

АЭРОДИНАМИКА



Издательство МГТУ
им. Н.Э. Баумана

АЭРОДИНАМИКА

Под редакцией доктора технических наук,
профессора В.Т. Калугина

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по направлению
«Ракетостроение и космонавтика»*



Москва 2010

УДК 533.6(075.8)

ББК 22.253.3

А99

Авторы:

*А.Г. Голубев, В.Т. Калугин, А.Ю. Луценко, В.О. Москаленко,
Е.Г. Столярова, А.И. Хлупнов, П.А. Чернуха*

Рецензенты:

кафедра «Аэродинамика, конструкция и прочность
летательных аппаратов» Московского государственного
технического университета гражданской авиации
(зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. *В.Г. Ципенко*);
д-р техн. наук, проф. *И.И. Липатов*

Аэродинамика : учеб. пособие / [А. Г. Голубев и др.] ;
А99 под ред. В. Т. Калугина. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баума-
на, 2010. – 687, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-3355-1

Изложены теоретические и прикладные вопросы аэродинамики летательных аппаратов. Приведены сведения из кинематики и динамики газов; даны основные уравнения аэродинамики, аналитические и численные методы расчета вихревых, потенциальных, плоских, пространственных и вязких течений. Рассмотрены теории скачков уплотнения; изоэнтропических, отрывных течений; пограничного слоя. Предложены практические задачи по определению аэродинамических характеристик летательных аппаратов и их элементов, даны понятия гистерезисных и нестационарных явлений в аэродинамике, представлены методы экспериментального моделирования процессов обтекания.

Содержание пособия соответствует курсам лекций, которые авторы читают в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Для студентов технических университетов, слушателей военных академий, а также аспирантов, инженеров и научных работников, специализирующихся в области ракетно-космической техники.

УДК 533.6(075.8)

ББК 22.253.3

ISBN 978-5-7038-3355-1

© Калугин В.Т., 2010

© Оформление. Изд-во МГТУ
им. Н.Э. Баумана, 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

Аэродинамика является одной из фундаментальных научных дисциплин, от развития которых зависит дальнейшее совершенствование авиационной, артиллерийской и ракетно-космической техники. Создание современных образцов летательных аппаратов (ЛА) невозможно без предварительного выбора и расчета их аэродинамических характеристик. В связи с этим знание аэродинамики, овладение методами аэродинамического расчета — необходимая и важная задача в подготовке будущего инженера в области авиации и ракетостроения.

В настоящем учебном пособии наряду с общими законами движения газовой (жидкой) среды рассматривается применение аэродинамики главным образом в ракетной технике.

При изучении любого курса, в том числе и аэродинамики, основным является глубокое усвоение его важнейших теоретических основ, без чего невозможно творческое решение практических задач. Поэтому в первой части книги особое внимание уделено изложению материалов, посвященных механике газовых сред: приведены основные понятия и определения, уравнения сохранения для различных моделей воздуха, теория изоэнтропических течений, скачков уплотнения; рассмотрены вопросы кинематики и динамики вязкого газа, особенности и закономерности отрывных течений, а также методы расчета воздушных (газовых) потоков.

Особое место в книге занимает освещение важнейших теоретических и прикладных вопросов, связанных с определением аэродинамических характеристик корпусов снарядов, ракет, крыльев (оперения) и ЛА в целом с учетом интерференционных эффектов. Этот материал содержится во второй части учебного пособия. Здесь же рассмотрены вопросы газодинамики разреженных сред, нестационарной и экспериментальной аэродинамики.

Естественно, что в учебном курсе нельзя охватить все многообразие проблем, которыми занимается аэродинамическая наука. Поэтому в нем представлена научная информация, усвоение которой необходимо специалисту, занимающемуся научно-инженерной дея-

тельностью в области артиллерийских систем и ракетно-космической техники. Содержание и объем этой информации при условии ее глубокого изучения будут достаточны для того, чтобы самостоятельно разобраться в других проблемах аэродинамики, с которыми могут сталкиваться молодые специалисты в практической деятельности.

Продолжая традиции научной школы аэродинамики ракет МГТУ им. Н.Э. Баумана, авторы сочли своим долгом использовать подходы и материалы, изложенные в трудах д-ра техн. наук, проф. Н.Ф. Краснова (1922—1990), который создал в МВТУ кафедру «Аэродинамика» и многие годы заведовал ею.

Учебное пособие подготовлено коллективом авторов, материал между которыми распределен следующим образом:

предисловие, гл. 2, § 6.4, 7.5, 7.6, гл. 11 — В.Т. Калугин; гл. 1, § 7.3, 7.7 — А.Г. Голубев; гл. 3, 5, 13 — Е.Г. Столярова; гл. 4, § 6.1—6.3, 7.2, 7.4 — П.А. Чернуха; § 7.1, гл. 8, § 12.4, 12.5, 14.1 и 14.3 — А.И. Хлупнов; гл. 9, 10 — А.Ю. Луценко; § 12.1—12.3, 14.2 — В.О. Москаленко. Общее редактирование учебного пособия осуществлено лауреатом премии Правительства РФ в области науки и техники, лауреатом премии им. Н.Е. Жуковского, д-ром техн. наук, проф. В.Т. Калугиным.

Авторы выражают глубокую признательность д-ру физ-мат. наук, проф. И.И. Липатову, а также д-ру техн. наук, проф. В.Г. Ципенко и коллективу возглавляемой им кафедры за полезные замечания и ценные предложения по улучшению содержания книги.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И МОДЕЛИ ВОЗДУШНОЙ СРЕДЫ. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ

Движение летательных аппаратов происходит в воздушной среде, которая оказывает на их поверхность сложное комплексное воздействие. Современное представление о воздухе, его составе и свойствах, причинах возникновения аэродинамического сопротивления и методах его расчета основывается на фундаментальных положениях механики сплошной среды и теории подобия физических процессов.

В главе приведены основные параметры воздушной атмосферы, а также соотношения, используемые в различных типах аэродинамических задач. Рассмотрено результирующее силовое воздействие атмосферной среды на ЛА, введены понятия аэродинамической силы, момента, центра давления и соответствующих аэродинамических коэффициентов, предложены основные системы координат, используемые при расчетах аэродинамических характеристик ЛА.

1.1. Физическое и математическое описание воздушной среды

Основной средой, в которой происходит движение ЛА, является атмосфера Земли. Атмосфера представляет собой смесь газов, водяного пара и аэрозолей. Объемный состав газов сухого воздуха до высот 90...95 км остается практически постоянным, %: 78,08 N₂, 20,95 O₂, 0,94 инертные газы и H₂, 0,03 CO₂ и другие газы в незначительных количествах.

Чтобы изучать воздействие воздуха на покоящиеся или движущиеся в нем тела, в первую очередь следует определить количест-

венные и качественные показатели, необходимые для описания воздушной среды; ее характеристики и условия, при которых эти показатели являются существенными, а также математический аппарат, используемый при решении задач аэродинамики.

Число молекул в 1 см^3 воздуха при нормальных условиях равно $2,5471 \cdot 10^{19}$. Как показывает практика, для большинства аэродинамических расчетов молекулярную структуру воздуха можно не учитывать и рассматривать его как однородную среду, заполняющую предоставленное ей пространство сплошь, без образования пустот. Это предположение, называемое *гипотезой сплошности среды*, позволяет рассматривать все используемые в расчетах характеристики воздуха как функции координат пространства и времени, причем в большинстве случаев эти функции предполагаются непрерывными и дифференцируемыми.

Как и любое упрощение действительности, гипотеза сплошности имеет свои границы применимости, которые можно оценить с помощью числа Кнудсена:

$$\text{Kn} = l/L, \quad (1.1)$$

где l — средняя длина свободного пробега молекул между двумя столкновениями; L — характерный размер обтекаемого тела. При $\text{Kn} \leq 0,01$ среда считается сплошной, при $\text{Kn} > 0,01$ необходимо учитывать молекулярную структуру воздуха и использовать в расчетах методы аэродинамики разреженной среды.

Состояние воздуха как сплошной среды описывается различными параметрами, основными из которых являются плотность ρ , давление p и температура T . Экспериментально установлено, что только два из трех основных параметров состояния газа независимы, т. е. $p = f(\rho, T)$. Это соотношение называется *уравнением состояния*.

Когда объем молекул пренебрежимо мал по сравнению с занимаемым газом объемом, а силы взаимного притяжения молекул можно не учитывать, газ называется совершенным. Практика показывает, что при решении большинства задач аэродинамики воздух с достаточной точностью можно считать совершенным газом, для которого уравнение состояния имеет вид

$$pv = RT, \quad (1.2)$$

где v — удельный объем, $\text{м}^3/\text{кг}$, $v = 1/\rho$; R — удельная газовая постоянная, равная для сухого воздуха $287,053 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$.

Умножая обе части уравнения (1.2) на молярную массу газа M , получаем

$$p v_M = MRT, \quad (1.3)$$

где v_M — объем, занимаемый 1 молем газа, м³/моль.

Согласно закону Авогадро (1811), моль любого газа при определенных давлении и температуре имеет одинаковый объем. Следовательно, произведение MR имеет постоянное значение для всех газов:

$$MR = R_0 = 8,3143 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}, \quad (1.4)$$

и называется *универсальной газовой постоянной*. В уравнение состояния она была введена Д.И. Менделеевым в 1874 г.

С учетом (1.4) выражение (1.2) принимает вид уравнения Клапейрона — Менделеева:

$$p = \frac{R_0}{M_0} \rho T, \quad (1.5)$$

где M_0 — средняя молярная масса воздуха как смеси газов, равная 0,02896 кг/моль.

Теплоемкостью называют количество теплоты, необходимое для нагрева рассматриваемой массы газа на один градус. Под *удельной теплоемкостью* понимают теплоемкость единицы массы газа.

Значение удельной теплоемкости зависит от условий, в которых происходит нагрев газа. Обычно вводят в рассмотрение удельную теплоемкость при постоянном давлении c_p и удельную теплоемкость при постоянном объеме c_v . Для совершенного газа обе эти величины постоянны и связаны между собой уравнением Майера:

$$c_p - c_v = R. \quad (1.6)$$

Для воздуха при $T < 450$ К значения теплоемкостей составляют $c_p = 1000$ Дж/(кг·К) и $c_v = 713$ Дж/(кг·К).

Большую роль в термо- и газодинамических зависимостях играет показатель адиабаты (отношение удельных теплоемкостей)

$$k = c_p / c_v, \quad (1.7)$$

который для воздуха равен 1,4.

В аэродинамических расчетах широко используют такие функции состояния воздуха, как внутренняя энергия e , энтальпия i и энтропия S , зависящие в общем случае от двух произвольных параметров состояния. Для совершенного газа при постоянных теплоемкостях эти зависимости упрощаются и могут быть записаны в виде следующих формул.

Внутренняя энергия единицы массы совершенного газа удовлетворяет уравнению

$$e = c_v T. \quad (1.8)$$

Это означает, что при любом термодинамическом процессе совершенного газа изменение его внутренней энергии определяется только изменением температуры.

Используя уравнение состояния, внутреннюю энергию можно выразить через два других основных параметра состояния:

$$e = \frac{c_v}{R} \frac{p}{\rho}.$$

Последнее выражение на основании уравнения (1.6) может быть преобразовано к виду

$$e = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}.$$

Энтальпией, или теплосодержанием, единицы массы газа называют величину

$$i = e + p v.$$

Для совершенного газа справедлива зависимость

$$i = c_p T. \quad (1.9)$$

С учетом уравнений (1.2) и (1.6) получаем

$$i = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}.$$

Второй закон термодинамики устанавливает существование особой функции состояния термодинамической системы — энтропии — и ее неубывание при любых процессах в изолированной системе. В общем случае удельная энтропия

$$dS = dq_e / T,$$

где dq_e — приращение теплоты.

Через параметры состояния совершенного газа с точностью до некоторой константы энтропия выражается в виде

$$S = c_v \ln(p/\rho^k) + C,$$

где $C = \text{const}$.

Если энтропия термодинамической системы остается постоянной, то проходящий в ней процесс называется изоэнтропическим. В этом случае давление и плотность связаны уравнением

$$p/\rho^k = C.$$

Рассмотрим установившееся движение воздуха с различными скоростями относительно неподвижной системы координат $Oxuz$, ограничившись изображением только плоскости xOy . В начале системы координат расположим источник слабых (акустических) возмущений.

Прежде всего рассмотрим простейший случай, когда воздух неподвижен, т. е. $V = 0$ (рис. 1.1, *а*). Возмущения распространяются во все стороны с одинаковой скоростью, называемой скоростью звука a . Если возмущения возникают с некоторым интервалом Δt , то в результате получается система концентрических сфер. Пусть процесс идет без диссипации энергии. Тогда при $t \rightarrow \infty$ возмущения займут все координатное пространство.

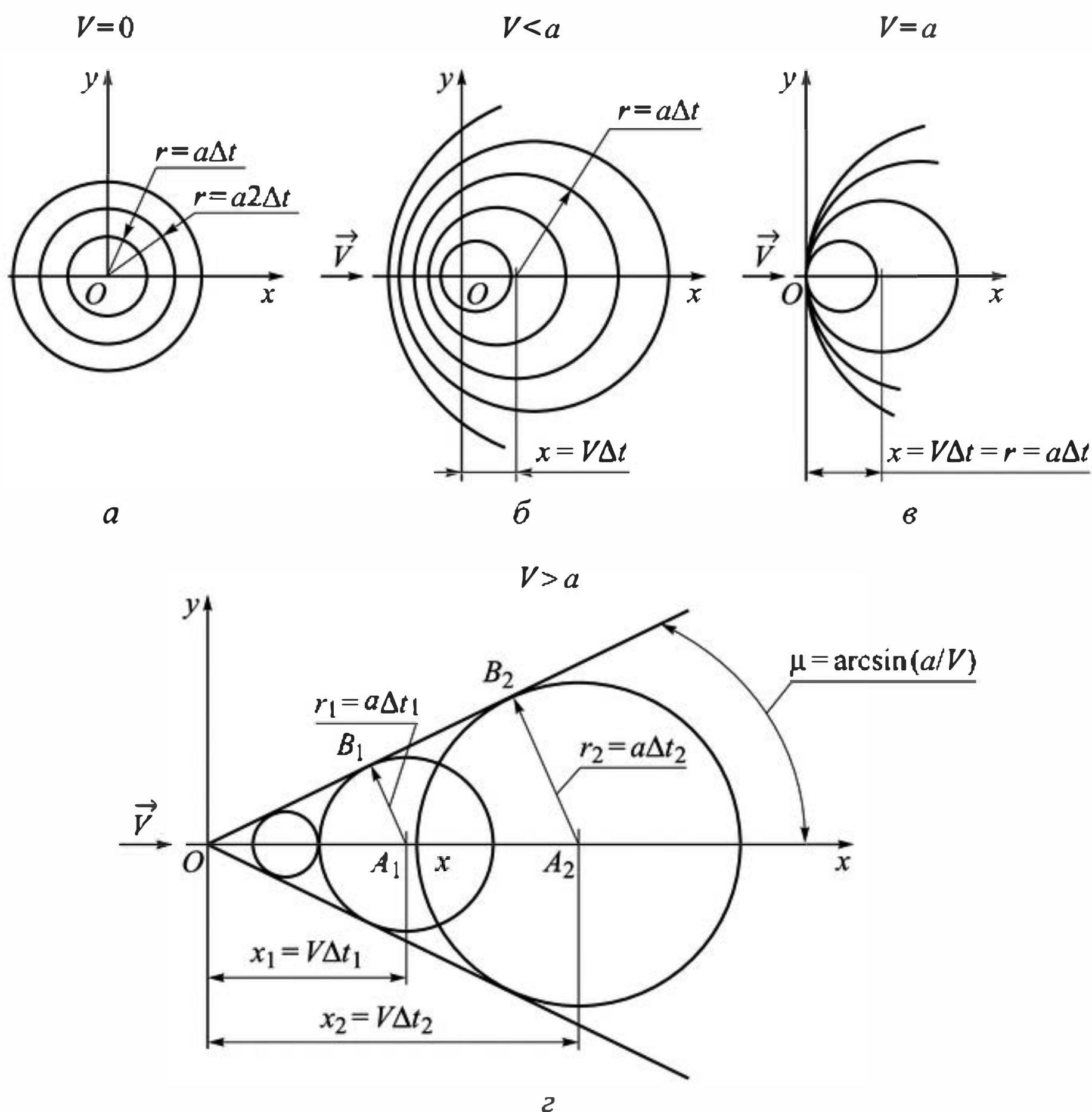


Рис. 1.1. Распространение слабых возмущений в воздушной среде

На рис 1.1, б показан случай, когда поток движется в направлении оси Ox со скоростью $V < a$ (дозвуковая скорость потока). За интервал времени Δt фронт возмущения образует в потоке сферу радиусом $r = a\Delta t$, а поток смещается на расстояние $x = V\Delta t$, причем $x < r$. Таким образом, относительно неподвижного наблюдателя (относительно системы координат xOy) в направлении оси Ox (по потоку) возмущения распространяются с суммарной скоростью $a + V$, а в противоположном направлении (против потока) — с меньшей скоростью $a - V$.

В предельном случае при $V = a$ возмущения не будут распространяться вверх по потоку (рис. 1.1, в) и с течением времени заполнят только всю правую половину координатного пространства (правую полусферу).

Совершенно особая картина распространения возмущений получается при сверхзвуковой скорости потока ($V > a$). Как видно на рис. 1.1, г, сферы возмущений сносятся вниз по потоку быстрее, чем распространяются сами возмущения. Если рассмотреть два момента времени Δt_1 и Δt_2 , то легко показать, что прямоугольные треугольники OA_1B_1 и OA_2B_2 подобны, а следовательно, все сферы распространения возмущений имеют общую касательную, наклоненную к направлению движения потока (к оси Ox) под углом $\mu = \arcsin(a/V)$. Отношение скорости потока в точке пространства к скорости распространения в ней слабых возмущений называется *числом Маха*:

$$M = V/a. \quad (1.10)$$

С учетом (1.10) угол μ вычисляют по формуле

$$\mu = \arcsin(1/M) \quad (1.11)$$

и называют *углом Маха*. При сверхзвуковой скорости потока в неподвижной системе координат все возмущения оказываются локализованными внутри *конуса Маха* с полууглом при вершине, равным μ . Образующие конуса (например, OB_2) называются *линиями слабых возмущений*, или *линиями Маха*.

Одним из важных свойств газа является его *сжимаемость* — способность изменять плотность под воздействием давления. Все процессы, связанные с течением газа, характеризуются изменением давления и, следовательно, влиянием в той или иной степени на эти процессы свойства сжимаемости. Исследования показывают, что пока скорости малы, изменение плотности вследствие малых изме-

нений давления невелико и эффектом сжимаемости можно пренебречь. Для исследования обтекания тел потоками с малыми скоростями можно принять уравнения гидродинамики, изучающей законы движения несжимаемой жидкости. Практически влиянием сжимаемости можно пренебречь в диапазоне скоростей движения воздуха от нескольких метров в секунду до 100...110 м/с.

Как будет показано ниже, для учета сжимаемости среды принципиальным является не ее абсолютная скорость, а соотношение между скоростью потока и скоростью распространения возмущений в нем, т. е. критерием сжимаемости среды является число Маха. Сжимаемостью воздуха можно пренебрегать до скоростей движения, соответствующих числу Маха $M \leq 0,3$.

Вязкость (внутреннее трение) — свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой. Происхождение сил вязкости связано с собственным хаотическим движением молекул газа, в результате которого они переносят вместе с собой из одного места в другое определенное количество движения. Как известно из кинетической теории газов, скорость движения молекул газа с ростом температуры возрастает, а следовательно, увеличивается вязкость газа.

Наиболее простая количественная зависимость может быть получена для так называемого квазиодномерного слоистого течения. Напряжение трения, возникающее при таком движении между слоями жидкости или газа, прямо пропорционально градиенту скорости V в поперечном направлении:

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (1.12)$$

Эту зависимость называют законом трения Ньютона (1687). Коэффициент пропорциональности, характеризующий вязкость среды (молекулярный перенос количества движения между слоями), называют *динамической вязкостью* μ и измеряют в паскаль-секундах (Па·с). Наряду с μ в аэродинамике используют *кинематическую вязкость* ν , вычисляемую по формуле

$$\nu = \mu / \rho \quad (1.13)$$

и измеряемую в квадратных метрах на секунду ($\text{м}^2/\text{с}$).

В более общем случае пространственного турбулентного движения газа закон, которому подчиняются силы внутреннего трения, гораздо сложнее.

До температур порядка 2 000 К вязкость воздуха практически не зависит от давления и может быть определена по степенной формуле

$$\mu/\mu_{\infty} = (T/T_{\infty})^n, \quad (1.14)$$

в которой для приближенных расчетов можно принять $n \approx 0,7$ (рис. 1.2). Значение динамической вязкости воздуха при $T_{\infty} = 288,15$ К составляет $\mu_{\infty} = 1,7894 \cdot 10^{-5}$ Па·с. Отсюда следует, что воздух обладает весьма малой вязкостью и нужны очень большие значения градиента скорости в поперечном к основному движению направлении $\partial V/\partial n$, чтобы напряжение трения достигло заметного значения. Вязкость газа имеет существенное значение в пределах так называемого пограничного слоя, примыкающего непосредственно к поверхности обтекаемого тела. Вне пограничного слоя газ можно считать невязким.

В дальнейшем идеальным газом будем называть газ, не обладающий вязкостью. На основе понятия идеального газа существенно упрощаются расчеты аэродинамических сил и моментов.

Наблюдения показывают, что для жидкостей и газов характерны два вида движения. *Ламинарное*, или *слоистое*, движение отличается упорядоченным расположением струек, не смешивающихся между собой. В ламинарном потоке перенос количества движения между слоями происходит вследствие молекулярных процессов. Такое движение возникает и сохраняется устойчивым,

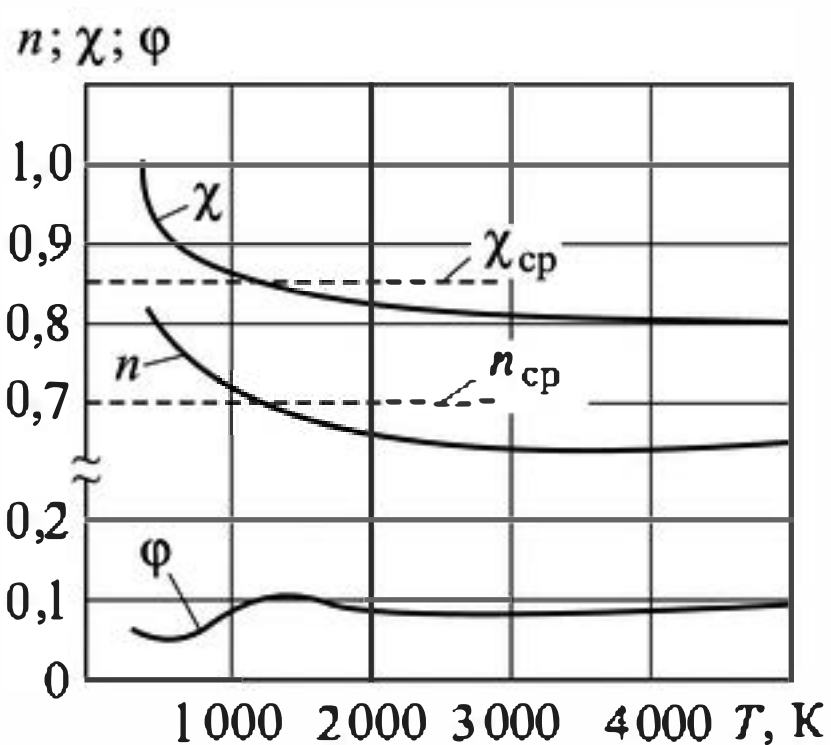


Рис. 1.2. Изменение показателей степеней n , χ и ϕ в формулах для определения динамической вязкости, теплопроводности и удельной теплоемкости

как правило, при небольших скоростях движения. Если при заданных условиях обтекания поверхности скорость потока превышает некоторое критическое значение, то ламинарное движение перестает быть устойчивым и переходит в новый вид, для которого характерны поперечное перемешивание среды и, как следствие, исчезновение упорядоченного слоистого течения. Такое течение называется *турбулентным*. На молекулярное хаотическое движение, которое было характерным для ламинарного течения, в турбулентном потоке накладывается перемешивание мак-

роскопических частиц, обладающих перпендикулярными направлению продольного движения компонентами скорости. В этом состоит основное отличие турбулентного движения от ламинарного. Другое отличие заключается в том, что если ламинарное течение может быть как установившимся, так и не установившимся, то турбулентный поток, по своей сущности, имеет не установившийся характер, при котором скорость и другие параметры в данной точке зависят от времени.

При исследовании турбулентного течения удобно иметь дело не с мгновенными (фактическими) параметрами, а с их осредненным (среднестатистическим) значением за некоторый промежуток времени Δt . Например, составляющая осредненной скорости по оси Ox

$$\bar{V}_x = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} V_x dt, \quad (1.15)$$

где V_x — составляющая фактической скорости в данной точке, которая является функцией времени. Аналогично вычисляют составляющие скорости по другим осям координат.

Разность фактического и осредненного значений параметров потока в данной точке в данный момент времени называют *пульсацией*. Таким образом, можно представить, например, фактическую скорость V_x в виде суммы:

$$V_x = \bar{V}_x + V'_x,$$

где V'_x — пульсационная скорость по оси Ox . Записать или измерить пульсационную скорость можно, поместив в нужную точку потока измерительный прибор с малой инерционностью (термоанемометр), или дистанционно (с помощью лазерного анемометра).

При описании турбулентных течений широко используют также понятие осредненной по времени амплитуды пульсаций параметров:

$$\sqrt{\bar{V'^2_{x(y,z)}}} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} V'^2_{x(y,z)} dt}.$$

При равенстве осредненных по времени амплитуд пульсаций скорости потока по всем направлениям турбулентность в данной точке называется *изотропной*, а если это свойство имеет место для всех точек потока, — *однородной*.

Величина ε , вычисляемая по формуле

$$\varepsilon = \frac{1}{\bar{V}} \sqrt{\frac{1}{3} (\bar{V}_x'^2 + \bar{V}_y'^2 + \bar{V}_z'^2)},$$

где $\bar{V}$ — осредненная скорость потока, называется *степенью турбулентности* в данной точке. Для невозмущенной атмосферы $\varepsilon \approx 0,01 \dots 0,03 \%$.

Введение понятия об осредненных параметрах значительно облегчает исследование турбулентных течений. Для практических целей нет необходимости знать мгновенные значения скоростей, давлений или касательных напряжений, а можно ограничиться их средними по времени значениями. Однако в практических случаях осреднение осуществляют для достаточно большого промежутка времени, и тогда изучение неустановившегося потока можно свести к исследованию установившегося движения (квазистационарное турбулентное движение).

Если различные тела или части одного тела имеют неодинаковую температуру, то они могут обмениваться между собой энергией в форме теплообмена. В потоке воздуха теплообмен способен осуществляться путем теплопроводности, конвекции и радиации.

Теплопроводность характеризует перенос энергии между областями потока с различными температурами. При этом он осуществляется в результате непосредственной передачи энергии от частиц (молекул, атомов, электронов), обладающих большей энергией, частицам с меньшей энергией. Если относительное изменение температуры на расстоянии средней длины свободного пробега частиц мало, то выполняется основной закон теплопроводности (закон Фурье), в соответствии с которым количество теплоты dQ , переданное через элементарную площадку dF за время dt , может быть вычислено как

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dn} dF dt,$$

где λ — теплопроводность, Вт/(м·К); n — нормаль к поверхности теплообмена (к площадке dF). Знак минус показывает, что при $\frac{dT}{dn} > 0$ тепловой поток передается в противоположном направлении, т. е. из области с большей температурой в область, где температура ниже.

Величина

$$q_{\text{т.п}} = -\lambda \frac{dT}{dn},$$

равная количеству теплоты, проходящей в единицу времени через единичную площадку, называется *плотностью теплового потока* (удельным тепловым потоком) и измеряется в ваттах на квадратный метр (Вт/м²).

Для воздуха теплопроводность, как и вязкость, до $T < 2\,000$ К практически не зависит от давления и определяется только температурой:

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\chi, \quad (1.16)$$

где $\lambda_0 = 0,0232$ Вт/(м·К) при $T_0 = 261$ К, а значение показателя степени для приближенных расчетов $\chi = 0,85$ (см. рис. 1.2).

Конвекцией, или *конвективным теплообменом*, называют обмен энергией в форме теплоты между различно нагретыми областями воздуха или воздухом и твердой поверхностью, обусловленный перемещением макрообъемов воздуха. Конвективный теплообмен между воздухом и твердой поверхностью называется также *теплоотдачей*. При этом удельный тепловой поток q_k может быть определен по формуле Ньютона:

$$q_k = \alpha(T - T_{\text{ст}}),$$

где α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К); T — некоторая характерная температура воздуха у твердой поверхности; $T_{\text{ст}}$ — температура стенки. Значение коэффициента теплоотдачи зависит от большого количества параметров обтекания, в частности от режима течения в пограничном слое (ламинарный или турбулентный), вязкости, скорости и т. п.

При *радиационном теплообмене* энергия излучается или поглощается телом посредством электромагнитных волн в основном в инфракрасном диапазоне. Этот вид теплообмена начинает играть для воздуха заметную роль при температурах выше 2 000 К.

При гиперзвуковых ($M > 5$) скоростях полета кроме сжимаемости в воздушном потоке проявляются особенности, связанные с влиянием высоких температур. Такие температуры возникают вследствие торможения потока, при котором кинетическая энергия упо-

рядоченного движения частиц переходит во внутреннюю энергию газа.

При температуре около 1 500 К заметную роль начинает играть возбуждение колебательных уровней внутренней энергии молекул кислорода и азота воздуха. При температуре приблизительно 3 000 К и давлении 10^5 Па колебательные степени свободы молекул кислорода оказываются полностью возбужденными и дальнейшее повышение температуры приводит к началу процесса их *диссоциации*. При 5 000...6 000 К и давлении 10^5 Па молекулы кислорода почти полностью диссоциированы. Кроме того, при такой температуре начинается диссоциация азота.

Интенсивность диссоциации определяется ее степенью, равной отношению числа распавшихся частиц воздуха к общему числу атомов и молекул. Степень диссоциации зависит от температуры и давления. С повышением температуры она увеличивается, поскольку возрастают скорость и энергия движущихся молекул, что повышает вероятность их столкновения и распада. При этом интенсивность протекания диссоциации растет с понижением давления (плотности) вследствие уменьшения вероятности столкновений частиц, ведущих к образованию молекул из атомов.

При температурах 5 000...6 000 К начинает развиваться еще один процесс, заключающийся в том, что вследствие большого притока энергии происходит сначала возбуждение электронных степеней свободы, а затем отрыв электронов от атомов азота и кислорода, а также от молекул оксида азота. Указанный процесс называется *ионизацией*. Происходит она в основном в результате соударения частиц воздуха при их тепловом движении, поэтому такую ионизацию называют также *термоионизацией*. Процесс ионизации происходит более интенсивно по мере увеличения температуры и сопровождается ростом концентрации свободных электронов. Интенсивность этого процесса характеризуется степенью ионизации, равной отношению числа ионизированных атомов (молекул) к их общему числу. Как показывают исследования, азот, например, полностью термически ионизирован при температуре 17 000 К и давлении 10^5 Па.

При разогреве воздуха подводимая к нему теплота расходуется не только на увеличение энергии поступательного и вращательного движения молекул, но и на увеличение энергии колебания атомов в молекуле, работу по преодолению сил взаимодействия между атомами при диссоциации молекулы, а также на отрыв электронов от атома при ионизации. Вследствие этого удельные

теплоемкости возрастают. До момента начала диссоциации изменение удельной теплоемкости воздуха определяется лишь температурой. Для приближенной оценки влияния температуры на удельную теплоемкость при постоянном давлении применяют формулу

$$\frac{c_p}{c_{p\infty}} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^\varphi, \quad (1.17)$$

где показатель φ , в свою очередь, зависит от температуры (см. рис. 1.2). Для $T > 1\,000\text{ К}$ этот показатель можно принять постоянным и равным 0,1. Формулу (1.17) применяют до $T = 2\,500\text{ К}$.

При наступлении диссоциации удельная теплоемкость зависит не только от температуры, но и от давления. Кривые, характеризующие изменение показателя k , а следовательно, и теплоемкости c_p , при высоких температурах, приведены на рис. 1.3.

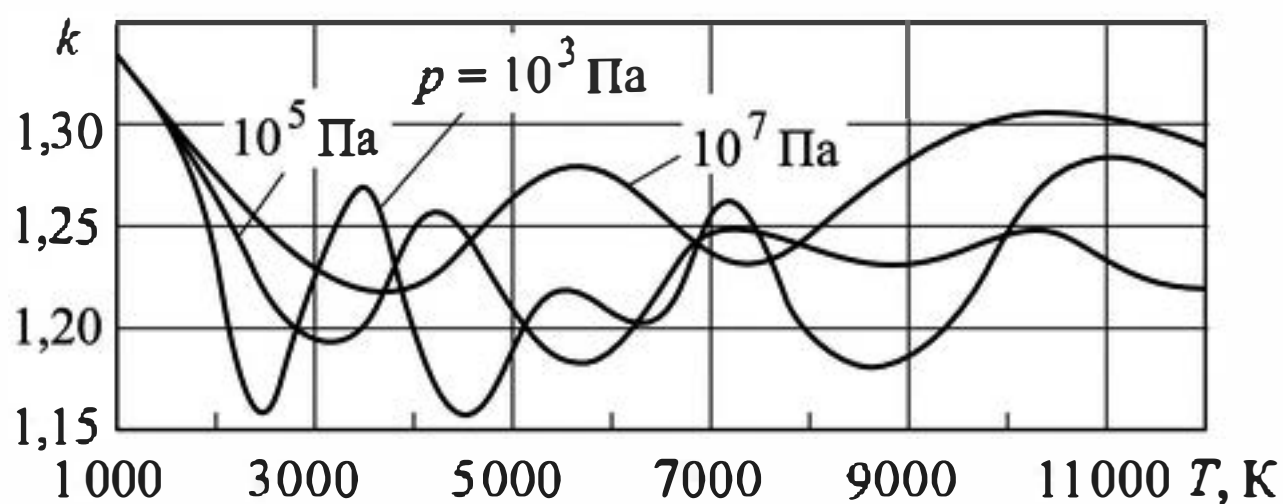


Рис. 1.3. Изменение показателя адиабаты k для воздуха при высоких температурах

При температурах вплоть до $9\,000\text{ К}$ динамическая вязкость воздуха, находящегося в условиях равновесной диссоциации, может быть определена с точностью до 10 % по формуле Сатерлэнда:

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{0,5} \frac{1 + 111/T_\infty}{1 + 111/T}. \quad (1.18)$$

Установлено, что динамическая вязкость и теплопроводность воздуха при высоких температурах зависят также и от давления (рис. 1.4, а, б).

Происхождение сил вязкости, как и возникновение процесса теплопроводности в газе, связано с молекулярным строением вещества. Молекулы газа при своих собственных движениях переносят из одного места в другое массу, энергию и количество движения. Результатом изменения количества движения являются силы вяз-

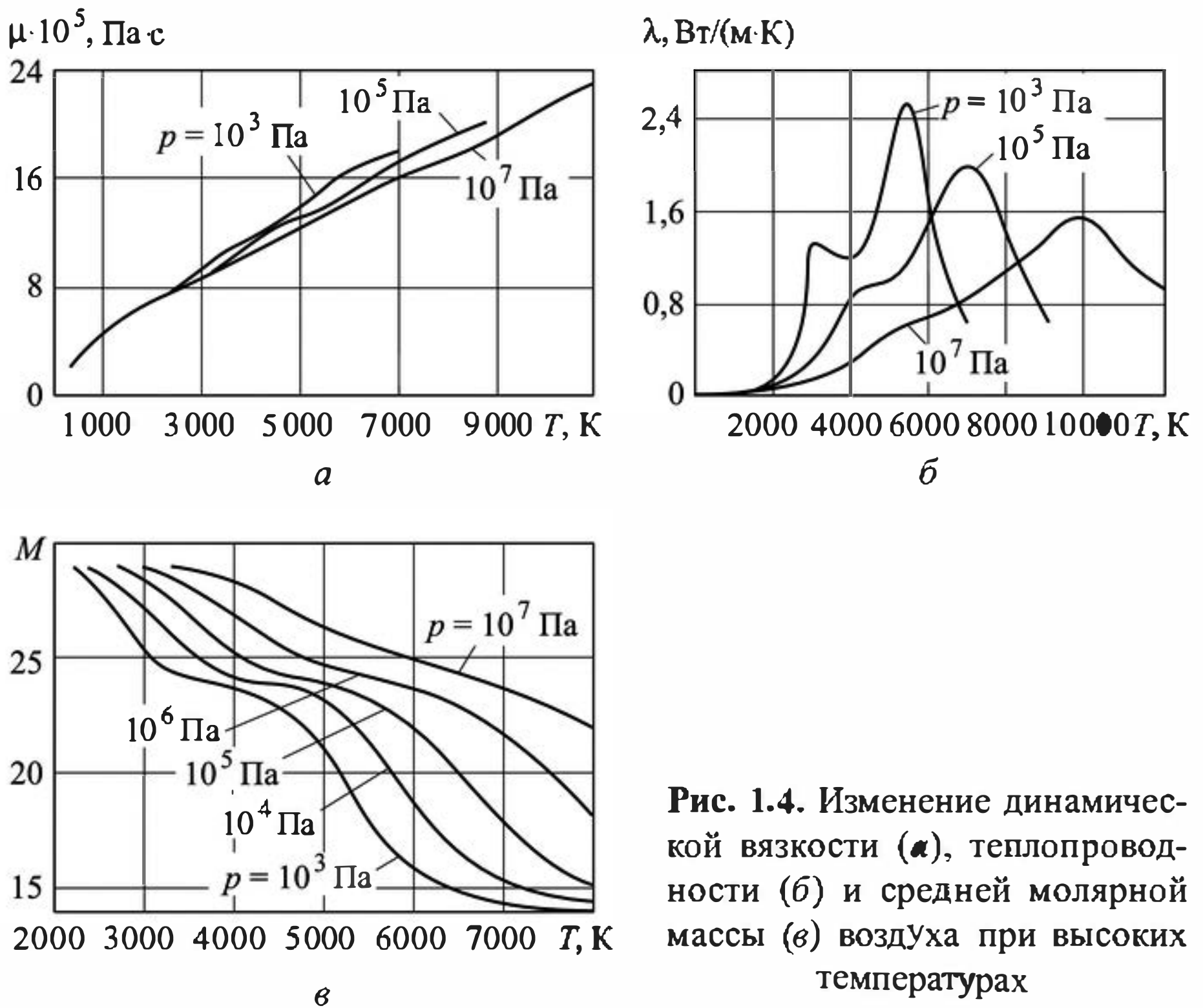


Рис. 1.4. Изменение динамической вязкости (а), теплопроводности (б) и средней молярной массы (в) воздуха при высоких температурах

кости, а перенос энергии обуславливает свойство теплопроводности. Из этих соображений ясно, что с ростом температуры увеличиваются и теплопроводность, и динамическая вязкость в газе. При возникновении диссоциации характер изменения будет довольно сложным. При малой степени диссоциации значения теплопроводности λ снижаются, что вызвано затратами внутренней энергии на разрыв молекулярных связей и, как следствие, снижением температуры газа. При повышении степени диссоциации более интенсивное дробление молекул на атомы приводит к росту числа частиц, участвующих в процессах переноса, что вызывает увеличение теплопроводности λ .

При очень сильном разогреве газа еще больше увеличиваются затраты внутренней энергии на ионизацию, что влечет за собой снижение теплопроводности. Что касается динамической вязкости, то для ее изменения характерно монотонное возрастание при увеличении температуры, поскольку с наступлением диссоциации и ионизации образуется все большее число частиц, участвующих в пере-

носе количества движения, которое обуславливает увеличение сил вязкости.

