**Тема: Комбинаторика. Перестановки, размещения, сочетания**

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

**Правило произведения** Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется m вариантов выбора второго элемента, то существует n·m различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Продемонстрируем его применение на примере.

**Пример 1** Сколько различных чисел можно записать с помощью цифр 0, 2, 4, 6, 8?

В качестве первой цифры числа может быть выбрана любая из данных цифр кроме нуля. Т.е. на первое место претендуют 4 варианта цифр, n=4. На второе место претендуют 5 цифр, т.е. m=5. Используя правило произведения, число различных двузначных чисел, составленных из предложенных цифр равно n на m, т.е. 4 умноженное на 5. Получаем 20 различных вариантов двузначных чисел.

**Пример 2** В школьной олимпиаде по математике победителями оказались 3 человека, в олимпиаде по физике – 2 человека, в олимпиаде по химии – 4 человека. На районные олимпиады по математике, физике и химии, школа должна направить по одному учащемуся из числа победителей школьных туров по трем предметам. Сколькими способами это можно сделать?

Пользуясь правилом произведения, одного участника на олимпиаду по математике и одного на олимпиаду по физике можно выбрать 3·2= 6 способами. К каждой из полученных 6 пар, можно присоединить любого из 4 победителей олимпиады по химии. Таким образом, троих человек для участия в названных трёх олимпиадах можно выбрать 24 способами.

**Определение** Соединения, содержащие n элементов, выбираемых из элементов m различных видов, и отличающиеся одно от другого либо составом, либо порядком следования в них элементов называется размещениями с повторениями из m по n.

**Пример 3** Сколько различных четырехбуквенных слов можно составить, пользуясь двумя буквами «м» и «а»?

На каждое место в слове претендуют 2 буквы. Таким образом, получаем 16 различных слов, которые можно составить из букв «м» и «а».

**Определение** Перестановками из n элементов называются соединения, которые состоят из n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

Обозначение **Pn=n(n-1)(n-2)∙… ∙3∙2∙1=n** (читается н-факториал)- число перестановок из n различных элементов.

**Пример 4** Сколькими способами можно положить 10 различных открыток в 10 имеющихся конвертов (по одной открытке в конверте)?

По формуле находим Pn=10**=**1**∙**2**∙**3**∙**…**∙**9**∙**10=3628800 способов разложить 10 различных открыток по конвертам.

**Определение** Перестановки, образованные из n1 элементов первого вида, n2 элементов второго вида и так далее до nmэлементов m-го вида называют перестановками с повторениями.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4927/20190202134308/OEBPS/objects/c_matan_11_29_1/e5c33f70-68f4-499a-8b51-5e5eb262fbfd.png

**Пример 5** Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

Перебором можно убедиться, что из данных цифр можно составить 12 двузначных чисел:12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

В записи двузначного числа, на первом месте может стоять любая из четырех цифр, а на втором месте любая из трех оставшихся. По правилу произведения так же получаем 4\*3=12.

При решении задачи, из четырех данных элементов были образованы всевозможные соединения по два элемента в каждом, причем любые два соединения отличались друг от друга либо составом элементов, либо их расположением. Такие соединения называются размещениями.

**Определение** Размещениями без повторений из m элементов по n, гдеn m называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Формула https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4045/20190417114641/OEBPS/objects/c_matan_11_30_1/3aaa1af3-afa8-4a55-8e75-3fa113761e35.png

**Пример 6** Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы A B C D E F?

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4045/20190417114641/OEBPS/objects/c_matan_11_30_1/af041724-1422-4115-ad7b-d3b778cb32f7.png– способов обозначить вершины треугольника.

**Сочетаниями** из n элементов по m в каждом (m ≤ n) называются такие соединения, каждое из которых содержит mэлементов, взятых из данных n различных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом. Число всевозможных сочетаний из n различных элементов по m элементов обозначают https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/c223d479-a036-4f2b-816c-054d6d20f81f.png.

