**Тема: Векторы в пространстве**

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

**Прямоугольная система координат в пространстве задана**, если выбрана точка – начало координат, через эту точку проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и задана единица измерения отрезков.

Прямые с выбранными на них направлениями называются осями координат, а их общая точка – началом координат. Точка О разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью**, а другой луч **отрицательной полуосью**. Плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ох и Оу, Оу и Оz, Оz и Ох, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Оху, Оуz, Оzх.

**Координаты вектора**

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат Охуz. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат **единичный вектор**, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через i-единичный вектор оси абсцисс, через j- единичный вектор оси ординат и через k- единичный вектор оси аппликат. **Любой вектор a можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде**



**причем коэффициенты разложения х, у, z определяются единственным образом.** Коэффициенты х, у и z в разложении вектора по координатным векторам называются координатами вектора $→$в данной системе координат. Координаты вектора $→$будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: {х; у; z}.

Нулевой вектор можно представить в виде так как все координаты нулевого вектора равны нулю.

**Координаты равных векторов соответственно равны**, т. е. если векторы a{х1, y1, z1} и b{х2, y2, z2) равны, то х1 = x2, y1 = y2 и z1 = z2.

**Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.** Другими словами, если a{х1, у1, z1} и b{х2, у2, z2}- данные векторы, то вектор суммы имеет координаты {х1+х2, у1 + у2, z1 + z2}.

**Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов**. Другими словами, если a{х1, y1, z1} и b{х2 у2; z2} – данные векторы, то вектор разности имеет координаты {х1 – х2, y1 – y2, z1 – z2}.

**Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.** Другими словами, если a {х; у; х}-данный вектор, α – данное число, то вектор a \*α имеет координаты {αх; αу; αz).

**Определение** Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

**Признак компланарности трех векторов** если вектор с можно разложить по векторам a и b, т. е. представить в виде с= x a + y b, где x и y — – некоторые числа, то векторы a, b и с компланарны.

Для сложения трёх некомпланарных векторов можно пользоваться правилом параллелепипеда. Отложим от произвольной точки О векторы =, =, = и построим параллелепипед так, чтобы отрезки ОА, ОВ и ОС были рёбрами.
Тогда ОD - диагональ этого параллелепипеда равна  сумме векторов, и . Если вектор можно представить в виде суммы:  = х + у + z, то говорят, что вектор d разложен по векторам , и **.** Числа х, у, z называют коэффициентами разложения.

**Теорема** Любой вектор можно разложить по трём данным некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

**Определение** Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало - с началом координат, называется **радиус-вектором данной точки**. Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала. Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

**Длина вектора** вычисляется по формуле:



Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°.

**Определение** Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной или на параллельных прямых. Пусть два ненулевых вектора  и  коллинеарные. Если при этом лучи АВ и СD сонаправлены, то  и называются сонаправленными, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы  и  называются противоположно направленными.
Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором. Запись  означает, что векторы  и  сонаправлены, а запись  - что векторы с и d противоположно направлены.

**Признак коллинеарности векторов** Для того, чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них был произведением другого на некоторое число.

**Определение** Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны. От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Сложение векторов по правилу треугольника



Для этого нужно от произвольной точки пространства отложить вектор , равный , затем от точки В отложить вектор , равный . Вектор  называется суммой  и . Для любых трех точек А, В и С имеет место равенство +=

Сложение векторов по правилу параллелограмма



Для этого векторы откладывают от одной точки.

Вычитание векторов Разностью векторов  и  называется такой вектор, сумма которого с вектором равна вектору. Разность  -  можно найти по формуле  -  =  + (-), где (-) - вектор, противоположный вектору . -=.



Умножение вектора на число Произведением ненулевого вектора  на число k называется такой вектор , длина которого равна |k|·||, причем векторы  и  сонаправлены при k0 и противоположно направлены при k<0. Произведением нулевого вектора на произвольное число считается нулевой вектор. Произведение вектора  на число k обозначается так: k. Из определения произведения вектора на число следует, что для любого числа k и любого вектора  векторы  и k коллинеарны. Из этого же определения следует, что произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор. Для любых векторов ,  и любых чисел k, l справедливы равенства: (kl) = k(l) (сочетательный закон); k( + ) = k + k (первый распределительный закон); (к+l) = k + l (второй распределительный закон).