Для воздуха в условиях диссоциации молярная масса также является функцией его состояния, т. е. $M = f(p, T)$. Изменение средней молярной массы воздуха при высоких температурах показано на рис. 1.4, в. На кривых можно заметить три характерных участка убывания M в зависимости от температуры. Первый из них обусловлен диссоциацией кислорода, второй — азота, третий — ионизацией компонентов воздуха. Общая тенденция к уменьшению M диссоциированного и ионизированного газа с повышением температуры обусловлена распадом молекул на атомы, а также отрывом электронов. При этом повышение давления способствует более интенсивной рекомбинации, что приводит к некоторому росту M . Следует принять во внимание, что необходимость учета изменения удельных теплоемкостей от температуры наступает раньше, чем необходимость применения уравнения состояния, отличного от уравнения (1.5) для совершенного газа.

Наиболее распространенной для тепловых расчетов в аэродинамике является i — S -диаграмма воздуха при наличии диссоциации (рис. 1.5), на которой нанесены кривые $p = \text{const}$ (изобары), $T = \text{const}$ (изотермы) и $\rho = \text{const}$ (изохоры).

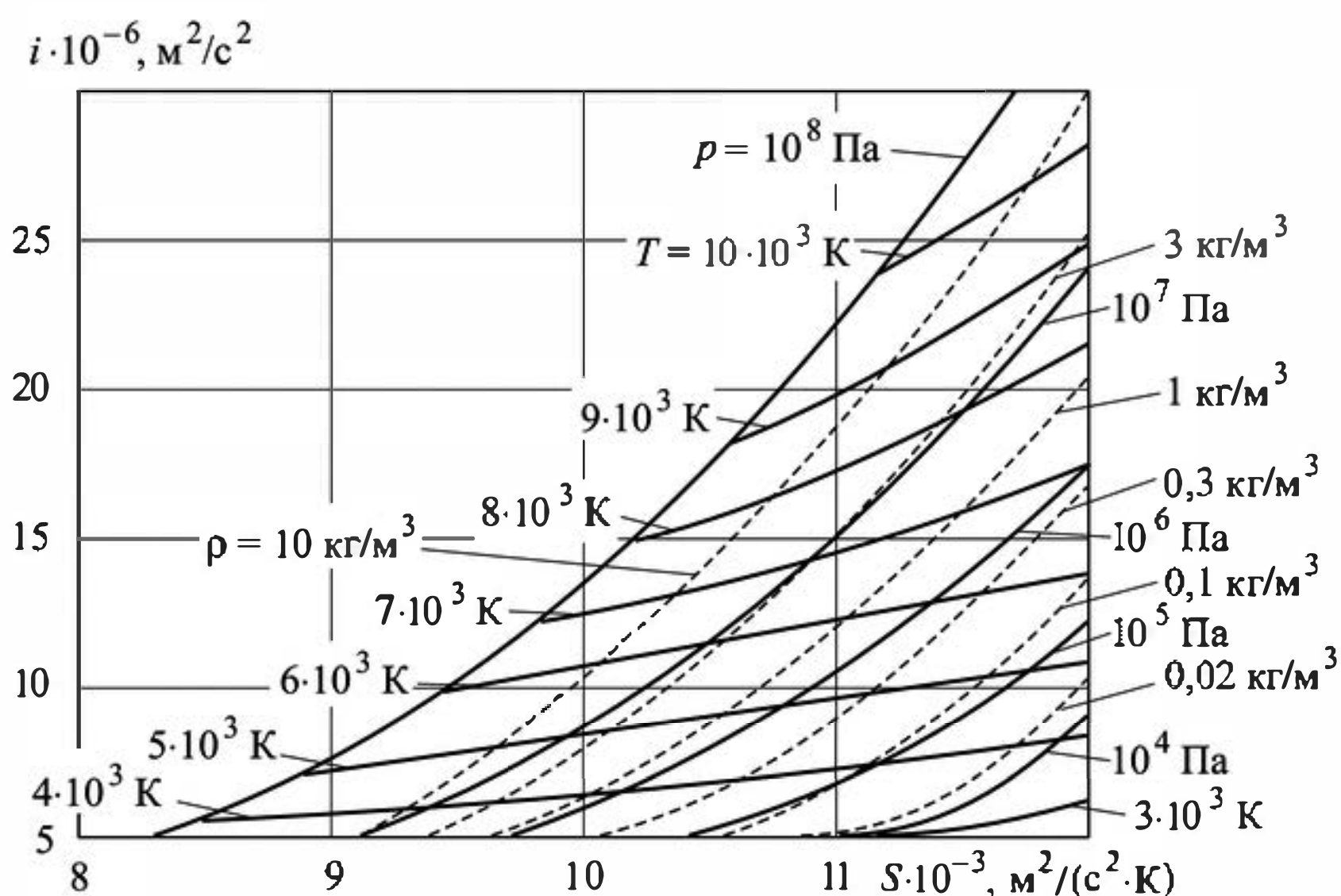


Рис. 1.5. Диаграмма i — S воздуха в условиях диссоциации

1.2. Стандартная атмосфера

Термодинамические параметры воздуха зависят от высоты, времени года и суток, координат земной поверхности, метеоусловий и других факторов. Для сравнения результатов натурных испытаний, проведенных при различных атмосферных условиях, с результатами расчетов и других испытаний их приводят к единым условиям, определенным моделью атмосферы — стандартной атмосферой (ГОСТ 4401, ИСО 2533). Ее параметры примерно соответствуют параметрам реальной атмосферы на средних широтах в летнее время.

Для расчета параметров стандартной атмосферы кроме геометрической высоты h (высоты над уровнем моря) используют так называемую геопотенциальную высоту H , определяемую по формуле

$$H = rh/(r + h),$$

где $r = 6\,356\,767$ м — условный радиус Земли. Геопотенциальную высоту измеряют в «геопотенциальных» метрах, обозначаемых m' .

На уровне океана (высота $H = h = 0$) приняты следующие нормальные атмосферные условия:

давление $p_c = 101\,325$ Па;

температура $T_c = 288,15$ К или $t = 15$ °С;

плотность $\rho_c = 1,225$ кг/м³;

ускорение свободного падения $g_c = 9,80665$ м/с²;

скорость звука $a_c = 340,294$ м/с;

динамическая вязкость $\mu_c = 1,7894 \cdot 10^{-5}$ Па·с;

кинематическая вязкость $\nu_c = 1,4607 \cdot 10^{-5}$ м²/с;

теплопроводность $\lambda_c = 2,5343 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·К);

концентрация частиц $n_c = 2,5471 \cdot 10^{25}$ м⁻³;

средняя скорость частиц $V_c = 458,94$ м/с;

частота соударений $\omega_c = 6,9193 \cdot 10^9$ с⁻¹;

средняя длина свободного пробега $l_c = 6,6328 \cdot 10^{-8}$ м.

Атмосферу условно принято делить по высоте на следующие зоны в зависимости от осредненного состава газа и закона изменения температуры по высоте:

1) тропосфера (h от 0 до 11...16 км) — температура уменьшается на 6,5 градусов на километр высоты; здесь сосредоточено около 80 % массы атмосферы и практически вся присутствующая в ней вода, поэтому выше тропосферы облачность отсутствует, а за ЛА не образуются инверсионные следы;

2) стратосфера (h от 11...16 до 50...55 км) — температура растет или остается постоянной; на высотах 20...25 км находится тонкий озоновый слой, поглощающий значительную часть ультрафиолетового излучения Солнца;

3) мезосфера (h от 50...55 до 80...85 км) — температура понижается с высотой до -90°C ;

4) термосфера (h от 80 до 600...800 км) — температура возрастает приблизительно до 1000 К на высоте около 400 км и затем остается практически постоянной;

5) экзосфера ($h > 600...800$ км) — зона, переходная к космическому пространству.

Для расчета основных параметров стандартной атмосферы до высоты $h = 94\,000$ м, до которой молярная масса воздуха остается неизменной, используют следующие зависимости.

Наиболее сложным образом с ростом высоты изменяется термодинамическая температура (рис. 1.6). На каждом слое это изменение аппроксимируется линейной функцией геопотенциальной высоты:

$$T = T_* + \tilde{\beta}(H - H_*),$$

где $\tilde{\beta} = dT/dH$ — градиент температуры, а параметры со звездочкой относятся к нижней границе рассматриваемого слоя (табл. 1.1).

Давление и плотность с увеличением высоты непрерывно уменьшаются. Для определения давления используют зависимости

$$\lg p = \begin{cases} \lg p_* - \frac{g_c}{\tilde{\beta}R} \lg \frac{T_* + \tilde{\beta}(H - H_*)}{T_*} & \text{при } \tilde{\beta} \neq 0; \\ \lg p_* - \frac{0,434294 g_c}{RT} (H - H_*) & \text{при } \tilde{\beta} = 0. \end{cases}$$

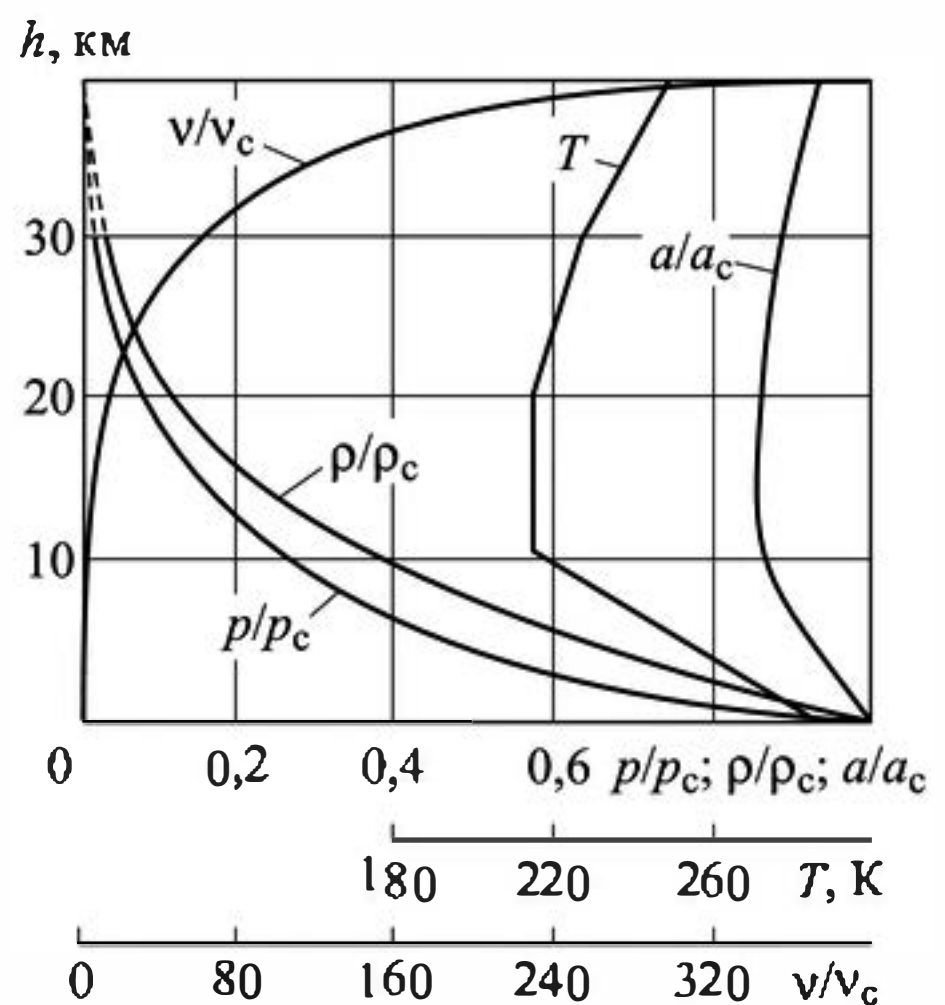


Рис. 1.6. Изменение параметров стандартной атмосферы в зависимости от высоты

Таблица 1.1. Изменение термодинамической температуры с увеличением высоты

<i>h</i> , м	<i>H</i> , м'	<i>T</i> , К	$\tilde{\beta}$, К/м'
0	0	288,15	–
11 000	11 019	216,65	–0,0065
20 000	20 063	216,65	0
32 000	32 162	228,65	+0,001
47 000	47 350	270,65	+0,0028
51 000	51 412	270,65	0
71 000	71 802	214,65	–0,0028
85 000	86 152	186,65	–0,002
94 000	95 411	186,65	0

Плотность рассчитывают по давлению и температуре с помощью уравнения состояния (1.5), а для динамической вязкости и теплопроводности используют следующие эмпирические зависимости:

$$\mu = \frac{1,458 \cdot 10^{-6} T^{1,5}}{(T + 110,4)};$$
$$\lambda = \frac{2,648151 \cdot 10^{-3} \cdot T^{1,5}}{T + 245,4 \cdot 10^{-12/T}},$$

причем эти формулы применяют для высот не более 90 км.

1.3. Модели воздушных потоков

Изучение движения газа (воздуха) с общих позиций приводит к огромным математическим трудностям, поэтому в аэродинамике, как и в других науках, сложные для изучения процессы разбивают на упрощенные схемы, которые учитывают те или иные характерные черты процесса. Такие схемы получили название моделей.

Модель сплошной среды — это некоторое идеализированное представление реальной деформируемой среды, учитывающее основные ее свойства и подчиняющееся определенному математическому описанию. Выбор модели позволяет замкнуть систему уравнений, описывающую движение и параметры состояния исследуемой среды.

Использование идеализированных схем значительно облегчает изучение процессов движения газа. Проверка той или иной схемы

на практике позволяет судить о ее пригодности либо о необходимости ее совершенствования или коренной переработки.

В табл. 1.2 показаны различные модели газовой среды, используемые в аэродинамике при изучении силового воздействия потока на ЛА.

Таблица 1.2. Модели газовой среды

Моделируемый объект, свойство реальной среды	Модель	Условия применения
Молекулярное строение газа	Сплошная среда	Высота полета < 50...60 км ($Kn \ll 1$)
	Разреженная среда	Длина свободного пробега молекул соизмерима с характерным размером ЛА ($Kn > 1$)
	Совершенный газ	Большинство задач аэрогазодинамики
	Реальный газ	Низкие температуры и высокие давления (высокая плотность газа)
Сжимаемость	Несжимаемая среда	Малые скорости потока ($M < 0,3$)
	Сжимаемая среда	Большие скорости потока ($M > 0,3$)
Нестационарность	Стационарный процесс	Параметры потока постоянны или возможно их осреднение
	Нестационарный процесс	Учет изменения параметров потока во времени
Пространственность	Одномерное течение	Потоки, для которых изменением параметров вдоль двух координатных направлений можно пренебречь
	Плоское (осесимметричное) течение	Потоки, для которых изменением параметров вдоль одного координатного направления можно пренебречь
	Пространственное течение	Потоки, для которых необходимо учитывать изменение параметров по всем трем координатным направлениям
Физико-химические превращения в воздушной среде	Течение без физико-химических превращений	Области потока с невысокими температурами воздуха (до 2 000...3 000 К в зависимости от давления)
	Течение с учетом физико-химических процессов	Потоки с температурой воздуха более 2 000...3 000 К

Окончание табл. 1.2

Моделируемый объект, свойство реальной среды	Модель	Условия применения
Вязкость	Невязкая среда	Потоки с малыми поперечными градиентами скорости
	Вязкая среда	Потоки с большими градиентами скорости (например, пограничный слой на твердой поверхности)
Режим течения	Ламинарное	$Re < Re_{кр}$
	Турбулентное	$Re > Re_{кр}$
Движение в поле силы тяжести	Без учета силы тяжести	Высокоскоростные газовые потоки
	С учетом силы тяжести	Естественная конвекция газов
Движение в электромагнитном поле	Электрически нейтральная среда	Потоки без ионизации ($T < 6000\text{ К}$)
	Заряженная среда	Движение плазмы

Дадим краткую характеристику отдельным моделям. Изучать течение газа, его взаимодействие с обтекаемыми поверхностями можно с различной степенью детализации его внутренней структуры: на молекулярном, больцмановском или газодинамическом уровнях.

Молекулярный уровень характеризуется уравнениями Ньютона для частиц, движущихся в соответствии с законами механики. Переход на больцмановский уровень совершается путем осреднения параметров по элементарному объему на элементарном промежутке времени. Газодинамический уровень связан с осреднением по скоростям молекул и содержит уравнения переноса для макроскопических величин — плотности, скорости, давления и т. п.

Согласно уравнению (1.1), возможность применения газодинамического уровня описания (выполнения гипотезы сплошности) оценивают с помощью числа Кнудсена.

Состояние совершенного газа описывается уравнением Клапейрона — Менделеева (см. уравнение (1.5)). Реальным называется газ, свойства которого в отличие от совершенного газа зависят от взаимодействия молекул. В обычных условиях, когда средняя потенци-

альная энергия межмолекулярного взаимодействия много меньше средней кинетической энергии молекул, свойства реального и совершенного газов различаются незначительно. Свойства этих моделей газовой среды существенно отличаются при очень высоких давлениях и очень низких температурах. Классический пример уравнения состояния реального газа — уравнение Ван-дер-Ваальса (1873).

Эффект сжимаемости при движении газов оценивают по числу Маха газового потока (см. формулу (1.10)). В модели несжимаемого газа предполагают плотность среды $\rho = \text{const}$.

В целом по диапазону скоростей полета (или чисел M) можно выделить движение ЛА при малых ($M \leq 0,3$), дозвуковых ($M \leq M_{\text{кр}}$, где $M_{\text{кр}}$ — критическое число Маха, при котором на поверхности ЛА появляются области со сверхзвуковыми скоростями потока), трансзвуковых ($M \leq 1,2$), сверхзвуковых ($1,2 < M \leq 5$) и гиперзвуковых ($M > 5$) скоростях. В каждом из этих диапазонов можно установить свои характерные особенности обтекания (физические модели потока) и тем самым упростить способ расчета интересующих параметров (математические модели).

Как было показано выше, в большинстве случаев движение воздуха является нестационарным турбулентным. Однако использование осреднения параметров потока на некотором интервале времени часто позволяет перейти к квазистационарной модели процесса без потери точности в определении результирующего воздействия потока на ЛА.

Аналогично условию нестационарности практически все задачи обтекания ЛА потоком воздуха являются трехмерными (пространственными). Исключением можно считать обтекание осесимметричных ЛА под нулевым углом атаки (осесимметричное течение), течения в осесимметричных струях и т. п. Тем не менее, как показывает практика, расчет параметров течения в отдельных областях, в которых преобладающим является движение в одном или двух координатных направлениях, можно выполнять в одномерной или плоской постановке. Грамотное сочетание пространственных и более простых моделей течения позволяет существенно упростить многие аэродинамические расчеты.

При движении ЛА с большими скоростями за возникающими скачками уплотнения температура воздуха значительно увеличивается. При этом в силу молекулярной структуры воздуха в нем могут возникать процессы диссоциации и ионизации, протекать химические реакции. В условиях диссоциации и ионизации парамет-

ры газа и коэффициенты, которые описывают его состояние и происходящие процессы (энтальпия, вязкость, теплопроводность и др.), начинают зависеть не только от температуры (см., например, формулы (1.9), (1.14), (1.16)), но и от давления. Наличие химических реакций требует дополнительных соотношений. Однако модели течения воздуха, составленные с учетом физико-химических превращений, являются очень сложными, поэтому использовать их нужно только при условии, что без такого учета невозможно получение необходимых результатов.

Напряжения, возникающие в сплошной среде вследствие ее деформации, сложным образом зависят от скорости деформации. В простейшем случае слоистого течения эта зависимость может быть представлена в виде (1.12). Учитывая малую вязкость газов (для воздуха см. формулу (1.14)), ею можно пренебречь в областях течения с малыми поперечными (относительно основного направления движения) градиентами скорости и тем самым существенно упростить систему уравнений, описывающих движение газа в такой области. Например, очень часто при расчете внешнего обтекания ЛА для определения основных аэродинамических сил используют модель невязкого (идеального) воздуха.

Воздействие воздуха на обтекаемый ЛА зависит от характера движения воздуха (ламинарное или турбулентное) как в невозмущенном потоке, так и в непосредственной близости от поверхности. Данный вопрос наиболее разработан для учета характера движения газов в пограничном слое около твердой поверхности, которое существенно влияет на процессы трения и теплообмена. Оценить характер течения можно по так называемому критическому числу Рейнольдса:

$$Re_{кр} = \frac{\rho_{\delta} V_{\delta} x_{кр}}{\mu_{\delta}},$$

где индекс « δ » относится к значениям параметров на границе пограничного слоя над данной точкой поверхности ЛА; $x_{кр}$ — координата точки перехода ламинарного течения в турбулентное.

В модели невесомого газового потока предполагается, что можно пренебречь силой тяжести, действующей на частицы газа, по сравнению с другими силами (давления и трения).

Представленные выше упрощения отдельных физических свойств сплошной среды применяют при решении аэродинамических задач, как правило, не отдельно, а в некоторой комбинации, что и дает полную (достаточную для решения задачи) модель течения воздуха.

Например, известно, что источниками аэродинамического сопротивления на поверхности ЛА являются силы от избыточного давления и вязкого трения.

При расчете аэродинамических сил, возникающих вследствие избыточного давления, используют две модели движения газовых потоков:

1) модель движения совершенного невязкого несжимаемого невесомого и нетеплопроводного газа, на основании которой определяют только скорость и давление частиц газа (справедлива при $M < 0,3$);

2) модель движения совершенного невязкого сжимаемого невесомого и нетеплопроводного газа, на основании которой вычисляют скорость, давление, плотность и температуру частиц газа (справедлива при $M > 0,3$).

При нахождении аэродинамических сил, связанных с вязким трением, в общем случае нужно использовать модель совершенного вязкого сжимаемого невесомого и теплопроводного газа. Частные случаи этой модели будут рассмотрены в дальнейшем.

1.4. Силовое воздействие потока на летательный аппарат

Силовое воздействие сплошной среды на движущееся в ней тело может быть сведено к непрерывно распределенным по поверхности тела элементарным силам от нормального $\delta \vec{P}_n$ и касательного (обусловленного вязкостью среды) $\delta \vec{P}_\tau$ напряжений (рис. 1.7).

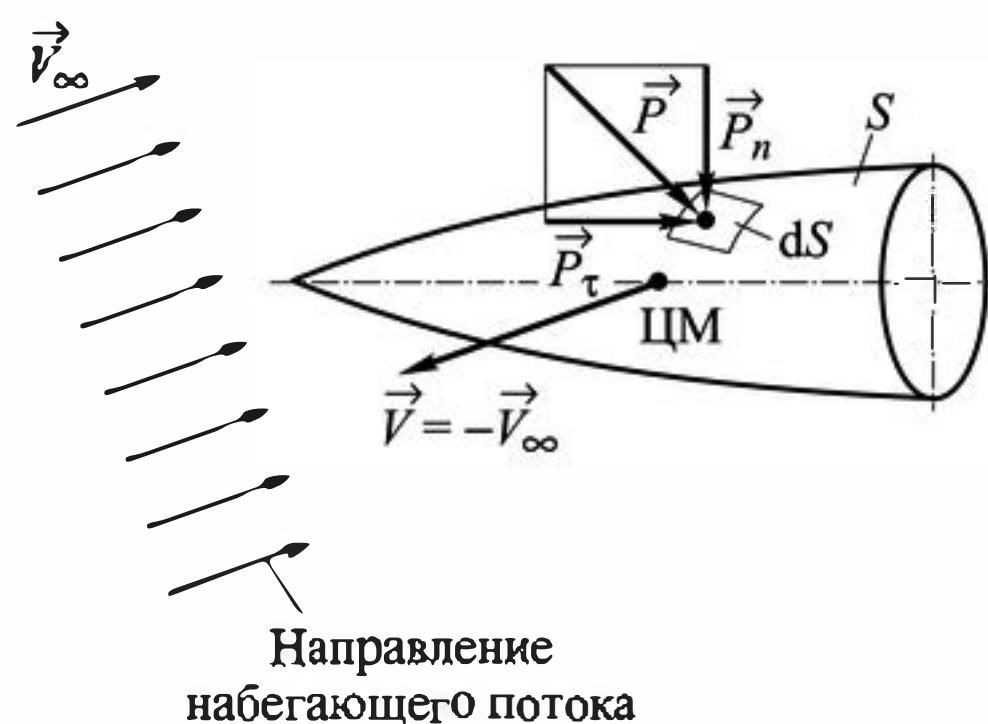


Рис. 1.7. Воздействие воздушной среды на поверхность ЛА (ЦМ – центр масс)

На элемент поверхности dS действует результирующая сила $\delta \vec{P} = \delta \vec{P}_n + \delta \vec{P}_\tau$. При этом $\delta \vec{P}_n$ наряду с силой от давления, не зависящей от вязкости, содержит также добавочную составляющую, обусловленную трением.

В идеальной среде, где вязкость отсутствует, силовое воздействие на поверхность сводится только к силам от нормального давления. Давление в любой точке потока идеальной жидкости одинаково на всех площадках, проходящих через эту точку, т. е. оно не зависит от ориентации этих площадок. Следовательно, давление можно рассматривать как скалярную величину, зависящую только от координат точки и времени.

В соответствии с принципом обращенного движения эффект силового воздействия будет таким же, если рассмотреть движение, при котором тело неподвижно, а на него набегают равномерный поток со скоростью, равной скорости его движения на бесконечном удалении от тела. Эту скорость будем называть в дальнейшем скоростью на бесконечности или скоростью набегающего (невозмущенного) потока и обозначать в отличие от $\vec{V}$ (вектор скорости центра масс тела) вектором $\vec{V}_\infty$. Очевидно, что $\vec{V}_\infty = -\vec{V}$.

Набегающий поток характеризуется давлением p_∞ , плотностью ρ_∞ и температурой T_∞ , отличающимися от соответствующих параметров p , ρ и T возмущенного потока вблизи поверхности обтекаемого тела (рис. 1.8).

Все поверхностные силы могут быть сведены к одному главному вектору аэродинамических сил $\vec{R}$ и главному вектору момента

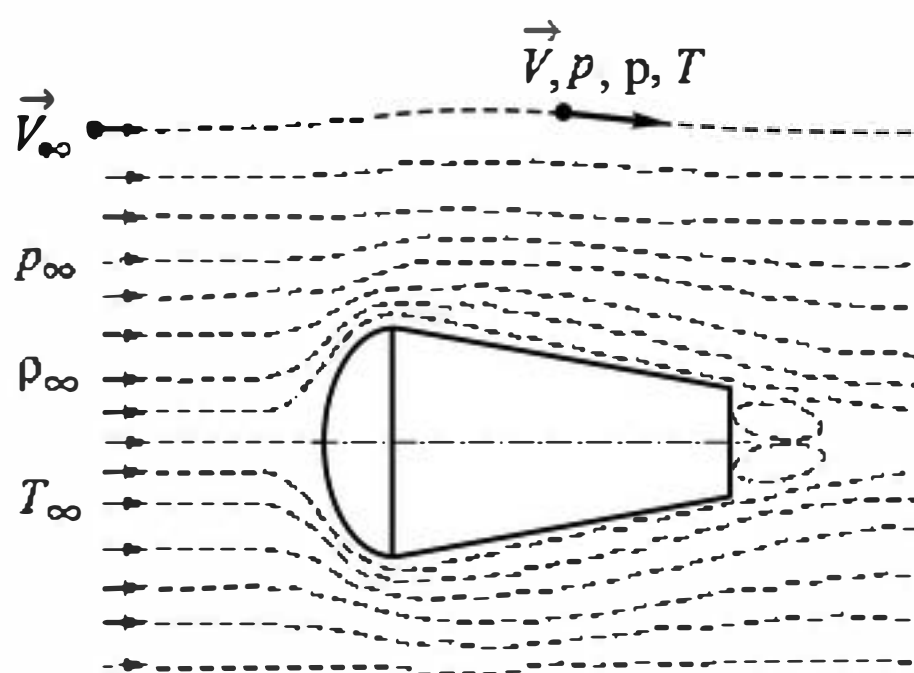


Рис. 1.8. Разделение набегающего потока на невозмущенную и возмущенную области

этих сил $\vec{M}$ относительно мгновенного центра масс. Точка пространства, к которой в результате приведения оказывается приложенным вектор $\vec{R}$, называется *центром давления*. Геометрически эта точка может находиться как внутри обтекаемого тела, так и вне его. Главный вектор аэродинамического момента чаще всего рассчитывают не относительно центра масс ЛА (так как его положение может меняться в процес-

се полета), а относительно заранее выбранной геометрической точки, называемой *центром моментов*. В качестве такой точки часто выбирают носок ЛА, а момент относительно мгновенного положения центра масс определяют простым пересчетом.

Общее выражение для аэродинамической силы и момента может быть получено с привлечением предложенной акад. Л.И. Седовым теории размерностей на основе П-теоремы*.

Экспериментально и теоретически установлено, что аэродинамическую силу $\vec{R}$, действующую со стороны воздуха на движущееся в нем тело, при установившемся процессе определяют в основном следующие независимые между собой параметры:

абсолютный размер d ЛА, м;

скорость полета V , м/с;

плотность среды ρ , в которой движется ЛА, кг/м³;

вязкость среды μ , Па·с;

сжимаемость среды, характеризуемая скоростью a распространения слабых возмущений, м/с;

углы атаки α и скольжения β ;

форма ЛА (безразмерный параметр).

Функциональная зависимость для модуля аэродинамической силы будет выглядеть следующим образом:

$$R = f(d, V, \rho, \mu, a, \alpha, \beta, \text{форма ЛА}). \quad (1.19)$$

Определим функцию $f(\dots)$ при условии, что она не зависит от выбора системы единиц измерения. Пусть среди n размерных величин первые k величин ($k \leq n$) имеют независимые размерности. Это означает, что формула, выражающая размерность одной из величин, не может быть представлена как комбинация в виде степенного одночлена из формул, определяющих размерности для других величин.

Известно, что среди механических величин есть не более трех с независимыми размерностями: размер d и модуль скорости движения V ЛА, плотность среды ρ . Такой выбор объясняется тем, что данные параметры сохраняются в уравнениях, описывающих движение ЛА в сплошной среде (воздухе) при любых возможных упрощениях (моделях) этого процесса, и имеют при этом конечные

* Вопросы, связанные с теорией размерностей, изложены в соответствии с основными положениями и обозначениями, принятыми акад. Л.И. Седовым (Методы подобия и размерностей. М.: Наука, 1987).

ненулевые значения. Остальные параметры могут обращаться в нуль или стремиться к бесконечности в зависимости от принимаемой модели. Например, при движении ЛА в идеальной среде $\mu \rightarrow 0$, при движении в несжимаемой среде $a \rightarrow \infty$.

Таким образом, в данном случае имеем пять размерных параметров ($n = 5$), из которых три — с независимыми единицами измерения ($k = 3$). Размерности остальных физических величин, входящих в уравнение (1.19), выражаются через размерности d , V и ρ :

$$[R] = [\rho]^{m_1} [V]^{m_2} [d]^{m_3};$$

$$[\mu] = [\rho]^{p_1} [V]^{p_2} [d]^{p_3};$$

$$[a] = [\rho]^{q_1} [V]^{q_2} [d]^{q_3},$$

где $m_{1,2,3}$, $p_{1,2,3}$, $q_{1,2,3}$ — некоторые постоянные, которые будут определены ниже.

Воспользуемся изменением масштаба трех базовых величин для уменьшения числа определяющих зависимость (1.19) параметров. Введем масштабные коэффициенты $\rho' = \alpha_1 \rho$, $V' = \alpha_2 V$ и $d' = \alpha_3 d$. В новой системе единиц измерения соотношение (1.19) примет вид

$$R' = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \alpha_3^{m_3} R = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \alpha_3^{m_3} f(d, V, \rho, \mu, a, \alpha, \beta, \text{форма ЛА}) = \\ = f(\alpha_1 \rho, \alpha_2 V, \alpha_3 d, \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} \mu, \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \alpha_3^{q_3} a, \alpha, \beta, \text{форма ЛА}). \quad (1.20)$$

Таким образом, выражение для искомой аэродинамической силы в новой системе измерения будет следующим:

$$R = \alpha_1^{-m_1} \alpha_2^{-m_2} \alpha_3^{-m_3} \times \\ \times f(\alpha_1 \rho, \alpha_2 V, \alpha_3 d, \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} \mu, \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \alpha_3^{q_3} a, \alpha, \beta, \text{форма ЛА}). \quad (1.21)$$

Установим такую новую систему единиц измерения, чтобы три аргумента функции f имели фиксированные постоянные значения, равные единице, т. е.

$$\alpha_1 = 1/\rho; \quad \alpha_2 = 1/V; \quad \alpha_3 = 1/d.$$

Тогда уравнение (1.21) можно переписать в виде

$$R = \rho_1^{m_1} V_2^{m_2} d_3^{m_3} f(1, 1, 1, \frac{\mu}{\rho_1^{p_1} V_2^{p_2} d_3^{p_3}}, \frac{a}{\rho_1^{q_1} V_2^{q_2} d_3^{q_3}}, \alpha, \beta, \text{форма ЛА}),$$

или

$$\frac{R}{\rho_1^{m_1} V_2^{m_2} d_3^{m_3}} = f\left(1, 1, 1, \frac{\mu}{\rho_1^{p_1} V_2^{p_2} d_3^{p_3}}, \frac{a}{\rho_1^{q_1} V_2^{q_2} d_3^{q_3}}, \alpha, \beta, \text{форма ЛА}\right). \quad (1.22)$$

Нетрудно убедиться, что для того, чтобы комплексы в левой и правой частях уравнения (1.22) были безразмерными, показатели степени должны иметь значения

$$m_1 = 1; \quad m_2 = 2; \quad m_3 = 2; \quad p_1 = p_2 = p_3 = 1; \quad q_1 = 0; \quad q_2 = 1; \quad q_3 = 0.$$

Уравнение (1.22) в этом случае примет вид

$$R = \rho V^2 d^2 f\left(1, 1, 1, \frac{\mu}{\rho V d}, \frac{a}{V}, \alpha, \beta, \text{форма ЛА}\right).$$

Введем обозначения: $q_\infty = \rho V^2 / 2$ — скоростной напор воздушного потока; $S_{\text{хар}} = \pi d^2 / 4$ — некоторая характерная площадь ЛА; $Re_d = \rho V d / \mu$ — число Рейнольдса. С учетом этих и ранее принятых (для числа Маха) обозначений структурную формулу для аэродинамической силы можно записать так:

$$R = q_\infty S_{\text{хар}} c_R(M, Re, \alpha, \beta, \text{форма ЛА}), \quad (1.23)$$

где c_R — безразмерная сила, называемая *коэффициентом аэродинамической силы*.

Аналогичным образом получаем безразмерное соотношение для вектора момента аэродинамической силы:

$$M = q_\infty S_{\text{хар}} L_{\text{хар}} m(M, Re, \alpha, \beta, \text{форма ЛА}). \quad (1.24)$$

По сравнению с выражением (1.23) в формуле (1.24) появляется еще один параметр — характерный размер $L_{\text{хар}}$ (поскольку в аналогичной формуле (1.22) показатель степени $m_3 = 3$). Безразмерный момент m называется *коэффициентом аэродинамического момента*.

1.5. Системы координат

Наиболее часто в аэродинамике используют три системы координат: связанную, скоростную и поточную, причем они являются правыми и ортогональными.

Связанная система координат $Oxyz$ фиксирована относительно ЛА и движется вместе с ним (рис. 1.9, а). Ее начало обычно помещают в центре масс ЛА, а оси Ox , Oy и Oz называют соответственно продольной, нормальной и поперечной. Ось Ox направлена вдоль главной продольной оси инерции, Oy расположена в вертикальной плоскости симметрии, а Oz направлена так, что образует правую систему координат. Положительное направление оси Ox от кормовой части к носу ЛА соответствует случаю его прямого (необращенного) движения. В связанной системе координат удобно обра-

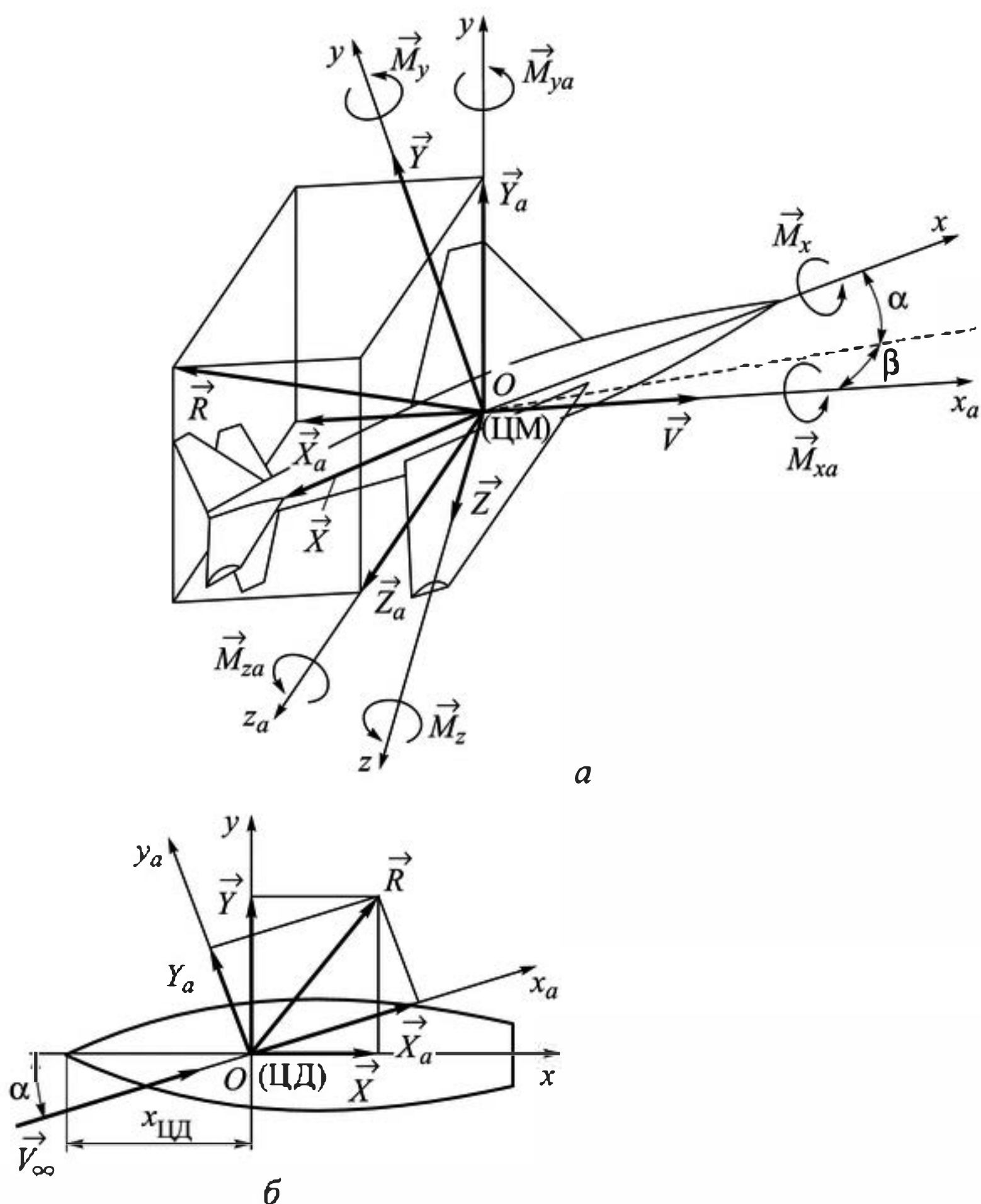


Рис. 1.9. Системы координат, применяемые в аэродинамике:
а — связанная и скоростная (прямое движение); б — связанная и по-
точная (обращенное движение); ЦД — центр давления

батывать результаты экспериментальных исследований и проводить теоретические расчеты характеристик ЛА (особенно при его вращательном движении), поскольку уравнения поверхности ЛА и основных законов аэродинамики записываются в этой системе наиболее просто.

В скоростной системе координат ось Ox_a (см. рис. 1.9, а) направлена по вектору скорости движения центра масс ЛА, ось Oy_a расположена в плоскости симметрии и направлена вверх (положительное направление), а ось Oz_a (боковая ось) — так, чтобы система координат была правой. В обращенном движении (рис. 1.9, б) ось Ox_a совпадает с направлением скорости потока, а ось Oz_a расположена так, чтобы сохранялась правая система координат.

