**Тема: Функции и графики**

**Теоретический материал**

Если каждому элементу х из множества Х по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент у множества Y, то говорят, что на множестве Х определена функция со значениями в множестве Y, и записывают y=f(х).

Множество Х называется областью определения функции D(f), а множество Y – областью значений функции E(f).

**Пример 1** Найти область определения функции



**Основные свойства функции**

1. Четность и нечетность. Функция y=f(x) называется четной, если для любых значений х из области определения f(-x)=f(x), и называется нечетной, если f(-x)=-f(x). В противном случае функция y=f(x) называется функцией общего вида.

**Пример 2** Установить четность или нечетность функции



1. Монотонность. Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке Х из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.
2. Ограниченность. Функция y=f(x) называется ограниченной на некотором промежутке Х из области определения, если существует число М>0, такое, что  для любого .
3. Периодичность. Функция y=f(x) называется периодической с периодом Т>0, если для любых значений х из области определения f(x+T)=f(x-T)=f(x).

**Определение** Функция вида https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/5540/20190430113156/OEBPS/objects/c_matan_10_18_1/25d1ab74-74cb-4f46-8ed2-a8feb04b05fc.png, где n- любое действительное число, называют **степенной функцией**.

С некоторыми из таких функций вы уже познакомились в курсе алгебры 7-9 классов. Это, например, функции у=х1=х, у=х2, у=х3. При произвольном натуральном n графики и свойства функции у=хn аналогичны известным графикам и свойствам указанных функций.

Если показатель степени n — натуральное число, то степенная функция задаётся формулой y=xn.

При n=1,  y=x1 или y=x — прямая.

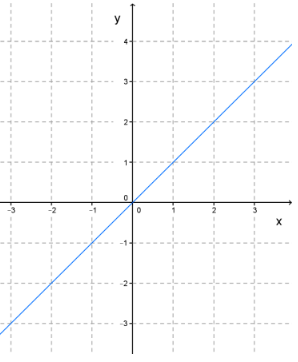


Рисунок 1 – график функции y=x1.

При n=2, y=x2 — парабола, при n=3, y=x3 — кубическая парабола.

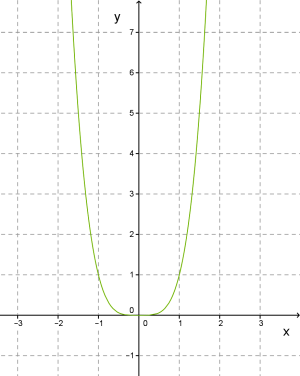
График степенной функции y=xn, где n — чётное число (4,6,8...), принимает вид параболы.

Рисунок 2 – график функции y=xn, где n — чётное число.

График степенной функции y=xn, где n — нечётное число (5,7,9...), принимает вид кубической параболы.

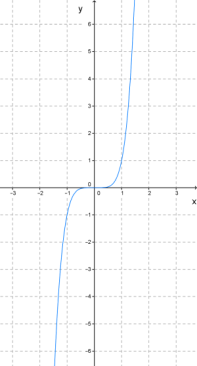


Рисунок 3 – график функции y=xn, где n — нечётное число.

Если показатель степени — целое отрицательное число, то степенная функция задаётся формулой y=x−n или y=1/xn.

График степенной функции y=x−n, в случае, когда n — **чётное число** (4,6,8...), принимает вид:

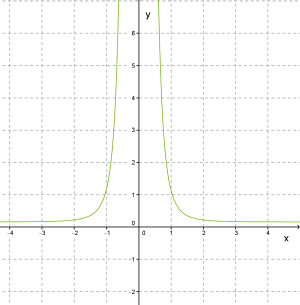


Рисунок 4 – график функции y=x−n, при  n — чётное число.

Например, такой вид принимают графики функций y=x−4,y=x−8.

 График степенной функции y=x−n, в случае, когда n — **нечётное число** (5,7,9...), принимает вид гиперболы:



Рисунок 5 – график функции y=x−n, при n — нечётное число.

Например, такой вид принимают графики функций y=x−5,y=x−11.

**Определение** Функцию y=f(x), x∈X называют обратимой, если любое своё значение она принимает только в одной точке множества X (иными словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции).

