**Тема: Производная, её геометрический смысл. Применение производной к исследованию функций**

**Теоретический материал**

**Производной функции**  называется конечный предел отношения приращения функции  к приращению независимой переменной  при стремлении последней к нулю:



Обозначения производной в точке *х*0:

 и другие.

Если функция в точке *х*0 (или на промежутке *Х*) имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке (или на промежутке *Х*).

Процесс отыскания производной называется **дифференцированием**.

###### Геометрический смысл производной:



















***N***



###### Если кривая задана уравнением , то — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке (.

Уравнение касательной к кривой    
в точке х0 (прямая М0Т) имеет вид



**Производная степенной функции**

Формула для вычисления производной степенной функции xn, где n – произвольное натуральное число, такова: **(xn)** ' **=nxn-1** . (1) Формула для вычисления производной степенной функции (kx+b)p: **((kx+b)p)** ' **= pk(kx+b)p-1**. (2)

**Пример 1** Докажем что, https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4922/20190730115800/OEBPS/objects/c_matan_11_12_1/b1841770-8537-4a31-b744-b422fdeb0d39.png, при https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4922/20190730115800/OEBPS/objects/c_matan_11_12_1/d4561333-5c0f-4fdb-beae-d12a6161e787.png.

Решение: представим https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4922/20190730115800/OEBPS/objects/c_matan_11_12_1/f8d2d059-7ff9-42dc-805d-9b771ae6b3ef.pngкак х-1; воспользуемся формулой (1): (х-1)’=-1·x-1-1=-x-2; вернемся к первоначальному виду https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4922/20190730115800/OEBPS/objects/c_matan_11_12_1/92759216-a311-4b32-8b6f-af49368d6580.png.

**Пример 2** Найдем производную функции (3х-1)7.

Решение: воспользуемся формулой (2), ((3х-1)7)’=21(3x-1)6.

**Элементарными функциями** называют степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации.

1. **(ex)** '**= ex**
2. **(ekx+b)** '**=kekx+b**
3. **(ax)** '**=axlna**
4. https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6114/20190730115954/OEBPS/objects/c_matan_11_13_1/370c6140-a29f-4cf7-95b5-e75f5bee765f.png
5. https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6114/20190730115954/OEBPS/objects/c_matan_11_13_1/a3dc46fd-e511-4682-b251-62d1d5f80a57.png
6. https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6114/20190730115954/OEBPS/objects/c_matan_11_13_1/a1a2bd8c-c5f5-4d1b-9f0d-21629119464d.png
7. **(sin x)** '**=cosx**
8. **(cos x)** '**= -sinx**

**Производная показательной функции**

Показательная функция f(x)=ax, где а>0, a ≠1, определена на всей числовой прямой и имеет производную в каждой ее точке. Любую показательную функцию можно выразить через показательную функцию с основанием у по формуле: **ax=аxln a**. (3)

**(ex)** '**= ex**. (4) Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим:

**(ekx+b)** ' **= kekx+b**. (5)

**Производная логарифмической функции**

Производная функции lnх выражается формулой https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6114/20190730115954/OEBPS/objects/c_matan_11_13_1/ea3dfc3e-ebca-48da-b50b-8281213bf93a.png. (6)

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6114/20190730115954/OEBPS/objects/c_matan_11_13_1/a4fe1350-5180-4cae-8bc5-5793c840840b.png . (7), https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6114/20190730115954/OEBPS/objects/c_matan_11_13_1/990a6a72-37df-4c94-9a1b-343ce65bf4e0.png **.** (8)

**Производные тригонометрических функций**

Для тригонометрических функций справедливы следующие равенства:

**(sin x)**'**=cosx х, (cos x)**'**= -sinx х**. (9)

**Пример 3** Найти производную f(x) = 3lnx.

Решение: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6114/20190730115954/OEBPS/objects/c_matan_11_13_1/ff1ae6d6-42b9-4ca8-8fa4-9bccb6ad1541.png. Ответ: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6114/20190730115954/OEBPS/objects/c_matan_11_13_1/58c755d4-b17c-44cd-b3a5-022d6434da88.png.

**Пример 4** Найти производную f(x) = 3·e2x.

Решение: (3e2x) **'** = 3·2· e2x = 6 ·e2x. Ответ: 6 ·e2x.

