**Тема: Прямые и плоскости в пространстве**

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

**Определение** Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

**Определение** Скрещивающиеся прямые − прямые, которые не лежат в одной плоскости.

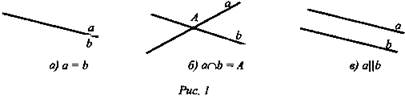
**Определение** Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90֯°.

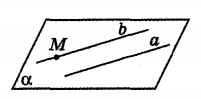
**Определение** Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.

**Определение** Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

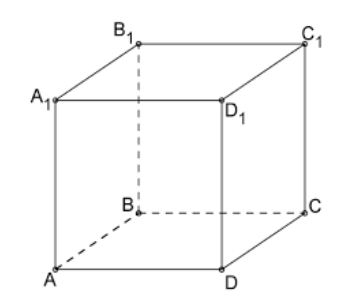
Геометрия, которую мы изучаем, называется евклидовой, по имени древнегреческого ученого Евклида (3 век до нашей эры), который создал целый труд по математике под названием «Начала». В данной книге есть раздел о параллельных прямых.

Каково расположение 2-х прямых на плоскости (совпадают, пересекаются, параллельны) (рис. 1 а, б, в).





Перейдем к взаимному расположению 2-х прямых в пространстве. Как и в планиметрии, две различные прямые в пространстве либо пересекаются в одной точке, либо не пересекаются (не имеют общих точек). Но второй случай допускает две возможности: прямые лежат в одной плоскости (**параллельны**) или прямые не лежат в одной плоскости. В первом случае они параллельны, а во втором - такие прямые называются **скрещивающимися**.



Проиллюстрировать данные определения наглядно нам поможет куб.

Давайте укажем некоторые пары параллельных прямых:

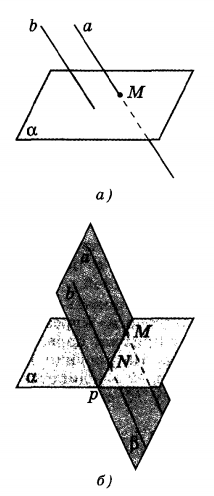
AB||A₁B₁; AB|| CD; A₁B₁||C₁D₁; CD||C₁D₁; AD||A₁D₁; BC||B₁D₁; AD||BC; A₁D₁||B₁C₁.

А теперь рассмотрим некоторые пары скрещивающихся прямых, как мы отметили, они не должны лежать в одной плоскости:

AB A₁D₁; AB B₁C₁; CD A₁D₁; CD B₁C₁; BC C₁D₁; BC A₁B₁; AB B₁C₁; AB A₁D₁.

**Теорема** Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

1. Точка М и прямая а задают плоскость α.
2. Прямая, проходящая через точку М параллельно прямой а, должна лежать в одной плоскости с точкой М и прямой а, т.е. в плоскости α.
3. В плоскости α через точку М проходит прямая, параллельная прямой а, и притом только одна - это нам известно из курса планиметрии.
4. На чертеже эта прямая обозначена буквой b .
5. Следовательно, b-единственная прямая, проходящая через точку М параллельно прямой а.



**Лемма** Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

1. Рассмотрим две параллельные прямые a и b и допустим, что прямая b пересекает плоскость α в точке M(а рис.).
2. Мы знаем, что через параллельные прямые a и b можно провести только одну плоскость β. (теорема).
3. Так как точка M находится на прямой b, то M также принадлежит плоскости β (б рис.). Если у плоскостей α и β есть общая точка M, то у этих плоскостей есть общая прямая p, которая является прямой пересечения этих плоскостей (4 аксиома).
4. Прямые a, b находятся в плоскости β.Если в этой плоскости одна из параллельных прямых b пересекает прямую p, то вторая прямая a тоже пересекает p.
5. Точку пересечения прямых a и p обозначим за N. Так как точка N находится на прямой p, то N находится в плоскости α и является единственной общей точкой прямой a и плоскости α.
6. Значит, прямая a пересекает плоскость α в точке N.

Нам известно из курса планиметрии, что если три прямые лежат в одной плоскости и две из них параллельны третьей, то эти две прямые параллельны. Похожее утверждение имеет место и для трех прямых в пространстве.

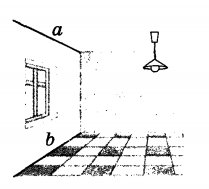
**Теорема** Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Возможны три расположения прямой и плоскости:

|  |  |
| --- | --- |
| * 1. прямая лежит в плоскости | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6065/20190322170200/OEBPS/objects/c_geom_10_4_1/e5792a58-9928-4e18-a987-f07b65ab3e5e.png |
| * 1. прямая и плоскость имеют только одну общую точку, т.е. пересекаются | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6065/20190322170200/OEBPS/objects/c_geom_10_4_1/b0ff7271-69da-4208-a17d-61987839c9fc.png |
| * 1. прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки, две плоскости α и β пересекаются по прямой а | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6065/20190322170200/OEBPS/objects/c_geom_10_4_1/950f3283-4201-425e-be8f-2db76bbadcd6.png |

**Определение** Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек. Обозначение: a||α.

Наглядный пример, который дает представление о прямой, параллельной плоскости- это линия пересечения стены и потолка -она параллельна плоскости пола.



**Теорема (признак параллельности прямой и плоскости)**  
Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой на этой плоскости, то эта прямая параллельна данной плоскости.

Существует еще два утверждения, которые используются при решении задач:

1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.
2. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо тоже параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.
3. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

**Скрещивающиеся прямые** — прямые, которые не лежат в одной плоскости.

Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на паралельных прямых.

**Основная литература:**

1. Учебник Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. Геометрия 10-11 кл.– М.: Просвещение, 2014.

**Дополнительная литература:**

1. Зив Б.Г. Дидактические материалы Геометрия 10 кл.– М.: Просвещение, 2014.
2. Глазков Ю.А., Юдина И.И., Бутузов В.Ф. Рабочая тетрадь Геометрия 10 кл.-М.: Просвещение, 2013.

**Открытый электронный ресурс:**

1. <https://ege.sdamgia.ru/>

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

Мы уже знаем, что прямы в пространстве могут располагаться параллельно или пересекаться. Существует еще один вид- **скрещивающиеся прямые**. С ним мы мимолетно познакомились на предыдущем уроке. А сегодня нам предстоит разобраться с этой темой более подробно.

**Определение.** Скрещивающиеся прямые — прямые, которые не лежат в одной плоскости. (рис. 1)

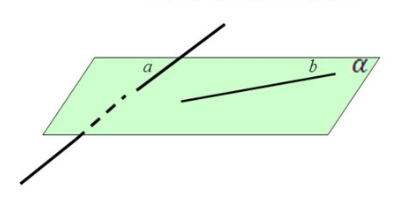


Рисунок 1 – скрещивающиеся прямые

На прошлом уроке в качестве наглядного примера нами был приведен куб.

Сегодня предлагаем вам обратить внимание на окружающую вас обстановку и найти в ней скрещивающиеся прямые.

Примеры скрещивающихся прямых вокруг нас:

Разберем и докажем теорему, которая выражает признак скрещивающихся прямых.

**Теорема.** Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся (не лежат в одной плоскости).

Доказательство.Рассмотрим прямую AB лежащую в плоскости и прямую CD, которая пересекает плоскoсть в точке D, не лежащей на прямой AB (рис. 2).

1. Допустим, что прямые AB и CD всё-таки лежат в одной плоскости.  
   2. Значит эта плоскость идёт через прямую AB и точку D, то есть она совпадает с плоскостью α.  
   3. Это противоречит условиям теоремы, что прямая CD не находится в плоскости α, а пересекает её.  
   Теорема доказана.

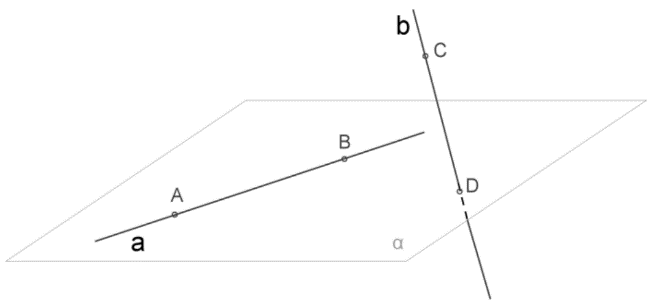


Рисунок 2 – скрещивающиеся прямые АВ и СD

Итак, возможны три случая расположения прямых в пространстве:

Разберем и докажем еще одну теорему о скрещивающихся прямых.

**Теорема.** Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

ДоказательствоРассмотрим скрещивающиеся прямые AB и CD.(рис. 3)

1. Через точку D можно провести прямую DE параллельную AB.   
2. Через пересекающиеся прямые CD и DE можно провести плоскость α  
3. Так как прямая *А*B не лежит в этой плоскости и параллельна прямой DE, то она параллельна плоскости.

4. Эта плоскость единственная, так как любая другая плоскость, проходящая через CD, будет пересекаться с DE и AB, которая ей параллельна.  
 Теорема доказана.

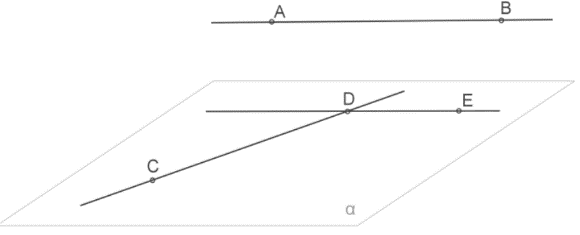


Рисунок 3 – прямые АВ, СD, DЕ

Любая прямая, например ОО1, рассекает плоскость на две полуплоскости. Если лучи ОА и О1А1 параллельны и лежат в одной полуплоскости, то они называются сонаправленными.

