**Тема: Функции и графики**

**Теоретический материал**

Если каждому элементу х из множества Х по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент у множества Y, то говорят, что на множестве Х определена функция со значениями в множестве Y, и записывают y=f(х).

Множество Х называется областью определения функции D(f), а множество Y – областью значений функции E(f).

**Пример 1** Найти область определения функции



**Основные свойства функции**

1. Четность и нечетность. Функция y=f(x) называется четной, если для любых значений х из области определения f(-x)=f(x), и называется нечетной, если f(-x)=-f(x). В противном случае функция y=f(x) называется функцией общего вида.

**Пример 2** Установить четность или нечетность функции



1. Монотонность. Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке Х из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.
2. Ограниченность. Функция y=f(x) называется ограниченной на некотором промежутке Х из области определения, если существует число М>0, такое, что  для любого .
3. Периодичность. Функция y=f(x) называется периодической с периодом Т>0, если для любых значений х из области определения f(x+T)=f(x-T)=f(x).

**Определение** Функция вида , где n- любое действительное число, называют **степенной функцией**.

С некоторыми из таких функций вы уже познакомились в курсе алгебры 7-9 классов. Это, например, функции у=х1=х, у=х2, у=х3. При произвольном натуральном n графики и свойства функции у=хn аналогичны известным графикам и свойствам указанных функций.

Если показатель степени n — натуральное число, то степенная функция задаётся формулой y=xn.

При n=1,  y=x1 или y=x — прямая.



Рисунок 1 – график функции y=x1.

При n=2, y=x2 — парабола, при n=3, y=x3 — кубическая парабола.

График степенной функции y=xn, где n — чётное число (4,6,8...), принимает вид параболы.

Рисунок 2 – график функции y=xn, где n — чётное число.

График степенной функции y=xn, где n — нечётное число (5,7,9...), принимает вид кубической параболы.



Рисунок 3 – график функции y=xn, где n — нечётное число.

Если показатель степени — целое отрицательное число, то степенная функция задаётся формулой y=x−n или y=1/xn.

График степенной функции y=x−n, в случае, когда n — **чётное число** (4,6,8...), принимает вид:



Рисунок 4 – график функции y=x−n, при  n — чётное число.

Например, такой вид принимают графики функций y=x−4,y=x−8.

 График степенной функции y=x−n, в случае, когда n — **нечётное число** (5,7,9...), принимает вид гиперболы:



Рисунок 5 – график функции y=x−n, при n — нечётное число.

Например, такой вид принимают графики функций y=x−5,y=x−11.

**Определение** Функцию y=f(x), x∈X называют обратимой, если любое своё значение она принимает только в одной точке множества X (иными словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции).

**Теорема 1** Если функция  y=f(x), x∈X монотонна на множестве X, то она обратима.

**Теорема 2** Если функция y=f(x) возрастает (убывает) на множестве X, а Y - область значений функции, то обратная функция x=f−1(y),y∈Y возрастает (убывает) на множестве Y.

**Теорема 3** Точки M(a;b) и P(b;a) симметричны относительно прямой y=x.

**Нахождение формулы для функции, обратной данной** Пользуясь формулой y=f(x), следует выразить x через y, а в полученной формуле x=g(y) заменить x на y, а y на x.

**Пример 3** Дана функция y=x2, x∈[0;+∞). Найти обратную функцию

Заданная функция возрастает на промежутке [0;+∞), значит, она имеет обратную функцию. Из уравнения y=x2 находим: х=$\sqrt{у}$  или х=$-\sqrt{у}$. Промежутку [0;+∞) принадлежат лишь значения функции х=$\sqrt{у}$. Это и есть обратная функция, которая определена на промежутке [0;+∞).

Поменяв местами x и y, получим: у=$\sqrt{х}$, x∈[0;+∞). График этой функции получается из графика функции y=x2, x∈[0;+∞) с помощью симметрии относительно прямой y=x.



Рисунок 6 – график функции, обратной y=x2.

Функция вида , a>0, а≠1 называется **показательной функцией с основанием а**.

Такое название она получила потому, что независимая переменная стоит в показателе. Основание а – заданное число. Для положительного основания значение степени ах можно найти для любого значения показателя х – и целого, и рационального, и иррационального, то есть для любого действительного значения.