**Пример 5** Найти производную f(x) = 2x.

Решение: (2x) ' = 2xln2. Ответ: 2xln2.

**Пример 6** Найти производную f(x) = sin (2x+1) - 3cos(1-x).

Решение: (sin (2x+1) - 3cos(1-x)) **'** = 2cos(2x+1) - 3sin(1-x).

Ответ: 2cos(2x+1) - 3sin(1-x).

**Правила дифференцирования**

**Производная суммы** равна сумме производных. **Производная суммы нескольких функции** равна сумме производных этих функции.

Производная суммы равна сумме производных: (f(x) + g(x))' = f '(x) + g'(x).

Подробно это свойство производной формулируется так: Если каждая из функции f(x) и g(x) имеет производную, то их сумма также имеет производную и справедлива формула.

Производная суммы нескольких функции равна сумме производных этих функции:

(f(x) +…+ g(x))' = f '(x) +…+ g'(x).

**Производная** разности равна разности производных.

Производная разности равна разности производных: (f(x) - g(x))' = f '(x) - g'(x).

**Производная произведения** равна произведению первого множителя на второй плюс первый множитель, умноженный на производную второго.

(f(x)·g(x)) '=f' (x)·g(x)+f(x)·g' (x).

Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

(cf(x))'=cf ' (x).

**Производная частного** равна производной числителя умноженного на знаменатель минус числитель, умноженный на производную знаменателя и все это деленное на квадрат знаменателя.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3954/20190730115223/OEBPS/objects/c_matan_11_11_1/3fe99ae4-2ac4-414e-8778-5f2edc502a91.png.

**Производная сложной функции**

Производная сложной функции находится по формуле: (f(g(x))) '=f '(g(x))·g' (x).

**Пример 7** Найти производную функции f(x)=8x3+3x2-x.

Решение: f' (x)=(8x3) '+(3x2) '-x'=24x2+6x-1. Ответ: f' (x)=24x2+6x-1.

**Пример 8** Найти производную функции f(x)=(3x-4)(4-5x).

Решение: воспользуемся формулой производной произведения:

f' (x)=(3х-4) ' (4-5х) + (3х-4)(4-5х) '=3(4-5х)-5(3х-4)=12-15х-15х+20= 32-30х.

Ответ: f' (x)=32-30х.

**Пример 9** Найти производную функции https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3954/20190730115223/OEBPS/objects/c_matan_11_11_1/76f15f29-b8f3-436d-b89e-0b395ca79a81.png.

Решение: воспользуемся формулой производной частного:

f /(x)==.

Ответ: f /(x) .

**Пример 10** Найти производную функции f(x)=(2x-1)2.

Решение: по правилу нахождения производной от сложной функции, получаем:

f' (x)=((2x-1)²) '·(2x-1)'=2(2x-1)·2=4(2x-1)=8x-4. Ответ: f' (x)=8x-4.

**Применение производной к исследованию функций и построению графиков**

**Асимптота** графика функции y = f(x) – прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки (х, f(x)) до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

**Возрастание функции** Функция y=f(x) возрастает на интервале X, если для любых х1и х2, https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/f41a9a45-a454-46ba-b339-1a2b654e902c.pngиз этого промежутка выполняется неравенство https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/4b1669ba-5bfd-49b8-89ef-481cd9a6bddc.png. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

**Убывание функции** Функция y=f(x) убывает на интервале X, если для любых х1 и х2 ,https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/9aeb9a1a-8332-482d-8491-da28794927a4.png из этого промежутка выполняется неравенство https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/f24c5115-b3d0-40f3-a869-32730a108ed1.png. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

**Выпуклость вверх** Функция выпукла вверх, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка.

**Выпуклость вниз** Функция выпукла вниз, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка.

**Максимум функции** Значение функции в точке максимума называют максимумом функции.

**Минимум функции** Значение функции в точке минимума называют минимумом функции.

**Точка максимума функции** Точку х0 называют точкой максимума функции y = f(x), если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство  https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/ce79dc48-1ef4-482c-8cba-f68efcc72478.png.

**Точка минимума функции** Точку  х0 называют точкой минимума функции y = f(x), если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство  https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/ba94c5a6-1aaf-45e5-bb51-4c1a234243f6.png.