Лучи О1А1 и ОА не являются сонаправленными. Они параллельны, но не лежат в одной полуплоскости. (рис. 4)

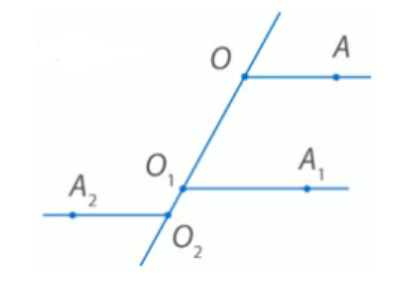


Рисунок 4 – сонаправленные лучи

**Теорема.**Если стороны двух углов соответственно сонаправленны, то такие углы равны. (рис. 5)

Доказательство:

при доказательстве  ограничимся случаем, когда углы лежат в разных плоскостях.

1. Стороны углов сонаправлены, а, значит, параллельны. Проведем через них плоскости-   как показано на чертеже.

Отметим на сторонах угла O произвольные точки A и B.

На соответствующих сторонах угла O1 отложим отрезки OA1 и O₁B₁ равные соответственно ОA и OB.

2. В плоскости    рассмотрим четырехугольник OAA1O1.

Так как противолежащие стороны OA и O1A1 этого четырехугольника равны и параллельны по условию, то этот четырехугольник– параллелограмм и, следовательно, равны и параллельны стороны  AA1  и OO1.

3. В плоскости, аналогично можно доказать, что OBB1O1 параллелограмм, поэтому равны и параллельны стороны ВВ1 и OO1.

4. Если две отрезка AA1 и BB1 равны параллельны третьему отрезку OO1, значит, они равны и параллельны, т. е. АА1||BB1 и AA1 = BB1.

По определению четырехугольник АВВ1А1 – параллелограмм и из этого получаем АВ=А1В1.

5.Из выше построенного и доказанного АВ=А1В1, ОA =O1A1 и OB =O1B1 следует, что треугольники AOB и A1 O1 B1. равны по трем сторонам, и поэтому  О= О1.

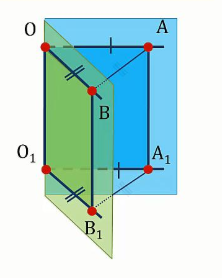


Рисунок 5 – равные углы с сонаправленными сторонами

Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Если известен один из этих углов, то можно найти и другие три угла. Пусть а - тот из углов, который не превосходит любого из трех остальных углов. Тогда говорят, что угол между пересекающимися прямыми равен а. Очевидно, 0° < а ≤ 90°.

Введем теперь понятие угла между **скрещивающимися прямыми**(рис. 6, 7).Пусть АВ и СD- две скрещивающиеся прямые (рис. а.) Через произвольную точку М1 проведем прямые А1В1 и С1D1, соответственно параллельные прямым АВ и СВ (рис. б). Если угол между прямыми А1В1 и C1D1 равен φ, то будем говорить, что **угол между скрещивающимися прямыми АВ и CD равен φ**. Докажем, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки М₁.

Действительно, возьмем любую другую точку М₂ и проведем через нее прямые А1В1 и С1D1, соответственно параллельные прямым АВ и СD (рис. б).

Так как А1В1||А1В1, C1D1|| С1D1, то стороны углов с вершинами М1 и М1 попарно сонаправлены (рис. б, такими углами являются ∟A1M1C1 и ∟A1M1C1, ∟A1M1D1 и ∟A1M1D1 и т.д.) Поэтому эти углы соответственно равны. Отсюда следует, что угол между прямыми А1В1 и С1D1 также равен φ. В качестве точки М, можно взять любую точку на одной из скрещивающихся прямых.

На рисунке в на прямой СD отмечена точка М и через нее проведена прямая А'В', параллельная АВ. Угол между прямыми А'В' и СD также равен φ.

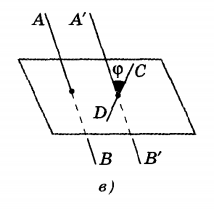


Рисунок 6 – угол между скрещивающимися прямыми

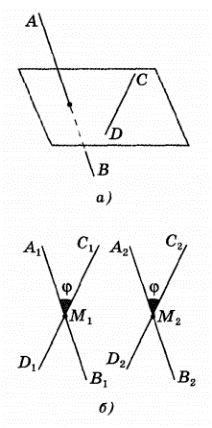
****

Рисунок 7 – угол между скрещивающимися прямыми

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

**Пример 1.** Прямая с пересекает прямую а и не пересекает прямую b, параллельна прямой а. Докажите, что b и с- скрещивающиеся прямые .

**Доказательство:**

1. a||b- через a и b проведем плоскость α (эта плоскость существует по определению параллельных прямых);
2. пусть с пересекает а в точке М. a||b⇒ М ∉b.
3. по теореме о признаке скрещивающихся прямых, с и b скрещиваются.

**Пример 2.** Выделите цветом верный ответ:

**Дано:** ОВ||CD

ОА и CD- скрещивающиеся

∟АОВ= 40°

**Найти:** угол между ОА и CD

1. **50**°
2. **40**°
3. **140**°

Решение:

1. *D ∈ A1D, A1D||AO*
2. *угол между ОА и CD=∟A1DC*
3. *∟A1DC=∟AOB=40*°*.*

Ответ*: ∟A1DC=40*°*.*

Правильный ответ:

1. **50**°
2. **40**°
3. **140**°
4. **Глоссарий по теме**
5. **Определение.** Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.
6. **Определение.** Скрещивающиеся прямые — прямые, которые не лежат в одной плоскости.
7. **Определение.** Два отрезка называются параллельными, если они лежат на паралельных прямых.
8. **Определение.** Плоскости, которые не пересекаются, называются параллельными.
9. **Основная литература:**
10. Глазков Ю. А., Юдина И. И., Бутузов В. Ф. Рабочая тетрадь по геометрии 10 Москва «Просвещение» 2013 год. С. 1-4.
11. **Дополнительная литература:**
12. Зив Б. Г. Геометрия 10 класс Дидактические материалы Москва «Просвещение» 2013 год. С.4, 14, 24
13. **Теоретический материал для самостоятельного изучения**
14. Как известно из аксиом стереометрии, если плоскости имеют одну общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Значит две плоскости или пересекаются, или не пересекаются.
15. **Определение.** Плоскости, которые не пересекаются, называются параллельными.
16. Параллельные плоскости α и β обозначаются α∥β.
17. Изображение:
18. **Пример 1.**
19. Любая конструкция с полом, потолком и стенами даёт нам представление о параллельных плоскостях - пол и потолок как две параллельные плоскости, боковые стены как параллельные плоскости.
20. **Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
21. **Доказательство.**
22. Пусть α и β - данные плоскости, a1 и a2 – пересекающиеся прямые в плоскости α, а b1 и b2 соответственно параллельные им прямые в плоскости β.
23. Допустим, что плоскости α и β не параллельны, то есть они пересекаются по некоторой прямой c.
24. Прямая a1 параллельна прямой b1, значит она параллельна и самой плоскости β.
25. Прямая a2 параллельна прямой b2, значит она параллельна и самой плоскости β (признак параллельности прямой и плоскости).
26. Прямая c принадлежит плоскости α, значит хотя бы одна из прямых a1 или a2 пересекает прямую c, то есть имеет с ней общую точку. Но прямая c также принадлежит и плоскости β, значит, пересекая прямую c, прямая a1 или a2 пересекает плоскость β, чего **быть не может**, так как прямые a1 и a2 параллельны плоскости β.
27. Из этого следует, что плоскости α и β не пересекаются, то есть они **параллельны**.
28. Теорема доказана.
29. **Свойства параллельных плоскостей.**
30. Теорема 1. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то линии их пересечения параллельны.
31. **Доказательство.**
32. Пусть α и β - параллельные плоскости, а γ- плоскость, пересекающая их.
33. Плоскость α пересекается с плоскостью γ по прямой a.
34. Плоскость β пересекается с плоскостью γ по прямой b.
36. Линии пересечения a и b лежат в одной плоскости γ и потому могут быть либо пересекающимися, либо параллельными прямыми. Но, принадлежа двум параллельным плоскостям, они не могут иметь общих точек. Следовательно, они **параллельны**.
37. Теорема 2. Отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны.
38. **Доказательство.**
39. Пусть α и β - параллельные плоскости, а a и b – параллельные прямые, пересекающие их.
40. Через прямые a и b можно провести плоскость - эти прямые параллельны, значит определяют плоскость, причём только одну.
41. Проведённая плоскость пересекается с плоскостью α по прямой AB, а с плоскостью β по прямой CD.
42. По предыдущей теореме прямые AB и CD параллельны. Четырехугольник ABCD есть параллелограмм (у него противоположные стороны параллельны). А раз это параллелограмм, то противоположные стороны у него **равны**, то есть BC=AD.
43. **Теорема 3.** Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.
44. **Доказательство.**
45. Пусть α||β, a пересекает α в точке А.
46. Выберем в плоскости любую точку *C*. Через эту точку и прямую *a* проведём плоскость.
47. Так как плоскость имеет с плоскостями α и β общие точки *A* и *C* соответственно, то она пересекает эти плоскости по некоторым прямым *b* и *c*, которые проходят соответственно через точки *A* и *C*. По предыдущей теореме прямые *b* и *c* параллельны. Тогда в плоскости прямая *a* пересекает (в точке *A*) прямую *b*, которая параллельна прямой *c*. Значит, прямая *a* пересекает и прямую *c* в некоторой точке *B*. Так как прямая *c* лежит в плоскости, то точка *B* является точкой пересечения прямой *a* и плоскости. Теорема доказана.
48. **Теорема 4.** Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.
49. **Доказательство.**
50. Пусть α||β, α и γ пересекаются.
51. Докажем, что плоскости β и γ пересекаются.
52. Проведём в плоскости γ прямую *a*, пересекающую плоскость α в некоторой точке *B*. Тогда по теореме 3 прямая *a* пересекает и плоскость β в некоторой точке *A*. Следовательно, плоскости β и γ имеют общую точку *A*, т. е. пересекаются. Теорема доказана.
53. **Теорема 5.** Через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.
54. **Доказательство.**
55. Пусть нам даны плоскость α и точка М, ей не принадлежащая.
56. Докажем, что существует плоскость β, которой принадлежит точка М, параллельная плоскости α.
57. В данной плоскости α проведём две произвольные пересекающиеся прямые *a* и *b*. Через точку *M* проведём прямые *a*1 и *b*1, параллельные соответственно *a* и *b*. Плоскость, проходящую через пересекающиеся прямые *a*1 и *b*1, обозначим β. На основании признака параллельности плоскостей плоскость β параллельна плоскости α.
58. Докажем методом от противного, что β — единственная плоскость, удовлетворяющая условию теоремы.
59. Допустим, что через точку *M* проходит другая плоскость, например β1, параллельная α.
60. Так как β1 пересекает плоскость β (они имеют общую точку *M*), то по теореме 4 плоскость β1 пересекает и плоскость α (β ‖ α). Мы пришли к противоречию. Таким образом, предположение о том, что через точку *M* можно провести плоскость, отличную от плоскости β и параллельную плоскости α, неверно. Значит, плоскость β — единственна. Теорема доказана.
61. Рассмотрим несколько примеров на применение данных свойств.
62. **Пример 2.**
63. Даны две пересекающиеся прямые a и b точка А, не лежащая в плоскости этих прямых. Докажите, что через точку А проходит плоскость, параллельная прямым a и b, и притом только одна.
64. **Доказательство.**
65. Прямые a и b пересекаются по условию, следовательно, по следствию из аксиомы А1, эти прямые единственным образом определяют плоскость α.
66. Известно, что через точку А, не принадлежащую плоскости α, проходит единственная плоскость, параллельная α, т.е. параллельная прямым a и b(по теореме 5) **.**
67. **Пример 3.**
68. Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Докажите, что прямая m параллельна плоскости β.
69. **Доказательство.**
70. Предположим, что прямая m пересекает плоскость β в точке М. Тогда точка М принадлежит плоскости α (т.к. прямая m лежит в плоскости α) и М принадлежит плоскости β, значит, α и β пересекаются, но они параллельны по условию. Очевидно, m не пересекает плоскость α, т.е. параллельна ей.
71. **Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**
72. **№1.** Тип задания: **ввод с клавиатуры пропущенных элементов в тексте**
73. Три отрезка А1А2, В1В2 и С1С2, не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости А1В1С1 и А2В2С2 параллельны.
74. **Доказательство.**
75. Докажем параллельность А1В1 и А2В2.
76. Рассмотрим плоскость, проходящую через прямые А1А2 и В1В2
77. (она существует и **единственная**, т.к. прямые **пересекаются**).
78. В этой плоскости лежит **четырехугольник** А1В1А2В2, диагонали которого точкой пересечения делятся **пополам**. Следовательно, данный четырехугольник является **параллелограммом** (признак **параллелограмма**), значит, А1В1 и А2В2 **параллельны.**
79. Аналогично доказывается параллельность В1С1 и В2С2. Из вышеперечисленного следует, что плоскости А1В1С1 и А2В2С2 параллельны по признаку **параллельности** плоскостей.
80. Верное решение:
81. Докажем параллельность А1В1 и А2В2.
82. Рассмотрим плоскость, проходящую через прямые А1А2 и В1В2
83. (она существует и **единственная**, т.к. прямые **пересекаются**).
84. В этой плоскости лежит **четырехугольник** А1В1А2В2, диагонали которого точкой пересечения делятся **пополам**. Следовательно, данный четырехугольник является **параллелограммом** (признак **параллелограмма**), значит, А1В1 и А2В2 **параллельны.**
85. Аналогично доказывается параллельность В1С1 и В2С2. Из вышеперечисленного следует, что плоскости А1В1С1 и А2В2С2 параллельны по признаку **параллельности** плоскостей.
86. **№2.**
87. Тип задания: **выделение цветом**
88. Два равнобедренных треугольника FKС и FKD с общим основанием FK расположены так, что точка С не лежит в плоскости FKD. Определите взаимное расположение прямых, содержащих медианы треугольников, проведенных к сторонам KС и KD.
89. Решение:
90. Прямые, которые содержат медианы треугольников к KC и KD- выходят из одной точки F. Соответственно, можно сделать вывод, что данные прямые пересекаются.
91. Ответ:
92. 1) они параллельны
93. 2) скрещиваются
94. 3) пересекаются

**Глоссарий по теме**

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4724/20190201102523/OEBPS/objects/c_geom_10_8_1/594d809e-e846-4cf4-b07a-0d63526b9720.png. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

Прямая называется **перпендикулярной** к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

Теорема о прямой перпендикулярной к плоскости. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

**Основная литература:**

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия 10-11 кл. Базовый и профильный уровень. М.: Просвещение, 2015. С.1-10.

Глазков Ю. А., Юдина И. И., Бутузов В. Ф. Рабочая тетрадь по геометрии для 9 класса. Базовый и профильный уровень

**Дополнительная литература:**

Зив Б.Г. Геометрия. Дидактические материалы. 10-11 класс М.: Просвещение, 2015.

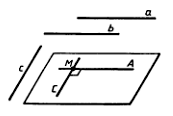
**Открытые электронные ресурсы:**

Перпендикулярность прямой и плоскости. [http://school-collection.edu.ru](http://school-collection.edu.ru/) // Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

Перпендикулярность прямой и плоскости. [https://www.yaklass.ru](https://www.yaklass.ru/) // Я-класс. Образовательный портал Сколково.

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой..



Доказательство:

Дано: *a* ‖ *b*, *a*⊥ c

Доказать: *b* ⊥ *c*

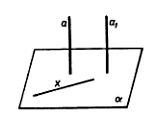
Через точку М пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые МА и МС, параллельные соответственно прямым *а* и *с*. Так как *а* ⊥ *с*, то ∠АМС=90о.

Так как *b* ‖ *a*, а *а* ‖ МА, то *b* ‖ МА.

Итак, прямые b и с параллельны соответственно прямым МА и МС, угол между ними равен 90о, т.е. b ‖ МА, с ‖ МС, угол между МА и МС равен 90о

Это означает, что угол между прямыми b и с также равен 90о, то есть b ⊥ с.

Теорема. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.



Доказательство:

Дано: *a* ‖ *а1*, *а* ⊥ α

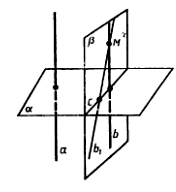
Доказать, что *а1* ⊥ α

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α, т.е. x ∊ α.Так как *а* ⊥ α, то *а* ⊥ *x*.

По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей *а1*⊥ x.

Таким образом, прямая *а1*перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т. е. *а1* ⊥ α

Теорема. Ели две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.



Дано: *а* ⊥ α, *b* ⊥ α

Доказать, что *а* ‖ *b*

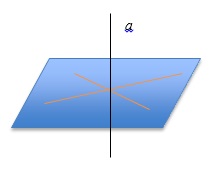
Доказательство:

Через какую-нибудь точку М прямой *b* проведем прямую *b1*, параллельную прямой *а*.

М ∊ *b,* M ∊*b1*, *b1*‖ *a*. По предыдущей теореме *b1* ⊥ α.

Докажем, что прямая *b1* совпадает с прямой *b*. Тем самым будем доказано, что *а* ‖ *b*. Допустим, что прямые *b1*и *b* не совпадают. Тогда в плоскости β, содержащей прямые *b* и *b1*, через точку М проходят две прямые, перпендикулярные к прямой *с*, по которой пересекаются плоскости α и β. Но это невозможно, следовательно, *а* ‖ *b*, т.е. *b* ∊ β, *b1* ∊ β, α https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4724/20190201102523/OEBPS/objects/c_geom_10_8_1/b51ac7fe-6c96-4078-aab0-874266b52860.png β = *c* (невозможно)→ *а* ‖ *b*

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



**Теорема.** Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

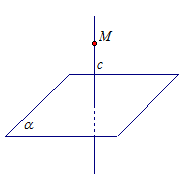


Рис. 2.

*Доказательство*.

Пусть дана плоскость α и точка *М*(см. рис. 2). Нужно доказать, что через точку *М* проходит единственная прямая *с*, перпендикулярная плоскости *α*.

Проведем прямую *а* в плоскости α (см. рис. 3). Согласно доказанному выше утверждению, через точку *М* можно провести плоскость γ перпендикулярную прямой *а*. Пусть прямая *b* – линия пересечения плоскостей α и γ.

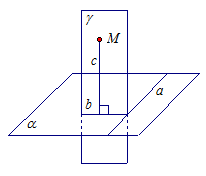


Рис. 3.