**Теорема 1** Если функция  y=f(x), x∈X монотонна на множестве X, то она обратима.

**Теорема 2** Если функция y=f(x) возрастает (убывает) на множестве X, а Y - область значений функции, то обратная функция x=f−1(y),y∈Y возрастает (убывает) на множестве Y.

**Теорема 3** Точки M(a;b) и P(b;a) симметричны относительно прямой y=x.

**Нахождение формулы для функции, обратной данной** Пользуясь формулой y=f(x), следует выразить x через y, а в полученной формуле x=g(y) заменить x на y, а y на x.

**Пример 3** Дана функция y=x2, x∈[0;+∞). Найти обратную функцию

Заданная функция возрастает на промежутке [0;+∞), значит, она имеет обратную функцию. Из уравнения y=x2 находим: х=  или х=. Промежутку [0;+∞) принадлежат лишь значения функции х=. Это и есть обратная функция, которая определена на промежутке [0;+∞).

Поменяв местами x и y, получим: у=, x∈[0;+∞). График этой функции получается из графика функции y=x2, x∈[0;+∞) с помощью симметрии относительно прямой y=x.

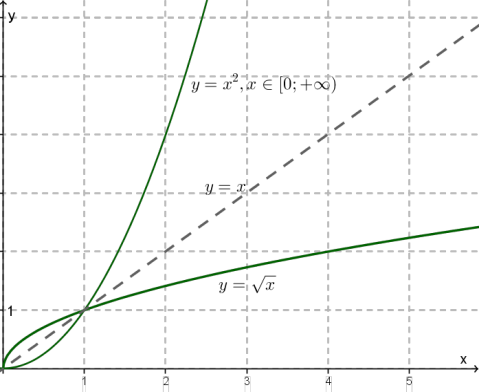


Рисунок 6 – график функции, обратной y=x2.

Функция вида https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3841/20190910172506/OEBPS/objects/c_matan_10_21_1/dbbc3c73-d739-4c69-8957-951930406459.png, a>0, а≠1 называется **показательной функцией с основанием а**.

Такое название она получила потому, что независимая переменная стоит в показателе. Основание а – заданное число. Для положительного основания значение степени ах можно найти для любого значения показателя х – и целого, и рационального, и иррационального, то есть для любого действительного значения.

**Свойства показательной функции**

1. Область определения. Степень ах для a>0 определена для любого действительного значения переменной х, поэтому область определения показательной функции D(y)=R.
2. Множество значений. Так как основание степени положительно, то очевидно, что функция может принимать только положительные значения. Множество значений показательной функции Е(y)=R+ или Е(y)=(0; +∞).
3. Корни (нули) функции. Так как основание a>0, то ни при каких значениях переменной х функция не обращается в 0 и корней не имеет.
4. Монотонность. При a>1 функция монотонно возрастает. При 0<a<1 функция монотонно убывает.
5. При любом значении а значение функции y (0) = а0 =1.
6. График функции. При a>1

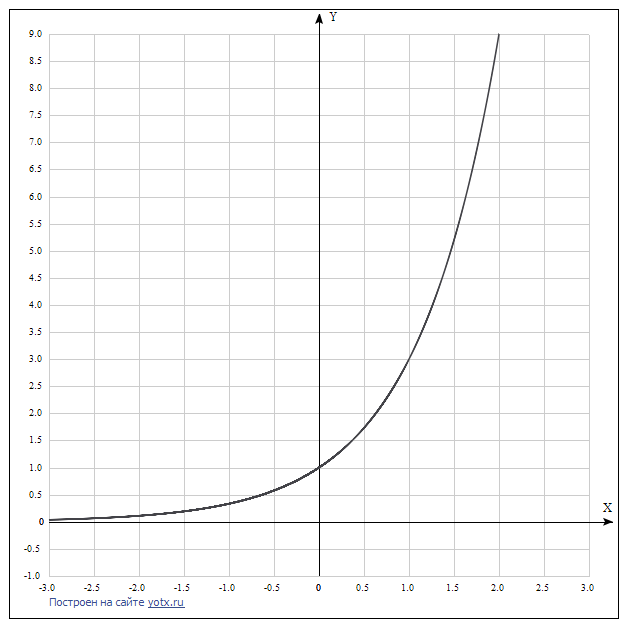


Рисунок 7 – график показательной функции при a>1.