**Лемма** Если векторы  и  коллинеарны и вектор  не равен нулевому вектору, то существует число k такое, что вектор  равен k.

**Угол между векторами** Если векторы не являются сонаправленными, то лучи ОА и ОB образуют угол АОВ.

  

**Определение** Скалярным произведением $\vec{a}$и $\vec{b}$называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$\vec{a}$∙ $\vec{b}$ = $\left|\vec{a}\right|∙\left|\vec{b}\right|∙cosφ$

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}$∙ $\vec{a}$ =$\left|\vec{a}\right|^{2}$;
2. $\vec{a}∙$ $\vec{b}$ = 0, если $\vec{a}⊥\vec{b}$ или $\vec{a}$ = 0или $\vec{b}$ = 0
3. $\vec{a}∙$ $\vec{b}$ =$\vec{b}$∙ $\vec{a}$
4. $\vec{a}$∙ ($\vec{b}$+ $\vec{c}$) =$\vec{a}$∙ $\vec{b}$+$\vec{a}$∙ $\vec{c}$
5. $\left(m∙\vec{a}\right)∙\vec{b}=\vec{a}∙\left(m∙\vec{b}\right)=m∙( \vec{a}∙$ $\vec{b}$)

Если рассматривать векторы $\vec{a}\left(x\_{a}y\_{a}z\_{a}\right)$; $\vec{b}\left(x\_{b}y\_{b}z\_{b}\right)$в декартовой прямоугольной системе координат, то $\vec{a}∙$ $\vec{b}$ =$x\_{a}x\_{b}+y\_{a}y\_{b}+z\_{a}z\_{b}$.

Используя полученные равенства, получаем формулы для вычисления угла между векторами: $cosφ=\frac{x\_{a}x\_{b}+y\_{a}y\_{b}+z\_{a}z\_{b}}{\left|\vec{a}\right|∙\left|\vec{b}\right|}$

**Пример 1** Найти угол между векторами $\vec{a}$и$\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$,

$\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.

Решение: координаты векторов $\vec{a}=\left(1, 2, 3\right)$, $\vec{b}$ = (6, 4, –2).

Скалярное произведение векторов через координаты

$\vec{a}$\* $\vec{b}$ = 6+8–6 = 8. Длины векторов

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$; $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{36+16+4}=\sqrt{56}$. Угол между векторами $\vec{a}$и$\vec{b}$

$cosφ=\frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}}=\frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$; $φ=arccos\frac{2}{7}$.

Ответ: $φ=arccos\frac{2}{7}$.

**Урок №4. Движения в пространстве**

**Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:**

* понятие «движение» в пространстве;
* свойства движений в пространстве;
* виды движений в пространстве;
* отличия движений в пространстве от движений на плоскости.

**Глоссарий по теме**

1. Пусть каждой точке А пространства поставлена в соответствие точка А1 пространства. При этом каждая точка А1 поставлена в соответствие какой-то точке А. Тогда говорят, что задано **отображение пространства на себя**. При этом точка А перешла в точку А1.
2. **Преобразованием** пространства называется **взаимно-однозначное** отображение пространства на себя.
3. Под **движением** пространства понимается отображение пространства на себя, при котором любые две точки A и B переходят (отображаются) в некие точки A1 и B1 так, что |AB|=|A1B1|.
4. **Центральная симметрия** пространства относительно точки O – преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно точки O. Точка O – **центр симметрии**.
5. **Осевая симметрия** пространства относительно прямой m – преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно прямой . Прямая m – **ось симметрии**.
6. **Зеркальная симметрия** пространства относительно плоскости α – преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно плоскости α. Плоскость α – **плоскость симметрии**.
7. **Параллельный перенос на вектор** – преобразование пространства, при котором каждая точка пространства M, отображается на такую точку M', что выполняется равенство .
8. **Поворот пространства на угол φ вокруг прямой n** – преобразование пространства, при котором любая точка прямой остается неподвижной и в любой плоскости, перпендикулярной прямой n, осуществляется поворот этой плоскости на угол φ вокруг точки ее пересечения с прямой n.