В плоскости γ через точку *М* проведем прямую *с*, перпендикулярную прямой *b.*

Прямая *с* перпендикулярна *b* по построению, прямая *с* перпендикулярна *а*(так как прямая *а* перпендикулярна плоскости γ, а значит, и прямой *с,*лежащей в плоскости γ). Получаем, что прямая *с* перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости α. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая *с* перпендикулярна плоскости α. Докажем, что такая прямая *с* единственная.

Предположим, что существует прямая *с*1, проходящая через точку *М* и перпендикулярная плоскости α. Получаем, что прямые *с* и *с1* перпендикулярны плоскости α. Значит, прямые *с* и *с1* параллельны. Но по построению прямые *с* и *с1*пересекаются в точке *М*. Получили противоречие. Значит, существует единственная прямая, проходящая через точку *М* и перпендикулярная плоскости α, что и требовалось доказать.

**Теоретический материал для углубленного изучения**

Теорема о прямой перпендикулярной к плоскости. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

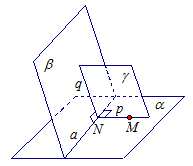


Рис. 1.

*Доказательство*(см. рис. 1)

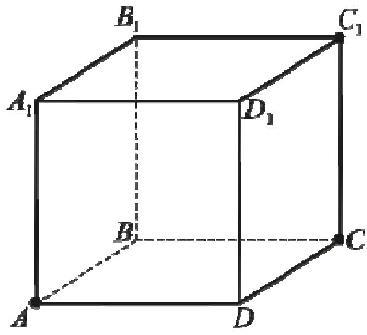
Пусть нам дана прямая *а*и точка *М*. Докажем, что существует плоскость γ, которая проходит через точку *М* и которая перпендикулярна прямой *а*.

Через прямую *а* проведем плоскости α и β так, что точка *М* принадлежит плоскости α. Плоскости α и β пересекаются по прямой *а*. В плоскости α через точку *М* проведем перпендикуляр *MN* (или *р*) к прямой *а,*https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4724/20190201102523/OEBPS/objects/c_geom_10_8_1/a5f0bd77-338e-43c2-a782-8d153b4d8509.png*.*В плоскости β из точки *N* восстановим перпендикуляр *q* к прямой *а*. Прямые *р* и *q* пересекаются, пусть через них проходит плоскость γ. Получаем, что прямая *а* перпендикулярна двум пересекающимся прямым *р* и *q* из плоскости γ. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая *а* перпендикулярна плоскости γ.

**Примеры и разборы решения заданий тренировочного модуля**

**Пример 1**

**Выбор элемента из выпадающего списка**



Выпишите ребра, перпендикулярные плоскости (DChttps://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4724/20190201102523/OEBPS/objects/c_geom_10_8_1/30d5578c-24ea-43e7-806c-2e6a41de5078.png).

* *AD, A1D1, BC, B1C1*
* *AD, AC, AD1,*
* *ВС, ВА.*

**Правильный вариант/варианты (или правильные комбинации вариантов):**

* *AD, A1D1, BC, B1C1*

**Неправильный вариант/варианты (или комбинации):**

Все остальные

Подсказка: в кубе все углы по https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4724/20190201102523/OEBPS/objects/c_geom_10_8_1/244b5a85-c000-4c1a-af8c-f09d752583a7.png. Плоскость (DChttps://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4724/20190201102523/OEBPS/objects/c_geom_10_8_1/7c0eed7e-8998-485f-ad7e-8485c95ff248.png), проходит через грань куба DChttps://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4724/20190201102523/OEBPS/objects/c_geom_10_8_1/c4585496-1477-4f60-bbc5-99a4ace62477.png.

* **Разбор задания:** Куб – это геометрическая фигура у которой все углы прямые, следовательно нужно увидеть ребра которые перпендикулярны к плоскости (DChttps://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4724/20190201102523/OEBPS/objects/c_geom_10_8_1/30de376f-3634-4bf4-abf2-dca3661f9dd7.png), к грани куба (DDChttps://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4724/20190201102523/OEBPS/objects/c_geom_10_8_1/58532f3c-6dab-4d33-ba23-8ed5b2686318.png).Эти ребра - *AD, A1D1, BC, B1C1*

**Пример 2**

**Ребус – соответствия.**

Закончите предложение, чтобы получилось верное утверждение.

**Утверждение:**

* Две прямые называются перпендикулярными, если …..
* Если плоскости перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она ……

**Варианты ответов:**

* https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4724/20190201102523/OEBPS/objects/c_geom_10_8_1/f329c153-440d-4511-95dd-c18426fc95bf.png
* https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4724/20190201102523/OEBPS/objects/c_geom_10_8_1/b15967e6-9b17-499d-ae1c-4ba5f166e0c7.png
* параллельны
* один
* она перпендикулярна к любой прямой, лежай в этой плоскости.
* перпендикулярна плоскости.

**Правильный вариант/варианты (или правильные комбинации вариантов):**

**Неправильный вариант/варианты (или комбинации):**

Все остальные.

**Подсказка**:

Лемма: Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к третьей прямой.

Теорема: если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

**Определение Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярная к любой прямой, лежащей в этой плоскости.**

**Лемма о перпендикулярности двух прямых к третьей прямой:** если одна из двух параллельных прямых перпендикулярная к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

**Теорема о параллельных прямых, перпендикулярных плоскости:** если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

**Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярная к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.**

**Глоссарий по теме**

**Двугранным углом называется фигура, образованная прямой *а* и двумя полуплоскостями с общей границей в виде прямой *а*, не принадлежащими одной плоскости. Перпендикуляры к ребру двугранного угла образуют линейный угол двугранного угла. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.**

**Если угол между пересекающимися плоскостями равен 90 градусом, то плоскости перпендикулярны.**

**Признак перпендикулярности плоскостей: если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.**

**Следствие из признака перпендикулярности плоскостей: Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.**

**Прямоугольный параллелепипед – фигура, у которой все боковые ребра перпендикулярны основанию.**

**Основная литература:**

**Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. Кадомцев С.Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 255 с.**

**Дополнительная литература:**

**Глазков Ю.А., Юдина И.И., Бутузов В.Ф. Рабочая тетрадь по геометрии для 10 класса. Базовый и профильный уровень. – М.: Просвещение, 2017. – 160 с.**

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

**Двугранным углом называется фигура, образованная прямой *а* и двумя полуплоскостями с общей границей в виде прямой *а*, не принадлежащими одной плоскости. Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями. Прямая *а*, которая является общей границей полуплоскостей, называется ребром двугранного угла (рис. 1а и 1б).**

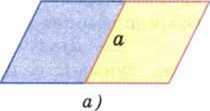
**Двугранный угол с ребром *CD*, на разных гранях которого отмечены точки *A* и *B* называют двугранным углом *CABD*.**

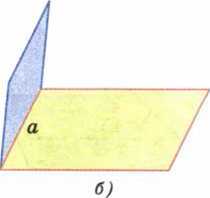
**Перпендикуляры к ребру *AO* и *BO* образуют линейный угол двугранного угла *AOB* (рис. 1в). Так как луч ОА перпендикулярен прямой CD и луч OB перпендикулярен прямой CD, то плоскость АОВ перпендикулярна к прямой CD. Таким образом, плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла. Двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов**

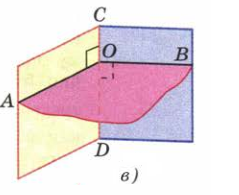
**Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. Так же как и плоские углы, двугранные углы могут быть прямыми, острыми и тупыми.**

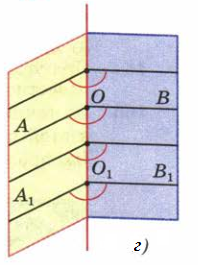
**Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.**

**Рассмотрим два линейных угла АОВ и А1О1В1 (рис. 1г). Лучи ОА и О1А1, лежат в одной грани и перпендикулярны к прямой ОО1, поэтому они сонаправлены. Точно так же сонаправлены лучи OB и O1B1. Поэтому углы АОВ и А1О1В1 равны как углы с сонаправленными сторонами.**

****

****

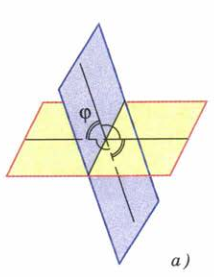
****

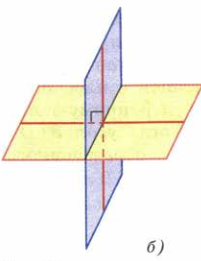
****

**(Рис. 1)**

**Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром.**

**Если один из этих двугранных углов равен *фи*, то другие три угла равны соответственно 180 градусов минус *фи*, *фи* и 180 градусов минус *фи* (рис. 2 а). В частности, если один из углов прямой, то и остальные три угла прямые. Если угол между пересекающимися плоскостями равен 90 градусом, будем называть такие плоскости перпендикулярными (рис. 2б).**

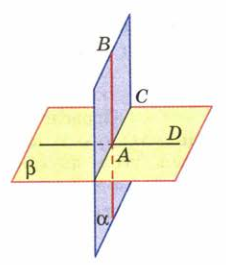
****

****

**(Рис. 2)**

**Для доказательства теоремы рассмотрим плоскости *альфа* и *бетта* такие (рис. 3), что плоскость *альфа* проходит через прямую *АВ*, перпендикулярную к плоскости *бетта* и пересекающуюся с ней в точке *А*. Докажем, что плоскости *альфа* и *бетта* перпендикулярны. Плоскости *альфа* и *бетта* пересекаются по некоторой прямой *АС*. При этом прямая *АВ* перпендикулярна прямой *АС*, так как по условию прямая *АВ* перпендикулярна плоскости *бетта*, это означает, что прямая *АВ* перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости *бетта*.**