Формула для подсчёта числа сочетаний https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/e26b0326-4a83-4aec-9104-03828925bee7.png

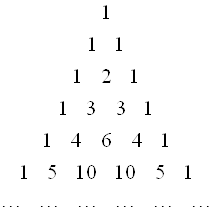
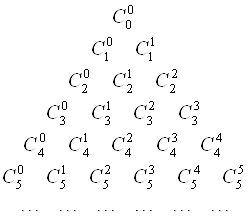
**Бином Ньютона** – формула разложения произвольной натуральной степени двучлена в многочлен.

Числа https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/7a215c96-4826-4f54-a645-4c43744c43fa.png являются **коэффициентами в формуле бинома Ньютона**

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/e5d447d1-a278-48af-80ef-35f0c5f5f5d5.png.

Простейшие свойства сочетаний:1) https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/5e0bf7e7-0e36-4a61-80f5-0a09029e7809.png; 2) https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/98abb92d-3cd1-4ed4-9eaa-54d8b7af1534.png; 3) https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/21c1b70d-14ad-4991-a214-ebcf0a5ff203.png.

Для более простого подсчета коэффициентов Бинома Ньютона для невысоких степеней удобно пользоваться **треугольником Паскаля**



По бокам в каждой строчки имеется коэффициент, равный единице. Все средние коэффициенты считаются, как сумма верхних, которые находятся над ними.

Практическая значимость треугольника Паскаля заключается в том, что с его помощью можно запросто восстанавливать по памяти не только известные формулы квадратов суммы и разности, но и формулы куба суммы (разности), четвертой степени и выше.

Не трудно заметить, что строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Это еще одно замечательное свойство треугольника Паскаля.

**Историческая справка**

Исаак Ньютон (1642-1727 гг.) – выдающийся английский ученый, один из создателей классической физики. Биография Ньютона богата во всех смыслах этого слова. Он сделал немало открытий в области физики, астрономии, механике и математике. Ньютон является автором фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета, заложил основы современной физической оптики, создал многие другие математические и физические теории.

**Пример 7** В вазе лежат двенадцать конфет, четыре из которых шоколадные, а остальные карамель. Вы хотите угоститься, выбрав две шоколадные и три карамельные конфеты. Сколькими способами вы можете это сделать?

Решение: Мы имеем два события. Это выбор шоколадных и выбор карамельных конфет. Порядок конфет не важен. Поэтому мы можем использовать формулу сочетания для каждого из событий. Так, как шоколадных конфет всего четыре, а выбрать мы хотим две, то это можно сделать способами https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/ce17bbd5-7031-41f0-a354-d5767b33eafb.png.

1) https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/90ae33b5-430c-41f1-9313-e6cb7dfe175c.png

Теперь посчитаем количество выбора карамельных конфет. Их общее количество в вазе 12-4=8, а выбрать мы хотим три. Рассчитаем сочетание из восьми по три.

2) https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/b4246289-48a6-4323-9496-b741d92457a8.png

События выбора разных видов конфет между собой независимы, поэтому по правилу умножения получаем

3) https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/d7c2114d-bf69-4454-bd1f-6fe82be36d3d.png

Ответ: 336.

**Пример 8** Представить разложение двучлена в n степени в виде многочлена, где n=0, 1, 2, …,5

Решение: Первые четыре разложения мы хорошо умеем делать, используя формулы квадрата и куба разности.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/a9b0984e-787b-4d21-8330-90d2969fa32e.png; https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/849e2874-0a1b-47be-91b8-b08916a9e888.png; https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/054bf70b-ba92-48db-b507-2a0672ebf5b4.png;

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/5908d41b-8036-415f-a110-d348ea11db5e.png

А для представления бинома четвертой и пятой степени воспользуемся треугольником Паскаля.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/789f3956-9c37-48ab-b2de-3d8bec96fb31.png

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/6119/20190202141835/OEBPS/objects/c_matan_11_31_1/c99b01bf-a13d-4ae0-9728-e1c432fdf2c0.png