Проекции аэродинамической силы $\vec{R}$ на оси Ox_a , Oy_a , Oz_a скоростной и поточной систем координат называются соответственно силой лобового сопротивления X_a , подъемной Y_a и боковой Z_a силами. Соответствующие проекции того же вектора на оси Ox , Oy , Oz связанной системы координат называются продольной (осевой) X , нормальной Y и поперечной Z силами. Проекции вектора $\vec{M}$ во всех системах координат называются одинаково и отличаются индексами: Mx_a и Mx — момент крена, My_a и My — момент рыскания, Mz_a и Mz — момент тангажа.

Модуль и направление действия сил и моментов при данной скорости движения зависят от ориентации тела относительно вектора скорости $\vec{V}$ полета. Эта ориентация определяется углом атаки α — углом между осью Ox и проекцией вектора $\vec{V}$ на плоскость xOy — и углом скольжения β — углом между вектором $\vec{V}$ и плоскостью xOy . Угол атаки считается положительным, если проекция вектора скорости $\vec{V}$ на нормальную ось отрицательна. Угол скольжения считается положительным, если проекция вектора $\vec{V}$ на поперечную ось положительна.

При исследовании аэродинамики тел вращения положение вертикальной плоскости xOy связанной системы координат целесообразно выбирать таким образом, чтобы она являлась плоскостью симметрии самого тела, а при $\beta = 0$ — и плоскостью симметрии обтекающего тела потока. Тогда в плоскости xOy будут располагаться и продольная ось тела Ox , и вектор скорости $\vec{V}_\infty$ (см. рис. 1.9, б). Любая другая плоскость, проходящая через продольную ось и называемая меридиональной, образует с вертикальной плоскостью некоторый угол γ , который называется меридиональным. В соот-

ветствии с этим вертикальная плоскость называется нулевой меридиональной плоскостью. Поскольку вектор $\vec{V}_\infty$ расположен в этой плоскости, ее определяют так же, как плоскость угла атаки. При таком выборе вертикальной плоскости в ней расположен вектор $\vec{R}$, а вектор $\vec{M}$ ориентирован по нормали к ней. Следовательно, движение тела в поточной системе координат будет определяться силой лобового сопротивления X_a , подъемной силой Y_a и моментом тангажа M_z .

Зная углы атаки α и скольжения β при прямом движении ЛА, можно в соответствии с правилами аналитической геометрии перейти от составляющих силы и момента в одной системе координат к соответствующим составляющим в другой системе координат. В частности, составляющие аэродинамической силы и момента в связанной системе с силой лобового сопротивления и моментом крена в скоростной системе координат связаны соотношениями

$$X_a = X \cos(\hat{x}x_a) + Y \cos(\hat{y}y_a) + Z \cos(\hat{z}z_a); \quad (1.25)$$

$$M_{xa} = M_x \cos(\hat{x}x_a) + M_y \cos(\hat{y}y_a) + M_z \cos(\hat{z}z_a). \quad (1.26)$$

В соответствии с приведенными в табл. 1.3 соотношениями формулы (1.25) и (1.26) принимают следующий вид:

$$X_a = X \cos\alpha \cos\beta - Y \sin\alpha \cos\beta + Z \sin\beta;$$

$$M_{xa} = M_x \cos\alpha \cos\beta - M_y \sin\alpha \cos\beta + M_z \sin\beta.$$

Аналогично можно пересчитать силы и моменты из скоростной в связанную систему координат.

Таблица 1.3. Направляющие косинусы, используемые для пересчета сил и моментов из одной системы координат в другую

Оси связанной системы	Оси скоростной системы		
	Ox_a	Oy_a	Oz_a
Ox	$\cos\alpha \cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha \sin\beta$
Oy	$-\sin\alpha \cos\beta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha \sin\beta$
Oz	$\sin\beta$	0	$\cos\beta$

1.6. Определение аэродинамических сил и моментов по известному распределению давления и касательного напряжения

В аэродинамических расчетах принято оперировать не абсолютным (барометрическим) нормальным давлением на поверхность ЛА, а избыточным (манометрическим) давлением. При внешнем обтекании ЛА используют статическое давление невозмущенного набегающего потока, что позволяет, в частности, более наглядно оценивать силы и моменты, действующие на отдельные элементы ЛА.

Пусть при некоторых скорости движения центра масс, углах атаки и скольжения, а также заданных параметрах невозмущенной атмосферы (p_∞ , ρ_∞ и T_∞) известно распределение по поверхности движущегося в атмосфере тела давления p и касательного напряжения τ .

Ориентацию элементарной площадки поверхности ЛА определяет вектор нормали $\vec{n}$, который легко вычислить при записи уравнения поверхности в связанной системе координат (рис. 1.10, а). Направление возмущенного внешнего потока над рассматриваемым элементом поверхности задает касательный к площадке вектор $\vec{t}$. Его направление можно получить на основании результатов экспериментального или теоретического исследования обтекания ЛА.

Таким образом, на выделенную элементарную площадку dS поверхности тела действуют нормальная сила от избыточного давления $(p - p_\infty)dS$ и касательная к площадке сила τdS . Следует отметить, что элементарная сила от положительного избыточного давления совпадает по направлению с вектором внутренней нормали к поверхности, следовательно, ориентация силы относительно осей связанной системы координат полностью определяется направлением этого вектора и не требует дополнительного уточнения. То же можно сказать и о силе вязкого трения (ее направление задается вектором $\vec{t}$).

Сумма проекций элементарных сил на продольную ось Ox

$$dX = [(p - p_\infty) \cos(\hat{nx}) + \tau \cos(\hat{tx})] dS,$$

где $\cos(\hat{nx})$, $\cos(\hat{tx})$ — соответственно косинусы углов между вектором внутренней нормали $\vec{n}$ и вектором направления потока $\vec{t}$ и осью Ox . Две другие проекции записываются аналогично.

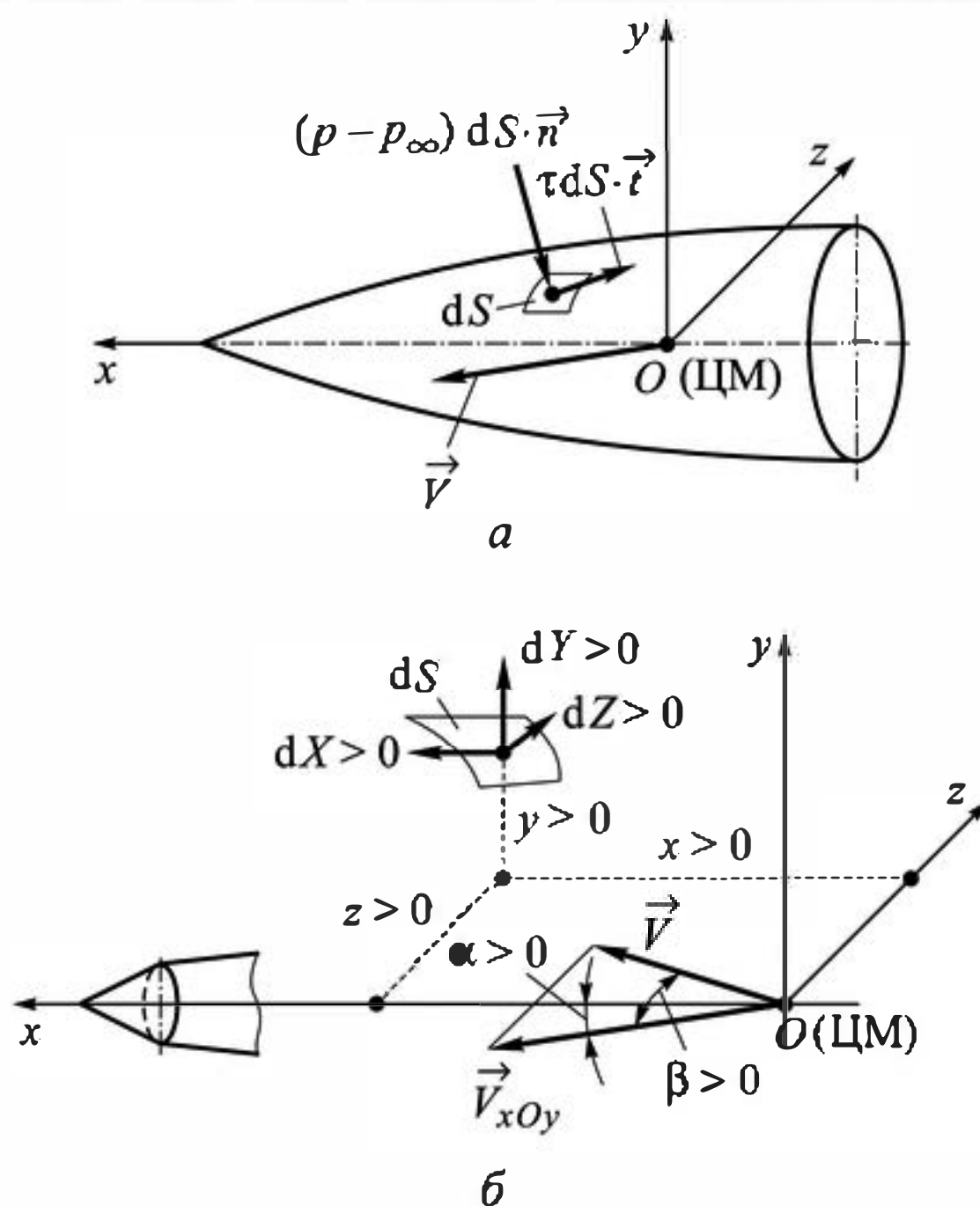


Рис. 1.10. Расчет аэродинамических сил (а) и моментов (б) в связанной системе координат

Полную продольную силу X , действующую со стороны потока на ЛА, находим интегрированием элементарной силы по поверхности ЛА:

$$X = \iint_S [(p - p_\infty) \cos(\hat{n}x) + \tau \cos(\hat{t}x)] dS. \quad (1.27)$$

Введя в соотношение (1.27) обозначения для коэффициента давления и местного коэффициента трения соответственно

$$\bar{p} = (p - p_\infty) / q_\infty, \quad c_{fx} = \tau / q_\infty,$$

а также некоторую характерную площадь $S_{\text{хар}}$, получим для продольной силы следующее выражение:

$$X = q_\infty S_{\text{хар}} \iint_S [\bar{p} \cos(\hat{n}x) + c_{fx} \cos(\hat{t}x)] d\bar{S}, \quad (1.28)$$

где $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2 / 2$ — скоростной напор невозмущенного набегаю-

щего потока; $d\bar{S} = dS/S_{\text{хар}}$. Аналогичные выражения для нормальной Y и поперечной Z сил имеют вид

$$Y = q_{\infty} S_{\text{хар}} \iint_S [\bar{p} \cos(\hat{n}_y) + c_{fx} \cos(\hat{t}_y)] d\bar{S}, \quad (1.29)$$

$$Z = q_{\infty} S_{\text{хар}} \iint_S [\bar{p} \cos(\hat{n}_z) + c_{fz} \cos(\hat{t}_z)] d\bar{S}. \quad (1.30)$$

Получим теперь выражения для проекций главного вектора моментов аэродинамических сил. Пусть точка приведения моментов совпадает с центром масс ЛА и началом связанной системы координат (рис. 1.10, б). Вектор $\vec{V}_{xOy}$ есть проекция вектора скорости центра масс ЛА на плоскость xOy связанной системы координат.

Элементарный момент dM_z является результатом действия сил dX и dY . Положительная сила dX на положительном плече y создает элементарный момент, уменьшающий угол атаки (отрицательный момент), а положительная сила dY на положительном плече x — элементарный момент, увеличивающий угол атаки (положительный момент). Следовательно, для рассматриваемых условий и выбранной системы координат формула для элементарного момента тангажа будет выглядеть так:

$$dM_z = dY \cdot x - dX \cdot y.$$

Рассуждая аналогичным образом, для элементарных моментов рыскания и крена получаем

$$dM_y = dX \cdot z - dZ \cdot x;$$

$$dM_x = dZ \cdot y - dY \cdot z.$$

С учетом введенных ранее обозначений интегральное выражение для момента тангажа принимает вид

$$M_z = q_{\infty} S_{\text{хар}} L_{\text{хар}} \iint_S \{ [\bar{p} \cos(\hat{n}_y) + c_{fx} \cos(\hat{t}_y)] \bar{x} - \\ - [\bar{p} \cos(\hat{n}_x) + c_{fz} \cos(\hat{t}_x)] \bar{y} \} d\bar{S}, \quad (1.31)$$

где $L_{\text{хар}}$ — некоторый характерный размер ЛА, по которому рассчитывают моменты; $\bar{x} = x/L_{\text{хар}}$; $\bar{y} = y/L_{\text{хар}}$.

Аналогичные соотношения можно записать и для двух других проекций главного вектора моментов.

Сравнивая выражения (1.28)–(1.30) и (1.31) с ранее полученными общими функциональными зависимостями для аэродинамических сил и моментов (1.23) и (1.24), видим, что безразмерные интегралы в их правой части представляют собой аэродинамические коэффициенты соответствующих сил и моментов:

$$X = c_x q_\infty S_{\text{хар}}; \quad Y = c_y q_\infty S_{\text{хар}}; \quad Z = c_z q_\infty S_{\text{хар}},$$

где c_x, c_y, c_z — коэффициенты соответственно продольной, нормальной и поперечной сил.

Таким образом, при известном распределении по поверхности ЛА нормального давления и касательного напряжения коэффициент продольной силы может быть вычислен как интеграл по безразмерной поверхности коэффициента давления и местного коэффициента трения:

$$c_x = \iint_S [\bar{p} \cos(\hat{n}x) + c_{fx} \cos(\hat{t}x)] d\bar{S}.$$

Для коэффициента момента тангажа получаем

$$m_z = \iint_S \{ [\bar{p} \cos(\hat{n}y) + c_{fy} \cos(\hat{t}y)] \bar{x} - [\bar{p} \cos(\hat{n}x) + c_{fx} \cos(\hat{t}x)] \bar{y} \} d\bar{S}.$$

Коэффициенты других проекций аэродинамических сил и моментов определяются аналогично.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ АЭРОДИНАМИКИ ДЛЯ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЙ

Основной задачей аэродинамических исследований является определение силового взаимодействия и теплообмена между газообразной (жидкой) средой и обтекаемым телом. Решение этой задачи связано с изучением движения среды около тела, в результате которого в каждой точке потока можно найти параметры, определяющие это движение (скорость, давление, плотность, температура и др.). Для расчета параметров газовых течений необходимо знание основных уравнений аэромеханики.

В главе приведены уравнения аэромеханики в наиболее общей интегральной форме, а также для бесконечно малого объема (дифференциальный вид записи); рассмотрены их частные случаи. Представлены полученные Рейнольдсом уравнения движения для турбулентного течения газа и наиболее часто используемые модели турбулентности. Приведены критерии подобия, применяемые при моделировании процессов обтекания ЛА.

2.1. Методы исследования движения сплошной среды

При определенных предпосылках изучение движения газообразной (жидкой) среды можно свести к определению поля скоростей, представляющего собой совокупность скоростей частиц газа, т. е. к решению кинематической задачи. Затем по известному распределению скоростей можно вычислить остальные параметры, а также результирующие силы, моменты и тепловые потоки.

Существует два метода кинематического исследования газообразной среды — Лагранжа и Эйлера.

Метод Лагранжа рассматривает движение индивидуальных газообразных (жидких) частиц и определяет для каждой из них траекторию, т. е. координаты частиц как функции времени. Но поскольку частиц бесчисленное множество, для задания траектории необходимо определенным образом охарактеризовать ту частицу, к которой эта траектория относится. При этом в качестве характеристики частицы выбирают ее координаты a, b, c в некоторый момент времени $t = t_0$. Это означает, что из бесчисленной совокупности траекторий данной частице будет принадлежать та, которая проходит через точку с координатами a, b, c . В соответствии с этим уравнения траектории в параметрическом виде будут следующими:

$$\begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t); \\ y &= f_2(a, b, c, t); \\ z &= f_3(a, b, c, t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где a, b, c, t — параметры Лагранжа. В каждой точке траектории составляющие вектора скорости равны первым: $V_x = \partial x / \partial t$, $V_y = \partial y / \partial t$, $V_z = \partial z / \partial t$, а вектора ускорения — вторым частным производным: $\partial^2 x / \partial t^2$, $\partial^2 y / \partial t^2$, $\partial^2 z / \partial t^2$.

В аэродинамических исследованиях чаще используют *метод Эйлера*, в котором, в отличие от метода Лагранжа, фиксируют не частицу жидкости, а точку пространства с координатами x, y, z и исследуют изменение скорости в этой точке с течением времени. Таким образом, метод Эйлера заключается в выражении скоростей частиц в функции времени t и координат x, y, z точек пространства, т. е. в задании поля скоростей, определяемых вектором $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы по осям координат, а $V_x = dx/dt$, $V_y = dy/dt$, $V_z = dz/dt$ — составляющие вектора скорости, записываемые в виде

$$\begin{aligned} V_x &= f_1(x, y, z, t); \\ V_y &= f_2(x, y, z, t); \\ V_z &= f_3(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Здесь x, y, z, t — переменные Эйлера.

Решив систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, z, t); \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, z, t); \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(x, y, z, t),\end{aligned}\tag{2.2}$$

можно получить уравнения семейства траекторий в параметрическом виде, совпадающие с уравнениями (2.1), в которых a, b, c — постоянные интегрирования.

Таким образом, от описания кинематики по методу Эйлера можно перейти к представлению течения по методу Лагранжа. Обратная задача, связанная с переходом от метода Лагранжа к методу Эйлера, сводится к дифференцированию уравнений (2.1) по времени с последующим исключением постоянных a, b, c .

Вычислив полную производную от вектора скорости по времени, получим вектор ускорения

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z},$$

проекции которого на оси координат имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dV_x}{dt} &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}; \\ \frac{dV_y}{dt} &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}; \\ \frac{dV_z}{dt} &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Соотношения (2.3) для ускорений соответствуют течению, характеризующемуся изменением скорости в данной точке во времени, т. е. $\partial \vec{V} / \partial t \neq 0$. Такое течение жидкости называется *неустановившимся* (нестационарным). Поток жидкости, в котором скорость и другие параметры в данной точке не зависят от времени ($\partial \vec{V} / \partial t = 0$), называется *установившимся* (стационарным).

В данный момент времени в потоке можно провести линию, обладающую таким свойством, что каждая находящаяся на ней час-

тица жидкости имеет скорость, совпадающую по направлению с касательной к этой линии, которую называют *линией тока*.

Чтобы получить ее, возьмем в потоке в момент времени $t = t_0$ некоторую точку A_1 (рис. 2.1, а) и выразим скорость частицы в этой точке вектором $\vec{V}_1$. Затем выберем точку A_2 , соседнюю с точкой A_1 и находящуюся на векторе $\vec{V}_1$. Пусть в момент $t = t_0$ вектор скорости в этой точке равен $\vec{V}_2$. Рассмотрим далее точку A_3 на векторе $\vec{V}_2$, скорость в которой определяется в тот же момент времени вектором $\vec{V}_3$, и т. д. В результате такого построения имеем ломаную линию, состоящую из отрезков векторов скорости. Уменьшая до нуля эти отрезки и одновременно увеличивая их число до бесконечности, получаем в пределе линию, которая является огибающей для всего семейства векторов скорости. Это и будет линия тока. Очевидно, что каждому моменту времени будет соответствовать своя линия тока.

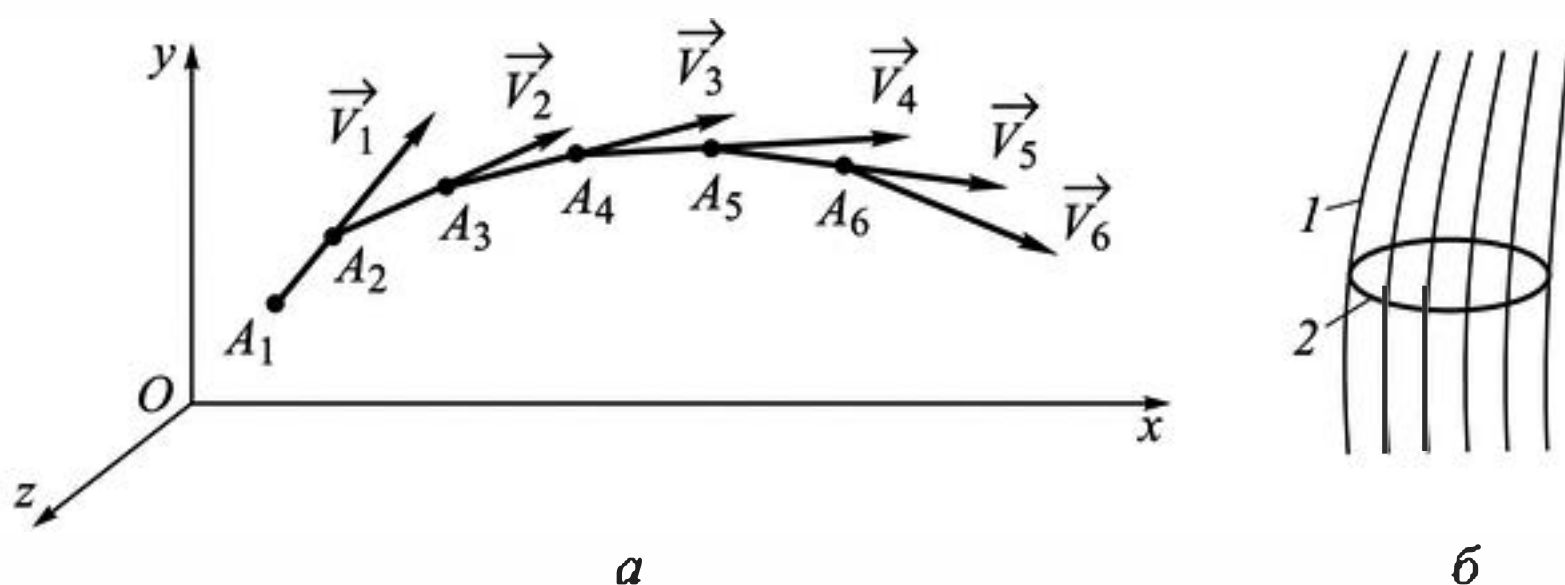


Рис. 2.1. Построение линии тока (а) и трубки тока (б):

1 — линии тока; 2 — контур

Для записи уравнения линии тока воспользуемся свойством, в соответствии с которым в каждой точке этой линии должно иметь место совпадение направлений векторов скорости $\vec{V}$ и $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, где dx , dy , dz — проекции элемента дуги $d\vec{l}$ линии тока. Следовательно, векторное произведение $d\vec{l} \times \vec{V} = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \vec{i}(V_z dy - V_y dz) - \vec{j}(V_z dx - V_x dz) + \vec{k}(V_y dx - V_x dy) = 0.$$

Поскольку $V_z dy - V_y dz = 0$, $V_z dx - V_x dz = 0$, $V_y dx - V_x dy = 0$, получаем

$$dx/V_x = dy/V_y = dz/V_z. \quad (2.4)$$

Таким образом, решение задачи об определении линии тока сводится к интегрированию дифференциальных уравнений (2.4). Каждый интеграл $F_1(x, y, z, C_1) = 0$ и $F_2(x, y, z, C_2) = 0$ уравнений (2.4) представляет собой семейство поверхностей, зависящих от одного параметра (C_1 или C_2), а пересечение этих поверхностей дает семейство линий тока.

В отличие от линии тока, которую определяют в фиксированный момент времени, понятие о траектории связано с некоторым промежутком времени, в течение которого частица проходит определенный путь. Из этого следует, что линия тока и траектория, являющаяся следом движения одной и той же частицы, совпадают в установившемся течении. Если движение жидкости нестационарное, то линия тока и траектория не совпадают.

В аэродинамике используют понятия о трубке тока и струйке жидкости или газа. Если через точки элементарного замкнутого контура (рис. 2.1, б) провести линии тока, то они образуют поверхность, которая называется поверхностью трубки тока; часть жидкости (газа), ограниченная этой поверхностью, и будет трубкой тока. Если через точки элементарного замкнутого контура провести траектории, то образуется поверхность, которая ограничивает часть жидкости (газа), называемую стружкой. Трубка тока и стружка газа, проведенные через точки одного и того же замкнутого контура в установившемся потоке, совпадают.

2.2. Движение частиц жидкости и газа

В отличие от твердого тела, движение которого определяется его поступательным перемещением вместе с центром масс и вращением вокруг мгновенной оси, проходящей через этот центр, движение жидкой (газообразной) частицы характеризуется также наличием деформационного движения, изменяющего ее форму.

Рассмотрим частицу в виде элементарного параллелепипеда со сторонами dx , dy , dz и проанализируем движение грани $ABCD$ (рис. 2.2, а). Поскольку координаты ее вершин различны, то скорости, определяемые в некоторый момент времени $t = t_0$, также будут различными:

$$V_{xA} = V_x(x, y), \quad V_{yA} = V_y(x, y);$$

$$V_{xB} = V_x(x + dx, y), \quad V_{yB} = V_y(x + dx, y);$$

$$V_{xD} = V_x(x, y + dy), \quad V_{yD} = V_y(x, y + dy);$$

$$V_{xC} = V_x(x + dx, y + dy), \quad V_{yC} = V_y(x + dx, y + dy),$$

где x, y — координаты точки A .

Разложим выражения для скоростей в ряды Тейлора, оставляя в них только величины первого порядка малости, т. е. члены, содержащие dx, dy, dz в степени не выше первой. Принимая, что в точке A скорости $V_{xA} = V_x$ и $V_{yA} = V_y$, получаем

$$V_{xB} = V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \dots, \quad V_{yB} = V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \dots;$$

$$V_{xD} = V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \dots, \quad V_{yD} = V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + \dots;$$

$$V_{xC} = V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \dots;$$

$$V_{yC} = V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + \dots$$

Из этих выражений следует, что, например, в точке B составляющая скорости по оси Ox отличается от ее значения в точке A на величину $(\partial V_x / \partial x) dx$. Это означает, что точка B , участвуя в поступательном перемещении со скоростью V_x в направлении оси Ox совместно с точкой A , одновременно движется относительно нее в том же направлении со скоростью $(\partial V_x / \partial x) dx$. В результате происходит линейная деформация отрезка AB . Скорость этой деформации $\theta_x = \partial V_x / \partial x$. В направлении оси Oy точка B перемещается со скоростью V_y вместе с точкой A и одновременно движется относительно нее с линейной скоростью $(\partial V_y / \partial x) x$, определяемой угловой скоростью отрезка AB .

Рассматривая точку D , можно по аналогии с точкой B определить, что ее относительная линейная скорость в направлении оси Oy равна $(\partial V_y / \partial y) dy$, а следовательно, скорость линейной деформации отрезка AD будет $\theta_y = \partial V_y / \partial y$. Угловая скорость отрезка относительно точки A равна $-\partial V_x / \partial y$ (знак минус учитывает, что точка D поворачивается относительно точки A в сторону, противоположную движению точки B). В результате вращения отрезков AD и AB происходит скашивание угла DAB (рис. 2.2, б), т. е. возникает угловая деформация частицы. Одновременно может произойти поворот бис-

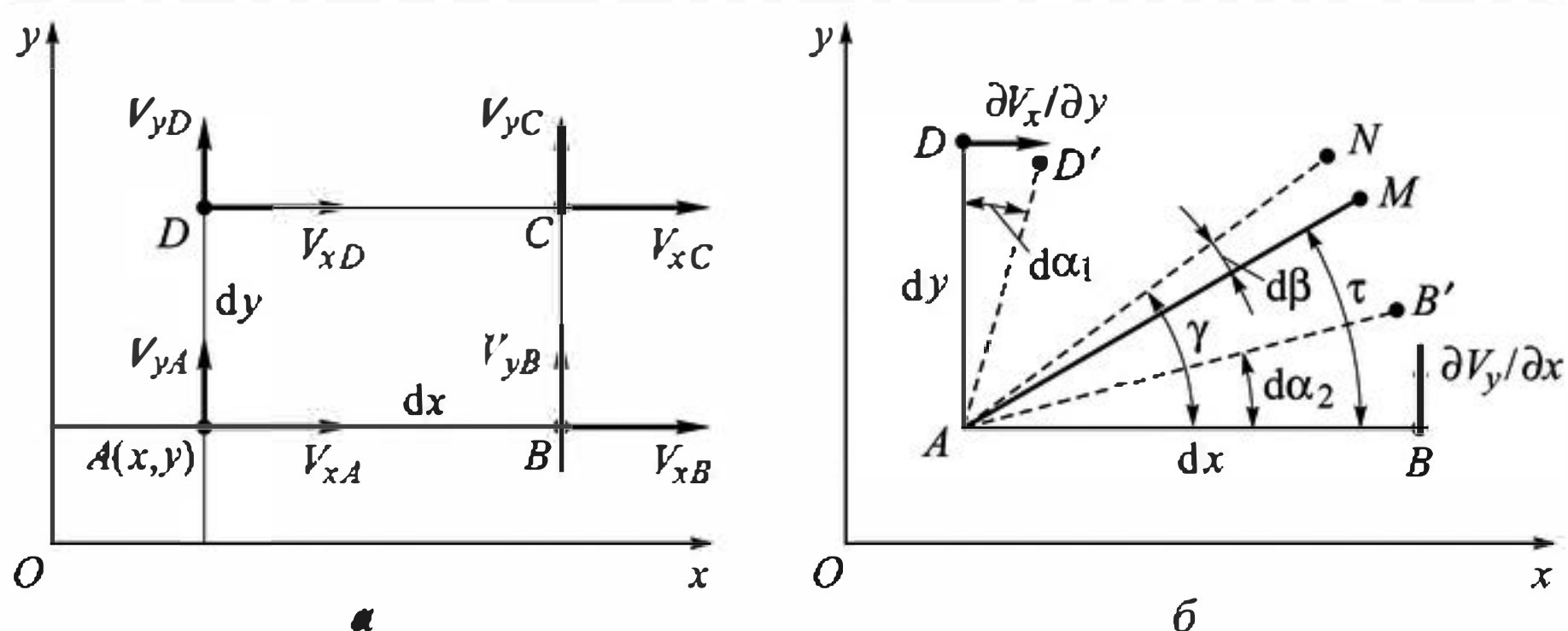


Рис. 2.2. Схема движения (а) и угловая деформация (б) жидкой частицы

сектрисы AM угла DAB , в результате чего возникнет некоторый угол $d\beta$ между ним и биссектрисой AN скошенного угла $D'AB'$. Таким образом, частица будет дополнительно вращаться.

Угол поворота биссектрисы (см. рис. 2.2, б)

$$d\beta = \gamma - \tau,$$

где $\gamma = 0,5[\pi/2 - (d\alpha_2 + d\alpha_1)]$; $\tau = \pi/4 - d\alpha_2$; $(\partial V_y/\partial x)dt = (\partial V_x/\partial y)dt$; $d\alpha_1 = d\alpha_2$.

Следовательно,

$$d\beta = 0,5(d\alpha_2 - d\alpha_1) = 0,5\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)dt.$$

Отсюда можно найти угловую скорость $d\beta/dt$ перемещения жидкой (газообразной) частицы относительно оси Oz . Обозначив ее ω_z , имеем

$$\omega_z = \frac{d\beta}{dt} = 0,5\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right). \quad (2.5)$$

Если рассмотреть движение ребра AD относительно отрезка AB , то его угловая скорость

$$2\epsilon_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}.$$

Величина

$$\epsilon_z = 0,5\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \quad (2.6)$$

называется полускоростью скашивания прямого угла DAB .

Распространим все наши рассуждения на пространственное течение и рассмотрим точку C , принадлежащую частице в виде элементарного параллелепипеда с длинами ребер dx, dy, dz . Скорость в этой точке в момент времени $t = t_0$ является функцией координат $x + dx, y + dy, z + dz$. Представив компоненты скорости в виде ряда Тейлора, в котором сохранены члены только первого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} V_{xC} &= V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x}dx + \frac{\partial V_x}{\partial y}dy + \frac{\partial V_x}{\partial z}dz; \\ V_{yC} &= V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x}dx + \frac{\partial V_y}{\partial y}dy + \frac{\partial V_y}{\partial z}dz; \\ V_{zC} &= V_z + \frac{\partial V_z}{\partial x}dx + \frac{\partial V_z}{\partial y}dy + \frac{\partial V_z}{\partial z}dz. \end{aligned}$$

Введем обозначения, аналогичные принятым при анализе движения плоской частицы. Пусть $\theta_z = \partial V_z / \partial z$ определяет скорость линейной деформации пространственной частицы в направлении оси Oz . Составляющие угловой скорости частицы по осям x и y соответственно

$$\omega_x = 0,5 \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right); \quad \omega_y = 0,5 \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right). \quad (2.7)$$

Компоненты угловой скорости частицы $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ считаются положительными при вращении соответственно от оси Ox к Oy , от оси Oy к Oz и от оси Oz к Ox . В связи с этим знаки производных $\partial V_y / \partial x, \partial V_z / \partial y, \partial V_x / \partial z$ будут совпадать, а производных $\partial V_x / \partial y, \partial V_y / \partial z, \partial V_z / \partial x$ будут противоположны знакам угловой скорости.

По аналогии с выражением (2.6) запишем полускорости скашивания двух прямых углов параллелепипеда соответственно в плоскостях yOz и xOz :

$$\epsilon_x = 0,5 \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right); \quad \epsilon_y = 0,5 \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right),$$

которые равны.

Путем несложных преобразований можно убедиться в том, что

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} = \epsilon_x + \omega_x; \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = \epsilon_y + \omega_y; \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = \epsilon_z + \omega_z;$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial z} = \varepsilon_x - \omega_x; \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \varepsilon_y - \omega_y; \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = \varepsilon_z - \omega_z.$$

С учетом этих выражений составляющие скорости в точке C можно записать в следующем виде:

$$V_{xC} = V_x + \theta_x dx + \varepsilon_y dz + \varepsilon_z dy + \omega_y dz - \omega_z dy;$$

$$V_{yC} = V_y + \theta_y dy + \varepsilon_z dx + \varepsilon_x dz + \omega_z dx - \omega_x dz;$$

$$V_{zC} = V_z + \theta_z dz + \varepsilon_x dy + \varepsilon_y dx + \omega_x dy - \omega_y dx.$$

Таким образом, движение точки C можно рассматривать как результат сложения трех видов движения: поступательного по траектории вместе с точкой A со скоростью $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$, вращения относительно нее с угловой скоростью

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

и деформационного движения. Этот вывод составляет содержание теоремы Гельмгольца. Деформационное движение, в свою очередь, складывается из линейной деформации, характеризуемой коэффициентами $\theta_x, \theta_y, \theta_z$, и угловой деформации, определяемой величинами $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Линейная деформация ребер элемента обуславливает изменение его объема $W = dx dy dz$, которое определяется разностью

$$dW = dx_1 dy_1 dz_1 - dx dy dz,$$

где dx_1, dy_1, dz_1 — длины ребер элемента в момент времени $t + dt$.

Подставив соответствующие им выражения, находим

$$dW = (dx + \theta_x dx dt)(dy + \theta_y dy dt)(dz + \theta_z dz dt) - dx dy dz,$$

или, пренебрегая членами выше четвертого порядка малости,

$$dW = (\theta_x + \theta_y + \theta_z) dx dy dz dt.$$

Отсюда можно определить скорость изменения относительного объема, или скорость удельной объемной деформации, $\theta = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}$, равную в каждой точке потока сумме скоростей линейной деформации по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям:

$$\theta = \theta_x + \theta_y + \theta_z.$$

Величина θ называется также дивергенцией (расхождением) вектора скорости в данной точке:

$$\text{div} \vec{V} = \theta = \theta_x + \theta_y + \theta_z.$$

Таким образом, движение жидкой частицы носит сложный характер и является результатом сложения трех видов движения: поступательного, вращательного и деформационного.

Поток, в котором частицы испытывают вращение, называется вихревым, а составляющие угловой скорости вращения $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — компонентами вихря. Для характеристики вращения используют понятие о роторе скорости $\text{rot} \vec{V} = 2\omega$, представляющем собой вектор

$$\text{rot} \vec{V} = (\text{rot} \vec{V})_x \vec{i} + (\text{rot} \vec{V})_y \vec{j} + (\text{rot} \vec{V})_z \vec{k},$$

составляющие которого равны удвоенным соответствующим компонентам вихря:

$$(\text{rot} \vec{V})_x = 2\omega_x; \quad (\text{rot} \vec{V})_y = 2\omega_y; \quad (\text{rot} \vec{V})_z = 2\omega_z.$$

Во многих случаях при исследовании движения жидкости в связи с пренебрежимо малыми угловыми скоростями частиц их вращение можно не учитывать. Такое движение называется безвихревым. Для безвихревого потока $\vec{\omega} = 0$ (или $\text{rot} \vec{V} = 0$) и, следовательно, равны нулю компоненты вихря $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. В соответствии с этим, согласно формулам (2.5) и (2.7), имеем

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial V_z}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x}.$$

Эти равенства являются необходимым и достаточным условием того, чтобы дифференциальный трехчлен $V_x dx + V_y dy + V_z dz$ был полным дифференциалом некоторой функции, характеризующей поток жидкости так же, как компоненты скоростей V_x, V_y, V_z . Обозначая эту функцию в виде $\varphi(x, y, z, t)$ и рассматривая время t в качестве параметра, получаем

$$d\varphi = V_x dx + V_y dy + V_z dz.$$

Однако этот же дифференциал

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

Сравнивая два последних выражения, находим

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.8)$$

Функция φ называется *потенциалом скоростей* или *потенциальной функцией*, а безвихревой поток, характеризуемый этой функцией — *потенциальным*. Из соотношений (2.8) следует, что частная производная от потенциала φ по координате равна проекции скорости на соответствующую координатную ось. Это свойство потенциальной функции сохраняется и для произвольного направления. В частности, тангенциальная составляющая скорости в какой-либо точке на произвольной кривой l будет равна частной производной $V_l = \partial \varphi / \partial l$, а нормальная составляющая $V_n = \partial \varphi / \partial n$, где n — нормаль к дуге l в рассматриваемой точке. Для полярных координат r и θ проекции вектора скорости $\vec{V}$ некоторой точки на направление полярного радиус-вектора и на перпендикулярное этому радиус-вектору направление будут соответственно равны частным производным:

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \text{и} \quad V_l = \frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

Следовательно, скорость потока в каком-либо направлении определяется быстротой изменения потенциала φ в том же направлении. Быстрота изменения потенциала в направлении l равна частной производной $\partial \varphi / \partial l$ по этому направлению. Величину $\partial \varphi / \partial l$ можно рассматривать как проекцию на направление l некоторого вектора, называемого градиентом функции φ и совпадающего с направлением наиболее быстрого возрастания этой функции. Очевидно, этот вектор равен вектору скорости $\vec{V}$. Обозначив градиент функции в виде $\text{grad } \varphi$, можем написать

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi,$$

или

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi = (\text{grad } \varphi)_x \vec{i} + (\text{grad } \varphi)_y \vec{j} + (\text{grad } \varphi)_z \vec{k},$$

где коэффициенты в скобках представляют собой проекции вектора градиента скорости на оси координат:

$$(\text{grad } \varphi)_x = V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (\text{grad } \varphi)_y = V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (\text{grad } \varphi)_z = V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Использование потенциальной функции существенно упрощает исследования движения жидкости, поскольку вместо определе-

ния трех неизвестных V_x , V_y , V_z достаточно найти одну неизвестную функцию ϕ и тем самым полностью рассчитать поле скоростей.

Изучение безвихревого течения газа упрощается, если свести его к отысканию одной неизвестной потенциальной функции, полностью определяющей это течение. Покажем, что для некоторых видов вихревого потока существует функция, также определяющая его кинематические характеристики.

