**Тема: Элементы теории вероятностей**

**Теоретический материал**

**Теория вероятностей** – раздел математики, изучающий случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними. Рассмотрим некоторые ключевые понятия, которые используются в теории вероятностей.

**Испытанием** называется осуществление определенных действий.

Под **событием** понимают любой факт, который может произойти в результате испытания.

Любой результат испытания называется **исходом**.

**Достоверным** называют событие, которое в результате испытания **обязательно произойдёт**.

**Невозможным** называют событие, которое **заведомо не произойдёт** в результате испытания.

События обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита (А, В, С, D,…).

Рассмотрим **пример 1** В корзине лежат клубки ниток зеленого и белого цвета. Бабушка просит внучку достать ей клубок ниток и, внучка наугад из корзины вынимает один клубок. Какое из следующих событий может произойти?

Варианты ответов: 1) вынутый предмет окажется клубком, 2) вынутый предмет окажется красным клубком, 3) вынутый предмет окажется зеленым клубком, 4) вынутый предмет не окажется клубком. Ответ: первое и третье.

Рассматривая приведенный пример, мы можем сформулировать следующие заключения.

1. Процесс доставания предмета из коробки является испытанием.
2. Результат доставания предмета из корзины является событием.
3. Событие «вынутый предмет окажется клубком» является достоверным событием.
4. События «вынутый предмет не окажется клубком» или «вынутый предмет окажется красным клубком» являются невозможными событиями.
5. Событие «вынутый предмет окажется зеленым клубком» является вероятным событием.

А={вынутый предмет оказался клубком}, В={вынутый предмет не оказался клубком}, С={вынутый предмет оказался зеленым клубком}, D ={вынутый предмет оказался красным клубком}.

**Пространство элементарных событий Ω**— множество всех различных исходов произвольного испытания.

Например, при броске одной игральной кости пространство элементарных событий Ω= {w 1, w 2, w 3, w 4, w 5, w6}, где wi- выпадение i очков.

События А и В называются **совместными**, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются **независимыми**, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет. Если события **не** могут произойти одновременно в одном испытании, то события называются **несовместными**.

Например, при бросании монеты не могут одновременно выпасть «Орёл» и «Решка».

Простейшим примером несовместных событий  является пара **противоположных** событий.

**Противоположное событие** происходит тогда, когда исходное событие А **не** происходит.

Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой сверху.

Например: A – сдал экзамен по математике, Ᾱ – не сдал экзамен по математике.

**Полной группой событий** называется такая система событий, что в результате испытания непременно произойдет одно и только одно из них.

**Пример 2** Монету подбросили дважды. Укажите все элементарные события полной группы событий. Элементарными событиями являются: выпало два «орла», выпало две «решки», выпал один «орел» и одна «рещка».

Число испытаний, в которых событие наступило, назовем **абсолютной частотой и обозначим n.** Общее число произведенных испытаний обозначим **N.**

Отношение абсолютной частоты к числу испытаний **n/N называется относительной частотой события.**

Относительная частота показывает, какая доля испытаний завершилась наступлением данного события. Эта относительная частота и определяет **вероятность случайного события.** Ее еще называют статистической вероятностью события.

Статистическая вероятность события рассчитывается опытным путем. **Полной группой событий** называется такая система событий, что в результате испытания непременно произойдет одно и только одно из них.

Классическое определение вероятности применяется для **равновозможных событий**.

**Равновозможные события -** такие события, для которых нет никаких объективных оснований считать, что одно является более возможным, чем другие. Например, при бросании игрального кубика события выпадения любого из очков равновозможны.

**Классические определение вероятности**

Вероятностью события А называется отношение числа исходов m,благоприятствующих наступлению данного события А, к числу n возможных исходов:

$$P\left(A\right)=\frac{m}{n}$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т.е. 0$\leq Р(А)\leq 1$. Согласно определению вероятности наименьшее значение вероятности принимает невозможное событие, так как оно не может наступить и для него m=0, значит и вероятность равна 0. Наибольшее значение принимает достоверное событие. В силу того, что оно гарантированно произойдет, для него m=n, Р=m/n=n/n=1.

**Суммой** событий А и В называется событие А+В, которое состоит в том, что наступит **или** событие А, **или** событие В, **или** оба события одновременно.

**Произведением** событий А и В называется событие **А•В**, состоящее в совместном осуществлении событий А **и** В.

Например:

1. Пусть А - идет дождь, B - идет снег, тогда А + В – «идет снег или дождь».
2. При 3-х выстрелах по мишени события: А0 – «попаданий нет», А1 – «одно попадание», А2 – «два попадания», тогда А=А0+А1+А2 - «произошло не больше двух попаданий».
3. Пусть С - из урны вынули белый шар, D - из урны вынули белый шар, тогда C⋅D - из урны вынули два белых шара.
4. Пусть С - из урны вынули белый шар, D - из урны вынули белый шар, тогда C⋅ С из урны вынули два  шара: белый и не белый.

**Теорема сложения вероятностей несовместных событий** Вероятность появления одного из двух **несовместных** событий А или В равна сумме вероятностей этих событий:

 **Р(А+В)=Р(А)+Р(В)**.

 **Р(А)+Р(**$\overline{А}$**)=1**, где $\overline{А}$-событие, противоположноеА.

**Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий** равна сумме вероятностей этих событий без вероятности из совместного появления:

$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)$.

**Теоремы умножения вероятностей**

**Теорема умножения вероятностей независимых событий**

Вероятность совместного появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

P($A\_{1}A\_{2…}A\_{k})=P\left(A\_{1}\right)∙P\left(A\_{2}\right)∙……∙P(A\_{K})$.

