**Тема: Уравнения и неравенства**

**Теоретический материал**

**Равносильные уравнения** Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются равносильными. Уравнения, не имеющие корней, также являются равносильными. Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный. Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю. Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называют следствием первого уравнения. Иначе, если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого уравнения. Из этого определения и определения равносильности уравнений следует, что: 1) если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого; 2) если каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны. Посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное. Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

**Равносильные неравенства** Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называются равносильными. Неравенства, не имеющие решений, также являются равносильными.

Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют **иррациональными**.

Методы решения иррациональных уравнений основаны на возможности замены иррационального уравнения рациональным уравнением, которое является его следствием. Чаще всего обе части уравнения возводят в одну и ту же степень. При этом получается уравнение, являющееся следствием исходного.

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

1. если показатель корня – четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно; при этом значение корня также является неотрицательным;
2. если показатель корня – нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом, в этом случае знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения.

При возведении в квадрат обеих частей уравнения могут появиться лишние корни. Чтобы определить истинность найденных корней, каждый корень последнего уравнения подставляют в исходное уравнение. Значение переменной, которые при подстановке не дают истинных равенств, отбрасывают как посторонние корни.

**Пример 1** Решить уравнение

4.

Решение: 4

Ответ:.

**Показательным** называют уравнение, содержащие переменную в показателе степени.

Так как показательная функция у = аx при a > 1 монотонно возрастает на всей области определения (при 0< а < 1 монотонно убывает), то каждое свое значение она принимает только один раз при одном значении аргумента. Из равенства аv=au следует равенство v=u.

**Пример 2** Решить уравнение 53x-2=( √25)10-x .

Решение: 53x-2=510-x , 3x-2=10-x, 4x=12, x=3.

Ответ:3.

К уравнениям рассмотренного выше типа приводятся уравнения вида (где а>0 и а 1) путем представления единицы в виде степени числа с нулевым показателем .

**Пример 3** Решить уравнение 3х-2\*3х-2=63.

Решение: вынесем общий множитель за скобки.

3х-2\*3х-2=63, 3х-2 (32-2)=63, 3х-2 \*7=63, 3х-2=32, х-2=2, х = 4.

Ответ:4.

Решение **показательных неравенств** сводится к решению неравенств Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Если то х1 = х2, при >0, 1.

Если то х1 < х2, при >1.

Если то х1 > х2, при 0< <1.

**Пример 4** Решить неравенство 3х81.

Решение: запишем неравенство в виде 3х34. Так как 3>1, то функция у=3х является возрастающей. Поэтому решением неравенства 3х81 являются числах 4.

Ответ: х 4.

**Пример 5** Решить неравенство .

Решение: запишем неравенство в виде, или . Так как 1, то функция у=х является убывающей, то х .

**Системы показательных уравнений и неравенств**

**Пример 6** Решить систему уравнений

Решение: решим эту систему способом подстановки: , откуда Найдём значения : =, =.

Ответ: (;3), (1;).

**Пример 7** Решить систему

Решение: решим неравенство т.е. неравенство . Решая, получаем Решим уравнение =, =. Так как 3, 1,5, то =.

Ответ: =.

**Уравнение вида** .

Решить равносильное уравнение .

**Уравнение вида**.

а) найти ОДЗ:  ;

б) решить уравнение ;

в) выбрать из корней уравнения ОДЗ.

**Уравнение вида**.

Решить уравнение относительно переменной, входящей в выражение с переменной.

**Пример 8** Решить уравнение .

Решение: по свойству логарифма верно равенство По определению логарифма получаем , откуда =1, =. Проверим являются ли числа 1 и 5 корнями исходного уравнения. Подставляя в левую часть исходного уравнения , получаем , т.е. - корень уравнения. При числа +1 и +3 отрицательны, и поэтому левая часть исходного уравнения не имеет смысла, т.е. не является корнем уравнения.

Ответ: .

**Пример 9** Решить уравнение.

Решение: приравнивая выражения, стоящие под знаком логарифма, получаем , откуда . Выполняя проверку, убеждаемся, что при левая и правая части исходного уравнения не имеют смысла.

Ответ: корней нет.

**Логарифмические неравенства** вида .

**Пример 10** Решить неравенство

Решение: правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях , а левая часть - при , откуда , т.е. - область определения неравенства. Исходное неравенство запишем так: Так как 10, то 100, откуда . Учитывая область определения исходного неравенства, получаем 99.

Ответ: 99.