Рассмотрим двухмерное (плоское) установившееся вихревое движение газа. Введем понятие некоторой функции ψ координат x и y , называемой *функцией тока*, которая связана с проекциями скоростей следующими зависимостями:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho V_y; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho V_x. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в уравнение (2.4), записанное в виде

$$\rho V_y dx - \rho V_x dy = 0, \quad (2.10)$$

получаем выражение

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0,$$

откуда следует, что выражение (2.10) представляет собой дифференциал функции ψ и, следовательно,

$$d\psi = 0. \quad (2.11)$$

Интегрируя (2.11), находим уравнение линий тока в виде

$$\psi(x, y) = \text{const.}$$

Функция тока ψ здесь полностью определяет скорости вихревого потока в соответствии с соотношениями

$$V_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad V_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.12)$$

Семейство линий тока потенциального потока можно также характеризовать функцией $\psi = \text{const}$, которая связана с потенциалом скоростей соотношениями

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Зная потенциал скоростей, из этих уравнений можно определить с точностью до произвольной постоянной функцию тока, и наоборот.

В потенциальном потоке наряду с линиями тока можно провести семейство эквипотенциальных кривых (на плоскости) или эквипотенциальных поверхностей (в осесимметричном потоке), определяемое уравнением $\varphi = \text{const}$. Рассмотрим векторы

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}; \quad \text{grad } \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j},$$

направления которых совпадают с направлениями нормалей соответственно к кривым $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$. Скалярное произведение этих векторов

$$\text{grad } \varphi \text{ grad } \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

С учетом формул (2.8) и (2.12) находим, что это скалярное произведение равно нулю. Следовательно, линии тока будут ортогональными к эквипотенциальным линиям (на плоскости) или эквипотенциальным поверхностям (в осесимметричном потоке).

Вихревой линией называется некоторая кривая, построенная в данный момент времени в потоке газа или жидкости и обладающая тем свойством, что в каждой ее точке вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ совпадает с направлением касательной.

Строят вихревую линию аналогично линии тока, с той лишь разницей, что вместо векторов поступательной скорости берут векторы угловой скорости частиц. В соответствии с этим можно записать

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} = \vec{i}(\omega_y dz - \omega_z dy) - \vec{j}(\omega_x dz - \omega_z dx) + \\ + \vec{k}(\omega_x dy - \omega_y dx) = 0.$$

Принимая во внимание, что, например, $\omega_y dz - \omega_z dy = 0$, $\omega_x dz - \omega_z dx = 0$, $\omega_x dy - \omega_y dx = 0$, находим уравнение вихревой линии:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (2.13)$$

Проведя вихревые линии через точки элементарного контура, получаем вихревую трубку.

2.3. Уравнения сохранения

Модель среды

Расчет аэрогазодинамических характеристик ЛА связан с определением параметров течений, возникающих при взаимодействии потоков с различными обтекаемыми поверхностями. Для этого необходимо выбрать модель течения газа (жидкости) и ее математическое описание (система уравнений), которое отражало бы основные законы природы, свойственные протекающим физическим процессам. В исходную систему входят уравнения сохранения, уравнение состояния газа и замыкающие систему уравнения с начальными и граничными условиями.

Уравнения сохранения выражают законы сохранения массы, количества движения и энергии. Следует отметить взаимоотношение этих законов, заключающееся в том, что каждый последующий закон в названном порядке содержит дополнительную информацию о более сложных явлениях природы. Если закон сохранения массы, отражая единство материального мира, утверждает, что масса вещества в любом его состоянии не может исчезнуть или появиться из ничего, то закон сохранения количества движения рассматривает перемещение физических тел во времени и пространстве. Закон сохранения энергии учитывает процессы в микромире, более сложные формы движения. Это взаимоотношение законов сохранения, отражающее единство и взаимообусловленность явлений, приводит к тому, что в общем виде каждое последующее уравнение сохранения содержит предыдущее. Исключение из сложного уравнения простых обеспечивает компактную запись, содержащую только дополнительную информацию. Тот факт, что все уравнения сохранения выражают единое свойство (сохранение либо массы, либо количества движения, либо энергии), позволяет записывать их в одинаковой форме.

Система, включающая уравнения сохранения и уравнение состояния, должна быть замкнутой. Если число определяемых параметров превышает четыре (кроме давления, плотности, температуры и скорости в число неизвестных могут входить тензор вязких напряжений, тепловые потоки и т. д.), система уравнений должна содержать и другие необходимые для расчета зависимости. Это, например, связь тензора вязких напряжений с составляющими вектора скорости, а также уравнения теплопроводности, излучения, химической кинетики, фазовых превращений и т. п.

Наличие в системе дифференциальных уравнений требует для их решения определенных начальных (в случае нестационарных

движений) и граничных условий. Последние могут быть достаточно сложными. Поэтому системы уравнений, описывающие течения, получаются также сложными и далеко не всегда удастся преодолеть трудности при их решении даже с помощью современной вычислительной техники. Кроме того, отдельные элементы отрывных течений, такие как течения в областях отрыва и присоединения, изучены недостаточно. Все это заставляет при решении прикладных инженерных задач вводить в систему полуэмпирические и эмпирические зависимости, упрощать отдельные уравнения или даже вообще их не учитывать.

В качестве исследуемой системы физических тел примем газ (жидкость) и другие тела, заключенные в ограниченном переменнoй поверхностью S конечном объеме W . Относительно некоторой неподвижной системы координат часть этой поверхности S_1 может перемещаться, а часть S_2 — оставаться неподвижной (рис. 2.3). Кроме того, части этих поверхностей могут быть как твердыми $S_{ТВ}$, так и жидкими $S_{ж}$. Поверхности S_j должны допускать массо- и теплообмен и лишь в частных случаях могут быть непроницаемыми и адиабатически изолирующими. Например, участок OBC поверхности (см. рис. 2.3) является твердым и подвижным, а значит, может считаться адиабатически изолирующим, участок ECO — твердым неподвижным и допускать массоэнергообмен с внешними телами. Процессы внутри рассматриваемого объема W могут быть неравновесными и выходить за рамки классической термодинамики. Такая система позволяет поэлементно представить практически любое сложное взаимодействие жидкостей и газов с твердыми телами.

Кроме физических тел в твердой фазе внутри рассматриваемого объема частицы находятся в жидкой или газообразной фазе. В общем случае модель газа считают неоднородной n -компонентной смесью, обладающей свойствами вязкости, сжимаемости, теплопроводности (предполагается, что n значительно меньше общего числа молекул или атомов, находящихся в небольшом объеме жидкости) и континуума (т. е. непрерывно заполняющей все пространство, в котором она находится), а также претерпевающей физико-химичес-

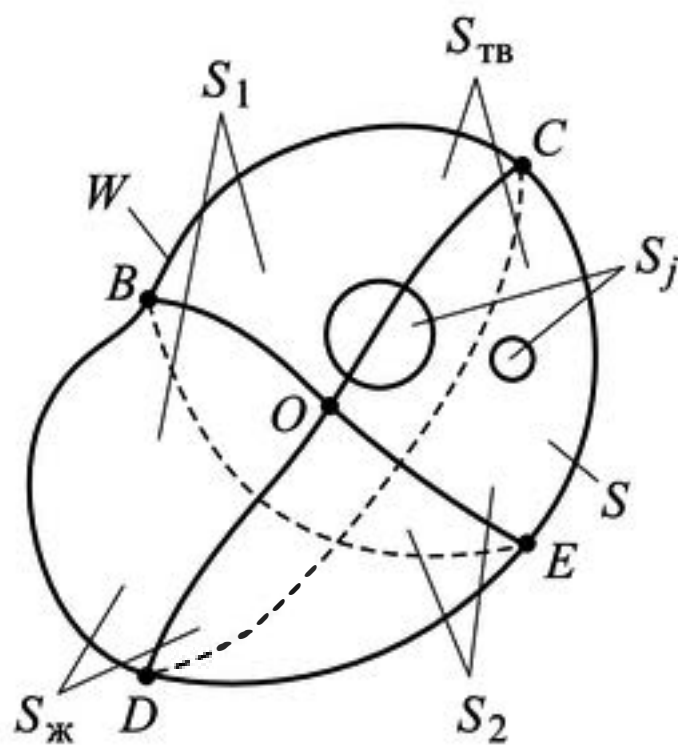


Рис. 2.3. Общий вид рассматриваемого объема жидкости

кие (в том числе и фазовые) превращения с поглощением или выделением энергии при изменении внешних условий.

В частных случаях такую модель газа (жидкости) упрощают, представляя, например, невязкой сжимаемой жидкостью.

Уравнение неразрывности

Для рассмотренных выше исследуемой системы и модели газа (жидкости) уравнение неразрывности выражает закон сохранения массы применительно к i -му компоненту:

$$\frac{d}{dt} \iiint_W (\rho^i + \psi^i) dW + \iint_{S_j^i} \rho_j^i V_{nj}^i dS_j^i = 0, \quad (2.14)$$

где ρ^i — массовая плотность i -го компонента; ψ^i — объемная плотность источника ($\psi^i < 0$) или стока ($\psi^i > 0$) i -го компонента газа (жидкости) внутри рассматриваемой системы, определяющаяся ее физико-химическими превращениями и зависящая от электромагнитных и гравитационных полей, полей концентраций, температуры, давления, интенсивности турбулентности и пр., и поэтому являющаяся функцией координат точек объема W и времени; V_{nj}^i — нормальная к поверхности S_j относительная скорость i -го компонента; S_j^i — поверхность, через которую проходит массообмен i -го компонента.

Уравнение (2.14) показывает, что сумма скоростей изменения массы i -го компонента газа (жидкости) внутри объема W и массообмена через поверхность S_j^i равна нулю.

Для смеси газа (жидкости) уравнение неразрывности может быть получено суммированием n уравнений типа (2.14) для всех ее компонентов. Учитывая, что $\sum_{i=1}^n \rho^i = \rho$ (где ρ — массовая плотность смеси), а $\sum_{i=1}^n \psi^i = 0$, согласно закону сохранения массы всех компонентов, находящихся внутри объема, получаем

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho dW + \sum_{i=1}^n \iint_{S_j^i} \rho_j^i V_{nj}^i dS_j^i = 0. \quad (2.15)$$

Если S_j^i одинаково для всех компонентов и равно S_j , т. е. все компоненты поступают через одну и ту же поверхность, то

$$\sum_{i=1}^n \rho_j^i V_{nj}^i = \rho_j V_{nj},$$

где V_{nj} — скорость смеси с плотностью $\rho_j = \sum_{i=1}^n \rho_j^i$. Тогда из уравнения (2.15) следует:

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho dW + \iint_{S_j} \rho_j V_{nj} dS_j = 0. \quad (2.16)$$

Получим из (2.14) уравнение неразрывности для бесконечно малого объема dW однокомпонентного газа. Будем считать, что источники и стоки отсутствуют ($\psi^i = 0$), а рассматриваемый объем фиксирован и неподвижен. В этом случае уравнение (2.14) будет иметь вид

$$\iiint_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW + \iint_S \rho V_n dS = 0$$

и с учетом формулы Остроградского

$$\iint_S A V_n dS = \iiint_W \operatorname{div}(A \vec{V}) dW, \quad (2.17)$$

где A — в общем случае некоторая векторная функция, получаем

$$\iiint_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right] dW = 0.$$

Ввиду произвольности величины W и предположения непрерывности подынтегральной функции

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial k}(\rho V_k) = 0, \quad (2.18)$$

где $k = x, y, z$, например:

$$\frac{\partial}{\partial k}(\rho V_k) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z).$$

Если выбрать модель несжимаемого газа ($\rho = \text{const}$), то уравнение (2.18) упрощается и принимает вид $\operatorname{div} \vec{V} = 0$. Если газ сжимае-

мый и процесс установившийся, т. е. $\rho = \rho(x, y, z)$, то $\text{div}(\rho \vec{V}) = 0$. Для двумерного установившегося течения

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

В случае потенциального течения уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Для установившегося потока из соотношения (2.16) получаем уравнение массового расхода:

$$\dot{m} = \rho V S = \text{const.}$$

Уравнение движения

Это уравнение выражает закон сохранения количества движения: полная скорость изменения количества движения вещества в объеме W рассматриваемой системы равна сумме всех сил, действующих на него.

Для i -го компонента газа (жидкости) уравнение движения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_W (\rho^i \vec{V}^i + \psi^i \vec{V}_{\text{фх}}^i) dW + \iint_{S_j^i} \rho_j^i V_{nj}^i \vec{V}_j^i dS_j^i = \\ = \iiint_W (\rho^i \vec{F}^i + \vec{F}_{\Sigma}^i) dW + \iint_{(S)} (\tau_{kl}^i - p^i \delta_{kl}) dS, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\vec{V}^i$ — абсолютная скорость движения i -го компонента; $\vec{V}_{\text{фх}}^i$ — абсолютная скорость образовавшейся при физико-химическом превращении частицы i -го компонента; $\vec{V}_j^i$ — абсолютная скорость i -го компонента, участвующего в массообмене через поверхность S_j^i ; $\vec{F}^i$ — единичный вектор внешних массовых сил, приложенных к i -му компоненту внутри объема W (гравитационные, инерционные, электромагнитные поля и поля излучения внешних источников); $\vec{F}_{\Sigma}^i$ — вектор равнодействующих всех сил, приложенных к единице объема i -го компонента и обусловленных воздействием других находящихся внутри объема компонентов газа (жидкости); τ_{kl}^i — тен-

зор вязких напряжений i -го компонента; p^i — гидростатическое давление i -го компонента; δ_{kl} — символ Кронекера, $\delta_{kl} = 0$ при $k \neq l$ и 1 — при $k = l$; $k = x, y, z$; $l = x, y, z$.

Первое слагаемое в левой части уравнения (2.19) есть полная скорость изменения количества движения i -го компонента внутри объема W , второе — скорость изменения количества движения от массообмена через поверхность S_j^i . Первое слагаемое в правой части этого уравнения — полный вектор внешней массовой силы и вектор равнодействующей силы, действующие на i -й компонент со стороны других компонентов газа, а второе — вектор равнодействующей всех сил, приложенных к поверхности S .

Поскольку, согласно закону сохранения количества движения

$$\sum_{i=1}^n \bar{V}_{\phi x}^i \psi^i = 0,$$

согласно третьему закону Ньютона

$$\sum_{i=1}^n \tilde{F}_{\Sigma}^i = 0,$$

а

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^n \bar{V}^i \rho^i / \sum_{i=1}^n \rho^i,$$

для смеси жидкости, суммируя n уравнений типа (2.19), получаем

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho \bar{V} dW + \sum_{i=1}^n \iint_{S_j^i} \rho_j^i v_{nj}^i \bar{V}_j^i dS_j^i = \iiint_W \bar{F} \rho dW + \sum_{i=1}^n \iint_S \overline{(\tau_{kl}^i - p^i \delta_{kl})} dS. \quad (2.20)$$

В случае, когда $S_j^i = S_j$, вектор скорости

$$\bar{V}_j = \sum_{i=1}^n \bar{V}_j^i \rho_j^i v_n^i / \sum_{i=1}^n v_n^i \rho_j^i.$$

Тогда выражение (2.20) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho \bar{V} dW + \iint_{S_j} \bar{V}_j \rho_j v_{nj} dS_j = \iiint_W \bar{F} \rho dW + \iint_S \overline{(\tau_{kl} - p \delta_{kl})} dS,$$

где $\tau_{kl} = \sum_{i=1}^n \tau_{kl}^i$; $p = \sum_{i=1}^n p^i$.

Получим из (2.19) уравнение движения для бесконечно малого объема газа. Как и при выводе уравнения неразрывности, будем полагать, что газ однокомпонентный, физико-химические превращения и силы взаимодействия между отдельными частицами отсутствуют, а объем неподвижен. Тогда

$$\iiint_W \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{V}) dW + \iint_S \rho V_n \bar{V} dS = \iiint_W (\rho \bar{F}) dW + \iint_S (\tau_{kl} - p \delta_{kl}) dS.$$

С учетом формулы (2.17) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial k}(\rho V_k \bar{V}) = \rho \bar{F} + \frac{\partial}{\partial k}(\tau_{kl} - p \delta_{kl}),$$

или в скалярной форме (в проекциях на оси координат Ox, Oy, Oz)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_l) + \frac{\partial}{\partial k}(\rho V_k V_l) = \rho F_l + \frac{\partial}{\partial k}(\tau_{kl} - p \delta_{kl}). \quad (2.21)$$

Тензор напряжения τ_{kl} , имеющий девять независимых компонентов, является симметричным тензором второго порядка, поскольку соблюдаются равенства $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ (первый индекс указывает, какой оси перпендикулярна площадка, в которой действует τ , а второй — в направлении какой оси).

Используя для газа обобщенный закон Ньютона, запишем напряжения через проекции скоростей и динамическую вязкость:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{V}; \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{V};$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{V}$$

(здесь первые члены уравнений характеризуют изменение напряжения в зависимости от вязкости, а вторые — учитывают влияние сжимаемости жидкости);

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right).$$

Проектируя члены уравнения (2.21) на оси координат, можно получить уравнение движения в форме Навье – Стокса. В проекции на ось Ox

$$\rho \frac{dV_x}{dt} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}.$$

Преобразуем полученное уравнение, подставив в него τ_{xx} , τ_{yx} , τ_{zx} :

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \\ &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(2\mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} \right) = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left[\mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{V} \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\nu = \mu/\rho$, окончательно получаем

$$\frac{dV_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta V_x + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{V}. \quad (2.22)$$

По аналогии записываем уравнения движения в проекциях на оси Oy и Oz :

$$\frac{dV_y}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta V_y + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{V}; \quad (2.23)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta V_z + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{V}. \quad (2.24)$$

Вместо трех уравнений в проекциях на оси координат можно записать одно уравнение в векторной форме. Для этого достаточно уравнения (2.22)–(2.24) умножить на соответствующие единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, определяющие направление осей Ox , Oy , Oz , и затем их просуммировать:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{3} \text{grad div } \vec{V}. \quad (2.25)$$

Здесь

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}; \quad \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k};$$

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}.$$

Уравнение (2.25) — уравнение движения в форме Навье — Стокса, справедливое для однородного вязкого сжимаемого газа трехмерного неустановившегося потока, в общем виде не интегрируется. Если рассматривать более сложную модель газа, например учитывать не только внутреннее трение, но и электромагнитные свойства, то в этом случае в правой части уравнения появляются дополнительные слагаемые.

В случае несжимаемого газа ($\rho = \text{const}$, $\text{div } \vec{V} = 0$) уравнение (2.25) упрощается и принимает вид

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{V}.$$

При отсутствии массовых сил для сжимаемого газа имеем

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{3} \text{grad div } \vec{V}. \quad (2.26)$$

В случае плоского установившегося движения вязкого несжимаемого газа уравнение (2.26) в проекциях на оси координат принимает вид

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right);$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right).$$

Последние соотношения используют в теории пограничного слоя.

Важным частным случаем уравнения Навье — Стокса является уравнение Эйлера — теоретическая основа исследования идеального (невязкого) газа:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.27)$$

Проектирование (2.27) на оси координат дает возможность получить уравнения Эйлера в скалярной форме для трехмерного неустановившегося потока с учетом массовых сил:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для плоского установившегося движения идеального газа (жидкости) система (2.28) упрощается:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

Одномерное неустановившееся течение жидкости без учета массовых сил описывается уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Для одномерного установившегося (без учета массовых сил) потока имеем

$$V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Уравнение энергии

Выражает закон сохранения энергии: полная скорость изменения энергии рассматриваемой системы (внутри ее объема W и вследствие энергообмена через поверхность S) равна мощности всех сил, приложенных к газу (жидкости) внутри этого объема. Для i -го компонента жидкости уравнение энергии будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_W \left\{ \rho^i \left[e^i + \frac{(V^i)^2}{2} \right] + \psi^i i_{\text{фх}}^i \right\} dW + \iint_{S_j^i} \rho_j^i V_{nj}^i \left[e_j^i + \frac{(V_j^i)^2}{2} \right] dS_j^i = \\ & = \iiint_W \left[\rho^i (\vec{F}^i \vec{V}^i) + \epsilon_{\text{вз}}^i + \epsilon_{\text{изл}}^i \right] dW + \iint_S \left[(\overline{\tau_{kl}^i - p^i \delta_{kl}}) \vec{V}^i + (\vec{q}^i \vec{n}) \right] dS, \quad (2.29) \end{aligned}$$

где e^i — внутренняя энергия единицы массы; $i_{\text{фх}}^i$ — энергия, выделяемая (поглощаемая) единицей массы i -го компонента при его образовании (исчезновении); $\epsilon_{\text{изл}}^i$ — мощность излучения (поглощения) единицы массы i -го компонента; $\epsilon_{\text{вз}}^i$ — мощность взаимодействия частиц; $\vec{q}^i$ — вектор теплового потока через границу системы; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности в рассматриваемой точке.

Первое слагаемое в левой части уравнения (2.29) представляет собой полную скорость изменения энергии i -го компонента внутри объема, включая энергию от источников (стоков) массы, а второе — обусловлено массообменом через поверхность S_j^i . В правой части уравнения (2.29) первое слагаемое характеризует мощность внешних массовых сил, действующих на i -й компонент внутри объема, мощность взаимодействия частиц i -го компонента с другими частицами, находящимися внутри объема, а также мощность излучения (поглощения) i -го компонента, а второе слагаемое — мощность сил на границе объема и тепловой поток через нее.

Поскольку

$$\sum_{i=1}^n \iiint_W \epsilon_{\text{вз}}^i dW = \iiint_W \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_{\text{вз}}^i \right) dW = 0,$$

для смеси газа, суммируя n уравнений типа (2.29), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_W [\rho(e + V^2/2) + J_{\text{фх}}] dW + \sum_{i=1}^n \iint_{S_j^i} \rho_j^i V_{nj}^i (e_j^i + (V_j^i)^2/2) dS_j^i = \\ & = \iiint_W [\rho(\vec{F} \vec{V}) + \epsilon_{\text{изл}}] dW + \iint_S [(\overline{\tau_{kl} - p \delta_{kl}}) \vec{V} + (\vec{q} \vec{n})] dS. \quad (2.30) \end{aligned}$$

Здесь $e = \sum_{i=1}^n (\rho^i e^i) / \sum_{i=1}^n \rho^i$; $V^2 = \sum_{i=1}^n [\rho^i (V^i)^2] / \sum_{i=1}^n \rho^i$; $J_{\text{фх}}$ — энергия, выделяющаяся (поглощаемая) в единице объема смеси при физико-химических превращениях.

При $S_j^i = S_j$ из уравнения (2.30) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_W [\rho(e + V^2/2) + J_{\Phi x}] dW + \iint_{S_j} \rho_j V_j (e_j + V_j^2/2) dS_j = \\ = \iiint_W [\rho(\bar{F}\bar{V}) + \epsilon_{изл}] dW + \iint_S [(\tau_{kl} - p^i \delta_{kl}) \bar{V} + (\bar{q} \bar{n})] dS. \end{aligned}$$

Для модели однокомпонентного газа без учета физико-химических превращений и мощности взаимодействия частиц из (2.29) получаем уравнение энергии для бесконечно малого объема газа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial k} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) V_k \right] = \\ = \rho F V + \epsilon_{изл} + \frac{\partial}{\partial k} [(\tau_{kl} - p^i \delta_{kl}) V_k + q_k]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Если течение установившееся и сжимаемое, газ нетеплопроводный и невязкий, излучение отсутствует, а массовые силы пренебрежимо малы, то уравнение энергии вдоль линии тока имеет вид

$$\frac{V^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + i = \text{const}, \quad (2.32)$$

где $i = e + p/\rho = e + RT = c_p T$.

Обобщенная форма записи уравнений сохранения

Представим теперь уравнения сохранения в обобщенном виде.

Для i -го компонента газа и для газовой смеси соответственно можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_W (\rho^i A + \psi^i B) dW + \iint_{S_j^i} \rho_j^i V_{nj}^i C dS_j^i = \iiint_W D dW + \iint_S E dS; \\ \frac{d}{dt} \iiint_W (A\rho + B) dW + \sum_{i=1}^n \iint_{S_j^i} \rho_j^i V_{nj}^i C dS_j^i = \iiint_W D dW + \iint_S E dS. \end{aligned}$$

Здесь A, B, C, D, E — коэффициенты, представленные в табл. 2.1.

Приведенные выше уравнения сохранения (массы, количества движения, энергии) для многокомпонентного газа, который находится в произвольном замкнутом объеме с твердыми и жидкими

Таблица 2.1. Выражения для коэффициентов в уравнениях сохранения

Коэф- фици- ент	Уравнения сохранения				
	энергии для		количества		массы для
	<i>i</i> -го компонента	смеси	<i>i</i> -го ком- понента	смеси	<i>i</i> -го компо- нента
<i>A</i>	$e^i + V^{i2}/2$	$e + V^2/2$	$\vec{V}^i$	$\vec{V}$	1
<i>B</i>	$i^i_{\phi x}$	$J_{\phi x}$	$\vec{V}^i_{\phi x}$	0	0
<i>C</i>	$e^i_j + V^{i2}_j/2$	$e_j + V_j^2/2$	$\vec{V}^i_j$	$\vec{V}_j$	1
<i>D</i>	$\rho^i(\vec{F}\vec{V}^i) + \epsilon^i_{изл} + \epsilon^i_{вз}$	$\rho(\vec{F}\vec{V}) + \epsilon_{изл}$	$\rho^i\vec{F}^i + \vec{F}^i_{\Sigma}$	$\rho\vec{F}$	0
<i>E</i>	$(\tau^i_{kl} - p^i\delta_{kl})\vec{V}^i + (\vec{q}^i\vec{n})$	$(\tau_{kl} - p\delta_{kl})\vec{V} + (\vec{q}\vec{n})$	$(\tau^i_{kl} - p^i\delta_{kl})$	$(\tau_{kl} - p\delta_{kl})$	0

границами, допускающими различные механизмы массоэнергообмена с внешними телами, позволяют рассчитать основные параметры течений. Кроме того, можно с единых методологических позиций оценить отдельные уравнения или их составляющие при анализе конкретных явлений, что снижает вероятность ошибки при использовании того или иного уравнения.

2.4. Интегралы уравнений движения идеального газа

Преобразуем уравнения движения, представленные в форме Эйлера, и выделим в них угловые скорости вращения частиц газа, называемые компонентами вихря. Запишем уравнения (2.28) в виде

$$F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z};$$

$$F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z};$$

$$F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Прибавив к правой части первого уравнения $\pm V_y \frac{\partial V_y}{\partial x}$ и $\pm V_z \frac{\partial V_z}{\partial x}$, получим

$$F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \\ + V_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + V_z \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right),$$

или

$$F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{V^2}{2} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) V_z - \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) V_y.$$

В правой части последнего уравнения два последних выражения, стоящие в скобках, как известно, являются удвоенными угловыми скоростями: $2\omega_y$ и $2\omega_z$. Прделав аналогичные преобразования для двух других уравнений, окончательно имеем

$$F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{V^2}{2} = 2(\omega_y V_z - \omega_z V_y); \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{V^2}{2} = 2(\omega_z V_x - \omega_x V_z); \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{V^2}{2} = 2(\omega_x V_y - \omega_y V_x). \quad (2.33)$$

Такая форма записи уравнений движения идеального газа была предложена проф. И.С. Громекой. В векторной форме они будут иметь вид

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{rot} \vec{V} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p,$$

причем, как известно, в общем виде

$$\text{grad} A = \frac{\partial A}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{k};$$

$$\text{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

С учетом массовых сил уравнение (2.33) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{rot} \vec{V} \times \vec{V} = \vec{G} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (2.34)$$

Предположим, что неустановившееся течение будет потенциальным, а следовательно, $\text{rot} \vec{V} = 0$, $\vec{V} = \text{grad} \varphi$. Кроме того, примем, что массовые силы имеют потенциал U , поэтому вектор $\vec{G} = -\text{grad} U$. Если среда обладает свойством баротропности, характеризующимся однозначной зависимостью между давлением и плотностью (это имеет место, например, в случае адиабатического течения, для которого $p = A\rho^k$), то отношение dp/ρ равно дифференциалу некоторой функции P , а значит,

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} P.$$

Тогда уравнение (2.34) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \varphi + \text{grad} \frac{V^2}{2} = -\text{grad} U - \text{grad} P,$$

или

$$\text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} = -\text{grad} U - \text{grad} P.$$

Переходя от градиентов к соответствующим скалярным функциям, находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + P + U = C(t), \quad (2.35)$$

где $P = \int \frac{dp}{\rho}$.

Уравнение (2.35) называется уравнением или интегралом Лагранжа. Его правая часть представляет собой функцию, которая зависит от времени, но не зависит от координат, т. е. является одинаковой для любой точки потенциального потока. Слагаемые в левой части уравнения (2.35) имеют простой физический смысл: $V^2/2$ —

кинетическая энергия, $P = \int \frac{dp}{\rho}$ — потенциальная энергия от давления для единицы массы, а U — потенциальная энергия положе-

ния частиц жидкости, отнесенная к их массе. Чтобы выяснить физический смысл первого слагаемого, воспользуемся зависимостью для потенциальной функции $\partial\varphi/\partial l = V_l$, где V_l — проекция вектора скорости на некоторую линию l . Функцию φ можно определить из выражения

$$\varphi = \int_{l_0}^l \frac{\partial V_l}{\partial t} dl,$$

где l_0 и l — координаты соответственно фиксированной и произвольной точек.

Производная $\partial\varphi/\partial t = \int_{l_0}^l (\partial V_l/\partial t) dl$. Локальное ускорение $\partial V_l/\partial t$

можно рассматривать как проекцию инерционной силы, обусловленной наличием местного ускорения и отнесенной к единице массы, а произведение $(\partial V_l/\partial t) dl$ — как работу этой силы на участке dl . В соответствии с этим производная $\partial\varphi/\partial t$ равна работе инерционной силы на участке между точками l_0 и l , т. е. ее можно рассматривать как энергию единицы массы, обусловленную изменением во времени в данной точке скорости и связанного с ним давления. С учетом отмеченного выражение в левой части уравнения (2.35) представляет собой полную энергию единицы массы газа. Таким образом, уравнение Лагранжа устанавливает тот факт, что в потенциальном потоке полная энергия единицы массы в данный момент времени есть величина, одинаковая для всех точек потока.

Для несжимаемого газа, движение которого происходит под действием давления и силы тяжести, интеграл (2.35) будет иметь вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = C(t).$$

Если, в частности, ось Oy направлена вертикально вверх, то $U = gy$, а значит,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy = C(t).$$

Большое практическое значение имеет частный случай установившегося потенциального течения, для которого $\partial\varphi/\partial t = 0$, а функция $C(t) = \text{const}$, т. е. не зависит от времени. В этом случае уравнение (2.35) принимает вид

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = \text{const.} \quad (2.36)$$

Этот частный случай уравнения Лагранжа называется уравнением Эйлера, в соответствии с которым при потенциальном установившемся движении газа полная энергия единицы массы является величиной, постоянной для всех точек потока. Таким образом, константа в уравнении Эйлера будет не только одинаковой для всей области потока, но и в отличие от функции $C(t)$ интеграла Лагранжа не зависящей от времени.

Уравнение Эйлера для несжимаемого газа ($\rho = \text{const}$) будет по форме аналогично (2.36) с той разницей, что вместо $\int dp/\rho$ в него войдет отношение p/ρ .

Рассмотрим более общий случай непотенциального стационарного движения газа. Уравнение этого движения имеет вид

$$\text{grad}(V^2/2) + \text{rot } \vec{V} \times \vec{V} = -\text{grad } P - \text{grad } U,$$

или

$$\text{grad} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) = -\text{rot } \vec{V} \times \vec{V}. \quad (2.37)$$

Правая часть уравнения (2.37) равна нулю, если векторы $\text{rot } \vec{V}$ и $\vec{V}$ параллельны, т. е. при условии, что вихревая линия и линия тока совпадают. В этом случае

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = C_1.$$

Это уравнение впервые получил И.С. Громека. Постоянная C_1 будет одной и той же для всей области, где выполняется условие совпадения вихревых линий и линий тока. Области, для изучения которых применяют уравнение Громеки, возникают, например, при обтекании крыльев конечного размаха. Это обтекание характеризуется образованием вихрей, направление которых вблизи крыла практически совпадает с направлением линий тока. Однако подобные области не всегда имеются в потоке. Обычно течение характеризуется наличием не совпадающих по направлению вихревых линий и линий тока. При этом семейство вихревых линий описывается уравнением (2.13), а семейство линий тока (траекторий) — уравнением (2.4), а все течение — уравнением (2.37).

Возьмем вектор дуги в виде $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, принадлежа-

щий линии тока или вихревой линии, и определим скалярное произведение:

$$d\vec{l} \cdot \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) = -d\vec{l}(\text{rot} \vec{V} \times \vec{V}).$$

В левой части этого уравнения записан полный дифференциал трехчлена, стоящего в круглых скобках. Следовательно,

$$d \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) = -d\vec{l}(\text{rot} \vec{V} \times \vec{V}).$$

Векторное произведение $\text{rot} \vec{V} \times \vec{V}$ представляет собой вектор, перпендикулярный векторам $\text{rot} \vec{V}$ и $\vec{V}$. Скалярное произведение этого вектора и вектора $d\vec{l}$ будет равно нулю в двух случаях: когда направление вектора $d\vec{l}$ совпадает с направлением линии тока (траектории) или с направлением вихря. В этих двух случаях действительно решение уравнения движения

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = C_2, \quad (2.38)$$

где C_2 — константа, значение которой зависит от рассматриваемой траектории или вихревой линии.

Соотношение (2.38) называется уравнением Бернулли. Очевидно, для различных вихревых линий, проходящих через расположенные на данной линии тока точки, константа будет иметь одно и то же значение. Точно так же одинаковые значения константы будут у семейства линий тока (траекторий) и вихря, через точки которого проходит линия тока.

Следует отчетливо уяснить различие рассмотренных уравнений Громеки и Бернулли. Оба они выведены для вихревого (непотенциального) течения, однако первое отражает факт постоянства полной энергии единицы массы газа во всей области, где вихревые линии и линии тока совпадают, а второе устанавливает закономерность, в соответствии с которой постоянство этой энергии имеет место вдоль данной линии тока или вихревой линии. Естественно, что в общем случае константы C_1 и C_2 не равны. Кроме того, существует различие между уравнениями Лагранжа и Эйлера, относящимися соответственно к неустановившемуся и установившемуся безвихревому (потенциальному) обтеканию, а также между каждым из рассмотренных уравнений.

При исследовании течения жидкости или газа наиболее широко применяют уравнение Бернулли, отнесенное к условиям на линиях тока (траекториях). Известно, что константу C_2 уравнения (2.38) определяют для каждой рассматриваемой линии тока. Если же установившееся течение вдобавок безвихревое (потенциальное), то уравнение Бернулли совпадает с уравнением Эйлера и, следовательно, константа будет одинаковой для всех линий тока, т. е. для всей области потока.

Рассмотрим некоторые конкретные формы уравнения Бернулли. Для несжимаемого газа и при условии, что функция $U = gy$, это уравнение имеет вид

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + yg = C_2. \quad (2.39)$$

При исследовании движения газа можно пренебречь влиянием силы тяжести. Следовательно, в уравнении (2.38) и других интегралах следует принять $U = 0$. В частности, вместо (2.39) получаем

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_2,$$

или

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho_\infty},$$

где $\rho = \rho_\infty$ (газ несжимаемый), а индекс « ∞ » соответствует параметрам невозмущенного потока.

В критической точке линии тока, для которой $V = 0$, давление

$$p = p_0 = p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2 / 2$$

максимально. Такое давление p_0 называют полным. В любой другой точке линии тока давление p будет меньше полного давления p_0 .

Рассмотрим движение идеального сжимаемого газа. В таком газе отсутствуют обусловленные свойством вязкости процессы передачи теплоты (теплопроводность, диффузия). Примем также, что газ не излучает энергию. В этом случае уравнение энергии принимает вид (2.32), а интеграл Бернулли

$$V^2/2 + i = C.$$

В такой форме интеграл Бернулли представляет собой уравнение энергии для изэнтропического течения. Согласно этому

уравнению, сумма кинетической энергии и энтальпии частицы газа является величиной постоянной. Полагая $i = c_p T = c_p p / (\rho R)$, $c_p - c_v = R$ и $k = c_p / c_v$, находим

$$i = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}.$$

Следовательно,

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = C,$$

или

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = C.$$

Уравнение Бернулли для идеального сжимаемого газа является теоретической основой исследования закономерностей изэнтропических течений газообразной среды.

2.5. Уравнения для потенциала скорости

Поскольку поле скоростей потенциального движения газа описывается одной функцией — потенциалом скорости ϕ , для его определения достаточно иметь одно дифференциальное уравнение относительно функции ϕ . Это уравнение нетрудно получить из уравнений неразрывности и движения для установившегося безвихревого плоского течения идеального газа, записанных в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0; \quad (2.40)$$

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (2.41)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.42)$$

Производная

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dt} = \frac{d\rho}{dp} \left(\frac{\partial p}{\partial x} V_x + \frac{\partial p}{\partial y} V_y \right)$$

или, учитывая, что $dp/d\rho = a^2$ (где a — скорость звука),

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} V_x + \frac{\partial p}{\partial y} V_y \right). \quad (2.43)$$

Выражая $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial y$ из уравнений (2.41) и (2.42) и подставляя их в (2.43), получаем

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} V_x^2 + \frac{\partial V_x}{\partial y} V_x V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} V_x V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y^2 \right). \quad (2.44)$$

Уравнение неразрывности (2.40) с учетом (2.41) после перегруппировки членов и умножения на a^2 принимает следующий вид:

$$(a^2 - V_x^2) \frac{\partial V_x}{\partial x} + (a^2 - V_y^2) \frac{\partial V_y}{\partial y} - \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) V_x V_y = 0. \quad (2.45)$$

В безвихревом движении $V_x = \partial \Phi / \partial x$, $V_y = \partial \Phi / \partial y$. Заменяя в уравнении (2.45) проекции скоростей на оси координат через производные от потенциала скорости Φ , получаем уравнение для потенциала скорости в потоке газа:

$$(V_x^2 - a^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (V_y^2 - a^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2V_x V_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0, \quad (2.46)$$

являющееся основным кинематическим уравнением газовой динамики.

Согласно уравнению энергии, входящая в это уравнение скорость звука a может быть выражена через скорость течения V , а следовательно, и через потенциал Φ .

Уравнение (2.46) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка, решение которого при определенных граничных условиях является трудной задачей. Оно линейно относительно вторых частных производных от искомой функции, но коэффициенты перед этими производными содержат первые производные от Φ . Следовательно, уравнение потенциала относится к классу *квазилинейных* второго порядка. Интересно определить его тип. Если уравнение в частных производных второго порядка записать в общем виде:

$$A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = H,$$

то, как известно, его тип будет определяться знаком дискриминанта $(B^2 - AC)$.

Вычислив дискриминант для уравнения (2.46), получим

$$\frac{V_x^2 V_y^2}{a^2} - \left(1 - \frac{V_x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{V_y^2}{a^2}\right) = \frac{V_x^2 + V_y^2}{a^2} - 1 = \frac{V^2}{a^2} - 1 = M^2 - 1.$$

Таким образом, при дозвуковой скорости движения газа ($M < 1$) уравнение потенциала является *эллиптическим*, а при сверхзвуковой скорости ($M > 1$) — *гиперболическим*. Забегая вперед, отметим, что, с одной стороны, это важное с позиции математики обстоятельство является отражением того факта, что физические свойства течений с до- и сверхзвуковыми скоростями весьма различны и часто противоположны. С другой стороны, само изменение типа основного уравнения, описывающего движение газа, вызывает разницу в методах изучения до- и сверхзвуковых течений.

2.6. Уравнения движения с развитой турбулентностью

При турбулентном движении скорость и давление в фиксированной точке пространства не остаются постоянными во времени, а очень часто и очень неравномерно изменяются. Такие изменения скорости и давления, называемые пульсациями, являются наиболее характерным признаком турбулентности.

Для анализа закономерностей развития турбулентного течения его удобно разделить на среднее и пульсационное. Параметры осредненного течения обозначаются черточкой сверху, а пульсационного — штрихом. Таким образом, мгновенные значения каждого параметра будут определяться соотношениями

$$V_x = V_{\text{ср } x} + V'_x; \quad V_y = V_{\text{ср } y} + V'_y; \quad V_z = V_{\text{ср } z} + V'_z, \quad p = p_{\text{ср}} + p' \text{ и т. д.}$$

В этом случае вместо уравнений движения (2.22)–(2.24) для турбулентного течения несжимаемого газа без учета массовых сил имеем уравнения осредненного движения, называемые уравнениями Рейнольдса^{*}:

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta V_x +$$

^{*} В этих уравнениях для упрощения записи индекс «ср» опущен.