**Теорема умножения вероятностей зависимых событий**

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго при условии первого: $P\left(AB\right)=P(A)∙P(В/ А)=P(В)∙P(А/В)$ или Р(АВ)=Р(А)$ ∙$РА(В)=Р(В)$ ∙$РВ(А).

Вероятность наступления события А при условии, что событие В уже произошло, называется условной вероятностью события А при условии В и обозначается P(A/ B) или РВ(А).

**Аксиомы вероятностей**

Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число Р(А), называемое вероятностью события А.

Если события А1, А2 … попарно несовместны, то Р(А1+А2+…)=Р(А1)+Р(А2)+…

**Свойства вероятностей**

Вероятность невозможного события равна нулю Р=0.

Вероятность достоверного события равна единице Р=1.

Вероятность произвольного случайного события А заключается между 0 и 1: 0<Р(А)<1.

**Гипотеза** – одно из событий, которые могут привести к появлению данного события.

**Формула полной вероятности**

Рассмотрим зависимое событие А, которое может наступить в результате осуществления одного из несовместных событий B1, B2, B3, …, Bn, которые образуют полную группу. Будем называть события B1, B2, B3, …, Bn гипотезами. Пусть известны их вероятности P(B1), P(B2), P(B3), …, P(Bn) и соответствующие условные вероятности наступления события А PB1(A), PB2(A), PB3(A), …, PBn(A). Тогда вероятность наступления события А находится по следующей формуле полной вероятности: P(A) = P(B1)·PB1(A) + P(B2)·PB2(A) + P(B3)·PB3(A) +…+ P(Bn)·PBn(A).

Вероятность того, что событие A наступит ровно k раз из n равна Pn(k) = Cnkpkqn-k, k=0, 1, 2, …, n, где Cnk=$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число всевозможных сочетаний из n элементов по k. Эта формула называется **формулой Бернулли**.

**Пример 3** В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

Решение: n=30, m=30-2=28. P=$\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$.

Ответ: P$=\frac{14}{15}$.

**Пример 4** Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность P$=\frac{11}{34}$.

Ответ: P$=\frac{11}{34}$.

**Пример 5** Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то Р=0,7+0,8-0,7·0,8=1,5-0,56=0,94.

Ответ: Р=0,94.

**Пример 6** В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки. n1=10, m1=4, Р1=$\frac{4}{10}$, n2=10, m2=3, Р2=$\frac{3}{10}$. Тогда вероятность того, что обе ручки красные: Р=Р1$∙$ Р2=$\frac{4}{10}∙\frac{3}{10}=\frac{12}{100}=$0,12.

Ответ: Р=0,12.

**Пример 7** Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть Н1 – шар из первой урны, Н2 – шар из второй урны и Н3 – шар из третьей урны. Тогда событие А/Н1 – белый шар из первой урны, А/Н2 – белый шар из второй урны и А/Н3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности. Р(Н1)=$\frac{1}{3}$, Р(Н2)=$\frac{1}{3}$, Р(Н3)=$\frac{1}{3}$, Р(А/Н1)=$\frac{5}{12}$, Р(А/Н2)=1, Р(А/Н3)=0. Р(А)=Р(Н1)$∙$ Р(А/Н1)+ Р(Н2)$∙$ Р(А/Н2)+ Р(Н3)$∙$ Р(А/Н3)=$\frac{1}{3}∙\frac{5}{12}+\frac{1}{3}∙1+\frac{1}{3}∙0=\frac{17}{36}$.

Ответ: P$(А)=\frac{17}{36}$.

**Пример 8** В урне 6 черных, 5 красных и 4 белых шара. Последовательно извлекают три шара без возврата. Найдите вероятность того, что первый шар окажется черным, второй – красным и третий – белым.

Решение: А – первый шар окажется черным, В - второй шар красный, С - третий шар белый. P(АВС)=Р(А)$∙$ Р(В/А)$ ∙$Р(С/АВ)=$\frac{6}{15}∙\frac{5}{14}∙\frac{4}{13}=\frac{4}{91}$.

Ответ: P$(АВС)=\frac{4}{91}$.

**Пример 9** Колю отпускают гулять при условии сделанных уроков с вероятностью 0,8. Папа выдает ему деньги на мороженое с вероятностью 0,6. С какой вероятностью Коля пойдет гулять без мороженого?

Решение: A – папа выдал Коле денег на мороженое, B – Колю отпустили гулять. Вероятность того, что Коля пойдёт гулять, есть в условии задачи P(B) = 0,8. Вероятность, что папа не выдаст ему деньги на мороженое, равна P(Ᾱ) = 1 – P(A) = 1 – 0,6 = 0,4. Вероятность одновременного осуществления двух независимых событий – произведение их вероятностей P(ᾹB) = P(Ᾱ)·P(B) = 0,8·0,4 = 0,32.

Ответ: P(ᾹB) =0,32.

**Пример 10** Из 20 экзаменационных вариантов по математике 3 варианта содержат простые задачи. Пятерым учащимся произвольно выдают варианты. Найти вероятность того, что хотя бы одному из них достанется вариант с простыми задачами.

Решение: A – хотя бы одному из пяти учащихся достанется простой вариант, сформулируем противоположное событие Ᾱ – всем пятерым достанутся непростые варианты. Данные события являются противоположными, поэтому P(A) + P(Ᾱ) = 1. По теореме умножения вероятностей зависимых событий: P(Ᾱ) =17/20·16/19·15/18·14/17·13/16 = 91/228. Тогда P(A) = 1 – P(Ᾱ) = 1 – 91/228 = 137/228 – искомая вероятность.

Ответ: P(A) = 137/228 ≈ 0,6.