**Свойства показательной функции**

1. Область определения. Степень ах для a>0 определена для любого действительного значения переменной х, поэтому область определения показательной функции D(y)=R.
2. Множество значений. Так как основание степени положительно, то очевидно, что функция может принимать только положительные значения. Множество значений показательной функции Е(y)=R+ или Е(y)=(0; +∞).
3. Корни (нули) функции. Так как основание a>0, то ни при каких значениях переменной х функция не обращается в 0 и корней не имеет.
4. Монотонность. При a>1 функция монотонно возрастает. При 0<a<1 функция монотонно убывает.
5. При любом значении а значение функции y (0) = а0 =1.
6. График функции. При a>1



Рисунок 7 – график показательной функции при a>1.

При 0<a<1



Рисунок 8 – график показательной функции при 0<a<1.

Независимо от значения основания а график функции имеет горизонтальную асимптоту y=0. Для 0<a<1 при х стремящемся к плюс бесконечности, для a>1 при х стремящемся к минус бесконечности.

**Пример 4** Рассмотрим пример исследования функции y=–3х+1.

Решение:

1) Область определения функции – любое действительное число.

2) Найдем множество значений функции.

Так как 3х>0, то –3х<0, значит, –3х+1<1, то есть множество значений функции y=–3х+1 представляет собой промежуток (-∞; 1).

3) Так как функция y=3х монотонно возрастает, то функция y=–3х монотонно убывает. Значит, и функция y=–3х+1 также монотонно убывает.

4) Эта функция будет иметь корень: –3х+1=0, 3х=1, х=0.

5) График функции



Рисунок 9 – график функции y=–3х+1.

6) Для этой функции горизонтальной асимптотой будет прямая y=1.

**Логарифмическая функция Ф**ункция вида y=logax, где a – заданное число, a > 0, a ≠ 1.

**Свойства логарифмической функции**

1. Область определения **–** множество всех положительных чисел (0;+$\infty $).
2. Множество значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел R.
3. Ограниченная функция.
4. Возрастающая, если a > 1, и убывающая, если 0 < a < 1.
5. Нули функции при х = 1.
6. Если a > 0, то функция принимает положительные значение при х > 1, отрицательные при 0 < x < 1. Если0 < a **<** 1, функция принимает положительные значение при 0 < х < 1, отрицательные при x > 1.

**Областью определения** функций y = sin x и y = cos x является множество R всех действительных чисел.

**Множеством значений функции**y = sin x и y = cos x  является отрезок -1 ≤ y ≤ 1. Данные функции ограничены сверху и снизу.

**Областью определения функции y = tg x** является множество чисел x ≠ π/2 + πk, kЄ Z.

**Областью определения функции y = сtg x** является множество чисел x ≠ πk, kЄ Z.

**Множеством значений функции y = tg x и y =сtg x**  является множество R всех действительных чисел, т.к. уравнения tg x = a  и сtg x = a  имеют корни при любом действительном a .

**Косинус** (cos α) – это тригонометрическая функция от угла α между гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника, равная отношению длины прилежащего катета |ОА| к длине гипотенузы |ОВ|.

****

Область определения функции (D) — множество R всех действительных чисел. Множество значений функции (E) — отрезок [-1; 1]. Функция чётная.

**Сиинус** (sin α) – это тригонометрическая функция от угла α между гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника, равная отношению длины противолежащего катета |АВ| к длине гипотенузы |ОВ|.



Область определения функции (D) — множество R всех действительных чисел. Множество значений функции (E) — отрезок [-1; 1]. Функция нечётная. Все тригонометрические функции являются **периодическими функциями**. Функции y=sin $α$ и y=cos$ α$ повторяются через каждые 360° (или 2π радиан), поэтому 360° называется **периодом** этих функций.



Рисунок 10 – графики функций y=sin $α$ и y=cos$ α$.