**Проведем в плоскости *бетта* прямую *AD*, перпендикулярную к прямой *АС*. Тогда угол *BAD* — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей *альфа* и *бетта*. Но угол BAD равен 90 градусов так как прямая *АВ* перпендикулярна плоскости *бетта*. Следовательно, угол между плоскостями *альфа* и *бетта* равен 90 градусов. Что и требовалось доказать.**

****

**(Рис. 3)**

**Из этой теоремы вытекает важное следствие:**

**Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.**

**Признак перпендикулярности плоскостей: если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.**

**Следствие из признака перпендикулярности плоскостей**: Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

**Двугранным углом называется фигура, образованная прямой** а **и двумя полуплоскостями с общей границей в виде прямой** а**, не принадлежащими одной плоскости. Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями. Прямая** а**, которая является общей границей полуплоскостей, называется ребром двугранного угла (рис. 2 а и 2 б).**

**Перпендикуляры к ребру двугранного угла образуют линейный угол двугранного угла. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.**

**Так же как и плоские углы, двугранные углы могут быть прямыми, острыми и тупыми.**

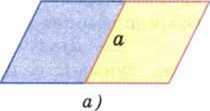
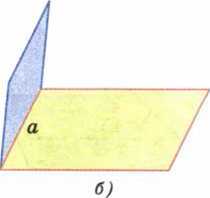
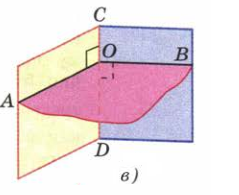
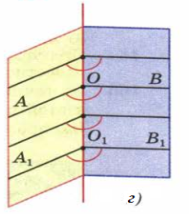
**Если угол между пересекающимися плоскостями равен 90 градусом, то плоскости перпендикулярны.**

**Двугранный угол с ребром** CD**, на разных гранях которого отмечены точки** A **и** B **называют двугранным углом** CABD**.**

**Перпендикуляры к ребру** AO **и** BO **образуют линейный угол двугранного угла** AOB **(рис. 2 в).** Так как луч ОА перпендикулярен прямой CD и луч OB перпендикулярен прямой CD, то плоскость АОВ перпендикулярна к прямой CD. Таким образом, плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла. Двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов

**Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.**

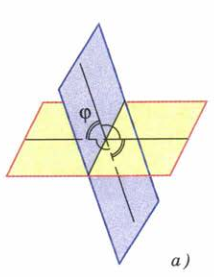
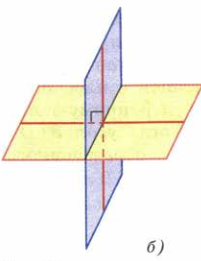
Рассмотрим два линейных угла АОВ и А1О1В1 (рис. 2 г). Лучи ОА и О1А1, лежат в одной грани и перпендикулярны к прямой ОО1, поэтому они сонаправлены. Точно так же сонаправлены лучи OB и O1B1. Поэтому углы АОВ и А1О1В1 равны как углы с сонаправленными сторонами.

(Рис. 2)

**Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром.**

**Если один из этих двугранных углов равен** фи**, то другие три угла равны соответственно 180 градусов минус** фи**,** фи **и 180 градусов минус** фи **(рис. 3 а). В частности, если один из углов прямой, то и остальные три угла прямые. Если угол между пересекающимися плоскостями равен 90 градусом, будем называть такие плоскости перпендикулярными (рис. 3 б).**

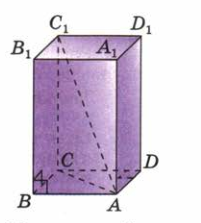
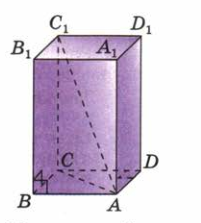
 

(Рис. 3)

**Следствие Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.**

**Прямоугольный параллелепипед – фигура, у которой все боковые ребра перпендикулярны основанию.**

|  |
| --- |
| На рисунке 4 представлен прямоугольный параллелепипед. У этой фигуры все боковые ребра перпендикулярны основанию.  Его основаниями служат прямоугольники ABCD и A1B1C1D1, а боковые ребра АА1,BB1,CC1 и DD1 перпендикулярны к основаниям. Отсюда следует, что ребро АА1 перпендикулярно к ребру АВ, т. е. боковая грань АА1В1В является прямоугольником. То же самое можно сказать и об остальных боковых гранях. |
| Таким образом, прямоугольный параллелепипед обладает следующими свойствами:  1) В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней — прямоугольники.  2) Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда — прямые.  3) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.  Измерениями прямоугольного параллелепипеда называются длины трех ребер, имеющих общую вершину. |



(Рис. 4)

Так как ребро *СС*1 перпендикулярно к основанию *ABCD*, то угол *АСС*1, прямой. Из прямоугольного треугольника *АСС*1, по теореме Пифагора получаем

*АС*1*2* равно *АС2* +*СС*1*2*.

Но *АС* — диагональ прямоугольника *ABCD*, поэтому *АС2* равно *АВ2* + *АD2*. Кроме того, ребро *СС*1 равно ребру *АА*1. Следовательно, *AC*1 равно *АВ2* + *AD2* + *АА*1*2*. Что и требовалось доказать.

Следствием из этого свойства является то, что диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Стоит отметить, что если у прямоугольного параллелепипеда все три измерения равны, то он называется, а все его грани являются равными друг другу квадратами.

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

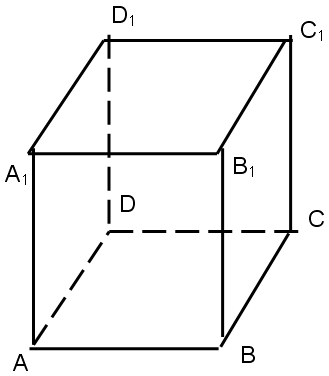
Пример 1. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA1B1C1D1* (рис. 5) боковая грань *DD1C1C*– квадрат, *DC* равно 4 см, *BD1* равно 6 см. Найдите *BC* и докажите, что плоскости *BCD1* и *DC1* *B1* взаимно перпендикулярны.

Сначала найдем *BC*. Воспользуемся тем свойством прямоугольного параллелепипеда, что квадрат его диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

Тогда диагональ *BD1* в квадрате равна *AD* в квадрате плюс *DD1* в квадрате плюс *DC* в квадрате. *BD1* – известно из условия, *DD1* и *DC* – стороны квадрата и тоже известны из условия, тогда отсюда мы можем выразить ребро *AD*, которое ребру *BC*.Отсюда находим, что *BC* равно 2 сантиметрам.

Для доказательства перпендикулярности плоскостей *BCD1* и *DC1* *B1* воспользуемся признаком перпендикулярности плоскостей. Этот признак звучит следующим образом: если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

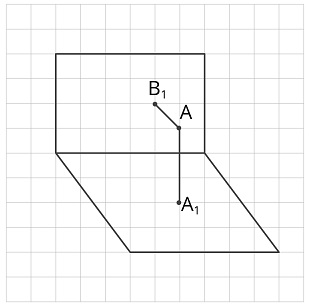
Заметим, что плоскость *BCD1* проходит через диагональ грани *DD1 C1C* – *CD1*. Эта диагональ перпендикулярна плоскости *DC1* *B1* в соответствии с признаком перпендикулярности прямой и плоскости, так как *CD1* перпендикулярна второй диагонали квадрата – *C1D* и перпендикулярна ребру прямоугольного параллелепипеда *C1* *B1*. Что и требовалось доказать.



(Рис. 5)

Тестовый вопрос №2. В прямом двугранном угле дана точка *A*. Расстояния от точки *A* до граней угла: *AA1*=6 см и *AB1*=8 см. Определите расстояние от точки *A* до ребра двухгранного угла.

Решение.

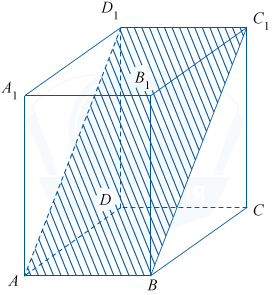


Отрезки *AA1* и *AB1* перпендикулярны граням двугранного угла, поэтому *AA1BB1* – прямоугольник. Искомое расстояние – диагональ этого прямоугольника, которую найдем с помощью теоремы Пифагора: сантиметров.

Ответ: 10 см.

Тестовый вопрос №10. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA1B1C1D1* длины рёбер: *AB* = 2, *BC*=3, *AA1* = 4. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки *A*, *B* и *C​1*​​.

Решение. Нарисуем рисунок.



В рассматриваемом прямоугольном параллелепипеде проведем отрезок *BC​1*​​. Затем построим плоскость на прямых *BC​1*​​ и *AB.* Так как плоскости прямоугольного параллелепипеда *AA1D1D* и *BB1C1C*параллельны, поэтому искомым сечением является прямоугольник *ABC1D1*.

Нам известны отрезки *AA1* и *BC*, из них по теореме Пифагора вычислим длину отрезка *BC1*: .

Теперь найдем площадь искомого прямоугольника: 10 .

Ответ: 10.

**Глоссарий по теме**

**Теорема о трех перпендикулярах**: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Определение: углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

**Основная литература:**

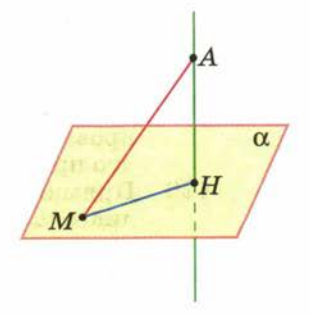
Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. Кадомцев С. Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 255 с.