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho V_x'^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho V_x'V_y') + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho V_x'V_z'); \\
& \rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta V_y + \\
& + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho V_x'V_y') + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho V_y'^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho V_y'V_z'); \\
& \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta V_z + \\
& + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho V_x'V_z') + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho V_y'V_z') + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho V_z'^2).
\end{aligned}$$

Это равносильно введению дополнительного тензора «кажущегося» напряжения турбулентного трения (тензора турбулентных напряжений):

$$\begin{vmatrix} p'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & p'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & p'_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho V_x'^2 & \rho V_x'V_y' & \rho V_x'V_z' \\ \rho V_x'V_y' & \rho V_y'^2 & \rho V_y'V_z' \\ \rho V_x'V_z' & \rho V_y'V_z' & \rho V_z'^2 \end{vmatrix}.$$

Поскольку оно складывается с обычным вязким напряжением, можно записать

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{V} - \rho V_x'^2;$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) - \rho V_x'V_y'$$

и т. д. В соответствии с этим суммарное напряжение трения

$$\tau = \tau_{\text{л}} + \tau_{\text{т}},$$

где индексы «л» и «т» относятся соответственно к ламинарному и турбулентному напряжениям.

Ввиду преобладания турбулентного трения в расчетах принимают

$$\tau = \tau_{\text{т}}.$$

Задачи, связанные с движением вязкого газа, решают при известном законе изменения напряжений турбулентного трения. Однако

сложный характер турбулентных течений не позволяет достаточно полно изучить механизм турбулентности. Поэтому в основу способов расчета положены различные гипотезы, использующие некоторые эмпирические данные и связывающие силы «кажущейся» вязкости, вызываемой турбулентным смешением и осредненными во времени скоростями. Применение таких гипотез позволяет получить необходимые зависимости для аналитического выражения напряжений трения через определяющие процессы движения параметры и тем самым замкнуть систему дифференциальных уравнений осредненного движения.

2.7. Модели турбулентности

Общие сведения о турбулентности

Турбулентность — это неупорядоченное движение в жидкостях (или газах), в котором параметры потока изменяются во времени и пространстве. Турбулентное смешение в общем случае при неоднородных полях плотностей, температур, скоростей и концентраций вызывает обмен между отдельными слоями течения массой, импульсом и энергией компонентов жидкости. Как правило, в начале течения является ламинарным. Начальный импульс турбулентности может происходить случайно. Причиной перехода считают неустойчивость ламинарного течения под воздействием возмущений. Турбулентные течения порождают дополнительные силы трения, на преодоление которых затрачивается некоторая работа, выполняемая осредненным течением. Турбулентность считают однородной, если осредненная скорость по всему полю течения постоянна. Для всех случаев, когда осредненная скорость имеет градиент, турбулентность будет анизотропной; течение при наличии такой турбулентности называют течением со сдвигом.

Турбулентные сдвиговые течения подразделяют на несколько видов, различающихся граничными условиями. Это прежде всего свободные турбулентные (сдвиговые) течения, не ограниченные стенками (рис. 2.4). К ним относятся, например, течения вязкого газа в следе, характеризующиеся существенным градиентом скорости, наличием свободной границы (пограничной поверхности), а также значительными турбулентными пульсациями. Область возмущенного течения между основным потоком и струей, встреч-

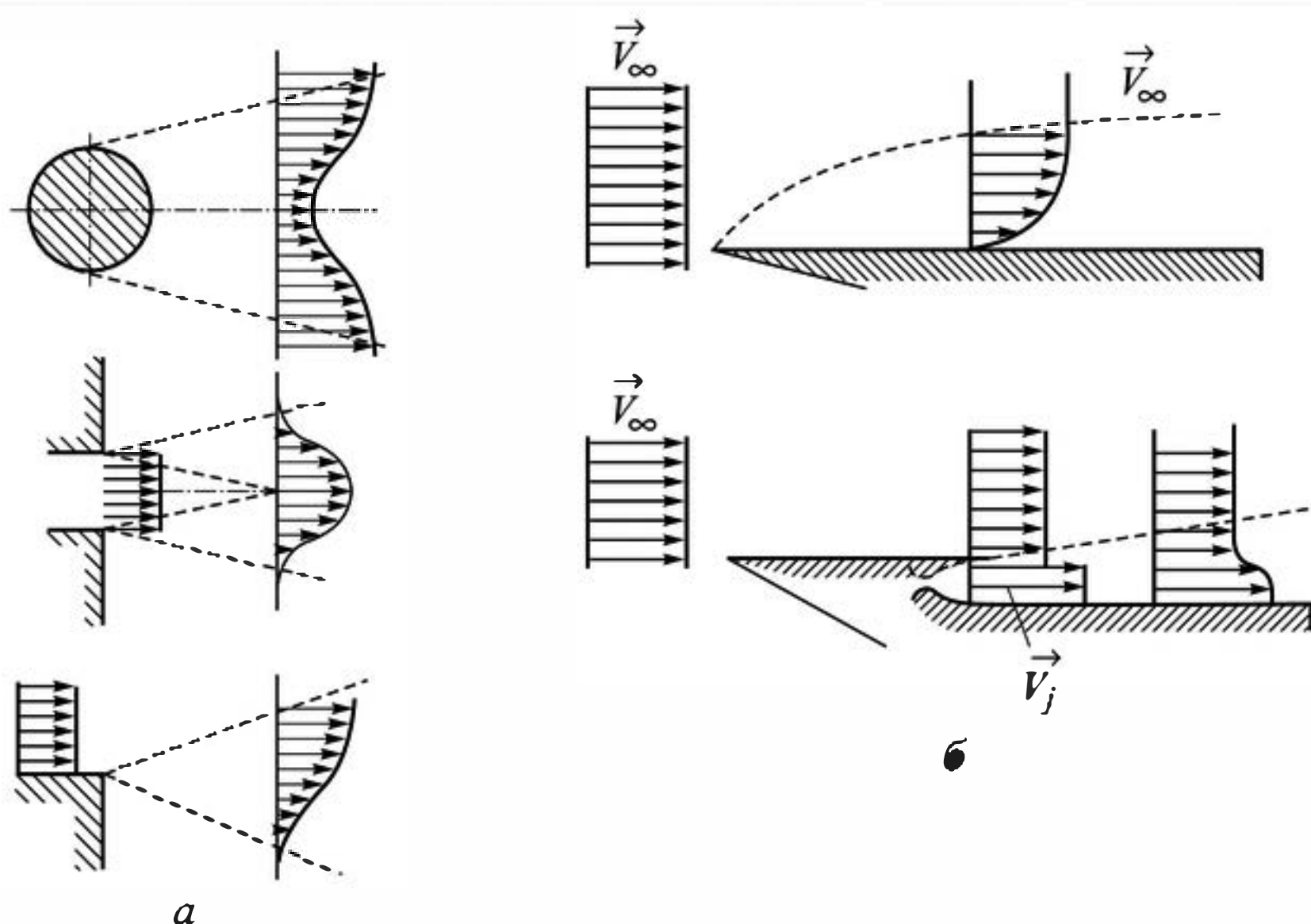


Рис. 2.4. Течение со свободной (а) и пристеночной (б) турбулентностью

ным или спутным потоком называют слоем смешения. Такая область течения имеет место и при отрыве потока. Однако оторвавшийся от обтекаемой поверхности пограничный слой в реальных условиях подчиняется более сложным законам, чем струйный слой смешения. В приближенных же методах расчета параметров отрывных течений часто используют эмпирические данные для идеального слоя смешения струй.

К турбулентным слоям, ограниченными одной свободной и одной фиксированной границей (пристеночные течения), относятся пограничные слои (см. рис. 2.4, а) и пристеночные струи (см. рис. 2.4, б). Граничная поверхность может принимать различную форму, быть проницаемой или непроницаемой. В свою очередь, турбулентные течения могут быть ограничены двумя или большим числом фиксированных границ. В качестве примера сдвиговых слоев можно привести течения в трубах, каналах и т. д.

Для решения задач обтекания тел при турбулентном режиме течения, как правило, используют систему уравнений Рейнольдса и энергии, а также эмпирические (полуэмпирические) соотношения, описывающие модель турбулентности. При математической постановке большинства аэродинамических задач очень важно правильно выбрать модель турбулентности. На практике получили распро-

странение алгебраические (феноменологические) и дифференциальные модели турбулентности*.

Алгебраические модели турбулентности

Эти модели не содержат дифференциальных уравнений для характеристик турбулентности, а основаны на приближенных эмпирических соотношениях и предположениях эвристического характера. Они пригодны для простых течений, поэтому их часто используют в инженерной практике.

Для вычисления турбулентного касательного напряжения Ж. Буссинеск предложил соотношение, которое по форме аналогично уравнению, выражающему закон трения Ньютона:

$$\tau_T = \rho \nu_T \frac{\partial V_{ср\ x}}{\partial y}, \quad (2.47)$$

где ν_T — кинематическая турбулентная вязкость.

При турбулентном перемешивании ν_T не является постоянной величиной и зависит от координат точек пространства и распределения скорости. Чтобы воспользоваться формулой (2.47), необходимо экспериментальным путем определить ν_T .

Одна из первых практически важных математических моделей, связывающих турбулентную вязкость ν_T с параметрами потока, была предложена Л. Прандтлем в 1925 г. и известна как модель «пути смешения». Доказано, что она довольно хорошо воспроизводит тонкие вязкие слои. Рассматривая осредненные сдвиговые течения без градиента давления, Прандтль постулировал, что характерный масштаб пульсаций скорости $V_{ср}$ равен градиенту осредненной скорости, умноженной на характерный масштаб длины l_m , которую он назвал путем смешения.

Возьмем два слоя жидкости, расположенных один от другого на расстоянии l_m (среднее расстояние пульсаций). Истинные скорости в этом случае

$$V_x = V_{ср\ x} + V'_x; \quad V_y = V'_y.$$

Вследствие пульсаций составляющей скорости V'_y имеет место турбулентное перемешивание (перенос количества движения и теплоты). Действительно, через единичную площадку, перпендикуляр-

* Подробнее об этом см.: Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1989.

ную оси Oy , в единицу времени переносится масса жидкости $\rho V'_y$. В первом слое ее количество движения было $\rho V'_y V_{ср\ x}$, во втором — стало $\rho V'_y (V_{ср\ x} + l_m \partial V_{ср\ x} / \partial y)$. Таким образом, вследствие наличия пульсаций изменение количества движения обуславливает напряжение турбулентного трения:

$$\tau_T = \rho V'_y l_m \frac{\partial V_{ср\ x}}{\partial y}.$$

Путь смешения l_m можно определить эмпирически из условия

$$V'_x = l_m \frac{\partial V_{ср\ x}}{\partial y}.$$

Предполагая, что $V'_x \approx V'_y$, получаем

$$\tau_T = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial V_{ср\ x}}{\partial y} \right)^2,$$

или

$$v_T = l_m^2 \left| \frac{\partial V_{ср\ x}}{\partial y} \right|.$$

При рассмотрении течения в пограничном слое полагают, что путь смешения пропорционален расстоянию y от стенки:

$$l_m = k_1 y,$$

где k_1 — универсальный коэффициент пропорциональности, не зависящий от числа Рейнольдса, $k_1 \approx 0,39$. Объясняется это тем, что пульсации больше там, где выше скорость, т. е. у стенки, где скорость близка к нулю, пульсаций нет.

Для свободных слоев со сдвигом путь l_m поперек слоя можно полагать постоянным и пропорциональным толщине слоя. Коэффициент пропорциональности зависит от типа течения.

В свободных турбулентных струйных течениях путь смешения l_m поперек струи постоянен и пропорционален ширине b зоны смешения:

$$l_m(x) = k_2 b(x),$$

где k_2 — некоторый коэффициент.

Несмотря на то что физическая модель, на которой основывается указанная гипотеза, является приближенной и неточной (не учитывают предысторию потока, механизмы конвективного и диффузионного переноса пульсаций), ее широко используют при решении многих технических задач.

Для расчета напряжения трения в течениях со свободной турбулентностью Прандтлем была установлена полуэмпирическая зависимость, названная впоследствии новой формулой Прандтля. Исходными являлись следующие условия: производная $\partial V_{срх}/\partial y$ пропорциональна отношению $(V_{срхmax} - V_{срхmin})/b$ ($V_{срхmax}, V_{срхmin}$ — скорости потока на границах зоны смешения), l_m пропорциональна толщине слоя смешения b и турбулентная вязкость по ширине поперечного слоя постоянна, т. е. $\nu_T = k_3 b (V_{срхmax} - V_{срхmin})$, где k_3 — эмпирическая постоянная, определяемая опытным путем. В этом случае напряжение трения вычисляют по формуле

$$\tau_T = \rho k_3 b (V_{срхmax} - V_{срхmin}) \frac{\partial V_{срх}}{\partial y}. \quad (2.48)$$

В связи со сложной структурой течения в пограничном пристеночном слое представление турбулентной вязкости в виде одной обобщенной зависимости соответствует приближенному подходу к решению задачи. Поэтому для более точного расчета таких течений была предложена двухслойная модель, названная моделью Себеси — Смита, в которой кинематическая турбулентная вязкость ν_T задается различными выражениями на внутреннем (ν_{Ti}) и внешнем (ν_{T0}) слоях:

$$\nu_T = \begin{cases} \nu_{Ti} & \text{при } y \leq y_{min}; \\ \nu_{T0} & \text{при } y > y_{min}. \end{cases}$$

Формулы для вычисления ν_{Ti} и ν_{T0} имеют вид

$$\nu_{Ti} = l_m^2 \left[\left(\frac{\partial V_{срх}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{срy}}{\partial x} \right)^2 \right]^{0,5}; \quad \nu_{T0} = \alpha V_\delta \delta^* \gamma,$$

где $l_m = k_4 y (1 - e^{-y^+/A^+})$; $k_4 = 0,40$; $y^+ = (u_T y)/\nu$ — безразмерная

координата y (расстояние от стенки); $A^+ = 26 \left(1 + y \frac{dp/dx}{\rho u_T^2} \right)^{0,5}$;

$u_T = \sqrt{\tau_{ст}/\rho}$; $\tau_{ст}$ — напряжение трения на стенке; $\alpha = 0,0168$; V_δ — скорость потока на внешней границе пограничного слоя; δ^* — толщина вытеснения; $\gamma = \left[1 + 5,5(y/\delta)^6 \right]^{-1}$ — коэффициент перемежаемости (функция Клебанава); δ — толщина пограничного слоя.

Приравняв выражения для v_{Ti} и v_{T0} , получаем

$$y_{\min}^+ \approx \frac{\alpha}{k_4} Re_{\delta^*} \approx 0,042 Re_{\delta^*}.$$

Приведенные зависимости справедливы для двумерных течений.

Модели турбулентности дифференциального типа

В теории пути смешения Прандтля турбулентная вязкость практически не зависит от предыстории развития течения, поэтому ее трудно применить для ряда практических случаев. Академик А.Н. Колмогоров, а затем независимо от него Л. Прандтль предложили теорию турбулентных течений, в которой принимается, что кинематическая турбулентная вязкость зависит от кинетической энергии турбулентных пульсаций, т. е.

$$\nu_T = c'_\mu \sqrt{k} \cdot L,$$

где c'_μ — эмпирический коэффициент, зависящий от местного турбулентного числа $Re_T = \sqrt{k} \cdot L/\nu$ (при $Re_T \rightarrow \infty$ значение $c'_\mu = \text{const}$); $k = (V_x'^2 + V_y'^2 + V_z'^2)/2$ — кинетическая энергия турбулентных пульсаций; L — масштаб турбулентности.

Ввиду того что пульсационное турбулентное течение описывается уравнениями Навье — Стокса, используя их, можно получить дифференциальное уравнение для переноса энергии k турбулентных пульсаций. Линейный масштаб L в слоях со сдвигом можно определить при помощи простых эмпирических соотношений, аналогичных, например, выражениям для пути смешения l_m . Такая однопараметрическая модель позволяет учесть конвективный перенос энергии турбулентных пульсаций, ее возникновение вследствие взаимодействия вязкого течения с высокоэнергетическим основным потоком и диссипацию в результате кинематической молекулярной вязкости.

В дальнейшем это направление усиленно развивалось российскими (советскими) и зарубежными учеными. В настоящее время наибольшее распространение получила предложенная В. Лаундером двухпараметрическая $(k-\epsilon)$ -модель и ее модификации. В соответствии с теорией размерности турбулентная вязкость должна быть пропорциональна произведению характерной скорости и характерного масштаба. В качестве характерной скорости выбрана величина $k^{1/2}$, а характерный масштаб L определен через скорость диссипации ϵ энергии турбулентности, которая пропорциональна $k^{3/2}/L$. Тогда можно записать

$$v_T = \frac{c_\mu k^2}{\varepsilon}; \quad \tau_T = \frac{c_\mu k^2}{\varepsilon} \frac{\partial V_x}{\partial y} \rho,$$

где c_μ — эмпирический коэффициент пропорциональности ($c_\mu \approx 0,09$).

Предполагая, что турбулентное течение описывается уравнениями Навье – Стокса, уравнения движения (переноса) для k и ε можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + V_{cpj} \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tau_{ij} \frac{\partial V_{cpi}}{\partial x_j} - \varepsilon; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V_{cpj} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial V_{cpi}}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{aligned}$$

где i, j — индексы, определяющие направление осей декартовой системы координат, $i, j = x, y, z$; $\sigma_k = 1$; $\tau_{ij} = \mu(\partial V_i / \partial x_j + \partial V_j / \partial x_i)$; $\sigma_\varepsilon = 1,3$; $c_{\varepsilon 1} = 1,44$; $c_{\varepsilon 2} = 1,92$.

К числу двухпараметрических диссипативных моделей турбулентности относится также $(k-\omega)$ -модель Саффмена – Вилкокса. Она является более точной для расчета сложных типов течений, поскольку более достоверно отражает их характерные элементы (пограничные слои, следы, струи). Основные уравнения, определяющие эту модель для двумерного течения, следующие:

кинематическая турбулентная (вихревая) вязкость

$$v_T = k/\omega;$$

кинетическая энергия турбулентных пульсаций

$$\frac{\partial k}{\partial t} + V_{cpj} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tau_{ij} \frac{\partial V_{cpi}}{\partial x_j} - \beta^* k \omega;$$

удельная скорость диссипации энергии турбулентности

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + V_{cpj} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma v_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial V_{cpi}}{\partial x_j} - \beta \omega^2,$$

где $\beta^* = \beta_0^* f_{\beta^*}$; $\beta_0^* = 0,09$; $f_{\beta^*} = 1$ при $\chi_k \leq 0$ и $f_{\beta^*} = \frac{1 + 680\chi_k^2}{1 + 400\chi_k^2}$ при

$\chi_k > 0$; $\chi_k = \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$; $\sigma = 0,5$; $\lambda = 13/25$; $\beta = \beta_\bullet f_\beta$; $\beta_\bullet = 9/125$;

$f_\beta = 1$ (двухмерное течение).

Следует отметить, что $(k-\varepsilon)$ -модель турбулентности хорошо описывает свойства свободных сдвиговых течений (слои смешения), а $(k-\omega)$ -модель наиболее достоверна при расчете пристеночных течений. Поэтому при аэродинамических расчетах применяют так называемую модель Ментера, которая представляет собой суперпозицию этих двух моделей.

2.8. Аэродинамическое подобие

Аэродинамические характеристики ЛА или их отдельных элементов можно определить как теоретическим путем, так и при помощи экспериментальных исследований. Теоретические методы основаны на использовании системы уравнений газовой динамики применительно к обтекаемому телу с заданной формой, имеющему, вообще говоря, произвольные абсолютные размеры.

При проведении экспериментов, предназначенных для получения аэродинамических параметров, не всегда удастся применить натурное тело из-за его больших размеров, поэтому приходится пользоваться моделью изделия с меньшими размерами. В связи с этим возникает вопрос о возможности переноса полученных экспериментальных результатов на натурные тела. Ответ на этот вопрос дает теория размерности и подобия, устанавливающая условия, которые должны соблюдаться в опытах с моделями, и выделяющая характерные параметры, которые определяют основные эффекты и режимы обтекания.

Предположим, что в аэродинамической трубе для модели путем измерений получена продольная сила $X_M = c_{xM} q_M S_M$. Выясним, когда можно использовать полученный результат для определения аналогичной силы натурального тела в соответствии с формулой $X_H = c_{xH} q_H S_H$, в которой коэффициент c_{xH} для этого тела является неизвестной величиной, а скоростной напор q_H и характерная площадь S_H заданы. Разделив почленно выражения для X_H и X_M , получим

$$X_H = X_M \frac{c_{xH}}{c_{xM}} \frac{q_H S_H}{q_M S_M}.$$

Из этой формулы следует, что расчет натурной силы X_H по экспериментальному значению X_M можно осуществить лишь при $c_{xM} = c_{xH}$, поскольку произведения $q_M S_M$ и $q_H S_H$ однозначно определены заданными скоростными напорами и характерными площадями.

В этом случае оба потока (модельный и натурный) будут обладать свойством динамического подобия, которое в данном случае заключается в том, что по заданной силовой характеристике X_m одного потока простым пересчетом, аналогичным переходу от одной системы единиц измерения к другой, получают характеристику X_n другого потока.

Требования, при выполнении которых обеспечивается в рассматриваемом случае равенство $c_{xm} = c_{xn}$, а в общем случае и других безразмерных аэродинамических коэффициентов, устанавливают с использованием теории размерности и подобия, исходя либо из физической природы изучаемого явления, либо из соответствующих дифференциальных уравнений аэродинамики.

Рассматривая выражение для аэродинамического коэффициента

$$c_x = \iint_S (\bar{p} \cos nx + c_{fx} \cos tx) \frac{dS}{S_n},$$

можно заметить, что его значение зависит от безразмерных геометрических параметров, а также от таких безразмерных величин, как коэффициенты давления и местного трения. Из этого следует, что аэродинамические коэффициенты для натуре и экспериментального объекта с различными абсолютными размерами сохраняются постоянными, если эти тела геометрически подобны и обеспечивается одинаковое распределение по их поверхности коэффициентов $\bar{p}$ и c_{fx} .

В общем случае обтекания, характеризующимся влиянием различных физических и термодинамических параметров на аэродинамические свойства ЛА, критерии динамического подобия будут более сложными и разнообразными. Для их установления можно применить метод теории размерности и подобия, основанный на использовании уравнения движения вязкого теплопроводного газа.

Получим эти уравнения в безразмерной форме, т. е. в таком виде, чтобы входящие в них параметры (скорость, давление, температура и др.) были отнесены к некоторым характерным величинам, которые являются для данного течения постоянными и определяют его масштаб. В качестве последних выберем параметры набегающего потока: скорость V_∞ , давление p_∞ , плотность ρ_∞ , температуру T_∞ , динамическую (кинематическую) вязкость μ_∞ (ν_∞) и др. При этом следует помнить, что из трех параметров p_∞ , ρ_∞ , T_∞ произвольно можно задавать два, а третий будет определен по этим двум с помощью уравнения состояния. Масштабом времени, характеризующим неустановившийся режим обтекания, будет величина t_∞ , а масштабом

длины — некоторый характерный линейный размер L (например, длина обтекаемого тела); масштабом ускорения массовых сил может быть выбрано ускорение силы тяжести g . Запишем безразмерные параметры для длины и времени:

$$\bar{x} = x/L; \quad \bar{y} = y/L; \quad \bar{z} = z/L; \quad \bar{t} = t/t_\infty,$$

а также для скорости, давления, плотности, вязкости и массовых сил:

$$\bar{V}_x = V_x/V_\infty; \quad \bar{V}_y = V_y/V_\infty; \quad \bar{V}_z = V_z/V_\infty; \quad \bar{p} = p/p_\infty; \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_\infty;$$

$$\bar{\mu} = \mu/\mu_\infty; \quad \bar{\nu} = \nu/\nu_\infty; \quad \bar{F}_x = F_x/g; \quad \bar{F}_y = F_y/g; \quad \bar{F}_z = F_z/g.$$

Введем безразмерные величины в уравнение движения и неразрывности. При этом для преобразования используем только первое уравнение системы, так как два других уравнения записываются аналогично. Указанные уравнения в безразмерных коэффициентах будут иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{V_\infty}{t_\infty} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{t}} + \frac{V_\infty^2}{L} \left(\bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{z}} \right) = g \bar{F}_x - \\ & - \frac{p_\infty}{\rho_\infty L} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu_\infty V_\infty}{L^2} \left\{ \bar{\nu} \Delta \bar{V}_x + \frac{\bar{\nu}}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \operatorname{div} \bar{V} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}} \left(2 \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{V} \right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \bar{x}} \right) \right] \right\}; \\ & \frac{\rho_\infty}{t_\infty} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho_\infty V_\infty}{L} \left[\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_x)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_y)}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_z)}{\partial \bar{z}} \right] = 0, \end{aligned}$$

где $\operatorname{div} \bar{V} = \partial \bar{V}_x / \partial \bar{x} + \partial \bar{V}_y / \partial \bar{y} + \partial \bar{V}_z / \partial \bar{z}$.

Из масштабных величин, входящих в эти уравнения, можно составить ряд безразмерных чисел, характеризующих подобие газовых течений. Эти числа, называемые по имени ученых, которые первыми получили их, записываются в следующей форме:

$$\operatorname{Sh} = V_\infty t_\infty / L - \text{число Струхаля}, \quad \operatorname{Fr} = V_\infty^2 / (gL) - \text{число Фруда},$$

$$\operatorname{M} = V_\infty / a_\infty - \text{число Маха},$$

$$\operatorname{Re} = V_\infty \rho_\infty L / \mu_\infty = V_\infty L / \nu_\infty - \text{число Рейнольдса}.$$

Здесь индекс « ∞ » при M и Re опущен; $a_\infty = \sqrt{k_\infty RT_\infty}$ — скорость звука в невозмущенном потоке; k_∞ , T_∞ — соответственно показатель адиабаты и температура газа в невозмущенном потоке.

Введя эти числа в уравнения движения и неразрывности, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{Sh} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{Fr} \bar{F}_x - \frac{1}{k_\infty M^2} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \\ + \frac{1}{Re} \left\{ \bar{v} \Delta \bar{V}_x + \frac{\bar{v}}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \text{div} \bar{V} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}} \left(2 \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} - \frac{2}{3} \text{div} \bar{V} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \bar{x}} \right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_x)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_y)}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_z)}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.50)$$

Аналогичным образом преобразуем уравнение энергии (2.31), опустив член, учитывающий излучение. Используя соотношение $i = e + p/\rho = c_p T$, для обусловленного теплопроводностью теплового потока $q = -\lambda \text{grad} T$, вводя безразмерные параметры $\bar{T} = T/T_\infty$, $\bar{c}_p = c_p/c_{p\infty}$, $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_\infty$ (где $c_{p\infty}$, λ_∞ — соответственно удельная теплоемкость и теплопроводность газа в невозмущенном потоке) и учитывая, что

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty} = RT_\infty = c_{p\infty} \left(1 - \frac{1}{k_\infty} \right) T_\infty,$$

получаем

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{c}_p \left(\frac{1}{Sh} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{Sh} \frac{k_\infty - 1}{k_\infty} \frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} + \\ + \frac{M^2 (k_\infty - 1)}{Re} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \bar{\mu} (\text{div} \bar{V})^2 + \right. \\ \left. + \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\} + \frac{1}{Re Pr} \text{div} (\bar{\lambda} \text{grad} \bar{T}). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Здесь Pr — безразмерное число Прандтля, при помощи которого сравнивают относительные величины воздействия вязкости и теплопроводности, т. е. оценивают соотношение между тепловым потоком, вызванным трением, и молекулярным переносом теплоты,

$$Pr = \mu_{\infty} c_{p\infty} / \lambda_{\infty}. \quad (2.52)$$

В дополнение к системе уравнений сохранения (2.49)–(2.51) преобразуем к безразмерному виду несколько соотношений:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{\bar{\rho} \bar{T}}{\bar{\mu}_{\text{ср}}}; \\ \bar{\mu}_{\text{ср}} &= \frac{f_1(p_{\infty} \bar{p}, T_{\infty} \bar{T})}{\mu_{\text{ср}\infty}}; \\ \bar{\lambda} &= \frac{f_2(p_{\infty} \bar{p}, T_{\infty} \bar{T})}{\lambda_{\infty}}; \\ \bar{\mu} &= \frac{f_3(p_{\infty} \bar{p}, T_{\infty} \bar{T})}{\mu_{\infty}}; \\ \bar{c}_p &= \frac{f_4(p_{\infty} \bar{p}, T_{\infty} \bar{T})}{c_{p\infty}}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Представим теперь, что мы исследуем два потока, обтекающие геометрически подобные поверхности. У таких поверхностей безразмерные координаты сходственных точек одинаковы, что является необходимым условием аэродинамического подобия течений. Для выполнения достаточного условия такого подобия должно быть обеспечено равенство безразмерных значений газодинамических параметров (скорости, давления, плотности и др.) в сходственных точках. Поскольку безразмерные параметры одновременно являются решениями системы уравнений (2.49)–(2.51) и (2.53), то, очевидно, указанное равенство будет соблюдено при условии, если системы безразмерных уравнений, а также безразмерные граничные и начальные условия для каждого потока одинаковы. Системы безразмерных уравнений для двух потоков будут одинаковы, если

1) равны критерии подобия:

$$Fr_M = Fr_H, \quad Re_M = Re_H, \quad M_M = M_H, \quad Sh_M = Sh_H; \quad (2.54)$$

2) выполняется равенство чисел Прандтля $Pr_M = Pr_H$, т. е.

$$(c_{p\infty}\mu_{\infty}/\lambda_{\infty})_M = (c_{p\infty}\mu_{\infty}/\lambda_{\infty})_H, \quad (2.55)$$

а также равенство отношений теплоемкостей газов для двух течений:

$$k_{\infty M} = k_{\infty H}; \quad (2.56)$$

3) каждое уравнение (2.53) (кроме первого) определяет зависимость безразмерных величин $\bar{\mu}_{cp}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ или $\bar{c}_p$ от относительных $\bar{p}$ и $\bar{T}$, а также параметров (2.54)–(2.56). Однако в случае диссоциированного газа такие зависимости не выполняются, поскольку нельзя выделить безразмерные критерии вида (2.54)–(2.56), а значит, для натурного и модельного потоков не удастся обеспечить динамическое подобие.

Можно указать два частных случая, когда это подобие обеспечивается. Во-первых, при течении недиссоциированного газа, для которого средний молекулярный вес остается постоянным ($\mu_{cp M} = \mu_{cp H}$), а теплоемкость, теплопроводность и вязкость изменяются в зависимости от температуры по степенному закону. В этом случае уравнения (2.53) для $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ и $\bar{c}_p$ заменяются соответствующими зависимостями только от безразмерной температуры $\bar{T} = T/T_{\infty}$. Во-вторых, при течении газа с небольшими скоростями, когда значения λ, μ и c_p не зависят от температуры и будут соответственно одинаковыми для натурного и модельного потоков. Для этого случая система уравнений включает безразмерные уравнения Навье – Стокса, неразрывности, энергии, а также уравнение состояния.

Граничные условия, накладываемые на решения безразмерных уравнений, могут давать дополнительные критерии подобия. Это не относится к условию безотрывного обтекания, которое не вносит новых критериев подобия.

По известному распределению давления можно определить для данного момента времени безразмерный коэффициент аэродинамической силы:

$$c_R = R/(q_{\infty}S) = \Phi(Fr, Re, M, Sh, Pr, k_{\infty}, \bar{T}_{ст}). \quad (2.57)$$

Критерии подобия, от которых зависит безразмерный аэродинамический коэффициент, имеют определенный физический смысл и характеризуют реальные факторы, влияющие на аэродинамическую силу.

Число Фруда является критерием подобия, учитывающим влияние на сопротивление массовой силы (силы тяжести). Из уравне-

ния движения, записанного в безразмерной форме, следует, что число Fr равно отношению величины V_∞^2/L , обусловленной влиянием инерционных сил, к масштабу g массовых сил. Равенство чисел Фруда для натуры и геометрически подобной модели означает, что у них будут одинаковыми коэффициенты аэродинамической силы, обусловленные влиянием силы тяжести жидкости. Этот критерий подобия не имеет существенного значения при исследовании газовых течений, поскольку влияние силы тяжести газа на движение пренебрежимо мало. Однако значение этого критерия может оказаться существенным в гидродинамике.

При движении тел в реальной жидкости аэродинамические силы зависят от вязкости. Сила вязкости характеризуется числом Рейнольдса. Если соблюдается равенство чисел Рейнольдса двух геометрически подобных потоков, то, в частности, будут равны коэффициенты сопротивления трения для натурального и модельного тел.

Критерий подобия по числу Маха получается из отношения величины V_∞^2/L к параметру $p_\infty/(\rho_\infty L)$, который учитывает влияние сил давления, зависящих от сжимаемости газа. Частичное подобие двух потоков сжимаемого газа, обтекающих геометрически подобные тела, будет соблюдено при равенстве чисел Маха.

При исследовании неустановившегося обтекания существенное значение имеет подобие по числу Струхала, которое получается из сопоставления инерционных сил и сил, вызванных влиянием нестационарности, т. е. из отношения величин V_∞^2/L и V_∞/t_∞ . Два нестационарных течения, обтекающих натурное тело и модельный объект, будут иметь частичное аэродинамическое подобие при одинаковых значениях числа Струхала.

Критерии подобия по числу Прандтля и отношению теплоемкостей обусловлены определенными требованиями к физическим свойствам газов натурального и модельного течений. Газы могут быть различными, но их физические характеристики должны быть такими, чтобы выполнялись равенства $Pr_M = Pr_H$ и $k_{\infty M} = k_{\infty H}$. Число Прандтля зависит от динамической вязкости и теплопроводности. Первая отражает свойства газа, от которых зависит молекулярный перенос количества движения, а вторая характеризует интенсивность молекулярного теплопереноса. Таким образом, критерий Прандтля Pr определяет меру преобразования энергии молекулярного переноса в теплоту. Для газа $Pr < 1$.

Безразмерный коэффициент аэродинамической силы или теплопередачи является сложной функцией ряда критериев подобия,

каждый из которых отражает влияние какого-то определенного физического процесса. Полное подобие натурного и модельного потоков может быть выполнено лишь при соблюдении равенства всех критериев подобия. На практике, однако, это обеспечить не удастся, поскольку некоторые из этих критериев являются противоречивыми.

Рассмотрим, например, числа Рейнольдса, Фруда и Маха. Для выполнения подобия по силам трения необходимо, чтобы $V_n L_n / \nu_n = V_m L_m / \nu_m$. Если принять, что для натурного и модельного потоков $\nu_n = \nu_m$, то скорость модельного потока $V_m = V_n L_n / L_m$, т. е. больше скорости натурного потока во столько, во сколько модель обтекаемого тела меньше натурой.

Для обеспечения подобия по силам тяжести необходимо соблюсти равенство чисел Фруда, т. е. $V_n^2 / (L_n g_n) = V_m^2 / (L_m g_m)$, откуда следует, что если опыты проводили при одинаковых значениях g , то скорость модельного потока $V_m = V_n \sqrt{L_m / L_n}$. Следовательно, в данном случае скорость для модели должна быть не больше, а меньше, чем для натурой.

Наконец, при соблюдении равенства чисел Маха будем иметь

$$V_n / a_n = V_m / a_m.$$

Приняв для упрощения $a_m = a_n$, получаем условие равенства скоростей модельного и натурного потоков.

Естественно, выполнить одновременно это условие для скорости нельзя, а значит, можно говорить лишь о неполном подобии. Следует, однако, отметить, что практически нет необходимости удовлетворять всем критериям подобия, поскольку влияние их в том или ином конкретном случае движения неодинаково. Например, более существенным на обтекание тел газом будет влияние сил трения и давления, чем силы тяжести, т. е. большее значение имеют критерии Re и M , нежели число Fr . В связи с этим в подобных случаях число Fr как критерий подобия не учитывают. Если одновременно невелики скорости движения, то пренебрежимо мало влияние сил, обусловленных сжимаемостью газа, а значит, можно не учитывать критерий подобия по числу Маха, полагая, что аэродинамический коэффициент зависит от числа Рейнольдса.

Аэродинамическая сила, момент и тепловой поток от газа к поверхности являются результатом воздействия на тело движущегося газа, в котором одновременно протекают самые различные процессы: трение, сжатие (или расширение), нагрев, изменение физичес-

ких свойств и др. Поэтому надо стремиться к удовлетворению максимального количества критериев подобия. Например, целесообразно, чтобы одновременно сохранялись равенства чисел Рейнольдса и Маха модельного и натурного потоков, т. е. $Re_m = Re_n$ и $M_m = M_n$. Это особенно важно при исследовании аэродинамических сил, которые для тел с большой поверхностью могут слагаться из равноценных составляющих, зависящих от трения и давления. Выполнение указанного условия может быть обеспечено при проведении экспериментов в аэродинамических трубах переменной плотности. Если испытания проводят в потоке газа, скорость звука в котором такая же, как в натурном потоке ($a_n = a_m$), то из условия равенства чисел Маха следует, что $V_n = V_m$. Имея это в виду и используя равенство $Re_m = Re_n$ или $V_n \rho_n L_n / \mu_n = V_m \rho_m L_m / \mu_m$, получаем условие $L_n \rho_n / \mu_n = L_n \rho_m / \mu_m$. Принимая $\mu_n = \mu_m$, находим, что плотность газа в потоке аэродинамической трубы должна быть $\rho_n = \rho_m (L_m / L_n)$. Полагая, что температуры натурного и модельного потоков одинаковые ($T_n = T_m$), и привлекая уравнение состояния, получаем условие $p_n = p_m (L_m / L_n)$. Таким образом, для одновременного удовлетворения подобия по силам трения и силам давления с учетом сжимаемости, т. е. для соблюдения равенств $Re_m = Re_n$ и $M_m = M_n$, необходимо, чтобы статическое давление в потоке газа, создаваемом аэродинамической трубой, было больше давления в натурном потоке во столько раз, во сколько модель меньше натурной. Конструкция аэродинамической трубы позволяет в известных пределах регулировать статическое давление в модельном потоке газа в зависимости от размеров обтекаемой модели.

С известным приближением при определении силового взаимодействия влиянием теплопередачи можно пренебречь. При этом аэродинамические коэффициенты будут зависеть от чисел Re , M и Sh . Если к тому же испытания проводить в газовой среде, для которой $k_{\infty n} = k_{\infty m}$, то

$$c_R = f(Re, M, Sh),$$

а для установившегося обтекания

$$c_R = f(Re, M).$$

3. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ И ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОГО ГАЗА

Основной задачей кинематики газа (жидкости) является определение скорости движущейся среды. При исследовании течений можно не учитывать вращение среды в связи с пренебрежимо малыми угловыми скоростями частиц. Такое движение называется безвихревым и описывается потенциалом скорости. Для некоторых видов вихревого потока существует функция тока, определяющая его кинематические характеристики.

В главе рассмотрена кинематика несжимаемых дозвуковых потоков, установлены закономерности для потенциальных и вихревых течений. Доказаны фундаментальные теоремы Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина. Получены формулы для скоростей, индуцированных вихрями.