При 0<a<1

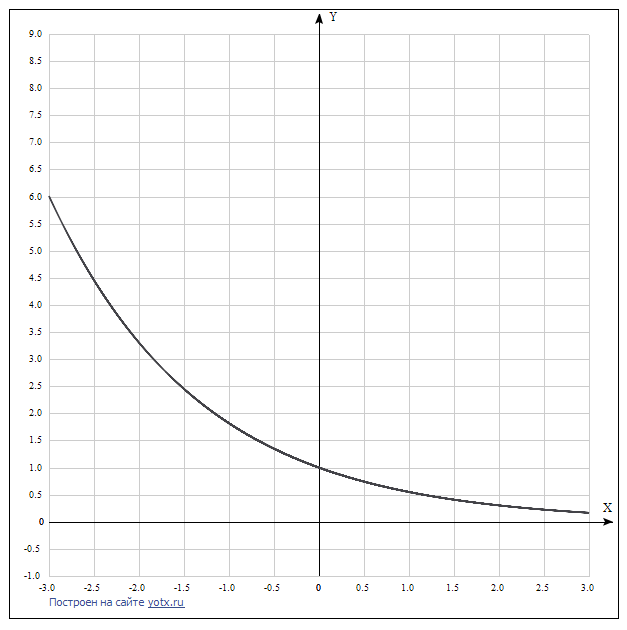


Рисунок 8 – график показательной функции при 0<a<1.

Независимо от значения основания а график функции имеет горизонтальную асимптоту y=0. Для 0<a<1 при х стремящемся к плюс бесконечности, для a>1 при х стремящемся к минус бесконечности.

**Пример 4** Рассмотрим пример исследования функции y=–3х+1.

Решение:

1) Область определения функции – любое действительное число.

2) Найдем множество значений функции.

Так как 3х>0, то –3х<0, значит, –3х+1<1, то есть множество значений функции y=–3х+1 представляет собой промежуток (-∞; 1).

3) Так как функция y=3х монотонно возрастает, то функция y=–3х монотонно убывает. Значит, и функция y=–3х+1 также монотонно убывает.

4) Эта функция будет иметь корень: –3х+1=0, 3х=1, х=0.

5) График функции

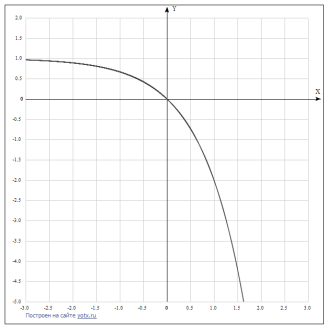


Рисунок 9 – график функции y=–3х+1.

6) Для этой функции горизонтальной асимптотой будет прямая y=1.

**Логарифмическая функция Ф**ункция вида y=logax, где a – заданное число, a > 0, a ≠ 1.

**Свойства логарифмической функции**

1. Область определения **–** множество всех положительных чисел (0;+).
2. Множество значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел R.
3. Ограниченная функция.
4. Возрастающая, если a > 1, и убывающая, если 0 < a < 1.
5. Нули функции при х = 1.
6. Если a > 0, то функция принимает положительные значение при х > 1, отрицательные при 0 < x < 1. Если0 < a **<** 1, функция принимает положительные значение при 0 < х < 1, отрицательные при x > 1.

**Областью определения** функций y = sin x и y = cos x является множество R всех действительных чисел.

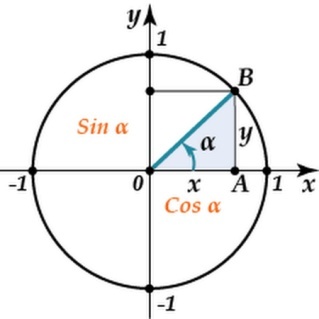
**Множеством значений функции**y = sin x и y = cos x  является отрезок -1 ≤ y ≤ 1. Данные функции ограничены сверху и снизу.