**Дополнительная литература:**

Глазков Ю. А., Юдина И. И., Бутузов В. Ф. Рабочая тетрадь по геометрии для 10 класса. Базовый и профильный уровень. – М.: Просвещение, 2017. – 160 с.

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

Рассмотрим плоскость α и точку *А*, не лежащую в этой плоскости (рис. 1). Проведем через точку *А* прямую, перпендикулярную к плоскости *α*, и обозначим буквой Н точку пересечения этой прямой с плоскостью α. Отрезок АН называется перпендикуляром, проведенным из точки *А* к плоскости α, а точка Н — основанием перпендикуляра. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку *М*, отличную от Н, и проведем отрезок AM. Он называется наклонной, проведенной из точки *А* к плоскости α, а точка *М* – основанием наклонной. Отрезок НМ называется проекцией наклонной на плоскость α.



(Рис. 1)

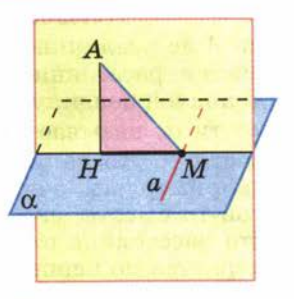
Рассмотрим прямоугольный треугольник *АМН*. Сторона *АН* — катет, а сторона *AM* — гипотенуза, поэтому *АН* < *AM*. Поэтому перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.

Следовательно, из всех расстояний от точки А до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки Н. Это расстояние, т. е. длина перпендикуляра, проведенного из точки А к плоскости α, называется расстоянием от точки А до плоскости α.

Стоит отметить, что в случае двух параллельных плоскостей, расстоянием между ними будет расстояние от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости. Например, все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Если же прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости. В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью. Например, все точки прямой *b* равноудалены от потолка комнаты.

Если мы имеем дело со скрещивающимися прямыми, то расстоянием между ними будет расстояние между одной из этих прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой.

Сформулируем теорему о трех перпендикулярах: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.



(Рис. 2)

На рисунке 2: *АН* — перпендикуляр к плоскости α, *AM* — наклонная, *а* — прямая, проведенная в плоскости α через точку *М* перпендикулярно к проекции наклонной *НМ*. Докажем, что прямая *а* перпендикулярна наклонной *AM*.

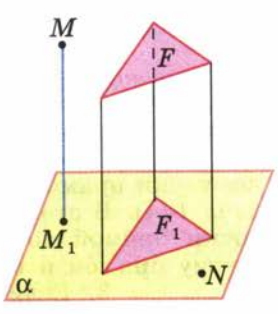
Рассмотрим плоскость *АМН*. Прямая *а* перпендикулярна к НМ по условию. Так как прямая *а*, лежит в плоскости α, а эта плоскость перпендикулярна отрезку *AH*, то прямая *а* перпендикулярна к этой плоскости. Отсюда следует, что прямая *а* перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости *АМН*, в частности прямая *а* перпендикулярна отрезку *АМ*. Теорема доказана.

Эта теорема называется теоремой о трех перпендикулярах, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами *АН*, *НМ* и *AM*.

Справедлива также обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Введем теперь понятие проекции произвольной фигуры на плоскость. Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

Обозначим буквой *F* какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру *F1*, которая называется проекцией фигуры F на данную плоскость (рис. 3).



(Рис. 3)

Докажем теперь, что проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая (рис. 4).

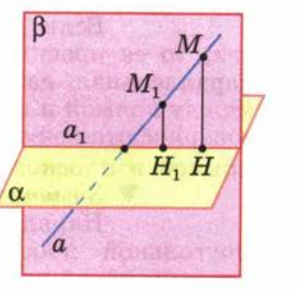
Данную плоскость обозначим буквой α. Произвольную прямую, не перпендикулярную к плоскости, обозначим буквой *а*. Из какой-нибудь точки *М* прямой *а* проведем перпендикуляр *МН* к плоскости α и рассмотрим плоскость *β*, проходящую через прямую *a* и перпендикуляр *МН*. Плоскости α и *β* пересекаются по некоторой прямой *а1*.

Докажем, что эта прямая и является проекцией прямой *а* на плоскость α. В самом деле, возьмем произвольную точку М*1* прямой *а* и проведем в плоскости *β* прямую *М1Н1*, параллельную прямой *МН*.

Так как отрезок *MH* перпендикуляр к плоскости α и отрезок MH параллелен *М1Н1*, то отрезок *М1Н1* тоже перпендикулярен плоскости α.

Этим мы доказали, что проекция произвольной точки прямой *а* лежит на прямой *а1*.

Аналогично доказывается, что любая точка прямой *а1* является проекцией некоторой точки прямой *а*. Следовательно, прямая *а1* — проекция прямой *а* на плоскость α. Что и требовалось доказать.



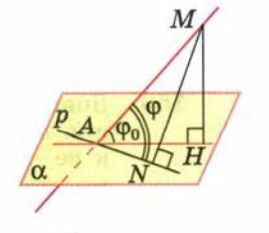
(Рис. 4)

Теперь введем понятие угла между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

Пример 1. Докажем, что угол между *φ*0 между данной прямой AM и плоскостью α является наименьшим из всех углов *φ*, которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку А.



(Рис. 5)

Обозначим буквой *Н* основание перпендикуляра (рис. 5), проведенного из точки *М* к плоскости α.

Рассмотрим произвольную прямую *р* в плоскости α, проходящую через точку *А* и отличную от прямой *АН*.

Угол между прямыми *AM* и *р* обозначим через *φ*.

Докажем, что *φ* больше чем *φ0*.

Из точки *М* проведем перпендикуляр *MN* к прямой *р*. Если точка *N* совпадает с точкой *А*, то *φ* равняется 90 градусам и поэтому *φ* больше чем *φ 0*. Рассмотрим случай, когда точки *А* и *N* не совпадают. Отрезок *AM* — общая гипотенуза прямоугольных

треугольников *ANM* и *АНМ*, поэтому   
sinφ=MN/AM

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/0ab77044-cd47-46e2-accf-92d3c98f675d.png

Так как наклонная *MN* больше, чем перпендикуляр *МН*, то синус угла *φ* больше, чем синус угла *φ0*. Поэтому угол *φ* больше, чем угол *φ0*. Что и требовалось доказать.

Тестовый вопрос №7. Прямая *AM* перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника *ABC*, точка *H* середина стороны *BC*. Найдите угол между прямой *MH* и плоскостью *ABC*, если *AM* = *a*, *HB* = *a*.

Решение. Искомый угол – MHA.

Рассмотрим треугольник *ABC*. Он равносторонний. Это означает, что его медиана так же является высотой и биссектрисой. Так как *HB* = a, следовательно, любая сторона треугольника имеет длину 2*a*. Рассмотрим треугольник *AHB*. Он прямоугольный, т.к. *AH* медиана и высота. По теореме Пифагора вычислим длину стороны *AH*: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/ca293f74-6054-4f1f-a0ca-55cdcdca32c4.png.

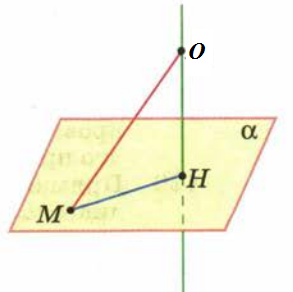
Далее рассмотрим треугольник *MHA*, он прямоугольный, т.к. *MA* перпендикулярна плоскости *ABC*. Зная это мы можем выразить тангенс искомого угла: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/719f6fc6-6084-4a0c-829d-6b2baf1eb5d0.png.. Отсюда делаем вывод, что искомый угол равен 30 градусов.

Ответ: ∠*MHA* = 30˚.

Тестовый вопрос №8. Из точки *O* к плоскости *α* проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 15 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка *O*?

Решение. Нарисуем рисунок. *OH* – перпендикуляр, *OM* – наклонная, длина которой 17 см, *MH* – проекция наклонной, длина которой 15 см.

Треугольник *OHM* – прямоугольный, т.к. *OH* – перпендикуляр. Поэтому *OH* – искомое расстояние. Найдем его по теореме Пифагора: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/f6394e24-d9c8-4cf2-8da6-c2aba1fdaac2.pngсантиметров.



Ответ: 8 сантиметров.

**Глоссарий по теме**

**Теорема о трех перпендикулярах**: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Определение: углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

**Основная литература:**

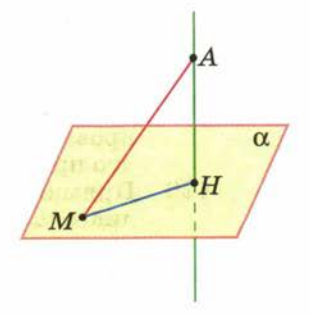
Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. Кадомцев С. Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 255 с.

**Дополнительная литература:**

Глазков Ю. А., Юдина И. И., Бутузов В. Ф. Рабочая тетрадь по геометрии для 10 класса. Базовый и профильный уровень. – М.: Просвещение, 2017. – 160 с.

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

Рассмотрим плоскость α и точку *А*, не лежащую в этой плоскости (рис. 1). Проведем через точку *А* прямую, перпендикулярную к плоскости *α*, и обозначим буквой Н точку пересечения этой прямой с плоскостью α. Отрезок АН называется перпендикуляром, проведенным из точки *А* к плоскости α, а точка Н — основанием перпендикуляра. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку *М*, отличную от Н, и проведем отрезок AM. Он называется наклонной, проведенной из точки *А* к плоскости α, а точка *М* – основанием наклонной. Отрезок НМ называется проекцией наклонной на плоскость α.