3.1. Основные понятия

Циркуляция скорости

В аэрогидромеханике важную роль играет *циркуляция скорости*. Выделим в движущейся сплошной среде некоторый фиксированный замкнутый контур l (рис. 3.1), выберем на нем точку M , в которой скорость представляется вектором $\vec{V}$, и запишем произведение $V \cos \alpha dl = V \cos \alpha dl$. Поскольку $V \cos \alpha = V_l$, где V_l — проекция вектора скорости на направление касательной к контуру l в точке M , можно записать

$$V \cos \alpha dl = V_l dl = \vec{V} d\vec{l}.$$

Возьмем от этого выражения криволинейный интеграл по дуге AB :

$$\int_{AB} \vec{V} d\vec{l} = \Gamma.$$

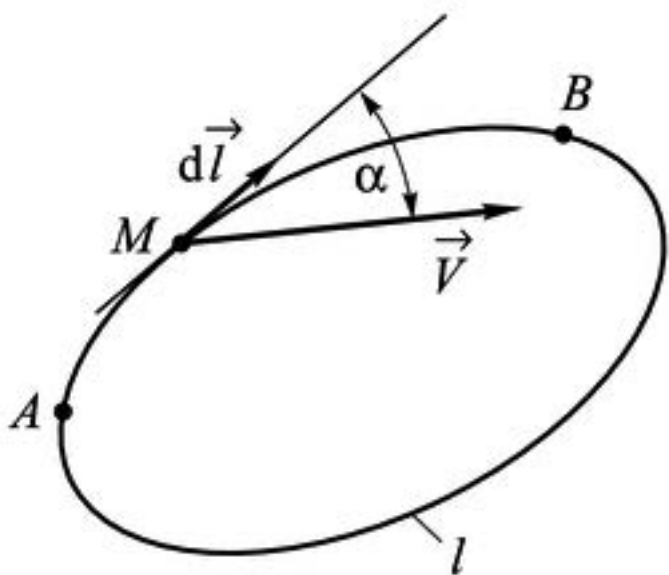


Рис. 3.1. Определение циркуляции скорости

Полученное выражение характеризует циркуляцию скорости по дуге AB . Обычно ее вычисляют по всему замкнутому контуру l , т. е.

$$\Gamma = \int_l \vec{V} d\vec{l}.$$

Используя известную формулу скалярного произведения двух векторов $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, и учитывая, что в декартовой системе координат $d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, находим

$$\Gamma_l = \oint (V_x dx + V_y dy + V_z dz).$$

При вычислении Γ_l направление интегрирования считается положительным, если область, ограниченная контуром l , остается слева, и наоборот.

В случае потенциального течения, когда $\vec{V} = \text{grad } \varphi$,

$$\Gamma = \int_{AB} \text{grad } \varphi d\vec{l} = \int_{AB} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = \int_{AB} d\varphi = \varphi_B - \varphi_A,$$

т. е. циркуляция скорости не зависит от формы дуги интегрирования AB , а определяется лишь значениями потенциала скорости на ее концах. Если контур замкнутый, а потенциал скорости — однозначная функция координат, то $\Gamma_l = 0$. Однако если потенциал скорости — неоднозначная функция координат, то $\Gamma_l \neq 0$.

Плоское потенциальное движение идеальной среды

Движение называется *плоским*, или *плоскопараллельным*, если все частицы, лежащие на одном и том же перпендикуляре к некоторой неподвижной плоскости, движутся параллельно этой плоскости. Параметры такого движения зависят только от двух пространственных декартовых координат.

В случае плоского несжимаемого установившегося течения функция тока $\psi(x, y)$, удовлетворяющая уравнению неразрывности (2.18), связана с проекциями скорости следующими соотношениями:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.1)$$

Отметим основные свойства функции тока $\psi(x, y)$. Подставив (3.1) в уравнение линии тока (2.4), записанное для плоского течения, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0.$$

Отсюда следует, что вдоль линии тока $\psi = \text{const}$, поэтому функцию $\psi(x, y)$ называют *функцией тока*, а выражение $\psi = \text{const}$ — уравнением *семейства линий тока*.

Приравняв потенциал скорости $\phi(x, y)$ постоянной величине: $\phi(x, y) = \text{const}$, получаем семейство линий равного потенциала, т. е. эквипотенциальных линий.

При условии, что $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$, с учетом соотношений (3.1) имеем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\omega_z,$$

откуда в случае потенциального движения можно записать

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно, функция тока при потенциальном движении удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической.

Выясним физический смысл функции тока $\psi(x, y)$. Рассмотрим в плоском потенциальном потоке бесконечно малый элемент dl на кривой AB (рис. 3.2), содержащий точку M , в которой скорость потока равна $\vec{V}$. Элементарный объемный расход среды через этот элемент $dQ = V_n dl$, где V_n — проекция вектора скорости на нормаль к дуге в точке M . Известно,

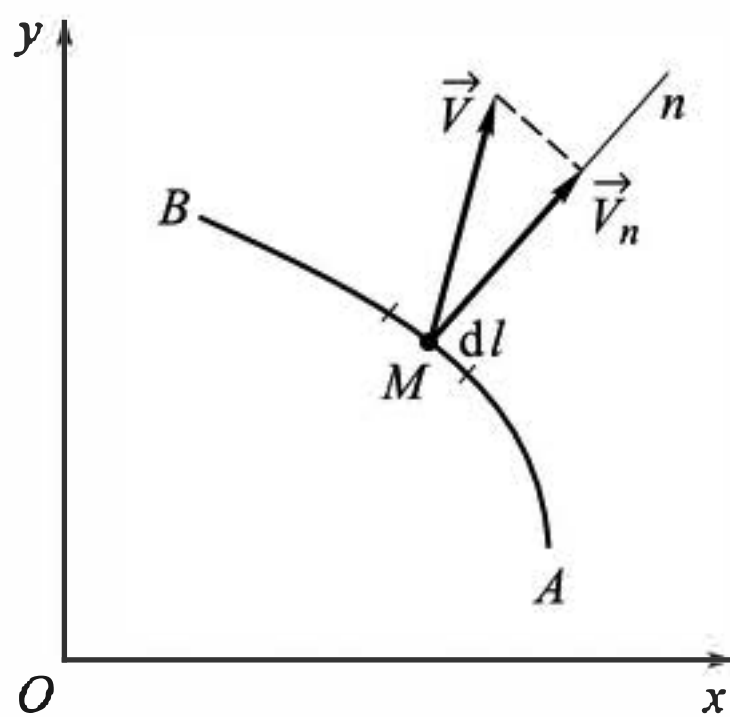


Рис. 3.2. К определению физического смысла функции тока

что V_n может быть выражена через проекции скорости V_x , V_y на координатные оси следующим образом:

$$V_n = V_x \cos(n x) + V_y \cos(n y).$$

Тогда

$$dQ = [V_x \cos(n x) + V_y \cos(n y)] dl;$$

$$\cos(n x) = \frac{dy}{dl}; \quad \cos(n y) = -\frac{dx}{dl}.$$

Используя условие потенциальности, получаем

$$dQ = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dl} \right) dl = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi,$$

или

$$dQ = d\psi. \quad (3.2)$$

Таким образом, дифференциал функции тока равен расходу газа (жидкости) через элемент dl в единицу времени. Для определения расхода через всю кривую AB необходимо проинтегрировать выражение (3.2):

$$Q = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A, \quad (3.3)$$

т. е. расход жидкости через произвольную кривую AB равен разности значений функции тока в конечных ее точках и не зависит от формы кривой. Отсюда следует, что если сама кривая AB является участком линии тока, то расход через нее равен нулю. Из форму-

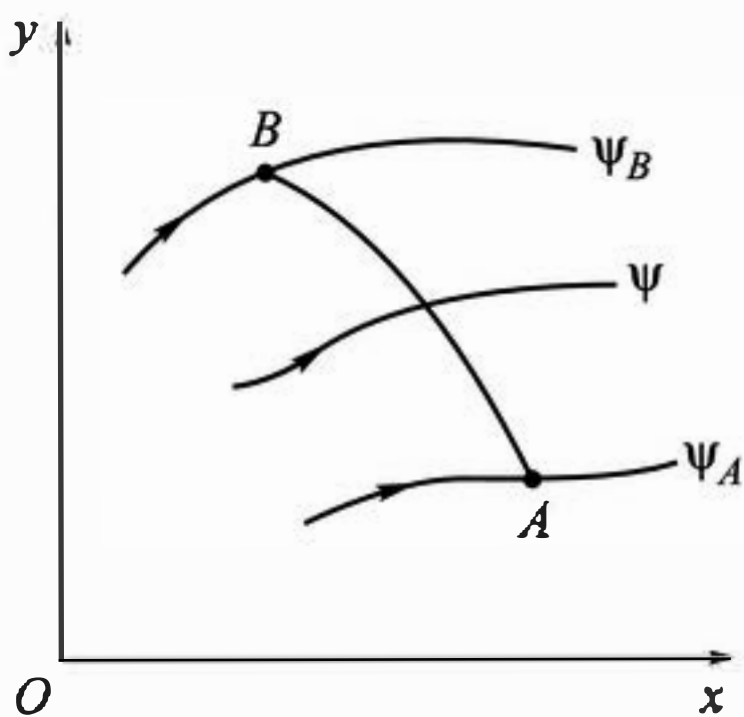


Рис. 3.3. Семейство линий тока

лы (3.3) следует, что количество жидкости, протекающей между двумя линиями тока на всем их протяжении, есть величина постоянная (рис. 3.3). Если контур замкнут, то при однозначности $\psi(x, y)$ расход $Q = 0$. Если же $\psi(x, y)$ неоднозначная функция, то расход Q через такой контур будет отличаться от нуля. Это может иметь место, если внутри контура осуществляется подвод или отвод жидкости, т. е. расположены либо источники, либо стоки.

Метод наложения потенциальных потоков

Большое практическое значение в исследовании потенциальных потоков имеет метод наложения. Пусть мы имеем два потока с потенциалами φ_1 и φ_2 , удовлетворяющими, как известно, уравнению Лапласа, т. е.

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0.$$

В таком случае потенциал скорости потока

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

также удовлетворяющий уравнению Лапласа, будет характеризовать некоторый новый поток несжимаемого газа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) = 0,$$

являющийся результатом наложения двух исходных потоков, т. е. геометрического суммирования в каждой точке пространства их скоростей. В самом деле,

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = V_{x_1} + V_{x_2};$$

$$V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = V_{y_1} + V_{y_2}.$$

Аналогично можно показать, что для нового сложного потока функция тока

$$\psi = \psi_1 + \psi_2,$$

т. е. равна алгебраической сумме функций тока исходных потоков. Таким образом, наложение двух и более потоков сводится к простому алгебраическому суммированию потенциалов и функций тока исходных потоков.

Комплексный потенциал и комплексная скорость

Установим связь между потенциалом скорости и функцией тока. Потенциал скорости и функция тока связаны с компонентами скорости потока в плоском течении соотношениями

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Соотношения (3.4) называются *условиями Коши – Римана* и показывают, что каждая кривая $\varphi = \text{const}$ пересекается под прямым углом с линией $\psi = \text{const}$, т. е. они ортогональны. Функции φ и ψ называются *сопряженными*. Условия Коши – Римана позволяют выразить одну из сопряженных функций через другую и являются условиями существования аналитической функции $W(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ (где $i = \sqrt{-1}$), определяемой соотношением

$$W(z) = \varphi + i\psi.$$

Взяв производную

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

отмечаем, что она тесно связана со скоростью течения среды:

$$\bar{V} = \frac{dW}{dz} = V_x - iV_y.$$

Выражение $\bar{V} = V_x - iV_y$ представляет собой комплексную сопряженную скорость, а сама функция $W(z)$ — комплексный потенциал, или характеристическую функцию ($V = V_x + iV_y$ — комплексная скорость). Модуль скорости определяется соотношением

$$|\bar{V}| = \left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

3.2. Примеры потенциальных потоков*

Прямалинейный равномерный поток

Предположим, что плоскопараллельный поток задан потенциалом $\varphi = ax + by$, где a, b — некоторые действительные числа. Составляющие скорости течения по координатным осям

* См. также: Аэромеханика / Е.Н. Бондарев, В.Г. Дубасов, Ю.А. Рыжов и др. М.: Машиностроение, 1993.

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a; \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = b,$$

т. е. поток движется с постоянной скоростью $V = \sqrt{a^2 + b^2}$. Найдем уравнение линий тока.

Как известно,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy,$$

откуда

$$d\psi = a dy - b dx,$$

или

$$\psi = ay - bx.$$

Линии тока представляют собой семейство параллельных прямых $\psi = ay - bx$, наклоненных к оси Ox под углом α , тангенс которого $\operatorname{tg} \alpha = V_y / V_x = b/a$ (рис. 3.4, а).

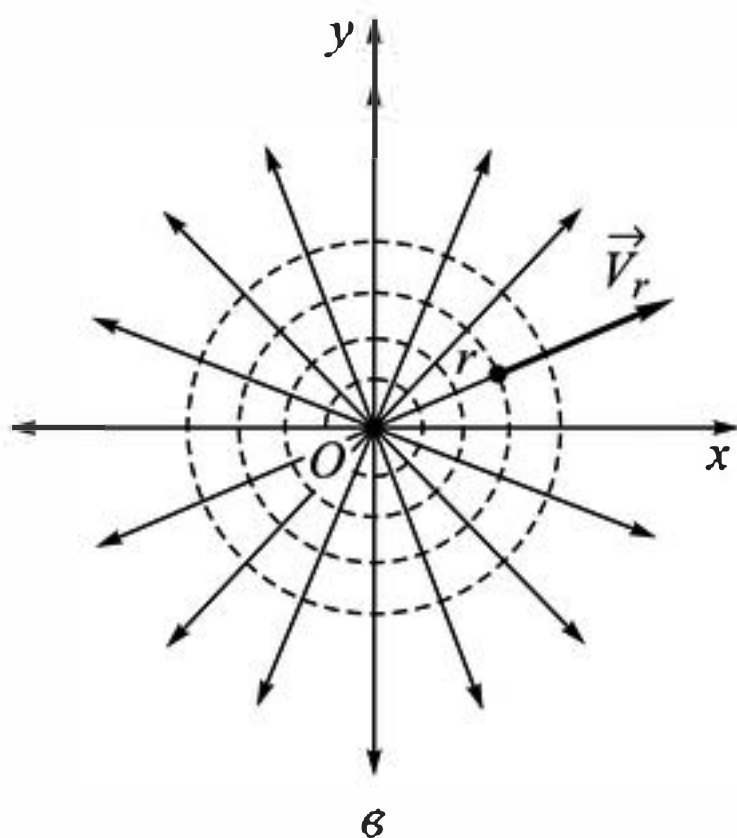
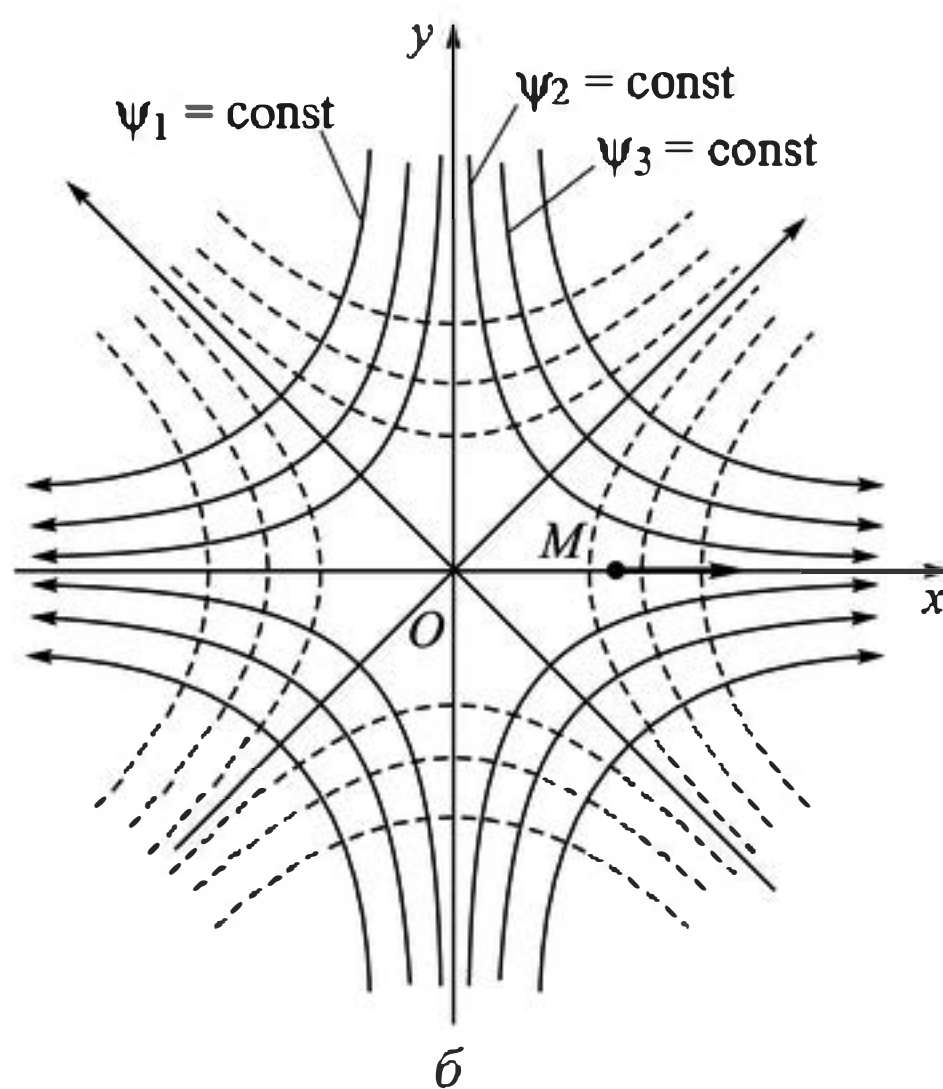
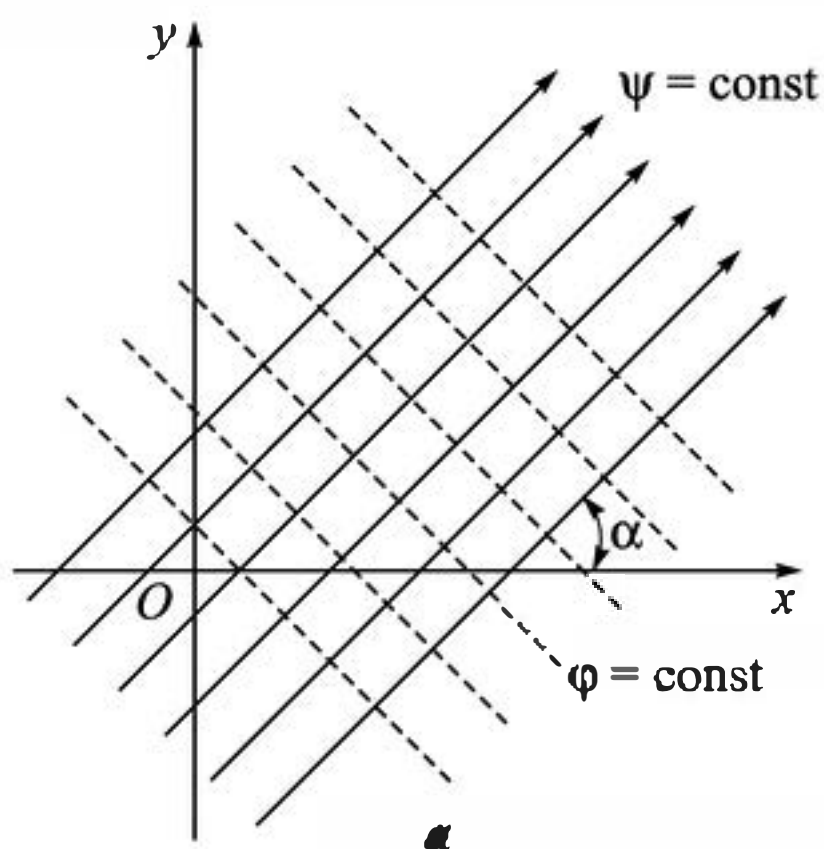


Рис. 3.4. Линии тока и эквипотенциальные линии для прямолинейного равномерного потока (а), для потока, заданного потенциалом скорости $\varphi = a(x^2 - y^2)$ (б), и при течении от источника (в)

Если поток направлен параллельно оси Ox , то функции Φ , Ψ имеют вид

$$\Phi = ax; \quad \Psi = ay,$$

при направлении потока параллельно оси Oy

$$\Phi = by; \quad \Psi = -by.$$

Если течение задано комплексным потенциалом $W(z) = az$, где a — комплексная величина, $a = a_1 - ia_2$, то можно определить характер течения, получив уравнения семейств линий тока и эквипотенциальных линий. Поскольку

$$\Phi + i\Psi = (a_1 - ia_2)(x + iy),$$

то

$$\Phi = a_1x + a_2y; \quad \Psi = -a_2x + a_1y.$$

Приравнивая выражения для Φ и Ψ к постоянным величинам, находим уравнения эквипотенциальных линий и линий тока:

$$a_1x + a_2y = C_1; \quad -a_2x + a_1y = C_2,$$

где $C_1 = \text{const}$; $C_2 = \text{const}$, т. е. уравнения семейств взаимно ортогональных прямых. Комплексная скорость

$$dW/dz = a = a_1 - ia_2.$$

Следовательно, направление течения среды будет параллельно прямым, наклоненным к оси Ox под углом α , тангенс которого $\text{tg } \alpha = a_2/a_1$, а ее скорость

$$V = |dW/dz| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Течение внутри прямого угла

Пусть потенциал скорости имеет вид $\Phi = a(x^2 - y^2)$, где a — действительное число ($a > 0$).

Покажем, что зная Φ , можно определить функцию тока Ψ , и наоборот. Согласно первому выражению (3.4),

$$\Psi = \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy + C, \quad \text{или} \quad \Psi = 2aux + C,$$

где $C = \text{const}$. Отбрасывая произвольную постоянную, получаем $\Psi = 2aux$. Тогда уравнение линий тока $xu = C$ (рис. 3.4, б), т. е. линии тока представляют собой семейство гипербол (сплошные линии) с асимптотами, являющимися осями координат. При $C > 0$ либо $x > 0$, $y > 0$, либо $x < 0$, $y < 0$, т. е. ветви гипербол располагаются в первой и третьей четвертях, а при $C < 0$ либо $x < 0$, $y > 0$,

либо $x > 0, y < 0$, т. е. ветви гипербол расположены во второй и четвертой четвертях координатной плоскости. Если $C = 0$, то линиями тока являются оси Ox и Oy («нулевые» линии тока). В начале координат $V_x = V_y = 0$. Точка потока, в которой скорость равна нулю, называется *критической*.

Чтобы найти направление течения, рассмотрим некоторую точку M на оси Ox с координатами $x > 0, y = 0$. В точке M проекции скорости $V_{xM} = 2ax > 0, V_{yM} = 0$, т. е. скорость направлена в положительную сторону оси Ox , а поток течет в направлениях, показанных на рис. 3.4, б сплошными линиями.

Если потенциал скорости φ постоянный, то получим уравнение семейства эквипотенциальных линий $\varphi = a(x^2 - y^2) = C$ (см. рис. 3.4, б, штриховые линии) — гипербол с асимптотами, являющимися биссектрисами координатных углов, которое будет ортогонально семейству гипербол $xy = C$.

Комплексный потенциал такого потока $W(z) = az^2$, где a — действительное число; $z = x + iy$. Как известно, $W(z) = \varphi + i\psi$. Тогда

$$\varphi = a(x^2 - y^2); \quad \psi = 2axy.$$

Скорость потока

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2az.$$

В свою очередь,

$$\frac{dW(z)}{dz} = V_x - iV_y,$$

т. е.

$$V_x = 2ax; \quad V_y = -2ay; \quad |V| = \left| \frac{dW}{dz} \right| = 2a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Течение от источника и стока

Пусть потенциал скорости задан в виде

$$\varphi = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

или в полярных координатах

$$\varphi = \ln r.$$

Согласно первому выражению (3.4), функция тока

$$\psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + C.$$

Поскольку $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$, то

$$\psi = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy + C,$$

или

$$\psi = \int \frac{d\frac{y}{x}}{1 + (y/x)^2} + C.$$

Выполнив интегрирование, находим

$$\psi = \operatorname{arctg}(y/x) + C.$$

Таким образом, функция тока для данного течения (с точностью до произвольной постоянной) имеет вид

$$\psi = \operatorname{arctg}(y/x)$$

или в полярных координатах

$$\psi = \theta.$$

Семейство линий тока представляет собой семейство лучей, исходящих из начала координат (рис. 3.4, в). Чтобы определить направление течения, найдем проекцию скорости:

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} > 0,$$

т. е. направление скорости совпадает с положительным направлением полярного радиуса. Такое течение называется течением от источника. Среда вытекает из начала координат по линиям тока, представляющим собой семейство прямолинейных лучей.

Для получения уравнения семейства эквипотенциальных линий необходимо потенциал скорости приравнять постоянной величине: $\varphi = \ln r = C$ или $r = \text{const}$. Следовательно, эквипотенциальные линии представляют собой семейство концентрических окружностей (штриховые линии на рис. 3.4, в), ортогональных семейству линий тока, центры которых расположены в начале координат. Пусть Q — секундный объемный расход среды, вытекающей из источника. Будем называть его мощностью источника. Установим связь между мощностью Q и функциями φ , ψ . В силу условий неразрывности расход жидкости, протекающей через окружность радиусом r , будет $Q = 2\pi r V_r$. Поскольку $V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{d\varphi}{dr}$, то

$$Q = 2\pi r \frac{d\varphi}{dr} \text{ или } d\varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{dr}{r}.$$

После интегрирования получаем

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r. \quad (3.5)$$

Функция тока будет иметь вид

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta. \quad (3.6)$$

Очевидно, что выражения (3.5) и (3.6) характеризуют потенциал скорости и функцию тока для источника мощностью $Q = 2\pi$.

Если среда течет в обратном направлении, т. е. ее линии тока направлены в начало координат, имеет место течение от стока. В этом случае

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r; \quad \psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta.$$

Характеристическая функция течения от источника

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z.$$

Тогда

$$\varphi + i\psi = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta; \quad |V| = \frac{dW}{dz} = \frac{1}{z} = V_x - iV_y.$$

Течение от диполя

Диполем называется комбинация источника мощностью Q и стока мощностью $-Q$, помещенных на бесконечно малом расстоянии один от другого (рис. 3.5). Используя метод наложения, запишем потенциал диполя в виде

$$\varphi = \varphi_{\text{ист}} + \varphi_{\text{сток}} = \frac{Q}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2},$$

где $\varphi_{\text{ист}}$ и $\varphi_{\text{сток}}$ — потенциалы источника и стока соответственно.

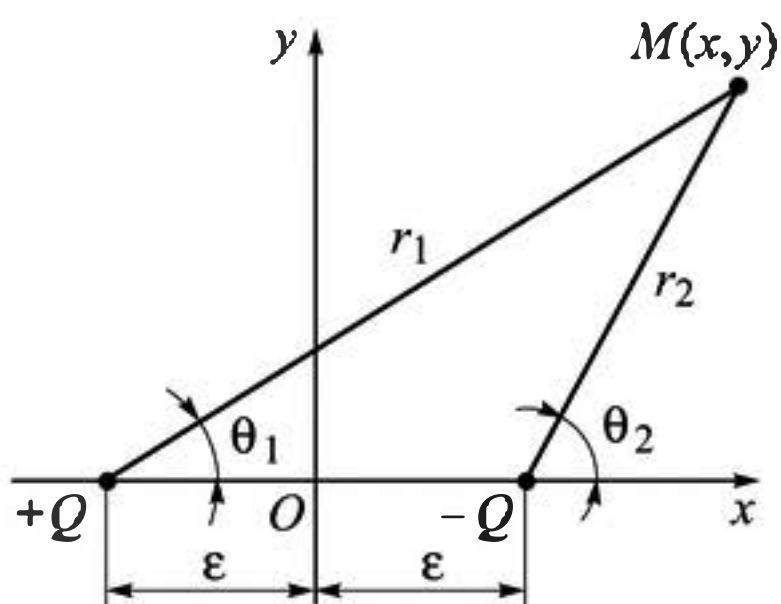


Рис. 3.5. К определению понятия «диполь»

Расстояния от точки M до источника и стока находим соответственно по формулам

$$r_1 = \sqrt{(x + \epsilon)^2 + y^2};$$

$$r_2 = \sqrt{(x - \epsilon)^2 + y^2},$$

где x, y — координаты произвольной точки M .

Выражение для потенциала скорости имеет вид

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x + \epsilon)^2 + y^2}{(x - \epsilon)^2 + y^2}}$$

или после преобразования

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{(x + \epsilon)^2 + y^2 + (x - \epsilon)^2 - (x - \epsilon)^2}{(x - \epsilon)^2 + y^2} = \frac{Q}{4\pi} \ln \left[1 + \frac{4x\epsilon}{(x - \epsilon)^2 + y^2} \right].$$

Если теперь сближать источник и сток, то величина ϵ будет стремиться к нулю. Обозначив $z = \frac{4x\epsilon}{(x - \epsilon)^2 + y^2}$, разложим выражение для φ в ряд:

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Удерживая в разложении только члены, содержащие ϵ в первой степени, получаем

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{4x\epsilon}{(x - \epsilon)^2 + y^2}. \quad (3.7)$$

Обратимся к функции тока ψ для рассматриваемого течения. Нетрудно заметить, что

$$\psi = \psi_{\text{ист}} + \psi_{\text{сток}} = \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2),$$

где $\psi_{\text{ист}}$ и $\psi_{\text{сток}}$ — функции тока источника и стока соответственно; $\theta_1 = \arctg[y/(x + \epsilon)]$, $\theta_2 = \arctg[y/(x - \epsilon)]$. Тогда

$$\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2}{1 + \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2} = \frac{y(x - \varepsilon) - y(x + \varepsilon)}{x^2 - \varepsilon^2 + y^2} = \frac{-2y\varepsilon}{x^2 - \varepsilon^2 + y^2}.$$

Из полученного выражения находим

$$\theta_1 - \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{-2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2}.$$

Следовательно,

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{-2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2}.$$

Пользуясь известным разложением для

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots,$$

где $z = \frac{-2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2}$, и малостью ε , удержим в разложении лишь члены, содержащие ε в первой степени. Тогда

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \frac{2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2}. \quad (3.8)$$

Сближая источник со стоком, полагаем, что мощности их неограниченно возрастают, так что в пределе произведение $2Q\varepsilon$ стремится к некоторой конечной величине $M_{\text{дип}}$, которая называется *моментом диполя*. Обычно ее изображают в виде вектора, направление которого указывает на направление от стока к источнику. Ось Ox называется осью диполя.

Подставив $M_{\text{дип}}$ в выражения (3.7) и (3.8), в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\varphi = \frac{M_{\text{дип}}}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \psi = -\frac{M_{\text{дип}}}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Найдем уравнения семейств линий тока и эквипотенциальных линий для течения от диполя. Приравняв функцию тока ψ постоянной величине:

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = C,$$

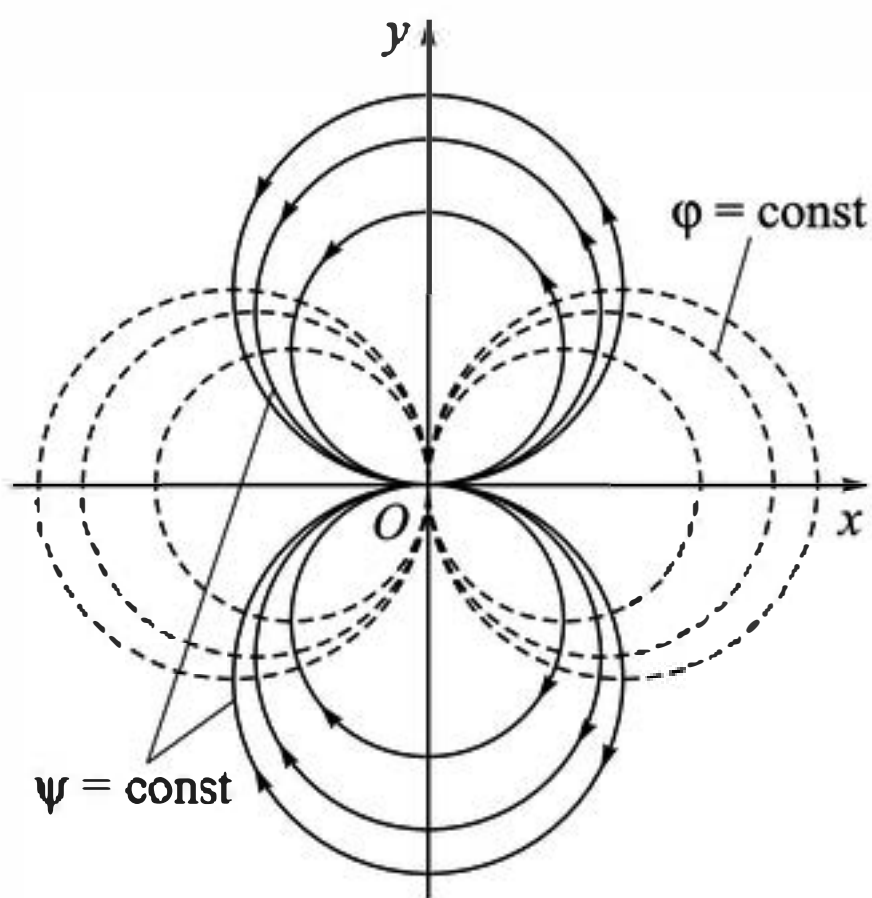


Рис. 3.6. Линии тока и эквипотенциальные линии для течения от диполя

находим

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}.$$

Очевидно, что совокупность линий тока будет представлять собой семейство окружностей с центрами на оси Oy и касающихся оси Ox в начале координат, а совокупность эквипотенциальных линий — семейство окружностей, ортогональных линиям тока, с центрами на оси Ox и касающихся оси Oy в начале координат (рис. 3.6).

Характеристическая функция этого течения имеет вид

$$W(z) = \frac{M_{\text{дип}}}{2\pi} \frac{1}{z}; \quad \frac{dW}{dz} = -\frac{M_{\text{дип}}}{2\pi} \frac{1}{z^2} = V_x - iV_y.$$

Течение от вихря

Рассмотрим такой плоский поток, в котором потенциал скорости ϕ и функция тока ψ определяются выражениями

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \theta; \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \ln r,$$

где $Q > 0$ — некоторая постоянная величина, физический смысл которой необходимо определить.

Для выявления характера течения найдем уравнение линий тока, приняв $\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = C$ или $r = \text{const}$, т. е. совокупность линий тока будет представлять собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат.

Определим направление течения среды, вычислив скорость в произвольной точке M (рис. 3.7) через полярные координаты r и θ :

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0; \quad V_t = V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r} > 0.$$

Следовательно, скорость в точке M направлена по касательной к окружности радиусом r , а точка M совершает движение по ней в сторону возрастания угла θ . Такое движение среды называется плоским вихревым течением, или плоским вихрем, а начало координат — вихревой точкой. Это означает, что вдоль оси Oz расположен бесконечно длинный прямолинейный вихрь, вызывающий в перпендикулярной к нему плоскости движение жидких частиц по концентрическим окружностям.

Выясним теперь физический смысл постоянной Q . Для этого вычислим циркуляцию скорости в рассматриваемом потоке: $\Gamma = \oint V_t dl$. Подставив $V_t = Q/(2\pi r)$ и выпол-

нив интегрирование по окружности радиусом r , найдем

$$\Gamma = \oint \frac{Q}{2\pi r} dl = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi r} r d\theta = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta, \quad \text{или } Q = \Gamma,$$

т. е. произвольная постоянная Q равна циркуляции скорости. Таким образом, выражения для потенциала скорости и функции тока плоского вихря имеют вид

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta; \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Уравнение семейства эквипотенциальных линий $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = C$

или $\theta = \text{const}$ представляет собой совокупность прямых, исходящих из начала координат и перпендикулярных линиям тока (см. рис. 3.7).

Примем одну из линий тока, например окружность радиусом $r = r_0$, за твердую границу, что не нарушает характера потока, и будем рассматривать течение среды вне этой окружности. Тогда получим так называемое чисто циркуляционное обтекание бесконечно длинного (в направлении оси Oz) круглого цилиндра радиусом r_0 ,

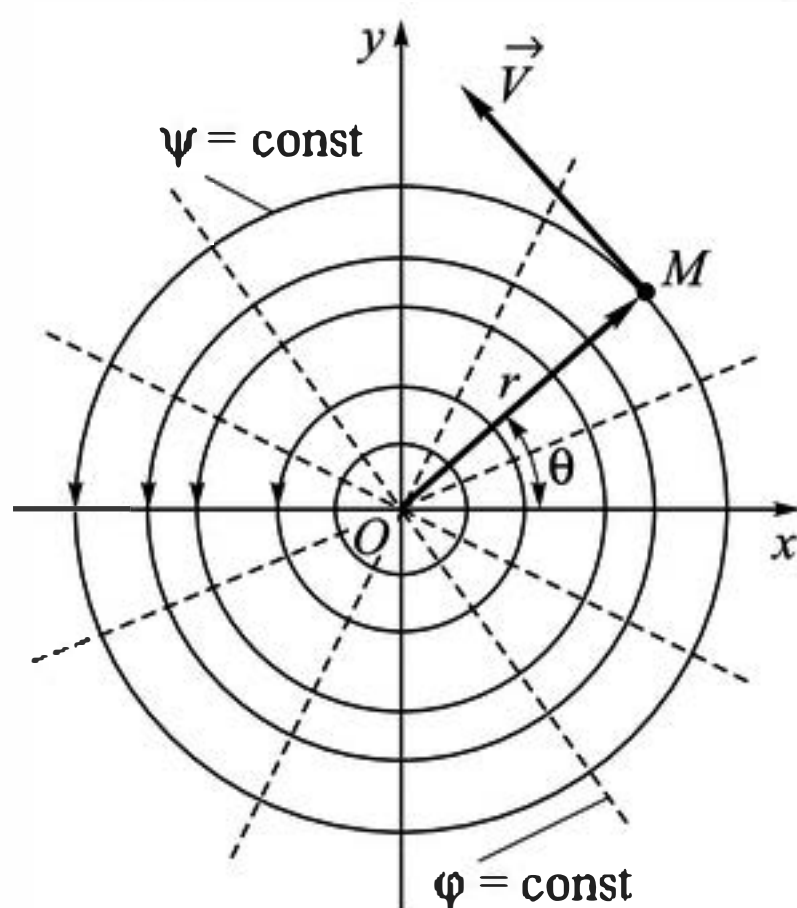


Рис. 3.7. Линии тока и эквипотенциальные линии для течения от вихря

при котором все линии тока — концентричные цилиндру окружности.

В любой точке вне цилиндра скорость

$$V = \Gamma / (2\pi r). \quad (3.9)$$

Максимальной она будет на поверхности круглого цилиндра:

$$V_0 = \Gamma / (2\pi r_0).$$

По мере удаления от цилиндра скорость будет убывать по гиперболическому закону (3.9), и на бесконечности $V_\infty = 0$ (рис. 3.8, а).