**Свойства функции y=cos**$ $**х**

1. Область определения - множество R всех действительных чисел.
2. Множество значений - отрезок [−1;1].
3. Функцияy=cos$ $х периодическая, Т=2π.
4. Функция y=cos$ $х - чётная.
5. Функция y=cos$ $х принимает:
* значение, равное 0, при 
* наибольшее значение, равное 1, при ;
* наименьшее значение, равное −1, при ;
* положительные значения на интервале  и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на ;
* отрицательные значения на интервале  и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на .
1. Функция y=cos$ $х:
* возрастает на отрезке [π;2π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на ;
* убывает на отрезке [0;π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на .



Рисунок 11 – график функции y=cos$ $х.

**Синусоидой** называется множество точек плоскости, которое в некоторой системе координат является графиком функции y=sin х.

**Свойства функции y=sin х**

1. Область определения - множество R всех действительных чисел.
2. Множество значений - отрезок [−1;1].
3. Функцияy=sin$ $х периодическая, Т=2π.
4. Функция y=sin$ $х - нечётная.
5. Функция y=sin$ $х  принимает:
* значение, равное 0, при х=$πn, n\in Z$;
* наименьшее значение, равное –1, при x=$-\frac{π}{2}+2πn, n\in Z$;
* наибольшее значение, равное 1, при x=$\frac{π}{2}+2πn, n\in Z$;
* положительные значения на интервале (0;) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на ;
* отрицательные значения на интервале и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на .
1. Функция y=sin$ $х:
* возрастает на отрезке [$-\frac{π}{2}$; $\frac{π}{2}$] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на ;
* убывает на отрезке [$\frac{π}{2}$;$ \frac{3π}{2}$] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на

 .

**Сдвиг графика влево/вправо вдоль оси абсцисс** Если к аргументу функции добавляется постоянная, то происходит сдвиг (параллельный перенос) графика вдоль оси Ох.

**Правило** 1) чтобы построить график функции , нужно сдвинуть график вдоль оси Ох  на b единиц влево; 2) чтобы построить график функции , нужно график  сдвинуть вдоль оси  ОХ  на b единиц вправо.

**Асимптотой** кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой. **Тангенсоида–**график функции у = tgx; плоская кривая, изображающая изменение тангенса в зависимости от изменения его аргумента (угла).

**Основные свойства y=tgx**

* 1. Область определения функции y = tgx все действительные числа, кроме чисел вида x=$\frac{π}{2}+πn, n\in Z$.
	2. Множество значений – множество R всех действительных чисел.
	3. Функция периодическая с периодом Т=π.
	4. Функция нечётная, т.к. .
	5. Функция y = tgx принимает:
* значение, равное 0, при ;
* положительные значения на интервалах 
* отрицательные значения на интервалах 
	1. Возрастающая на интервалах $\left(-\frac{π}{2}+πn;\frac{π}{2}+πn\right)$, n$\in $Z.



Рисунок 12 – график функции y=tg$ $х.

Для построения графика y=сtg$ $х можно придерживаться алгоритму рассмотренному при построении графика y=tg$ $х. Смещая тангенсоиду на единиц влево и делаем симметрию относительно оси Ох, получаем:

**

Рисунок 13 – график функции y=сtg$ $х.

**Основные свойства y=сtgx**

* 1. Область определения функции y = сtgx все действительные числа, кроме чисел вида x=$πn, n\in Z$.
	2. Множество значений – множество R всех действительных чисел.
	3. Функция периодическая с периодом Т=π.
	4. Функция нечётная, т.к. сtg(-x)= -сtgx.
	5. Функция y = сtgx принимает:
* значение, равное 0, при х=$\frac{π}{2}+πn$, n$\in $Z;
* положительные значения на интервалах 
* отрицательные значения на интервалах $\left(\frac{π}{2}+πn;π+πn\right)$, n$\in $Z
	1. Убывающая на интервалах $\left(πn;π+πn\right)$, n$\in $Z.

**Пример 5** Найдем все корни уравнения tg$ $х=1, принадлежащие отрезку .

Построим графики функций y = tgx и у=1.



Рисунок 14 – графики функций y = tgx и у=1.

Графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых являются корнями уравнения tgx=1, х1=$\frac{π}{4}$ , х2=$\frac{5π}{4}$, х3=$-\frac{3π}{4}$.

Ответ: х1=$\frac{π}{4}$ , х2=$\frac{5π}{4}$, х3=$-\frac{3π}{4}$.