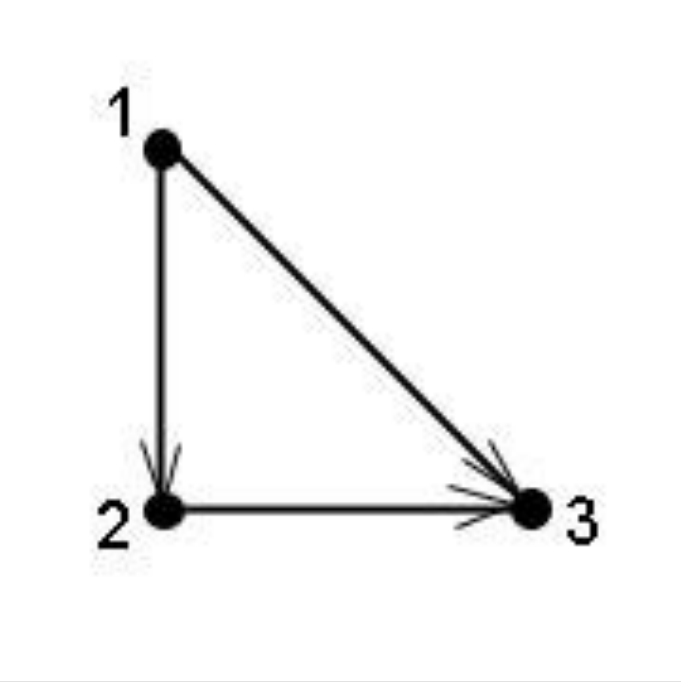
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

- **Теория графов** – это один из подразделов математики, главным отличительным признаком которого является геометрический метод в изучении объектов. Основателем ее принято считать известного математика Л. Эйлера. - Читайте подробнее на FB.ru: https://fb.ru/article/46447/teoriya-grafov

Графы строят для того, чтобы отобразить отношения на множествах. Пусть, например, множество $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ - множество людей, а каждый элемент будет отображён в виде точки. Множество $B = \{b_1, b_2, \ldots b_m\}$ - множество связок (прямых, дуг, отрезков - пока не важно). На множестве *A* задано отношение знакомства между людьми из этого множества. **Строим граф** из точек и связок. Связки будут связывать пары людей, знакомых между собой. Естественно, число знакомых у одних людей может отличаться от числа знакомых у других людей, а некоторые вполне могут и не быть ни с кем знакомы (такие элементы будут точками, не соединёнными ни с одной другой). Вот и получился граф!

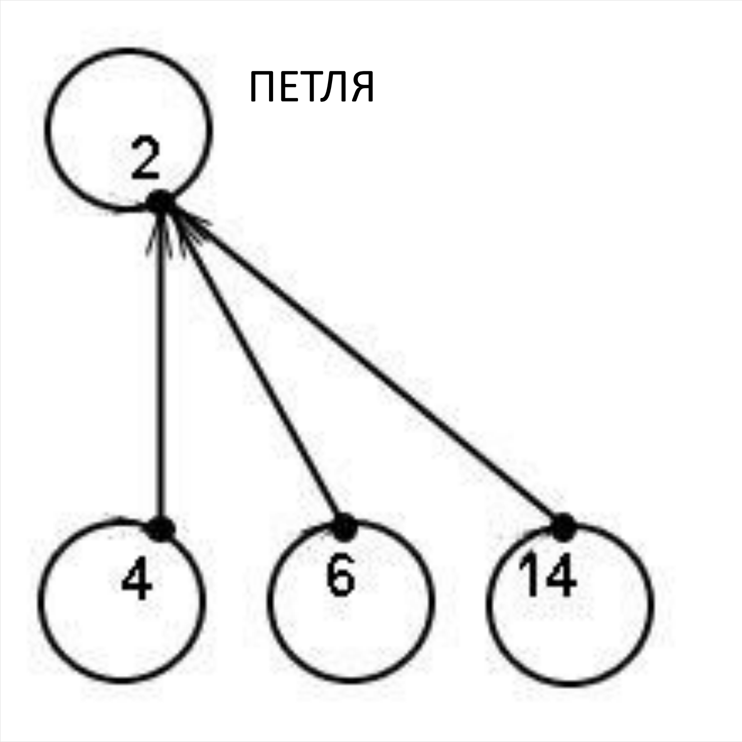


- **Пример 1.** Пусть *A* - множество чисел 1, 2, 3: *A* = {1, 2, 3}. Построить граф для отображения отношения "<" ("меньше") на этом множестве.



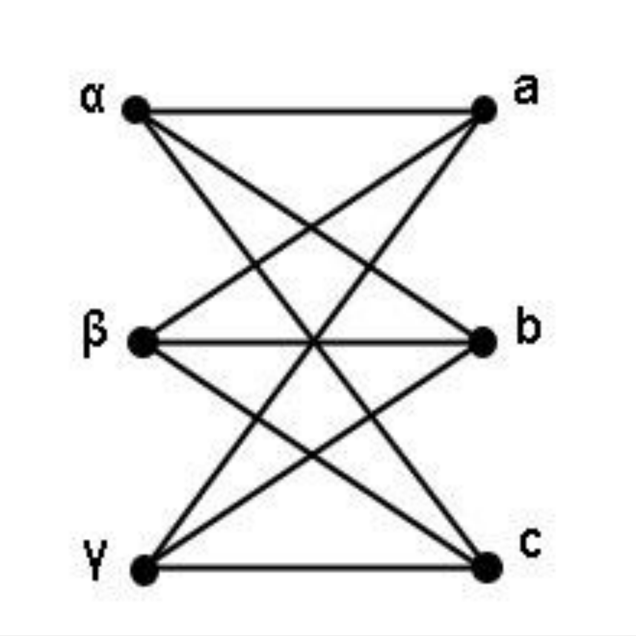
ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ

Пример 2. Пусть *A* - множество чисел 2, 4, 6, 14: $A = \{2, 4, 6, 14\}$. Построить граф для отображения отношения "делится нацело на" на этом множестве.



СМЕШАНЫЙ ГРАФ

- **Пример 3.** Пусть даны множества $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Построить граф для отображения отношения "декартово произведение множеств".



ДВУДОЛЬНЫЙ ГРАФ

- **Пример 4.** В агентстве по недвижимости работают менеджеры Игорь, Сергей и Пётр. Обслуживаются объекты О1, О2, О3, О4, О5, О6, О7, О8. Построить граф для отображения отношений "Игорь работает с объектами О4, О7", "Сергей работает с объектами О1, О2, О3, О5, О6", "Пётр работает с объектом О8".