(Рис. 1)

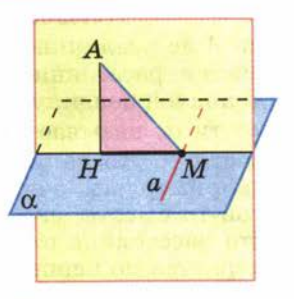
Рассмотрим прямоугольный треугольник *АМН*. Сторона *АН* — катет, а сторона *AM* — гипотенуза, поэтому *АН* < *AM*. Поэтому перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.

Следовательно, из всех расстояний от точки А до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки Н. Это расстояние, т. е. длина перпендикуляра, проведенного из точки А к плоскости α, называется расстоянием от точки А до плоскости α.

Стоит отметить, что в случае двух параллельных плоскостей, расстоянием между ними будет расстояние от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости. Например, все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Если же прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости. В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью. Например, все точки прямой *b* равноудалены от потолка комнаты.

Если мы имеем дело со скрещивающимися прямыми, то расстоянием между ними будет расстояние между одной из этих прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой.

Сформулируем теорему о трех перпендикулярах: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.



(Рис. 2)

На рисунке 2: *АН* — перпендикуляр к плоскости α, *AM* — наклонная, *а* — прямая, проведенная в плоскости α через точку *М* перпендикулярно к проекции наклонной *НМ*. Докажем, что прямая *а* перпендикулярна наклонной *AM*.

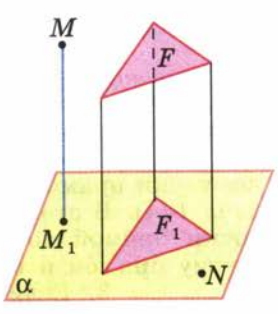
Рассмотрим плоскость *АМН*. Прямая *а* перпендикулярна к НМ по условию. Так как прямая *а*, лежит в плоскости α, а эта плоскость перпендикулярна отрезку *AH*, то прямая *а* перпендикулярна к этой плоскости. Отсюда следует, что прямая *а* перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости *АМН*, в частности прямая *а* перпендикулярна отрезку *АМ*. Теорема доказана.

Эта теорема называется теоремой о трех перпендикулярах, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами *АН*, *НМ* и *AM*.

Справедлива также обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Введем теперь понятие проекции произвольной фигуры на плоскость. Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

Обозначим буквой *F* какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру *F1*, которая называется проекцией фигуры F на данную плоскость (рис. 3).



(Рис. 3)

Докажем теперь, что проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая (рис. 4).

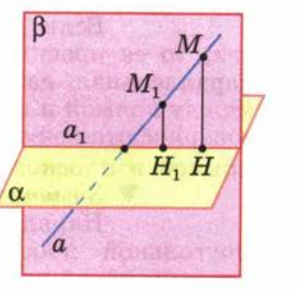
Данную плоскость обозначим буквой α. Произвольную прямую, не перпендикулярную к плоскости, обозначим буквой *а*. Из какой-нибудь точки *М* прямой *а* проведем перпендикуляр *МН* к плоскости α и рассмотрим плоскость *β*, проходящую через прямую *a* и перпендикуляр *МН*. Плоскости α и *β* пересекаются по некоторой прямой *а1*.

Докажем, что эта прямая и является проекцией прямой *а* на плоскость α. В самом деле, возьмем произвольную точку М*1* прямой *а* и проведем в плоскости *β* прямую *М1Н1*, параллельную прямой *МН*.

Так как отрезок *MH* перпендикуляр к плоскости α и отрезок MH параллелен *М1Н1*, то отрезок *М1Н1* тоже перпендикулярен плоскости α.

Этим мы доказали, что проекция произвольной точки прямой *а* лежит на прямой *а1*.

Аналогично доказывается, что любая точка прямой *а1* является проекцией некоторой точки прямой *а*. Следовательно, прямая *а1* — проекция прямой *а* на плоскость α. Что и требовалось доказать.



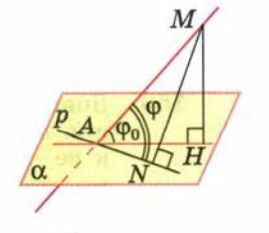
(Рис. 4)

Теперь введем понятие угла между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

Пример 1. Докажем, что угол между *φ*0 между данной прямой AM и плоскостью α является наименьшим из всех углов *φ*, которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку А.



(Рис. 5)

Обозначим буквой *Н* основание перпендикуляра (рис. 5), проведенного из точки *М* к плоскости α.

Рассмотрим произвольную прямую *р* в плоскости α, проходящую через точку *А* и отличную от прямой *АН*.

Угол между прямыми *AM* и *р* обозначим через *φ*.

Докажем, что *φ* больше чем *φ0*.

Из точки *М* проведем перпендикуляр *MN* к прямой *р*. Если точка *N* совпадает с точкой *А*, то *φ* равняется 90 градусам и поэтому *φ* больше чем *φ 0*. Рассмотрим случай, когда точки *А* и *N* не совпадают. Отрезок *AM* — общая гипотенуза прямоугольных

треугольников *ANM* и *АНМ*, поэтому   
sinφ=MN/AM

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/0ab77044-cd47-46e2-accf-92d3c98f675d.png

Так как наклонная *MN* больше, чем перпендикуляр *МН*, то синус угла *φ* больше, чем синус угла *φ0*. Поэтому угол *φ* больше, чем угол *φ0*. Что и требовалось доказать.

Тестовый вопрос №7. Прямая *AM* перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника *ABC*, точка *H* середина стороны *BC*. Найдите угол между прямой *MH* и плоскостью *ABC*, если *AM* = *a*, *HB* = *a*.

Решение. Искомый угол – MHA.

Рассмотрим треугольник *ABC*. Он равносторонний. Это означает, что его медиана так же является высотой и биссектрисой. Так как *HB* = a, следовательно, любая сторона треугольника имеет длину 2*a*. Рассмотрим треугольник *AHB*. Он прямоугольный, т.к. *AH* медиана и высота. По теореме Пифагора вычислим длину стороны *AH*: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/ca293f74-6054-4f1f-a0ca-55cdcdca32c4.png.

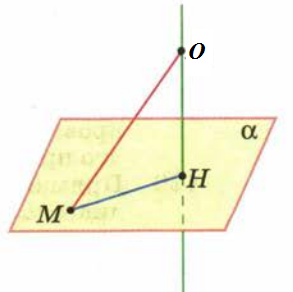
Далее рассмотрим треугольник *MHA*, он прямоугольный, т.к. *MA* перпендикулярна плоскости *ABC*. Зная это мы можем выразить тангенс искомого угла: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/719f6fc6-6084-4a0c-829d-6b2baf1eb5d0.png.. Отсюда делаем вывод, что искомый угол равен 30 градусов.

Ответ: ∠*MHA* = 30˚.

Тестовый вопрос №8. Из точки *O* к плоскости *α* проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 15 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка *O*?

Решение. Нарисуем рисунок. *OH* – перпендикуляр, *OM* – наклонная, длина которой 17 см, *MH* – проекция наклонной, длина которой 15 см.

Треугольник *OHM* – прямоугольный, т.к. *OH* – перпендикуляр. Поэтому *OH* – искомое расстояние. Найдем его по теореме Пифагора: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/f6394e24-d9c8-4cf2-8da6-c2aba1fdaac2.pngсантиметров.



Ответ: 8 сантиметров.

**Глоссарий по теме**

**Теорема о трех перпендикулярах**: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Определение: углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

**Основная литература:**

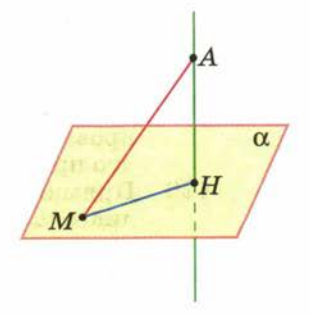
Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. Кадомцев С. Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 255 с.

**Дополнительная литература:**

Глазков Ю. А., Юдина И. И., Бутузов В. Ф. Рабочая тетрадь по геометрии для 10 класса. Базовый и профильный уровень. – М.: Просвещение, 2017. – 160 с.

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

Рассмотрим плоскость α и точку *А*, не лежащую в этой плоскости (рис. 1). Проведем через точку *А* прямую, перпендикулярную к плоскости *α*, и обозначим буквой Н точку пересечения этой прямой с плоскостью α. Отрезок АН называется перпендикуляром, проведенным из точки *А* к плоскости α, а точка Н — основанием перпендикуляра. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку *М*, отличную от Н, и проведем отрезок AM. Он называется наклонной, проведенной из точки *А* к плоскости α, а точка *М* – основанием наклонной. Отрезок НМ называется проекцией наклонной на плоскость α.



(Рис. 1)

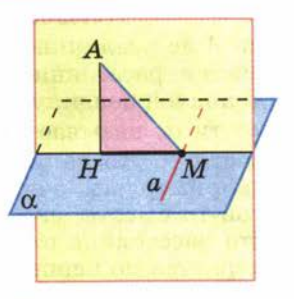
Рассмотрим прямоугольный треугольник *АМН*. Сторона *АН* — катет, а сторона *AM* — гипотенуза, поэтому *АН* < *AM*. Поэтому перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.

Следовательно, из всех расстояний от точки А до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки Н. Это расстояние, т. е. длина перпендикуляра, проведенного из точки А к плоскости α, называется расстоянием от точки А до плоскости α.