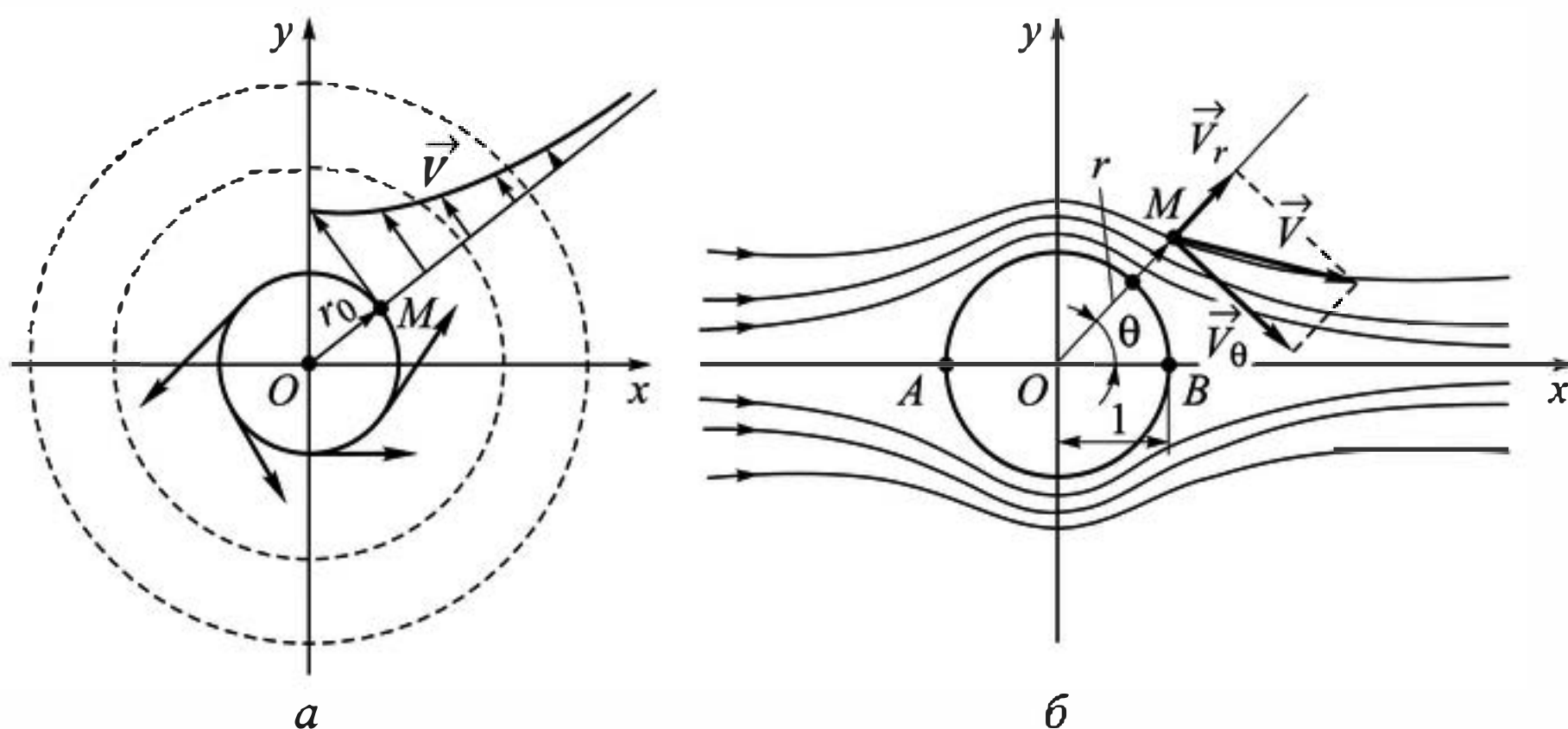


Рис. 3.8. Чисто циркуляционное (а) и бесциркуляционное (б) обтекание круглого цилиндра

Характеристическая функция чисто циркуляционного обтекания круглого цилиндра имеет вид

$$W(z) = -\frac{\Gamma i}{2\pi} \ln z.$$

Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра

Рассмотрим сложное плоское течение среды, которое получается в результате наложения двух изученных ранее потоков: равномерного прямолинейного потока,двигающегося в направлении оси Ox с единичной скоростью, для которого

$$\varphi = x, \quad \psi = y,$$

и потока от диполя с моментом $M_{\text{дип}} = 2\pi$ и

$$\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Выражения для функций φ , ψ сложного потока будут иметь вид

$$\varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Для определения уравнения семейства линий тока приравняем функцию тока некоторой постоянной величине:

$$\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2} = C,$$

тогда

$$y[(x^2 + y^2) - 1] = C(x^2 + y^2).$$

Линии тока представляют собой семейство кривых третьего порядка. Для нулевой линии тока получаем два уравнения:

$$y = 0; \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Следовательно, нулевые линии тока совпадают с осью Ox и окружностью единичного радиуса с центром в начале координат. Принимая указанную окружность за твердую границу и рассматривая течение среды вне этой окружности, можно трактовать полученное течение как поток, обтекающий бесконечно длинный цилиндр единичного радиуса (рис. 3.8, б). Покажем, что точки A и B пересечения нулевых линий тока с цилиндром будут критическими. Представим потенциал скорости сложного потока в полярных координатах:

$$\varphi = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta,$$

и запишем проекции скорости в произвольной точке на полярный радиус r и на перпендикулярное к нему направление, определяемое углом θ ($V_\theta = V_t$):

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta; \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta.$$

Из последнего выражения следует, что циркуляция скорости вокруг цилиндра равна нулю:

$$\Gamma = \oint V_t dl = \int_0^{2\pi} V_t r d\theta = \left[r \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Проверим, удовлетворяются ли граничные условия задачи, заключающиеся в том, что обтекание цилиндра происходит без отрыва потока, т. е. что в каждой точке на его поверхности скорости частиц среды направлены по касательной. При $r = 1$, $V_r = 0$, $V_\theta = -2 \sin \theta$, а распределение скорости определяется выражением $V = 2 |\sin \theta|$. Для точки A угол $\theta = \pi$ и $V = 0$, для точки B угол $\theta = 0$ и $V = 0$.

Нетрудно убедиться, что в случае потока,двигающегося на бесконечности со скоростью V_∞ в отрицательном направлении оси Ox и обтекающего цилиндр радиусом r_0 , для потенциала скорости ϕ справедливо выражение

$$\phi = -V_\infty \cos \theta \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right).$$

В этом случае скорость на поверхности цилиндра

$$V = 2V_\infty |\sin \theta|.$$

Картина такого течения представлена на рис. 3.9. Точки A и B будут по-прежнему критическими. Отметим, что в точках пересечения окружности с осью Oy скорость V принимает максимальное значение, не зависящее от радиуса цилиндра и равное удвоенной скорости на бесконечности.

Рассмотрим теперь бесциркуляционное обтекание потенциальным потоком идеальной несжимаемой среды цилиндра радиусом r_0 (см. рис. 3.9). Скорость V на цилиндре будет выражаться следующим образом: $V = 2V_\infty \sin \theta$. Используя уравнение Бернулли, вычислим давление на цилиндре:

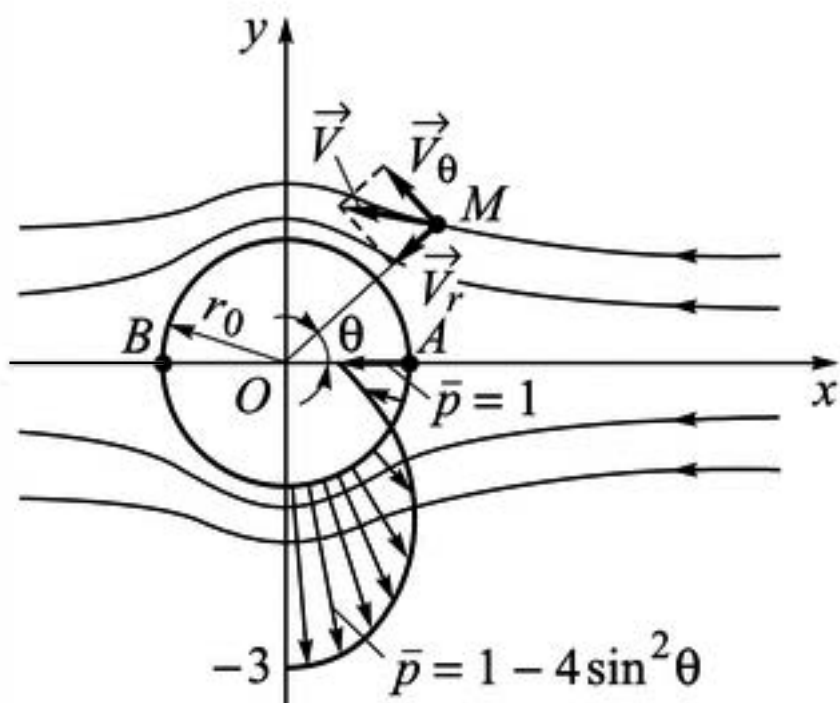


Рис. 3.9. Картина бесциркуляционного обтекания круглого цилиндра

$$p = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} - \frac{\rho V^2}{2}.$$

Подставляя выражение для V , находим

$$p - p_{\infty} = \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta).$$

Видно, что коэффициент $1 - 4 \sin^2 \theta$ не зависит ни от r_0 , ни от V_{∞} , p_{∞} . Поскольку распределение давления по цилиндру симметричное, результирующая сила от давления потока на цилиндр равна нулю. Это характерно и для случая обтекания произвольного тела потенциальным потоком без образования вихрей и отрывных течений. Следовательно, если в равномерном установившемся потоке идеальной среды помещено какое-нибудь тело и поток обтекает его без срыва и циркуляции, то результирующая сила от давления потока на тело равна нулю, т. е. тело не испытывает сопротивления. В этом заключается известный парадокс Эйлера – Д’Аламбера.

Циркуляционное обтекание круглого цилиндра

Для получения так называемого циркуляционного обтекания круглого цилиндра необходимо наложить на бесциркуляционное обтекание чисто циркуляционный поток от плоского вихря, расположенного в начале координат (рис. 3.10). Сложив потенциалы скоростей указанных потоков, получим

$$\varphi = -V_{\infty} \cos \theta \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

Таким образом, в каждой точке пространства к скорости $V_{бц}$ бесциркуляционного потока, обтекающего цилиндр, добавляется скорость $V_{ц}$ чисто циркуляционного потока, а их результирующая изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_{бц}$ и $\vec{V}_{ц}$ (см. рис. 3.10).

Наличие циркуляционного потока нарушает симметрию линий тока. Вследствие сложения скоростей над цилиндром образуется

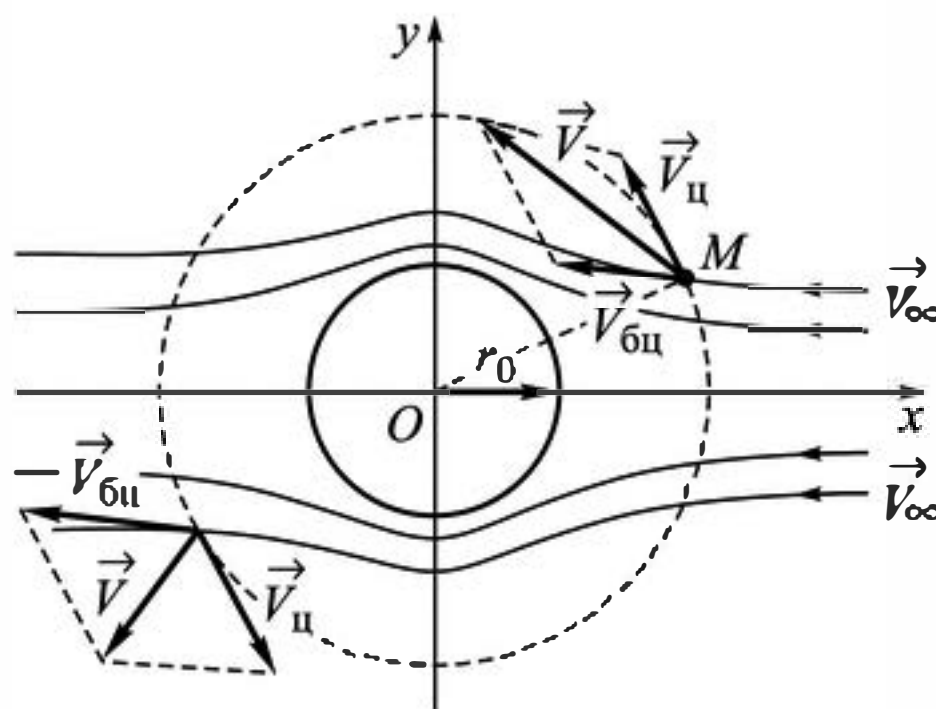


Рис. 3.10. Результирующие скорости при наложении плоскопараллельного и циркуляционного течений около цилиндра

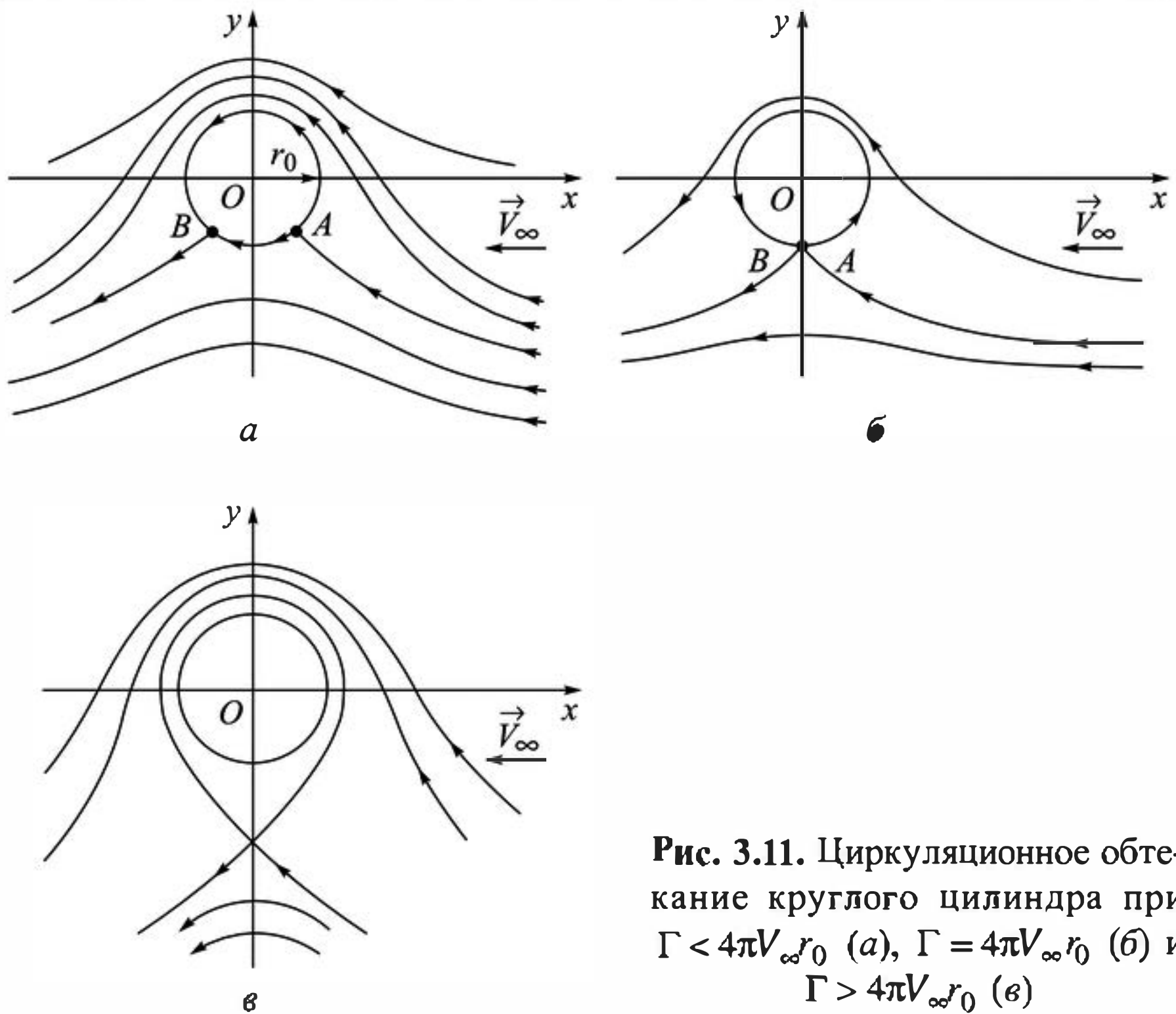


Рис. 3.11. Циркуляционное обтекание круглого цилиндра при $\Gamma < 4\pi V_\infty r_0$ (а), $\Gamma = 4\pi V_\infty r_0$ (б) и $\Gamma > 4\pi V_\infty r_0$ (в)

область повышенных, а под цилиндром — пониженных скоростей. Критические точки A и B (рис. 3.11, а) в этом случае будут расположены на поверхности цилиндра ниже оси Ox . Найдем угол $\theta_{кр}$, определяющий их положение, и проекции скоростей V_r, V_θ в произвольной точке потока. Поскольку

$$V_r = -V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right); \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = V_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

то для точек, расположенных на поверхности цилиндра ($r = r_0$),

$$V_r = 0; \quad V_\theta = 2V_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

Здесь первое выражение указывает на безотрывность обтекания, второе — определяет скорость V на поверхности цилиндра:

$$V = 2V_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \quad (3.10)$$

В критических точках скорость $V = 0$, поэтому, приравняв правую часть выражения (3.10) к нулю, находим

$$\sin \theta_{\text{кр}} = -\frac{\Gamma}{4\pi V_{\infty} r_0}. \quad (3.11)$$

При $\Gamma < 4\pi V_{\infty} r_0$ значению синуса будут соответствовать два угла, расположенные в третьем и четвертом квадрантах и определяющие положение критических точек A и B (см. рис. 3.11, а). Согласно выражению (3.11), с увеличением циркуляции Γ критические точки будут смещаться вниз. В случае, когда $\Gamma = 4\pi V_{\infty} r_0$, получаем $\sin \theta_{\text{кр}} = -1$. Критические точки слились в одну точку, и картина течения потока будет иметь вид, изображенный на рис. 3.11, б. При дальнейшем увеличении циркуляции Γ критические точки сходят с цилиндра и течение потока будет аналогично приведенному на рис. 3.11, в.

3.3. Сила и момент, действующие на цилиндр произвольной формы. Формулы Жуковского – Чаплыгина

Получим формулы для главного вектора и главного момента силы от давления, действующей на неподвижный контур произвольной формы при безотрывном обтекании его установившимся потенциальным потоком несжимаемой среды.

Пусть плоский поток, характеристическая функция течения которого $W(z)$, обтекает замкнутый контур l произвольной формы (рис. 3.12). Определим проекции силы $p dl$ на оси координат в плоскости комплексного переменного z :

$$dX = -p dl \cdot \cos \gamma, \quad dY = p dl \cdot \sin \gamma.$$

Поскольку $\gamma = \theta + \pi/2$, то

$$dX = p dl \cdot \sin \theta; \quad dY = p dl \cdot \cos \theta,$$

или

$$dX = -p dy; \quad dY = p dx. \quad (3.12)$$

Умножая dX на $i = \sqrt{-1}$ и складывая с dY , получаем

$$d(Y + iX) = p d\bar{z},$$

где $d\bar{z} = dx - i dy$.

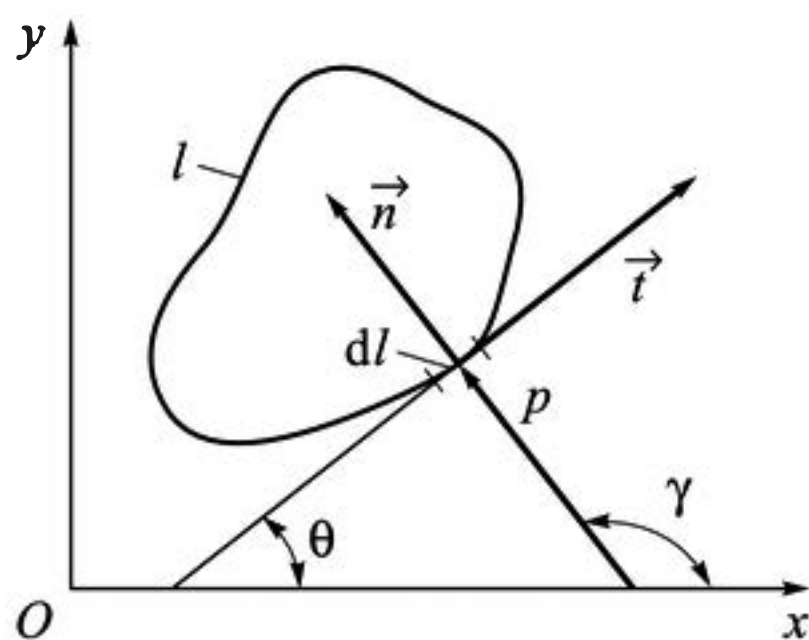


Рис. 3.12. Определение сил и момента, действующих на произвольный замкнутый контур при безотрывном обтекании

Используя уравнение Бернулли в точках контура l , имеем

$$p = C - \frac{\rho V^2}{2},$$

где V — скорость, направленная по касательной к контуру l .

Следовательно,

$$Y + iX = \oint_l \left(C - \frac{\rho V^2}{2} \right) d\bar{z}. \quad (3.13)$$

Интеграл от первого слагаемого равен нулю, поэтому

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \oint_l V^2 d\bar{z}.$$

Это выражение справедливо при любом безотрывном движении идеальной среды. При потенциальном течении имеет место соотношение

$$V = \left(\frac{dW}{dz} e^{i\theta} \right) \Big|_l = \bullet,$$

поскольку скорость направлена по касательной к контуру l . Кроме того, поскольку $dz = dl \cdot e^{i\theta}$, а $d\bar{z} = dl \cdot e^{-i\theta}$, то $dz = d\bar{z} \cdot e^{-2i\theta}$. Подставляя полученные выражения в формулу (3.13), находим

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz. \quad (3.14)$$

Выражение (3.14) называется *первой формулой Жуковского — Чаплыгина*.

Из теоретической механики известно, что действие произвольной системы эквивалентно действию их главного вектора и главного момента. Главный вектор силы определяется формулой (3.14). Найдем главный момент распределенной по контуру l силы от давления относительно начала координат (см. рис. 3.12).

Согласно определению момента силы,

$$dM_O = (xdY - ydX) \vec{k}$$

или с учетом формул (3.12)

$$dM_O = p(xdx + ydy).$$

Из выражения

$$z d\bar{z} = (x + iy)(dx - idy) = (x dx + y dy) + i(y dx - x dy)$$

находим

$$x dx + y dy = \operatorname{Re}(z d\bar{z}),$$

откуда

$$dM_O = \operatorname{Re}(p z d\bar{z}). \quad (3.15)$$

Используя формулу Бернулли и записывая выражение для M_O сразу для потенциального течения, получаем

$$M_O = -\operatorname{Re} \frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 z dz. \quad (3.16)$$

Соотношение (3.16) называется *второй формулой Жуковского – Чаплыгина* и позволяет определить главный момент силы относительно начала координат.

Приведем пример определения силы, действующей при обтекании циркуляционным потоком круглого цилиндра радиусом R . Для этого случая характеристическая функция имеет вид

$$W(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Отсюда можно записать

$$\frac{dW}{dz} = V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z};$$

$$\left(\frac{dW}{dz} \right)^2 = V_\infty^2 \left(1 - 2\frac{R^2}{z^2} + \frac{R^4}{z^4} \right) + 2\frac{i\Gamma V_\infty}{2\pi z} - 2\frac{iV_\infty R^2}{2\pi z^3} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2}.$$

Подставляя последнее выражение в (3.14) и используя теорию вычетов аналитических функций, получаем

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \frac{2i\Gamma V_\infty}{2\pi} 2\pi i = \rho\Gamma V_\infty.$$

Откуда находим

$$Y = \rho\Gamma V_\infty; \quad X = 0. \quad (3.17)$$

Согласно (3.17), силы, действующие на круговой цилиндр, зависят от циркуляции скорости по контуру, охватывающему обтекаемую окружность. Если циркуляция $\Gamma = 0$, силы воздействия среды на цилиндр равны нулю и имеет место хорошо известный парадокс Эйлера – Д’Аламбера. При $\Gamma \neq 0$ этот парадокс не выполняется и, согласно формуле (3.17), со стороны среды на тело действует подъемная сила Y , перпендикулярная вектору скорости набегающего потока. Полученное выше для частного случая (обтекания цилиндра) выражение (3.17) для силы Y называется *формулой Жуковского*. Составляющая силы от давления, параллельная вектору скорости $\vec{V}_\infty$, при любых значениях Γ равна нулю, т. е. тело при установившемся движении в идеальной среде не испытывает сопротивления, хотя может иметь подъемную силу.

3.4. Вихревое течение.

Теоремы Стокса, Томсона, Гельмгольца

Вихревая линия и вихревая трубка. Напряженность вихря

Вихревые течения часто наблюдаются на практике, например смерчи и циклоны в атмосфере. Перемещающееся в жидкости тело оставляет позади себя область, заполненную вихрями, на образование которых нужно затратить энергию. Эта энергия получается за счет движущегося тела, которое должно таким образом преодолевать некоторое сопротивление жидкости, называемое *вихревым*.

Линия, в точках которой векторы $\vec{\omega}$ направлены по касательной к ней, называется *вихревой*. Уравнение вихревой линии (2.13) записывают из условия коллинеарности векторов $\vec{\omega}$ и $d\vec{l}$ (рис. 3.13, а).

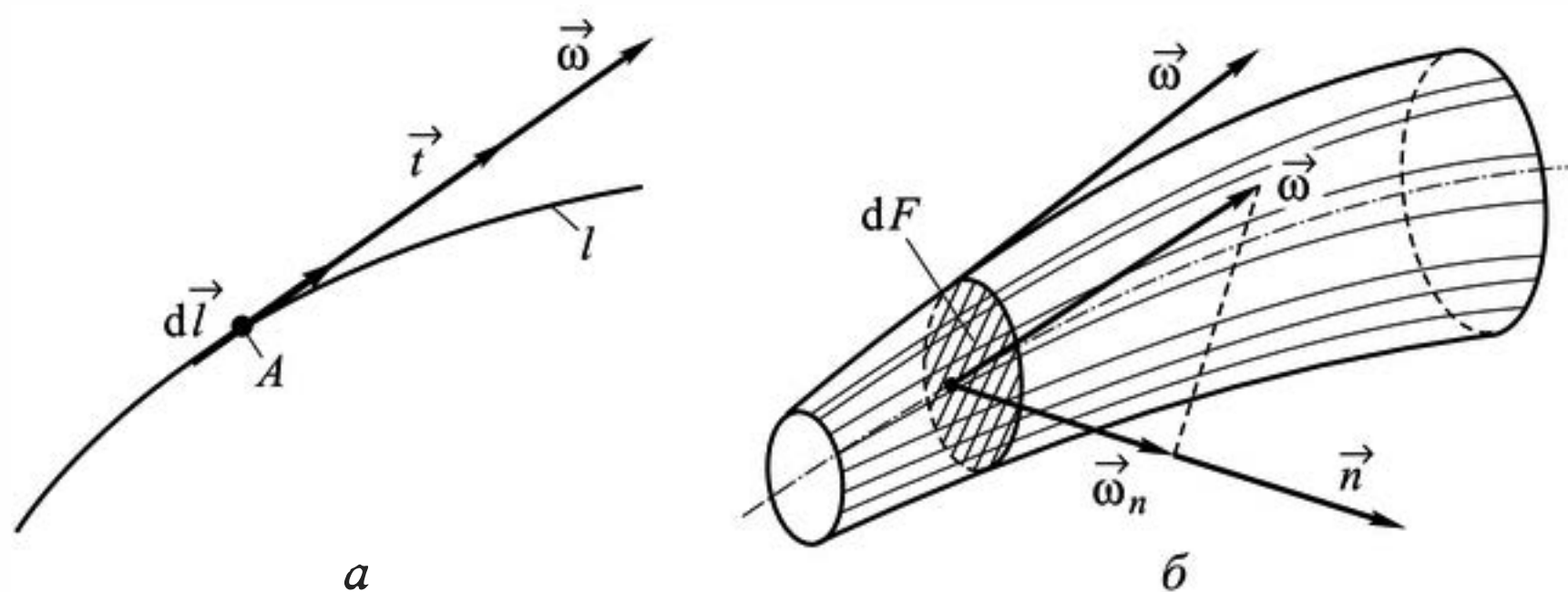


Рис. 3.13. Вихревые линия (а) и трубка (б)

Согласно определению вихря, его компоненты должны удовлетворять условию

$$\operatorname{div} \vec{\omega} = 0.$$

Выберем в пространстве некоторый элементарный замкнутый контур, через точки которого проходят вихревые линии, образуя некоторую поверхность, называемую *вихревой трубкой* (рис. 3.13, б). Жидкость, ограниченная этой поверхностью, называется *вихревым инуром* или просто *вихрем*. Произведение площади сечения dF вихревой трубки и удвоенной длины проекции вектора вихря на нормаль к сечению называется напряженностью ζ вихря:

$$d\zeta = 2\omega_n dF = 2\vec{\omega} \cdot \vec{n} dF. \quad (3.18)$$

Выберем в пространстве, занятом сплошной средой, некоторый замкнутый контур l , ограничивающий поверхность Σ (рис. 3.14). Пусть эту поверхность пронизывают вихревые линии. Напряженность вихрей, пронизывающих элементарную площадку dF на поверхности Σ , определяют по формуле (3.18). Интегрируя выражение (3.18) по поверхности Σ , получаем

$$\zeta = 2 \iint_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot \vec{n} dF. \quad (3.19)$$

Теорема Стокса

Напряженность вихря связана с циркуляцией скорости. Эту связь устанавливает *теорема Стокса*: напряженность вихрей, пронизывающих опирающуюся на замкнутый контур l незамкнутую поверхность Σ , равна циркуляции Γ вектора скорости по контуру l . Докажем ее.

Из выражения (3.19) для напряженности вихрей находим

$$\zeta = 2 \iint_{\Sigma} [\omega_x \cos(\vec{n} x) + \omega_y \cos(\vec{n} y) + \omega_z \cos(\vec{n} z)] dF.$$

Используя соотношения для угловых скоростей вращения

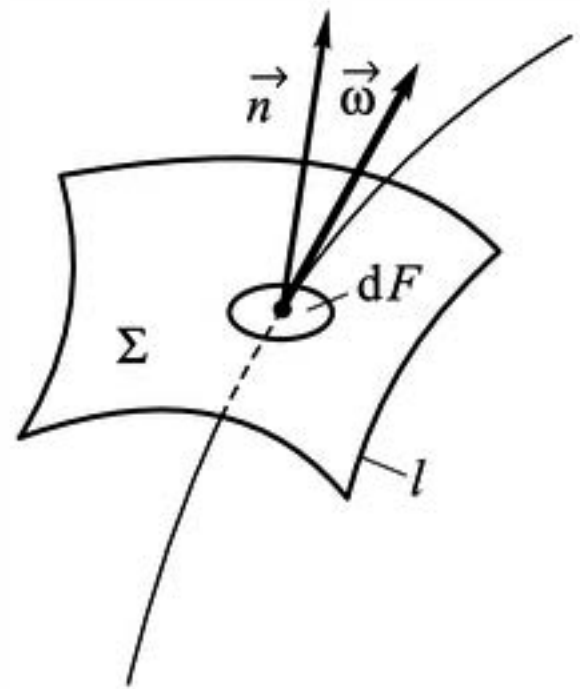


Рис. 3.14. К определению связи между циркуляцией и напряженностью вихрей

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right); \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right),$$

получаем

$$\begin{aligned} \zeta = \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \cos(\vec{n} x) + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \cos(\vec{n} y) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \cos(\vec{n} z) \right] dF. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из курса математики известна формула Стокса, записываемая в виде

$$\begin{aligned} \int_l (P dx + Q dy + R dz) = \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(\vec{n} x) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(\vec{n} y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(\vec{n} z) \right] dF. \end{aligned}$$

Применяя эту формулу к выражению (3.20), находим

$$\zeta = \int_l (V_x dx + V_y dy + V_z dz),$$

или

$$\zeta = \Gamma,$$

что и требовалось доказать.

Согласно теореме Стокса, если контур l не охватывает вихрь, то циркуляция равна нулю.

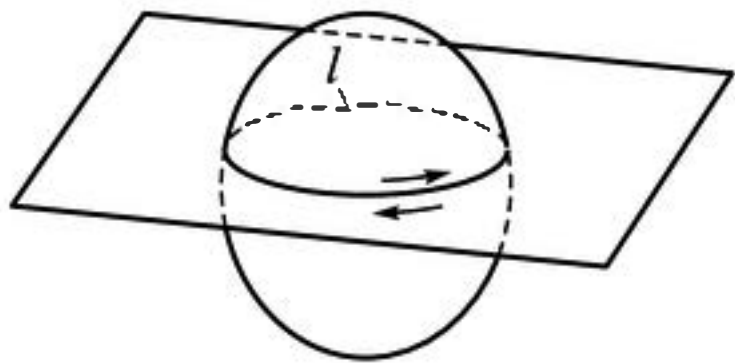


Рис. 3.15. К определению суммарной завихренности, пронизывающей замкнутую поверхность

Если поверхность замкнутая, то напряженность пронизывающих ее вихрей равна нулю. Убедиться в этом можно следующим образом. Рассечем плоскостью некоторую поверхность на две части (рис. 3.15). В сечении получим контур l . Направления обхода верхней и нижней поверхностей по контуру будут противоположными, поэтому суммарная циркуляция рав-

на нулю. Следовательно, суммарная напряженность вихрей, пронизывающих замкнутую поверхность, равна нулю.

Теорема Томсона

Рассмотрим в движущейся идеальной среде, которую для простоты будем считать несжимаемой, замкнутый контур l (рис. 3.16), составленный из одних и тех же частиц среды. Такой контур при движении среды не только перемещается вместе с ней, но и изменяет свою геометрическую форму. Будем называть его жидким контуром.

Теорема Томсона: циркуляция по замкнутому жидкому контуру в идеальной среде при наличии массовых сил, обладающих однозначным потенциалом, не меняется со временем.

Для доказательства этой теоремы возьмем на контуре конечную дугу AB . Циркуляцию скорости по дуге AB можно представить в виде

$$\Gamma = \int_A^B V_x dx + V_y dy + V_z dz. \quad (3.21)$$

Чтобы показать независимость циркуляции Γ от времени, необходимо доказать, что $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ для жидкого замкнутого контура. Вычислим $\frac{d\Gamma}{dt}$. Дифференцируя уравнение (3.21), находим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_A^B (V_x dx + V_y dy + V_z dz) = \int_A^B \frac{d}{dt} (V_x dx + V_y dy + V_z dz).$$

Дифференцируя подынтегральное выражение и учитывая, что контур жидкий, имеем

$$\frac{d}{dt} (V_x dx) = \frac{dV_x}{dt} dx + V_x \frac{d}{dt} (dx) = \frac{dV_x}{dt} dx + V_x dV_x;$$

$$\frac{d}{dt} (V_y dy) = \frac{dV_y}{dt} dy + V_y \frac{d}{dt} (dy) = \frac{dV_y}{dt} dy + V_y dV_y;$$

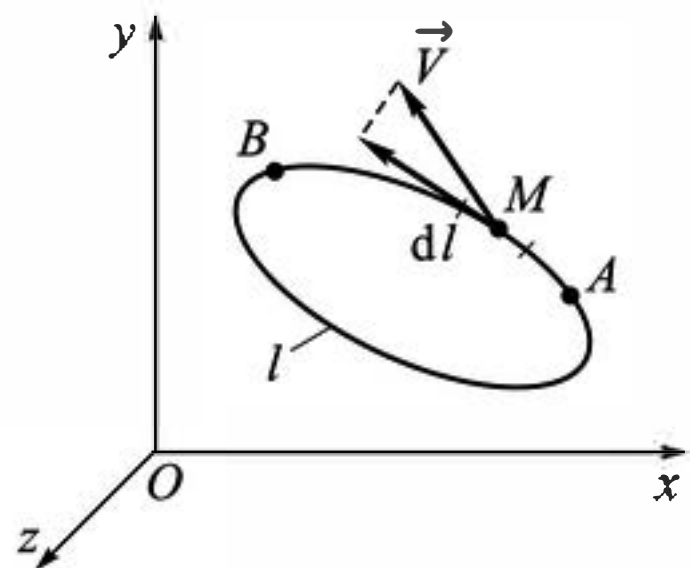


Рис. 3.16. К доказательству теоремы о постоянстве циркуляции по замкнутому жидкому контуру

$$\frac{d}{dt}(V_z dz) = \frac{dV_z}{dt} dz + V_z \frac{d}{dt}(dz) = \frac{dV_z}{dt} dz + V_z dV_z.$$

Подставим найденные выражения для производных под знак интеграла:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_A^B \left[\left(\frac{dV_x}{dt} dx + \frac{dV_y}{dt} dy + \frac{dV_z}{dt} dz \right) + (V_x dV_x + V_y dV_y + V_z dV_z) \right].$$

Выражение в последней скобке представляет собой $d(V^2/2)$. Заменяя проекции полного ускорения на координатные оси их выражениями из дифференциальных уравнений движения (2.28), имеем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_A^B \left[(Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + d\left(\frac{V^2}{2}\right) \right]. \quad (3.22)$$

Поскольку массовые силы, согласно допущению, обладают однозначным потенциалом,

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU(x, y, z),$$

где $U(x, y, z)$ — силовая функция массовых сил.

Отмечая, что во второй скобке выражения (3.22) стоит полный дифференциал давления p , можно записать

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_A^B \left[dU - \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) \right], \text{ или } \frac{d\Gamma}{dt} = \int_A^B d \left[U - \frac{p}{\rho} + \left(\frac{V^2}{2}\right) \right].$$

Следовательно,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \left[U - \frac{p}{\rho} + \left(\frac{V^2}{2}\right) \right]_B - \left[U - \frac{p}{\rho} + \left(\frac{V^2}{2}\right) \right]_A.$$

Величины, стоящие в квадратных скобках, являются однозначными функциями, поэтому в случае замкнутости контура, т. е. совпа-

дения точек A и B , производная $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$, а значит, $\Gamma = \text{const}$. Таким образом, циркуляция действительно не зависит от времени.

Теорема Томсона была доказана для случая несжимаемой среды, однако она остается справедливой и для сжимаемой среды. Из этой теоремы вытекает важный вывод. Если в идеальной жидкости (газе) отсутствуют вихри, т. е. циркуляция по любому замкнутому

контуру внутри среды равна нулю, то, следовательно, в жидкости вихрей не было раньше и не будет впредь. Наоборот, если в идеальной среде существуют вихри, то они не могут исчезнуть.

Теоремы Гельмгольца

Первая теорема: напряженность по длине вихревой трубки не меняется.

Рассмотрим объем вихревого шнура, ограниченный двумя произвольными сечениями F_1 и F_2 (рис. 3.17, а). Из векторного анализа известно, что поток вектора $\vec{a}$ через замкнутую поверхность F

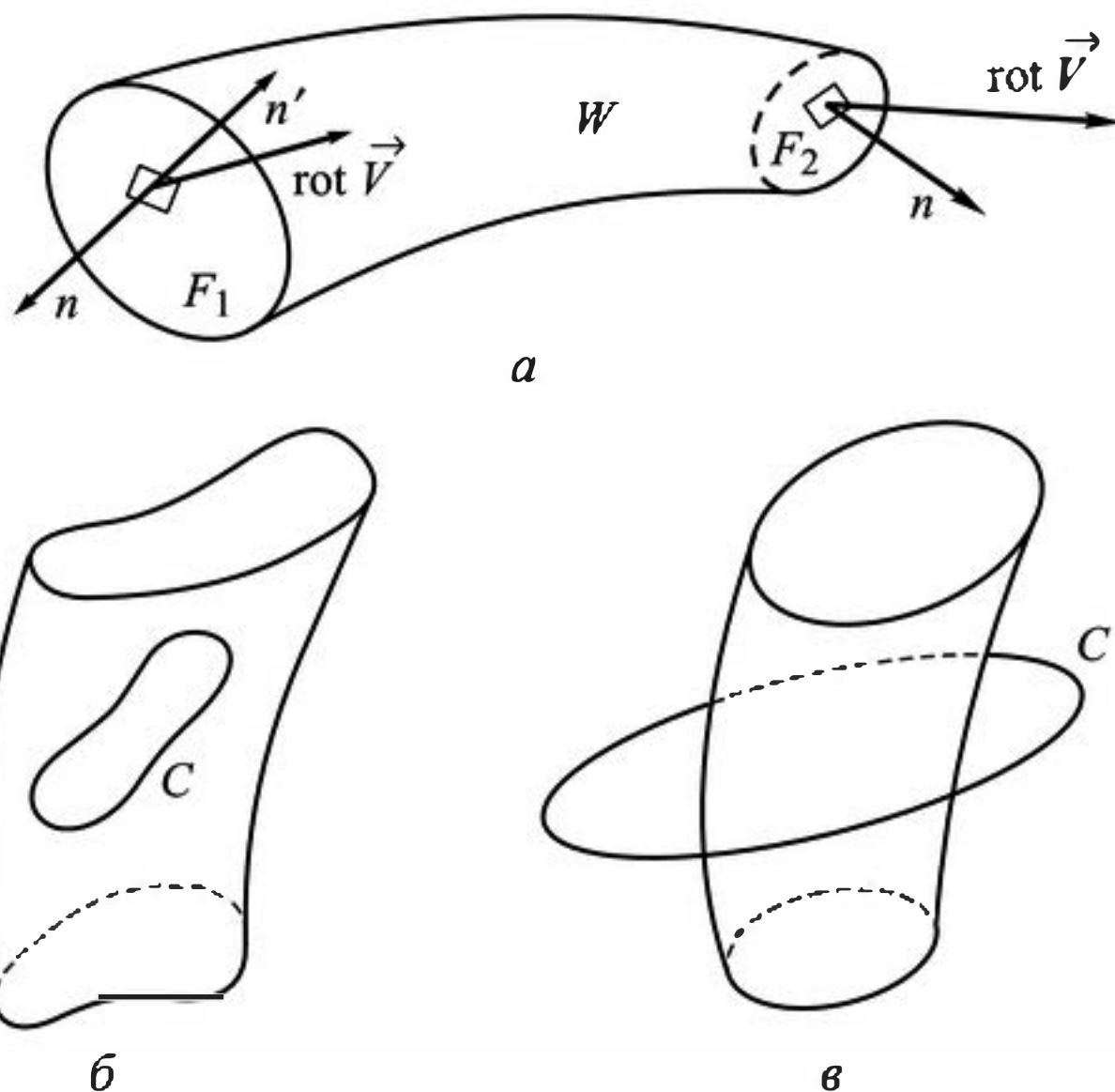


Рис. 3.17. К доказательству первой (а), второй (б) и третьей (в) теорем Гельмгольца

определяется интегралом $\iint_F a_n dF$, где a_n — проекция вектора $\vec{a}$ на внешнюю нормаль к поверхности F . Следовательно, поток вихря скорости $\text{rot } \vec{V}$ через поверхность F , ограничивающую объем W , будет выражаться интегралом $\iint_F (\text{rot } \vec{V})_n dF$. Согласно теореме Остроградского — Гаусса,

$$\iint_F (\text{rot } \vec{V})_n dF = \iiint_W \text{div rot } \vec{V} dW.$$

Учитывая, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{V} = 0$ и на боковой поверхности вихревого шнура $(\operatorname{rot} \bar{V})_n = 0$, имеем

$$\iint_{F_1} (\operatorname{rot} \bar{V})_n dF + \iint_{F_2} (\operatorname{rot} \bar{V})_n dF = 0,$$

или

$$\iint_{F_1} (\operatorname{rot} \bar{V})_n dF = - \iint_{F_2} (\operatorname{rot} \bar{V})_n dF.$$

Интеграл $\iint_{F_2} (\operatorname{rot} \bar{V})_n dS$ представляет собой поток вихря скорости через сечение F_2 вихревого шнура. В соответствии с этим для потока вихря скорости через сечение F_1 вихревого шнура можно записать

$$\iint_{F_1} (\operatorname{rot} \bar{V})_{n'} dF = - \iint_{F_1} (\operatorname{rot} \bar{V})_n dF,$$

где n' — направление внутренней нормали в сечении F_1 .