**Областью определения функции y = tg x** является множество чисел x ≠ π/2 + πk, kЄ Z.

**Областью определения функции y = сtg x** является множество чисел x ≠ πk, kЄ Z.

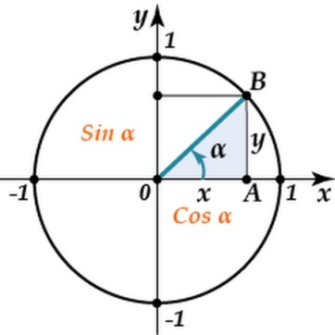
**Множеством значений функции y = tg x и y =сtg x**  является множество R всех действительных чисел, т.к. уравнения tg x = a  и сtg x = a  имеют корни при любом действительном a .

**Косинус** (cos α) – это тригонометрическая функция от угла α между гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника, равная отношению длины прилежащего катета |ОА| к длине гипотенузы |ОВ|.

****

Область определения функции (D) — множество R всех действительных чисел. Множество значений функции (E) — отрезок [-1; 1]. Функция чётная.

**Сиинус** (sin α) – это тригонометрическая функция от угла α между гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника, равная отношению длины противолежащего катета |АВ| к длине гипотенузы |ОВ|.



Область определения функции (D) — множество R всех действительных чисел. Множество значений функции (E) — отрезок [-1; 1]. Функция нечётная. Все тригонометрические функции являются **периодическими функциями**. Функции y=sin и y=cos повторяются через каждые 360° (или 2π радиан), поэтому 360° называется **периодом** этих функций.

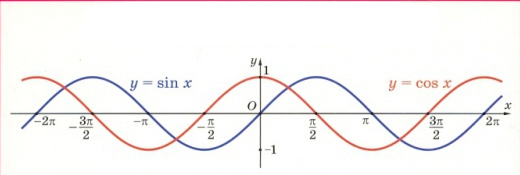


Рисунок 10 – графики функций y=sin и y=cos.

**Свойства функции y=cosх**

1. Область определения - множество R всех действительных чисел.
2. Множество значений - отрезок [−1;1].
3. Функцияy=cosх периодическая, Т=2π.
4. Функция y=cosх - чётная.
5. Функция y=cosх принимает:

* значение, равное 0, при https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4920/20190730105828/OEBPS/objects/c_matan_11_3_1/063d7b7e-c528-4172-aff2-adb3a6712172.png
* наибольшее значение, равное 1, при https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4920/20190730105828/OEBPS/objects/c_matan_11_3_1/529d91a7-68f1-487d-a765-56497764d346.png;
* наименьшее значение, равное −1, при https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4920/20190730105828/OEBPS/objects/c_matan_11_3_1/f8f5acb2-43ff-4e75-bdb9-c44acfebab5b.png;
* положительные значения на интервале https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4920/20190730105828/OEBPS/objects/c_matan_11_3_1/a166f240-1992-41f5-add2-add4876444bc.png и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4920/20190730105828/OEBPS/objects/c_matan_11_3_1/1f1f7389-dda2-49ae-b38b-bc1df2fb8775.png;
* отрицательные значения на интервале https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4920/20190730105828/OEBPS/objects/c_matan_11_3_1/6fd1108f-4969-40e1-a056-19eb5c11b91f.png и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4920/20190730105828/OEBPS/objects/c_matan_11_3_1/0e0c42c6-fd1b-4131-85f0-1a315fcd1ef0.png.

1. Функция y=cosх:

* возрастает на отрезке [π;2π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4920/20190730105828/OEBPS/objects/c_matan_11_3_1/6e4256de-88fd-446f-a3f3-227938c04c46.png;
* убывает на отрезке [0;π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4920/20190730105828/OEBPS/objects/c_matan_11_3_1/3ae77cc8-2f12-423b-ad46-4ba7e3f94b93.png.

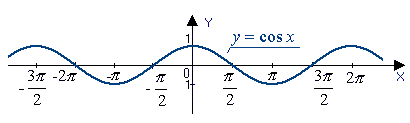


Рисунок 11 – график функции y=cosх.