**Точка перегиба** Точки, в которых выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз или наоборот, называются точками перегиба.

**Точки экстремума функции** Точки минимума и максимума называют точками экстремума.

**Полная схема построения графика функции**

1. Найти область определения функции D(f).
2. Исследовать функцию на четность (найти f(-x)).
3. Найти асимптоты.
4. Найти стационарные и критические точки.
5. Найти промежутки монотонности.
6. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз.
7. Найти точки перегиба.
8. Составить таблицу значений функции для некоторых точек.
9. По полученным данным построить график функции.

**Алгоритм нахождения интервалов выпуклости графика функции**

1. Найти область определения функции.
2. Найти вторую производную функции.
3. Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
4. Найти интервалы, на которые область определения функции разбивается этими точками.
5. Определить знаки второй производной на каждом интервале.
6. Если f '‘(х) < 0, то кривая выпукла вверх; если f '‘(х) > 0, то кривая выпукла вниз.

Точки, в которых вторая производная меняет знак, - точки перегиба.

**Пример 11** Постройте график функции у = х3 – 3х + 3, используя краткую схему построения, схему построения.

Решение:

1) D(y) = (-∞; +∞).

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, т. к. https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/cb2ea24d-2042-450e-9027-2e524e6995a5.png.

3) Асимптот нет.

4) f’(x) = 3x2 – 3, f’(x) = 0 при х = 1, х = -1.

х = 1, х = -1 – стационарные точки.

5) f’(x)>0 при https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/347f1b9c-f05f-4c63-8aef-933625e49ce7.png. Так как в точках х = 1, х = -1 функция непрерывна, то эти точки также включаются в промежутки возрастания.

f’(x)<0 при https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/d8b70c7a-d40e-4962-a6ba-bd31f39c535b.png. Так как в точках х = 1, х = -1 функция непрерывна, то эти точки также включаются в промежутки убывания.

6) Так как в точке х = -1 производная меняет знак с «+» на «-», то х = -1 – точка максимума.

Так как в точке х = 1 производная меняет знак с «-» на «+», то х = 1 – точка минимума.

7) Результаты исследования представим в виде таблицы.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | (-∞; -1) | -1 | (-1; 1) | 1 | (1; +∞) |
| f’(x) | + | 0 | - | 0 | + |
| f(x) | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/b2aabc31-19c3-4fb7-b7fd-255d39ecb403.png | 5 | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/d226e0bf-2929-4bc4-8975-0b8d3ce91a31.png | 1 | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4016/20190910174039/OEBPS/objects/c_matan_11_20_1/f0fee647-88e0-47c6-974f-535518dbc8db.png |
|  |  | max |  | min |  |

8) Координаты некоторых точек:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | -2 | 0 | 2 |
| f(x) | 1 | 3 | 5 |

9) По полученным данным строим график.

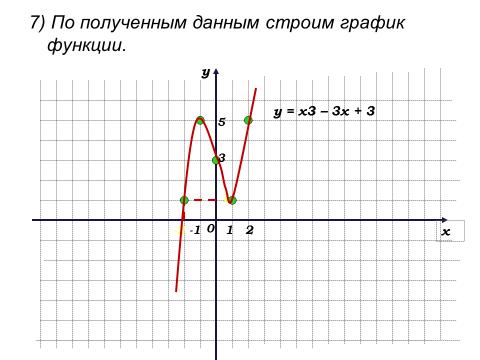


Рисунок 1 – график функции у = х3 – 3х + 3.

**Пример 12** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6116/20200313175852/OEBPS/objects/c_matan_11_18_1/29cd0e87-bd77-423d-9e8c-c51c3db4ce2c.png.

Решение:

1. Область определения данной функции D(y) = (-∞; +∞).
2. Найдем вторую производную функции: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6116/20200313175852/OEBPS/objects/c_matan_11_18_1/474ffe91-879a-4198-b4c3-1e679ae11c65.png.
3. https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6116/20200313175852/OEBPS/objects/c_matan_11_18_1/1e5ba421-2f66-4472-99a1-e0498fdfc193.png при х = 1, х = -1.
4. Определим знаки второй производной на каждом интервале (-∞; -1), (-1; 1), (1; +∞), используя метод интервалов.



Рисунок 2 – интервалы на числовой прямой.