**Основная литература:**

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни – М. : Просвещение, 2014. – 255, сс. 121-126.

**Дополнительная литература:**

Шарыгин И.Ф. Геометрия. 10–11 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений – М.: Дрофа, 2009. – 235, : ил., ISBN 978–5–358–05346–5, сс. 178-196.

Потоскуев Е.В., Звавич Л. И., Геометрия. 11кл.: учеб. Для классов с углубл. И профильным изучением математики общеобразоват. Учреждений – М.: Дрофа, 2004. – 368 с.: ил., ISBN 5–7107–8310–2, сс. 5-63.

**Открытые электронные ресурсы:**

Образовательный портал “Решу ЕГЭ”. <https://mathb-ege.sdamgia.ru/test?theme=177>

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

**1. Определение движения в пространстве**

Допустим, что каждой точке А пространства поставлена в соответствие точка А1 пространства. При этом каждая точка А1 поставлена в соответствие какой-то точке А. Тогда говорят, что задано **отображение пространства на себя**. При этом точка А перешла в точку А1. А1 - образ точки А.

**Преобразованием** пространства называется **взаимно-однозначное** отображение пространства на себя.

Два преобразования называются **равными**, если образы любой точки при этих преобразованиях совпадают.

Точка А называется **неподвижной точкой** при некотором преобразовании f, если при этом преобразовании она отображается на себя.

Фигура F называется **неподвижной фигурой** при некотором преобразовании f, если при этом преобразовании она отображается на себя.

Преобразование пространства, которое каждую точку отображает на себя, называется **тождественным преобразованием.** Оно обычно обозначается **Е**. При тождественном преобразовании все точки и все фигуры пространства являются неподвижными.

Для любых двух преобразований можно рассмотреть третье, которое получается последовательным применением этих преобразований. Например, если преобразование f отображает точку М на точку М', а преобразование g отображает точку М' на точку M'', то преобразование f°g отображает точку М на точку M'': f°g(М)=g(f(M))=M''.

f°g - композиция преобразований f и g.

Под **движением** пространства понимается отображение пространства на себя, при котором любые две точки A и B переходят (отображаются) в некие точки A1 и B1 так, что |AB|=|A1B1|.

Иными словами, движение пространства — это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками. Так же, как и для движения на плоскости, можно доказать, что при движении в пространстве

 - прямые переходят в прямые,

- полупрямые — в полупрямые,

- отрезки — в отрезки,

- сохраняются углы между прямыми.

Новое свойство движения в пространстве: движение переводит плоскости в плоскости.

В пространстве, так же как и на плоскости, две фигуры называются равными, если они совмещаются движением.

Можно доказать, что композиция двух движений пространства есть движение.

**2. Виды движений.**

Центральная симметрия.

Центральная симметрия в пространстве задается и определяется так же, как и на плоскости

**Определение:**

Преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно точки O, называется **центральной симметрией** пространства относительно точки O. При этом точка O отображается на себя и называется **центром симметрии**.



Рисунок 1 – Центральная симметрия

На рисунке точка О – центр симметрии, АО=А1О, ВО=В1О, СО=С1О, DО=D1О (по определению точки, симметричной данной).

Центральная симметрия имеет только одну неподвижную точку – центр симметрии.

Сформулируем некоторые свойства центральной симметрии:

1) Прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

2) Прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую.

3) Плоскость, проходящая через центр симметрии, отображается на себя (то есть является неподвижной плоскостью этой центральной симметрии).

4) Плоскость, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей плоскость.

**3. Осевая симметрия** (симметрия относительно прямой):

**Определение:**

Точка M' пространства, не лежащая на прямой m, называется симметричной точке М относительно прямой m, если отрезок ММ' перпендикулярен этой прямой и делится ею пополам.

**Определение:**

Преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно прямой m, называется **осевой симметрией** пространства относительно прямой m. Прямая m отображается на себя и называется **осью симметрии**.



Рисунок 2 – Осевая симметрия

Неподвижные точки осевой симметрии - любая точка прямой m.