**Синусоидой** называется множество точек плоскости, которое в некоторой системе координат является графиком функции y=sin х.

**Свойства функции y=sin х**

1. Область определения - множество R всех действительных чисел.
2. Множество значений - отрезок [−1;1].
3. Функцияy=sinх периодическая, Т=2π.
4. Функция y=sinх - нечётная.
5. Функция y=sinх  принимает:

* значение, равное 0, при х=;
* наименьшее значение, равное –1, при x=;
* наибольшее значение, равное 1, при x=;
* положительные значения на интервале (0;https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/5570/20190730111008/OEBPS/objects/c_matan_11_4_1/7f20b05e-23ac-4d51-9fa7-fd552ee31f33.png) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/5570/20190730111008/OEBPS/objects/c_matan_11_4_1/2a2879d6-a778-4262-9e3e-12e70667e494.png;
* отрицательные значения на интервале https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/5570/20190730111008/OEBPS/objects/c_matan_11_4_1/11f92496-e597-4fb6-b13c-6f05686e2fc5.pngи на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/5570/20190730111008/OEBPS/objects/c_matan_11_4_1/5fd0a0f3-a713-4331-807c-1bb737da72e6.png.

1. Функция y=sinх:

* возрастает на отрезке [; ] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4920/20190730105828/OEBPS/objects/c_matan_11_3_1/6e4256de-88fd-446f-a3f3-227938c04c46.png;
* убывает на отрезке [;] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4920/20190730105828/OEBPS/objects/c_matan_11_3_1/3ae77cc8-2f12-423b-ad46-4ba7e3f94b93.png.

**Сдвиг графика влево/вправо вдоль оси абсцисс** Если к аргументу функции добавляется постоянная, то происходит сдвиг (параллельный перенос) графика вдоль оси Ох.

**Правило** 1) чтобы построить график функции https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/5570/20190730111008/OEBPS/objects/c_matan_11_4_1/89fc8fe3-7424-48d8-9689-c54c87ee32f2.png, нужно сдвинуть график вдоль оси Ох  на b единиц влево; 2) чтобы построить график функции https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/5570/20190730111008/OEBPS/objects/c_matan_11_4_1/75938157-12b2-4362-ac0b-3b765a309de3.png, нужно график  сдвинуть вдоль оси  ОХ  на b единиц вправо.

**Асимптотой** кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой. **Тангенсоида–**график функции у = tgx; плоская кривая, изображающая изменение тангенса в зависимости от изменения его аргумента (угла).

**Основные свойства y=tgx**

* 1. Область определения функции y = tgx все действительные числа, кроме чисел вида x=.
  2. Множество значений – множество R всех действительных чисел.
  3. Функция периодическая с периодом Т=π.
  4. Функция нечётная, т.к. https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3943/20190730111950/OEBPS/objects/c_matan_11_5_1/d4a2fd25-8d9c-4099-8387-9665d4175264.png.
  5. Функция y = tgx принимает:
* значение, равное 0, при https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3943/20190730111950/OEBPS/objects/c_matan_11_5_1/7848bcbe-5a8c-4be3-a367-b86d637557d4.png;
* положительные значения на интервалах https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3943/20190730111950/OEBPS/objects/c_matan_11_5_1/8066f1ee-f0af-4e90-a08a-bcdab3024c7b.png
* отрицательные значения на интервалах https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3943/20190730111950/OEBPS/objects/c_matan_11_5_1/6cfd05b1-14a3-4a81-90cd-1b5819efffb7.png
  1. Возрастающая на интервалах , nZ.

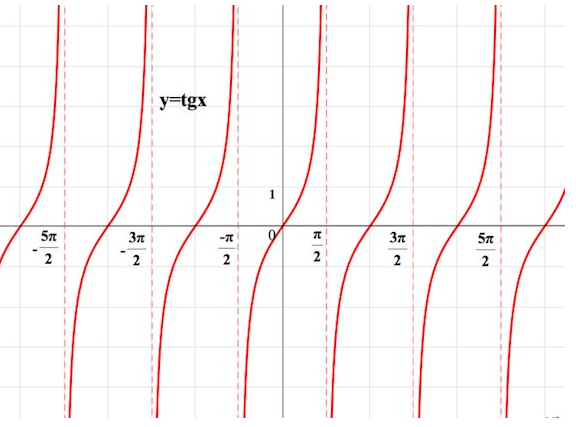


Рисунок 12 – график функции y=tgх.