1. Так как на интервалах (-∞; -1) и (1; +∞) вторая производная положительна, то на этих интервалах функция выпукла вниз. Так как на интервале (-1; 1) вторая производная отрицательна, то на этом интервале функция выпукла вверх. Так как при переходе через точки х = 1 и х = -1 вторая производная меняет знак, то эти точки являются точками перегиба.

Ответ: функция выпукла вниз на интервалах (-∞; -1), (1; +∞), функция выпукла вверх на интервале (-1; 1), х = 1, х = -1 – точки перегиба.

**Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции**

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции y = f(x) на отрезке [a; b]:

1. Найти область определения функции D(f).
2. Найти производную f‘ (x).
3. Найти стационарные и критические точки функции, принадлежащие интервалу (a; b).
4. Найти f(a), f(b) и значения функции в стационарных точках, принадлежащих интервалу (а; b).
5. Среди полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

**Пример 13** Найти наибольшее и наименьшее значения функции f (x) = 2x3 – 9x2 + 12x – 2 на отрезке [0; 3].

Решение. действуем в соответствии с алгоритмом:

1) D(f) = (-∞; +∞), 2) fhttps://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6115/20190202123143/OEBPS/objects/c_matan_11_17_1/7d7743a3-ac41-4513-b7a4-47332500bab2.png (x) = 6x2 – 18x + 12, 3) стационарные точки: х = 1; х = 2,

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6115/20190202123143/OEBPS/objects/c_matan_11_17_1/b6138db4-7268-4ec7-b572-ea5ad03961f5.png, 4) f(0) = -2, f(3) = 7, f(1) = 3, f(2) = 2, 5) fнаим.=f(0) = -2, fнаиб.=f(3) = 7.

Ответ: fнаим= -2, fнаиб.= 7.

**Производная второго порядка. Производная n-го порядка**

Производная от данной функции называется первой производной или производной первого порядка. Но производная функции также является функцией, и если она дифференцируема, то от неё, в свою очередь, можно найти производную.

Производная от производной называется **второй производной** или производной второго порядка и обозначается fhttps://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6195/20190910173807/OEBPS/objects/c_matan_11_19_1/adc89bbc-eb7c-4f5b-b130-4f1a7725adc1.pngили https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6195/20190910173807/OEBPS/objects/c_matan_11_19_1/a62d7c42-f80c-43ac-8bfc-ef8413fa3197.png

Производная от второй производной называется производной третьего порядка и обозначается https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6195/20190910173807/OEBPS/objects/c_matan_11_19_1/2099b0d0-8275-4f27-adcb-a5cb1485dc64.pngили f'''(x). Производную n-го порядка обозначают f(n) (x) или y(n).

Если первая производная функции – это мгновенная скорость изменения любого процесса, заданного функцией, то вторая производная – это скорость изменения скорости, то есть ускорение, то есть https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6195/20190910173807/OEBPS/objects/c_matan_11_19_1/0dbdbd1a-b349-410a-b13a-d54213a85ff8.png

**Первая производная – это скорость изменения процесса, вторая производная – ускорение** (v= s'; a=v').

**Пример 14** Точка движется прямолинейно по закону https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6195/20190910173807/OEBPS/objects/c_matan_11_19_1/6877918d-e145-416f-bdd2-6d04e1bad516.png  (S выражается в метрах, t – в секундах). Найти скорость движения через 3 секунды после начала движения.

Решение: скорость прямолинейного движения равна производной пути по времени, то есть https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6195/20190910173807/OEBPS/objects/c_matan_11_19_1/8e72d2e4-2354-4d07-8236-ecbee930cf13.png. Подставив в уравнение скорости t=3 с, получим v(3)=32+4∙3-1= 20 (м/с). Ответ: 20 м/c.

**Пример 15** Точка движется по закону S(t) = 3t4 – 8t3 + 2t – 3. В какой момент времени ускорение точки будет равно 48?

Решение: ускорение - это вторая производная s(t), найдем уравнение ускорения.

v= s'(t) = 12t3 – 24t2 + 2, a= S''(t) = 36t2 – 48t. Остается подставить вместо ускорения его значение равное 48 и решить уравнение 36t2 – 48t=48, 36t2 – 48t-48=0. При решении один корень получается отрицательный, чего не может быть по условиям задачи, а второй корень равен 2. Ответ: 2.