Неподвижные прямые осевой симметрии:

1) сама прямая m

2) любая прямая, перпендикулярная прямой m

Неподвижные плоскости осевой симметрии:

1) любая плоскость, проходящая через прямую m

2) любая плоскость, перпендикулярная прямой m.

Зеркальная симметрия (симметрия относительно плоскости):

**Определение:**

Точка M' пространства, не лежащая на плоскости α, называется симметричной точке М относительно плоскости α, если отрезок ММ' перпендикулярен этой плоскости и делится ею пополам.

**Определение:**

Преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно плоскости α, называется **зеркальной симметрией** пространства относительно плоскости α. Плоскость α отображается на себя и называется **плоскостью симметрии**.



Рисунок 3 – Зеркальная симметрия

Неподвижные точки зеркальной симметрии - любая точка плоскости α.

Неподвижные прямые зеркальной симметрии:

1) любая прямая плоскости α

2) любая прямая, перпендикулярная плоскости α

Неподвижные плоскости зеркальной симметрии:

1) сама плоскость α

2) любая плоскость, перпендикулярная плоскости α.

Параллельный перенос (точки переносятся на данный вектор):



 Рисунок 4 – параллельный перенос

**Определение**

Пусть дан вектор .

Преобразование пространства, при котором каждая точка пространства M, отображается на такую точку M', что выполняется равенство , называется **параллельным переносом на вектор** .

Перенос на нулевой вектор является тождественным преобразованием.

Параллельный перенос отображает прямую на параллельную ей прямую либо на себя; плоскость на параллельную ей плоскость либо на себя.

Неподвижных точек параллельный перенос на ненулевой вектор не имеет.

Неподвижными прямыми при параллельном переносе на вектор являются прямые, параллельные этому вектору.

Неподвижными плоскостями при параллельном переносе на вектор являются плоскости, параллельные этому вектору.

Поворот на данный угол вокруг данной оси:

**Определение:**

Поворотом пространства на угол φ вокруг прямой n называется такое преобразование пространства, при котором любая точка прямой остается неподвижной и в любой плоскости, перпендикулярной прямой n, осуществляется поворот этой плоскости на угол φ вокруг точки ее пересечения с прямой n.

****

Рисунок 5 – Поворот вокруг прямой

Неподвижными точками являются любая точка оси вращения.

Неподвижной прямой является ось поворота.

Неподвижной плоскостью является любая плоскость, перпендикулярная оси поворота.

Поворот вокруг оси на угол 1800 является осевой симметрией.

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

Дан треугольника АВС: А(3,- 2, 4), В (4, 6, 0), С (2, 2, 2)

В какую точку перейдет центр О пересечения медиан данного треугольника при:

Решение:

Найдем точку пересечения медиант данного треугольника.

Найдем координаты точки М - середины отрезка ВС:

М (); М(3; 4; 1)

Так как медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то можем найти координаты точки О, зная координаты А и М:

О (3; 2; 2).

Теперь найдем координаты образа точки О при каждом из преобразований:.

1. Параллельный перенос на вектор (2; -2; 3) означает, что координаты образа получаются так:

. То есть координаты образа: (5; 0; 5)

1. Симметрия относительно начала координат задается уравнениями:

. То есть координаты образа: (-3; -2; -2)

1. Симметрия относительно координатной плоскости ZOY задается уравнениями:

(ордината и аппликата точки остаются такими же, а абсцисса меняет знак). То есть координаты образа: (-3; 2; 2).

1. Поворот на угол 1800 относительно координатной оси OZ означает симметрию относительно координатной оси OZ и задается уравнениями:

(аппликата точки остается такой же, а ордината и абсцисса меняют знак). То есть координаты образа: (-3; -2; 2).

1. Симметрия относительно плоскости α: х=2.

Эта плоскость параллельная плоскости ZOY, поэтому ордината и аппликата точки остаются такими же. Так как абсцисса токи О хо =3, то расстояние от точки до плоскости α равно 1. Точка, симметричная точке О относительно плоскости α, будет иметь абсциссу, равную хо’ =1.

Поэтому координаты образа (1; 2; 2).