Для построения графика y=сtgх можно придерживаться алгоритму рассмотренному при построении графика y=tgх. Смещая тангенсоиду на https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3943/20190730111950/OEBPS/objects/c_matan_11_5_1/5c28aca2-58de-45d0-9f34-63d576a547e8.pngединиц влево и делаем симметрию относительно оси Ох, получаем:

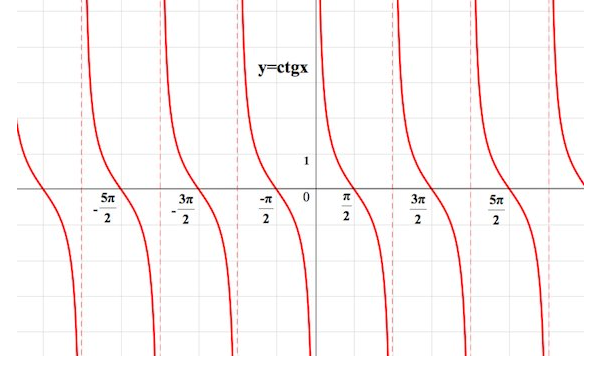
**

Рисунок 13 – график функции y=сtgх.

**Основные свойства y=сtgx**

* 1. Область определения функции y = сtgx все действительные числа, кроме чисел вида x=.
  2. Множество значений – множество R всех действительных чисел.
  3. Функция периодическая с периодом Т=π.
  4. Функция нечётная, т.к. сtg(-x)= -сtgx.
  5. Функция y = сtgx принимает:
* значение, равное 0, при х=, nZ;
* положительные значения на интервалах https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3943/20190730111950/OEBPS/objects/c_matan_11_5_1/8066f1ee-f0af-4e90-a08a-bcdab3024c7b.png
* отрицательные значения на интервалах , nZ
  1. Убывающая на интервалах , nZ.

**Пример 5** Найдем все корни уравнения tgх=1, принадлежащие отрезку https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3943/20190730111950/OEBPS/objects/c_matan_11_5_1/4990afb2-2848-4eaa-9467-ee053fbc7933.png.

Построим графики функций y = tgx и у=1.

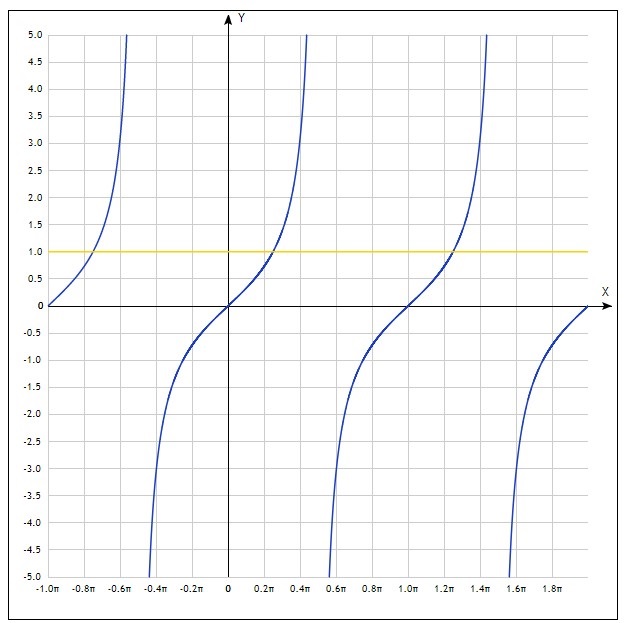


Рисунок 14 – графики функций y = tgx и у=1.

Графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3943/20190730111950/OEBPS/objects/c_matan_11_5_1/8d4a2746-eee8-4b54-861c-321795e285e2.pngявляются корнями уравнения tgx=1, х1= , х2=, х3=.

Ответ: х1= , х2=, х3=.