Стоит отметить, что в случае двух параллельных плоскостей, расстоянием между ними будет расстояние от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости. Например, все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Если же прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости. В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью. Например, все точки прямой *b* равноудалены от потолка комнаты.

Если мы имеем дело со скрещивающимися прямыми, то расстоянием между ними будет расстояние между одной из этих прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой.

Сформулируем теорему о трех перпендикулярах: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.



(Рис. 2)

На рисунке 2: *АН* — перпендикуляр к плоскости α, *AM* — наклонная, *а* — прямая, проведенная в плоскости α через точку *М* перпендикулярно к проекции наклонной *НМ*. Докажем, что прямая *а* перпендикулярна наклонной *AM*.

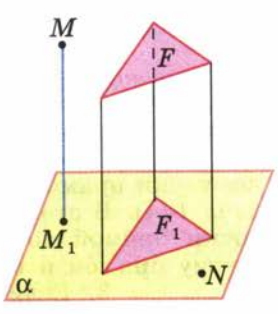
Рассмотрим плоскость *АМН*. Прямая *а* перпендикулярна к НМ по условию. Так как прямая *а*, лежит в плоскости α, а эта плоскость перпендикулярна отрезку *AH*, то прямая *а* перпендикулярна к этой плоскости. Отсюда следует, что прямая *а* перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости *АМН*, в частности прямая *а* перпендикулярна отрезку *АМ*. Теорема доказана.

Эта теорема называется теоремой о трех перпендикулярах, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами *АН*, *НМ* и *AM*.

Справедлива также обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Введем теперь понятие проекции произвольной фигуры на плоскость. Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

Обозначим буквой *F* какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру *F1*, которая называется проекцией фигуры F на данную плоскость (рис. 3).



(Рис. 3)

Докажем теперь, что проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая (рис. 4).

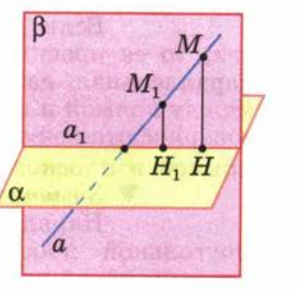
Данную плоскость обозначим буквой α. Произвольную прямую, не перпендикулярную к плоскости, обозначим буквой *а*. Из какой-нибудь точки *М* прямой *а* проведем перпендикуляр *МН* к плоскости α и рассмотрим плоскость *β*, проходящую через прямую *a* и перпендикуляр *МН*. Плоскости α и *β* пересекаются по некоторой прямой *а1*.

Докажем, что эта прямая и является проекцией прямой *а* на плоскость α. В самом деле, возьмем произвольную точку М*1* прямой *а* и проведем в плоскости *β* прямую *М1Н1*, параллельную прямой *МН*.

Так как отрезок *MH* перпендикуляр к плоскости α и отрезок MH параллелен *М1Н1*, то отрезок *М1Н1* тоже перпендикулярен плоскости α.

Этим мы доказали, что проекция произвольной точки прямой *а* лежит на прямой *а1*.

Аналогично доказывается, что любая точка прямой *а1* является проекцией некоторой точки прямой *а*. Следовательно, прямая *а1* — проекция прямой *а* на плоскость α. Что и требовалось доказать.



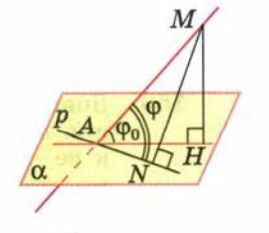
(Рис. 4)

Теперь введем понятие угла между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

Пример 1. Докажем, что угол между *φ*0 между данной прямой AM и плоскостью α является наименьшим из всех углов *φ*, которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку А.



(Рис. 5)

Обозначим буквой *Н* основание перпендикуляра (рис. 5), проведенного из точки *М* к плоскости α.

Рассмотрим произвольную прямую *р* в плоскости α, проходящую через точку *А* и отличную от прямой *АН*.

Угол между прямыми *AM* и *р* обозначим через *φ*.

Докажем, что *φ* больше чем *φ0*.

Из точки *М* проведем перпендикуляр *MN* к прямой *р*. Если точка *N* совпадает с точкой *А*, то *φ* равняется 90 градусам и поэтому *φ* больше чем *φ 0*. Рассмотрим случай, когда точки *А* и *N* не совпадают. Отрезок *AM* — общая гипотенуза прямоугольных

треугольников *ANM* и *АНМ*, поэтому   
sinφ=MN/AM

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/0ab77044-cd47-46e2-accf-92d3c98f675d.png

Так как наклонная *MN* больше, чем перпендикуляр *МН*, то синус угла *φ* больше, чем синус угла *φ0*. Поэтому угол *φ* больше, чем угол *φ0*. Что и требовалось доказать.

Тестовый вопрос №7. Прямая *AM* перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника *ABC*, точка *H* середина стороны *BC*. Найдите угол между прямой *MH* и плоскостью *ABC*, если *AM* = *a*, *HB* = *a*.

Решение. Искомый угол – MHA.

Рассмотрим треугольник *ABC*. Он равносторонний. Это означает, что его медиана так же является высотой и биссектрисой. Так как *HB* = a, следовательно, любая сторона треугольника имеет длину 2*a*. Рассмотрим треугольник *AHB*. Он прямоугольный, т.к. *AH* медиана и высота. По теореме Пифагора вычислим длину стороны *AH*: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/ca293f74-6054-4f1f-a0ca-55cdcdca32c4.png.

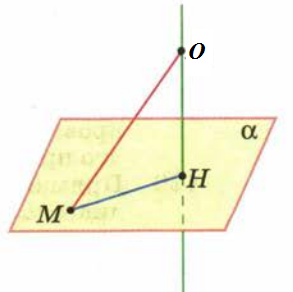
Далее рассмотрим треугольник *MHA*, он прямоугольный, т.к. *MA* перпендикулярна плоскости *ABC*. Зная это мы можем выразить тангенс искомого угла: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/719f6fc6-6084-4a0c-829d-6b2baf1eb5d0.png.. Отсюда делаем вывод, что искомый угол равен 30 градусов.

Ответ: ∠*MHA* = 30˚.

Тестовый вопрос №8. Из точки *O* к плоскости *α* проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 15 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка *O*?

Решение. Нарисуем рисунок. *OH* – перпендикуляр, *OM* – наклонная, длина которой 17 см, *MH* – проекция наклонной, длина которой 15 см.

Треугольник *OHM* – прямоугольный, т.к. *OH* – перпендикуляр. Поэтому *OH* – искомое расстояние. Найдем его по теореме Пифагора: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6127/20190904140521/OEBPS/objects/c_geom_10_10_1/f6394e24-d9c8-4cf2-8da6-c2aba1fdaac2.pngсантиметров.



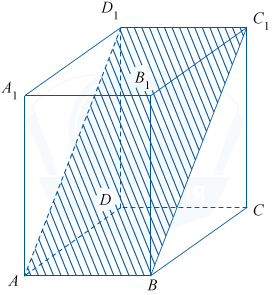
Ответ: 8 сантиметров.

(Рис. 4)

**Примеры и разбор решения заданий**

**Пример 1** В прямоугольном параллелепипеде ABCDA1B1C1D1 длины рёбер: AB = 2, BC=3, AA1 = 4. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C​1​​.

Решение Нарисуем рисунок.



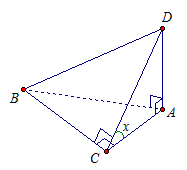
В рассматриваемом прямоугольном параллелепипеде проведем отрезок BC​1​​. Затем построим плоскость на прямых BC​1​​ и AB. Так как плоскости прямоугольного параллелепипеда AA1D1D и BB1C1Cпараллельны, поэтому искомым сечением является прямоугольник ABC1D1. Нам известны отрезки AA1 и BC, из них по теореме Пифагора вычислим длину отрезка BC1: 5. Теперь найдем площадь искомого прямоугольника: 10 .

Ответ: 10.

**Пример 2 Дан тетраэдр** ABCD.  **В этом тетраэдре углы** DAB**,** DAC **и** ACB **прямые. Ребра** AC **и** CB **равны 10 сантиметрам, отрезок** DB **равен 10**https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6063/20190201104333/OEBPS/objects/c_geom_10_12_1/bc6ea19f-f587-4e0c-aaba-c0a9f47c46b0.png **сантиметров. Необходимо найти двугранный угол** ABCD**.**

**Решение**

**По условию прямая** DA **перпендикулярно прямым** AB **и** AC**. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая** DA **перпендикулярна** ABC**.**



**Тогда прямая** DA **– перпендикуляр к плоскости** ABC**. Прямая** DC **– наклонная, а** AC **– проекция. По условию прямая** AC **перпендикулярна прямой** BC**. Тогда по теореме о трех перпендикулярах наклонная** DC **перпендикулярна прямой** BC**. Это означает, что угол** ACD **является линейным углом искомого двугранного угла. Из прямоугольного треугольника** DCB **найдем** DC **по теореме Пифагора.** https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6063/20190201104333/OEBPS/objects/c_geom_10_12_1/01b00063-3089-423b-a6f2-91ffeb8b44f3.png

**Из прямоугольного треугольника** ACD **теперь можно выразить косинус угла** ACD**.** https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6063/20190201104333/OEBPS/objects/c_geom_10_12_1/cc6a0114-8d4e-468a-9a6c-607f1243321e.png

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6063/20190201104333/OEBPS/objects/c_geom_10_12_1/af341197-1fa0-4235-8f58-e10490be6cd7.png= 60°.

Ответ: 60°.