Таким образом,

$$\iint_{F_2} (\operatorname{rot} \bar{V})_n dF = \iint_{F_1} (\operatorname{rot} \bar{V})_{n'} dF.$$

Поскольку $\operatorname{rot} \bar{V} = 2\bar{\omega}$, то, следовательно, $(\operatorname{rot} \bar{V})_n = 2\omega_n$ и напряженность вихря $\zeta = 2\omega_n F = \text{const}$.

Вторая теорема: если в идеальной среде действуют массовые силы, обладающие однозначным потенциалом, то вихревая трубка не разрушается и всегда остается вихревой трубкой.

Для доказательства возьмем на боковой поверхности вихревой трубки замкнутый контур C (рис. 3.17, б), проходящий через одни и те же частицы среды. Поскольку площадь, охватываемая контуром C , вихрями не пронизывается, циркуляция по этому контуру, в соответствии с теоремой Стокса, равна нулю, т. е. $\Gamma_C = 0$. Но, согласно теореме Томсона, циркуляция в этом случае со временем изменяться не будет, а следовательно, она всегда будет равна нулю. Это означает, что через контур C вихревые линии никогда не пройдут и контур C останется лежать на боковой поверхности вихревой трубки, т. е. вихревая трубка не разрушится.

Указанное свойство вихрей справедливо только для идеальной среды. В реальной среде происходит процесс загухания — диффузия вихря.

Третья теорема: если в идеальной среде действуют массовые силы, обладающие однозначным потенциалом, то напряженность вихревой трубки со временем не меняется.

Охватим вихревую трубку (рис. 3.17, в) замкнутым контуром C . Согласно теореме Томсона, циркуляция Γ_C по этому контуру остается неизменной, а согласно теореме Стокса, она равна напряжению вихревой трубки. Следовательно, и напряженность со временем меняться не будет.

3.5. Поле скоростей, вызываемое вихрями.

Формула Био-Савара

Формула $\vec{\omega} = 0,5 \text{rot } \vec{V}$ позволяет найти угловые скорости частиц среды, если известно поле скоростей. Между тем в ряде случаев, например в теории крыла или воздушного винта, приходится решать обратную задачу, т. е. по распределению вихрей в потоке определять поле скоростей.

Рассмотрим случай одиночного вихря в потоке. Скорость, вызванная (индуцированная) в точке M бесконечно тонким вихревым шнуром произвольной формы (рис. 3.18, а),

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Эта формула является гидродинамическим аналогом известной в теории электромагнетизма формулы Био-Савара.

Элемент вихревого шнура индуцирует в точке M элементарную скорость

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Направление элементарной скорости $d\vec{V}$ перпендикулярно плоскости, содержащей $d\vec{l}$ и радиус-вектор $\vec{r}$, т. е. совпадает с направлением векторного произведения $d\vec{l} \times \vec{r}$. Элементарная скорость

$$|d\vec{V}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{|d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \theta dl}{r^2},$$

где θ — угол, образованный векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

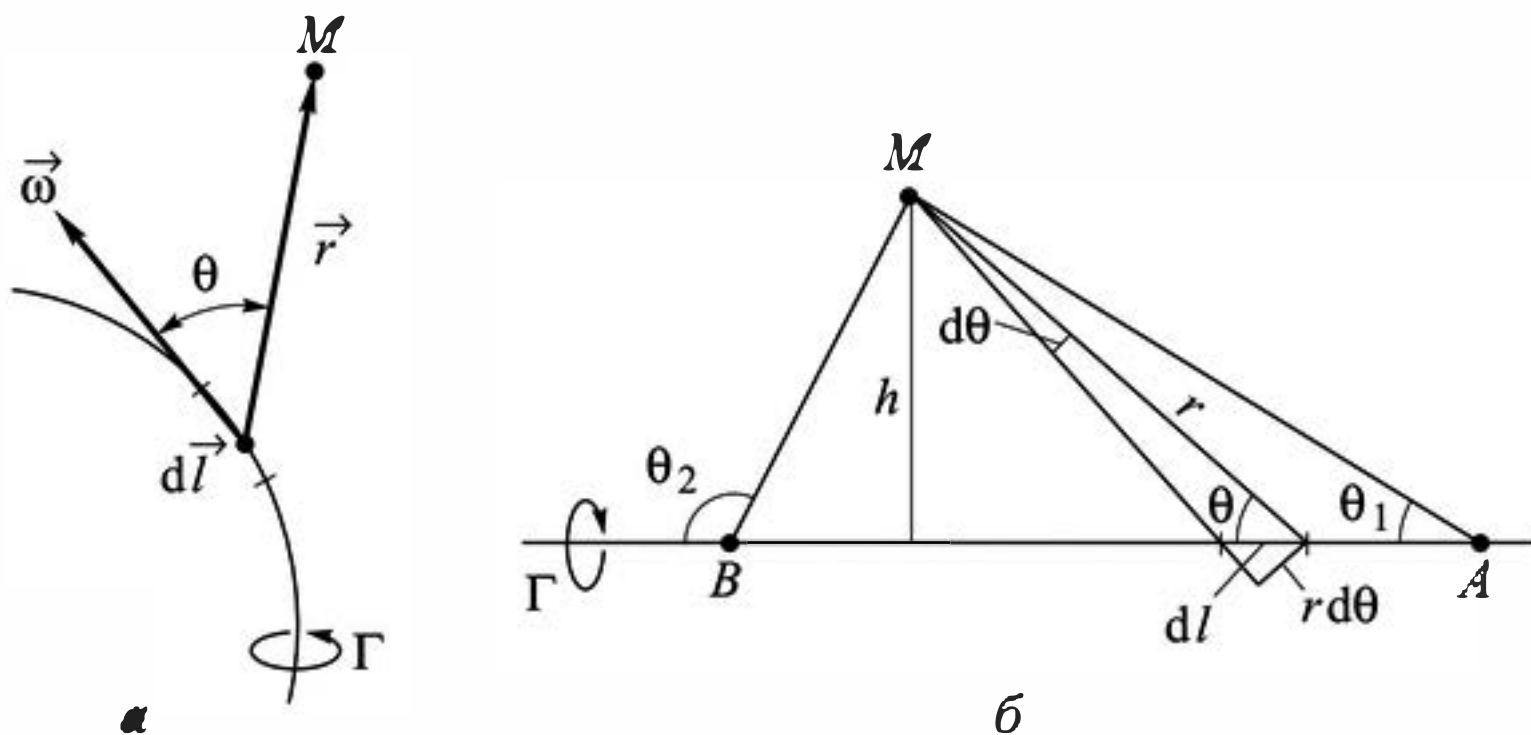


Рис. 3.18. К определению скорости в точке M , вызванной вихрем произвольной формы (а) и отрезком AB прямолинейного вихревого шнура (б)

Применим теперь формулу Био-Савара для определения скорости, индуцируемой отрезком прямолинейного вихревого шнура с циркуляцией Γ (рис. 3.18, б).

Все элементы вихревого шнура дают в данной точке M одинаково направленные элементарные скорости $d\vec{V}$. Поэтому скорость в точке M , индуцированная отрезком AB прямолинейного вихревого шнура, определится интегралом:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{AB} \frac{\sin \theta dl}{r^2}. \quad (3.23)$$

На рис. 3.18, б видно, что $h = r \sin \theta$ и поэтому с точностью до малых величин второго порядка $dl \sin \theta = r d\theta$. Переходя в интеграле (3.23) от переменной интегрирования l к θ , имеем

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2), \quad (3.24)$$

где h — расстояние от точки M до оси вихря.

В случае, когда один конец вихря совпадает с проекцией точки M на направление вихря ($\theta_1 = \pi/2$), а второй — уходит в бесконечность ($\theta_2 = \pi$), формула (3.24) принимает вид

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h}.$$

Если же оба конца вихря уходят в бесконечность ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$), то

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h}.$$

4. ТЕОРИИ ИЗОЭНТРОПИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ И СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

Изучение сложных физических процессов обтекания ЛА невозможно без понимания основных закономерностей изменения параметров потока в различных видах течений.

Одномерное изоэнтропическое течение является одним из простейших случаев течения газа. В то же время его результаты широко используют при изучении более сложных потоков, а также в практических приложениях, связанных с проектированием аэродинамических труб, газодинамических установок и т. д. Одной из особенностей сверхзвуковых течений газа является образование в потоке скачков уплотнения, при прохождении через которые скорость резко уменьшается, а давление, температура и плотность возрастают.

В главе изложены основы теории изоэнтропических течений и скачков уплотнения для наиболее простого случая одно- и двумерного течения газа. Представлены функциональные зависимости, позволяющие теоретически исследовать течение газа и объяснить более сложные физические процессы его взаимодействия с обтекаемыми телами.

4.1. Одномерное течение газа

Параметры потока при изоэнтропическом течении

Одномерное установившееся изоэнтропическое течение является наиболее простым случаем движения газа, который лежит в основе изучения более сложных течений. Согласно общей классификации, одномерным называется такое движение, при котором па-

параметры потока зависят от одной пространственной переменной. В этом случае предполагается, что определяющие течение параметры будут в каждом сечении одинаковые в любой момент времени, хотя площадь поперечного сечения может плавно изменяться произвольным образом.

Рассмотрим модель идеального (невязкого, нетеплопроводного, однородного, не испытывающего физических и химических превращений) сжимаемого газа при условии, что отсутствует теплообмен с окружающей средой (адиабатический процесс). Для расчета параметров изозентропического течения используют уравнения, полученные на основе законов сохранения массы, количества движения и энергии.

Известно, что при отсутствии теплообмена для идеального газа уравнения движения и энергии записываются соответственно в виде

$$V dV + \frac{dp}{\rho} = 0; \quad V dV + di = 0,$$

откуда следует, что

$$di - \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (4.1)$$

При изучении движения газа необходимо пользоваться функцией S его состояния, которая называется энтропией. Эта функция определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$dS = dq_e / T, \quad (4.2)$$

где q_e — теплота, подведенная к системе извне, а также вследствие диссипации энергии.

Согласно первому закону термодинамики,

$$dq_e = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = de + d\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{dp}{\rho} = d\left(e + \frac{p}{\rho}\right) - \frac{dp}{\rho}. \quad (4.3)$$

Учитывая, что энтальпия газа $i = e + p/\rho$, соотношение (4.3) можно записать в виде

$$dq_e = di - \frac{dp}{\rho}, \quad (4.4)$$

или

$$TdS = di - \frac{dp}{\rho}. \quad (4.5)$$

Из выражений (4.1) и (4.5) следует, что $TdS = 0$, а значит, для рассматриваемой модели сжимаемого газа энтропия S должна быть постоянной. Процессы, протекающие без теплообмена и при отсутствии потерь (с постоянной энтропией), называются *изэнтропическими*.

Получим уравнение для изэнтропы, которое лежит в основе расчета параметров потока при изэнтропическом течении. С учетом уравнения состояния $p = \rho RT$ преобразуем соотношение (4.4) к виду

$$dq_e = c_v dT - RT \frac{d\rho}{\rho}. \quad (4.6)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (4.2) с учетом (4.6), получаем

$$S = c_v \ln \frac{p}{\rho^k} + C.$$

Поскольку энтропия постоянна, то и отношение $p/\rho^k = \text{const}$.

Таким образом, система основных уравнений, описывающих изэнтропическое течение, имеет следующий вид:

$$\rho VF = C_1; \quad (4.7)$$

$$V^2/2 + c_p T = C_2; \quad (4.8)$$

$$p/\rho^k = C_3; \quad (4.9)$$

$$p = \rho RT, \quad (4.10)$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные величины.

Эта система является алгебраической и содержит четыре неизвестных основных параметра p, ρ, T и V , характеризующих состояние потока газа. Для решения системы необходимо знать граничные условия, которые включают в себя зависимость $F(x)$ изменения площади поперечного сечения потока вдоль продольной координаты.

Получим основные соотношения, связывающие параметры потока при изэнтропическом течении.

Рассмотрим плоский канал постоянного сечения, заполненный газом с параметрами p_2, ρ_2, T_2 и $V_2 = 0$ (рис. 4.1). Пусть в некоторый момент времени в нем с небольшой скоростью начинает равномерно двигаться поршень, который приводит в движение части-

цы газа. Поскольку газ сжимаем, движение частиц не может начаться одновременно во всем занимаемом им объеме. Поэтому в каждый момент времени будет существовать фронт возмущения AA_1 , который движется с некоторой скоростью a и отделяет область возмущенной газовой среды $(p_1, \rho_1, T_1$ и $V_1)$ от невозмущенной $(p_2, \rho_2, T_2$ и $V_2)$.

Определим скорость a , используя основные уравнения сохранения. Из уравнения неразрывности, записанного для единичной площади F ,

$$\dot{m} = \rho_1(a - V_1) = \rho_2 a$$

получаем выражение для скорости a :

$$a = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_1 - \rho_2}, \quad (4.11)$$

а из уравнения движения

$$\dot{m} a - \dot{m}(a - V_1) = \dot{m} V_1 = p_1 - p_2,$$

используя уравнение неразрывности, находим, что скорость распространения фронта возмущений

$$a = \frac{p_1 - p_2}{\rho_2 V_1}. \quad (4.12)$$

Предположим, что при переходе через фронт возмущений параметры газа изменяются незначительно, т. е.

$$p_1 = p_2 + dp; \quad \rho_1 = \rho_2 + d\rho; \quad V_1 = dV,$$

тогда, подставляя эти выражения в (4.11) и (4.12) и отбрасывая члены второго порядка малости, получаем

$$a = \frac{(\rho_2 + d\rho)dV}{\rho_2 + d\rho - \rho_2} = \rho_2 \frac{dV}{d\rho}; \quad (4.13)$$

$$a = \frac{p_2 + dp - p_2}{\rho_2 dV} = \frac{dp}{\rho_2 dV}. \quad (4.14)$$

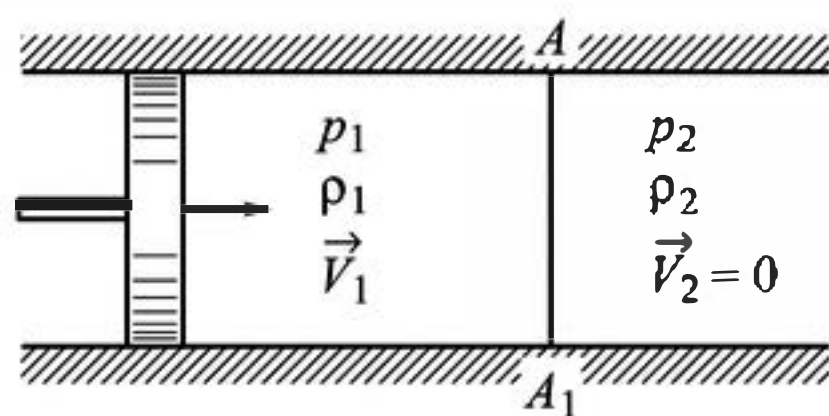


Рис. 4.1. Распространение возмущений в газе при движении поршня

Выразив из формулы (4.13) плотность

$$\rho_2 = a \frac{d\rho}{dV}$$

и подставив ее в выражение (4.14), получим соотношение для скорости распространения слабых возмущений (скорости звука) в среде:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \quad (4.15)$$

которая прямо пропорциональна изменению давления dp и обратно пропорциональна изменению плотности $d\rho$.

Для определения скорости звука при изэнтропическом течении газа прологарифмируем уравнение (4.9):

$$\ln p = \ln C_3 + k \ln \rho. \quad (4.16)$$

Дифференцируя уравнение (4.16), находим

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho}.$$

С учетом выражения (4.15) получаем

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}}, \quad (4.17)$$

или, согласно уравнению состояния (4.10),

$$a = \sqrt{kRT}.$$

Рассмотрим газовый поток, обтекающий некоторую поверхность (рис. 4.2). Параметры в сечении, соответствующем невозмущенному течению в этом потоке, обозначим через $V_\infty, p_\infty, T_\infty, \rho, a$ в возму-

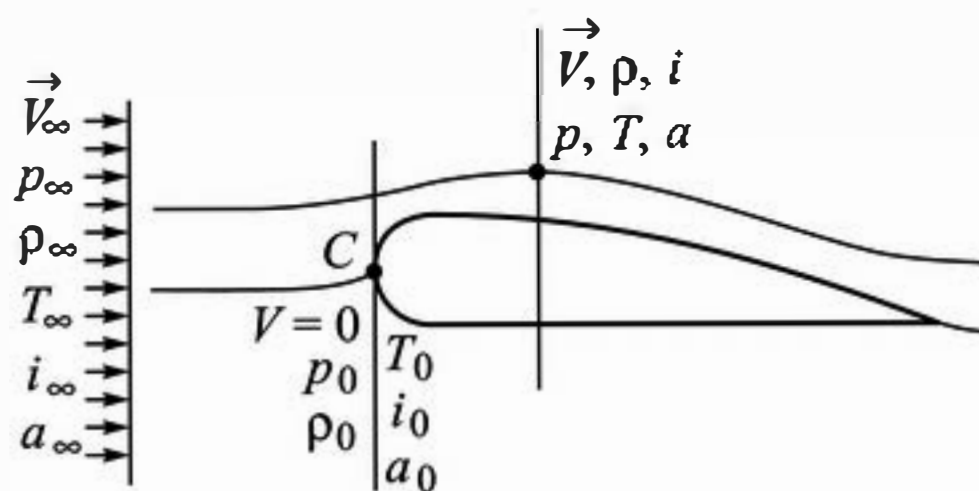


Рис. 4.2. Схема течения вблизи обтекаемой поверхности

щенной области (вблизи обтекаемого тела) — через V, p, T, ρ . Установим взаимосвязь между параметрами состояния газа и скоростью его движения. Запишем уравнение энергии (4.8) применительно к рассмотренным сечениям:

$$V_{\infty}^2 / 2 + i_{\infty} = V^2 / 2 + i.$$

Отсюда

$$V = \sqrt{V_{\infty}^2 + 2(i_{\infty} - i)}.$$

Пусть в некоторой точке C (см. рис. 4.2) поток полностью тормозится. Параметры состояния газа в точке с нулевой скоростью называются параметрами торможения и обозначаются индексом «0»: T_0, p_0, ρ_0 . Определяя константу в уравнении (4.9) и учитывая условия в точке торможения, запишем уравнение энергии в виде

$$i_0 = \frac{V^2}{2} + i, \quad (4.18)$$

где i_0 — энтальпия заторможенного потока. Тогда скорость газа в струе можно вычислить по зависимости

$$V = \sqrt{2(i_0 - i)}. \quad (4.19)$$

Подставляя в выражение (4.19)

$$i = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}, \quad i_0 = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0},$$

находим

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}.$$

Отсюда текущая скорость

$$V = \sqrt{2 \left[\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) \right]}. \quad (4.20)$$

Если отношение параметров в точке полного торможения постоянное:

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}, \quad (4.21)$$

то, выражая из (4.21) отношение ρ_0/ρ и подставляя его в (4.20), получаем

$$V = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}.$$

Поскольку для условий полного торможения скорость звука $a_0 = \sqrt{kp_0/\rho_0}$, текущая скорость потока

$$V = a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (4.22)$$

Из соотношения (4.18) следует, что скорость потока возрастает по мере того, как уменьшается энтальпия, а следовательно, все большая часть внутренней энергии преобразуется в кинетическую. *Максимальная скорость* достигается при условии, что $i = 0$ ($p = 0$, $T = 0$), т. е. при расширении потока до полного вакуума.

В соответствии с формулой (4.19)

$$V_{\max} = \sqrt{2i_0}, \quad (4.23)$$

или с учетом (4.22)

$$V_{\max} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}}.$$

Согласно выражению (4.23), максимальная скорость определяется только параметрами заторможенного потока. Поскольку при изэнтропическом течении параметры T_0 , p_0 , ρ_0 остаются постоянными (энергообмен с окружающей средой отсутствует, а также нет потерь, связанных с трением), скорость $V_{\max}$ будет постоянной.

Зная максимальную скорость, можно определить скорость потока в произвольном сечении:

$$V = V_{\max} \sqrt{1 - i/i_0}.$$

Преобразуя выражение (4.18) с учетом (4.17), получим

$$a^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2} V^2, \quad (4.24)$$

или

$$a^2 = \frac{k-1}{2}(V_{\max}^2 - V^2). \quad (4.25)$$

Из соотношения (4.25) следует, что чем больше скорость течения газа, тем меньше местная скорость звука. В диапазоне дозвуковых скоростей по мере увеличения скорости течения местная скорость звука будет уменьшаться, но оставаться больше местной скорости течения ($V < a$). При сверхзвуковом течении скорость звука становится меньше местной скорости течения. Сечение, в котором местная скорость потока газа равна местной скорости звука, называется *критическим*. Соответствующее ему значение скорости обозначают a^* . Критическими для этого сечения называют и такие параметры газа, как давление p^* , плотность ρ^* , температура T^* .

Согласно соотношению (4.25),

$$a^{*2} = \frac{k-1}{2}(V_{\max}^2 - a^{*2}),$$

откуда

$$a^* = V_{\max} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}.$$

Используя уравнение энергии

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{a^{*2}}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p^*}{\rho^*}$$

и выражение (4.17), находим

$$a^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\rho_0}} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}. \quad (4.26)$$

Кроме числа Маха $M = V/a$ в качестве безразмерных скоростей можно использовать число Крокко $Cr = V/V_{\max}$ или относительную скорость $\lambda = V/a^*$. Преобразовав уравнение (4.24) с учетом (4.26), получим зависимость между M и λ :

$$\lambda^2 = \frac{k+1}{2} M^2 \left/ \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right. \quad (4.27)$$

В сечении, где $V = V_{\max}$, число $M \rightarrow \infty$, а следовательно, $\lambda = \lambda_{\max}$ также при $M \rightarrow \infty$:

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Очевидно, что в критическом сечении, где $M = 1$, значение $\lambda = 1$. В произвольном сечении при $1 \leq M \leq \infty$ относительная скорость изменяется в пределах $1 \leq \lambda \leq \sqrt{k+1/(k-1)}$.

Разделив левые и правые части уравнений (4.24) и (4.25) на V , легко установить связь между числами Крокко и Маха:

$$\text{Cr}^2 = \frac{k-1}{2} M^2 \left/ \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right. . \quad (4.28)$$

Связь между числом Крокко и безразмерной скоростью определяется соотношением

$$\text{Cr}^2 = \frac{k-1}{k+1} \lambda^2. \quad (4.29)$$

Для установления зависимости давления, плотности, температуры потока от его скорости воспользуемся уравнением (4.18). Разделим его левую и правую части на полную энтальпию i_0 :

$$\frac{i}{i_0} = 1 - \frac{V^2}{2i_0}. \quad (4.30)$$

С учетом того, что $i = c_p T$, $i_0 = c_p T_0$, а $V_{\max}^2 = 2i_0$, зависимость (4.30) можно представить в виде

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2} = 1 - \text{Cr}^2. \quad (4.31)$$

Согласно уравнениям изоэнтропы (4.9) и состояния (4.10), имеют место следующие соотношения:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

или с учетом соотношения (4.31)

$$\frac{p}{p_0} = (1 - \text{Cr}^2)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = (1 - \text{Cr}^2)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (4.32)$$

Поскольку при одномерном изэнтропическом течении параметры торможения остаются постоянными, то из соотношений (4.31) и (4.32) следует, что с ростом скорости потока от нуля до $V_{\max}$ его параметры непрерывно уменьшаются и стремятся к нулевым значениям (рис. 4.3).

Подставляя в (4.31) и (4.32) зависимости (4.28) и (4.29), получаем соотношения между газодинамическими параметрами:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{-k}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad (4.33)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{-1}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad (4.34)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-1} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right). \quad (4.35)$$

В критическом сечении ($V = a^*$) $M = \lambda = 1$, $Cr = \sqrt{(k-1)/(k+1)}$. Из соотношений (4.33)–(4.35) для критических значений давления p^* , плотности ρ^* и температуры T^* находим

$$\begin{aligned} \frac{p^*}{p_0} &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \\ \frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \\ \frac{T^*}{T_0} &= \frac{2}{k+1}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Таким образом, все параметры газа в сечении, где скорость потока достигает скорости звука, являются функциями только параметров торможения T_0 , p_0 и ρ_0 . Для воздуха ($k = 1,4$) формулы (4.36) принимают вид

$$p^* = 0,528 p_0; \quad \rho^* = 0,636 \rho_0; \quad T^* = 0,831 T_0.$$

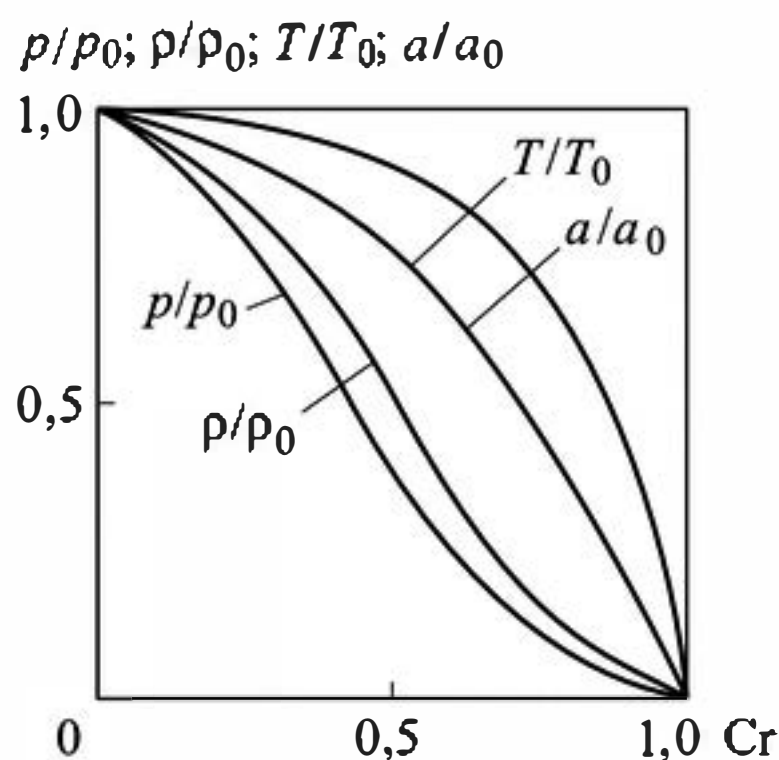


Рис. 4.3. Зависимости давления, плотности, температуры и скорости звука в газовой струе от безразмерной скорости течения

Газодинамические функции

Для удобства аэродинамических расчетов и их упрощения используют так называемые газодинамические функции — безразмерные комплексы, представляющие собой отношение значения какого-либо параметра потока в данном сечении к его значению при полном торможении или в критическом сечении, а также более сложные функции, определяющие отношение какого-либо комплекса параметров в одном или разных сечениях к некоторому иному комплексу параметров потока в других сечениях. Среди множества функций можно выделить основные, которые дают возможность решать большинство встречающихся на практике задач:

$$\pi = \frac{p}{p_0}; \quad \varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \tau = \frac{T}{T_0}.$$

Значения этих функций могут быть вычислены, например, по соотношениям (4.33)–(4.35), из которых следует, что газодинамические функции зависят от показателя адиабаты k и безразмерной скорости:

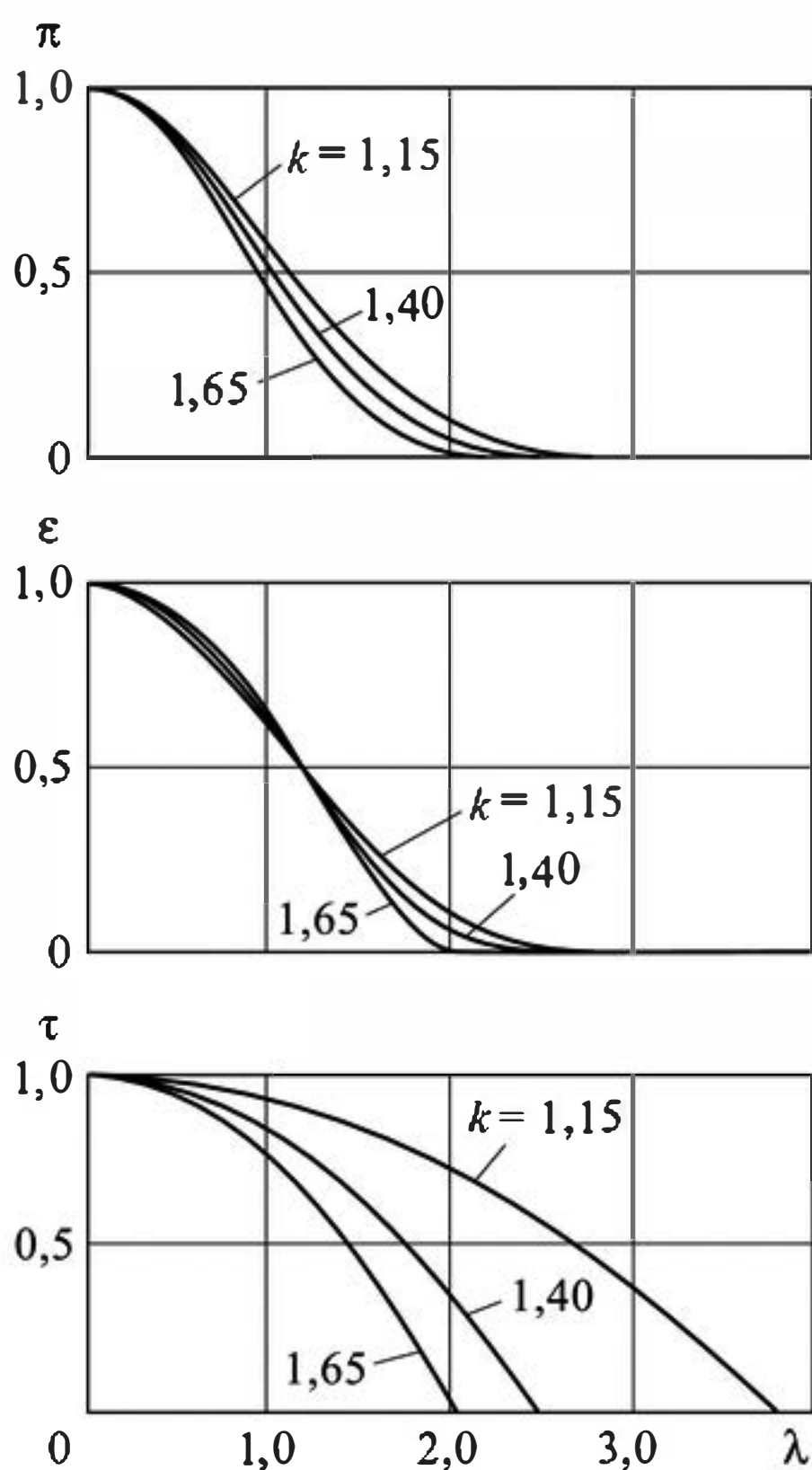


Рис. 4.4. Характер изменения функций $\pi(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$ и $\tau(\lambda)$ при различных k

$$\begin{aligned} \pi(M, k) &= \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{-k}{k-1}}, \\ \pi(\lambda, k) &= \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \\ \varepsilon(M, k) &= \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{-1}{k-1}}, \\ \varepsilon(\lambda, k) &= \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \tau(M, k) &= \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-1}, \\ \tau(\lambda, k) &= \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right). \end{aligned}$$

Характер изменения функций π , ε , τ от безразмерной скорости λ для трех различных значений k проиллюстрирован на рис. 4.4.

При преобразовании уравнения расхода используют функцию q , представляющую собой отношение плотности потока массы ρV в рассматриваемом сечении потока к плотности потока массы $\rho^* a^*$ в критическом сечении потока:

$$q = \frac{\rho V}{\rho^* a^*}. \quad (4.37)$$

Записав уравнение неразрывности (4.7) для текущего и критического сечений площадью F и F^* соответственно:

$$\rho V F = \rho^* V^* F^*,$$

находим, что функция q равна отношению площадей в критическом и текущем сечениях потока:

$$q = F^* / F.$$

Умножив и разделив правую часть уравнения (4.37) на ρ_0 :

$$q = \frac{\rho_0}{\rho^*} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V}{a^*},$$

с помощью формул (4.34) и (4.36) легко выразить функцию q через безразмерную скорость λ :

$$q(\lambda, k) = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda, \quad (4.38)$$

а используя формулу (4.27), определить q как функцию числа Маха:

$$q(M, k) = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}. \quad (4.39)$$

Соотношения (4.38) или (4.39) позволяют вычислить безразмерную скорость и параметры потока в любых сечениях потока, для которых известна относительная площадь F^* / F .

Графики функции $q(\lambda)$ для различных k представлены на рис. 4.5, а. Возрастание $q(\lambda)$ при $0 \leq \lambda \leq 1$ показывает, что в дозвуковом диапазоне плотность уменьшается медленнее, чем увеличивается скорость. Наоборот, в сверхзвуковом диапазоне плотность падает быст-

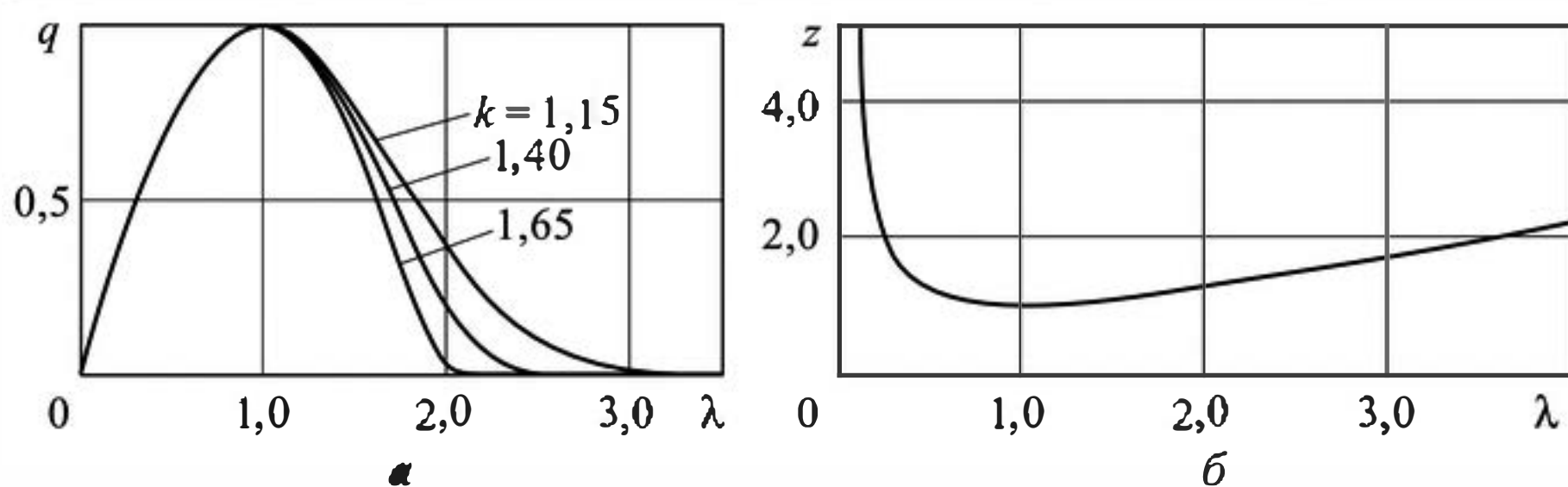


Рис. 4.5. Графики функции $q(\lambda)$ (а) и $z(\lambda)$ (б)

рее, чем растет скорость. Максимум функции $q(\lambda)$ достигается в критическом сечении, где $q(1) = 1$.

Для характеристики импульса потока используют функцию z , которая представляет собой отношение полного импульса потока $\dot{m}V + pF$ к полному импульсу потока в критическом сечении $\dot{m}^* + p^* F^*$ и называется приведенным импульсом потока:

$$z = \frac{\dot{m}V + pF}{\dot{m}^* + p^* F^*}.$$

Выражая параметры потока, например, через безразмерную скорость λ , получаем

$$z(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right).$$

На рис. 4.5, б представлен график функции $z(\lambda)$. Видно, что для каждого значения z существует два значения λ , соответствующие дозвуковой и сверхзвуковой областям. Отметим, что функцию $z(\lambda)$ иногда определяют в виде

$$z(\lambda) = \lambda + 1/\lambda.$$

Связь между площадью сечения струи и скоростью ее движения

Рассмотрим одномерное установившееся движение идеального (невязкого) газа в струе переменного сечения. Для установления связи между изменением основных параметров газового потока и площадью сечения струи воспользуемся уравнением неразрывности (4.7). Логарифмируя, а затем дифференцируя его, получаем

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dF}{F} = 0. \quad (4.40)$$

Выразим из (4.40) отношение

$$\frac{dF}{dV} = -F \left(\frac{1}{V} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dV} \right)$$

и исключим из правой части $d\rho/dV$. Дифференцируя уравнение движения при условии отсутствия массовых сил:

$$d \frac{V^2}{2} + \frac{dp}{\rho} = 0,$$

получаем

$$dV = -\frac{1}{V} \frac{dp}{\rho}$$

или, учитывая, что $dp = a^2 d\rho$ (см. выражение (4.15)),

$$dV = -\frac{1}{V} \frac{a^2 d\rho}{\rho}. \quad (4.41)$$

Подставив соотношение (4.41) в (4.40), после преобразований имеем

$$\frac{dF}{dV} = \frac{F}{V} (M^2 - 1). \quad (4.42)$$

Полученная зависимость позволяет установить закономерность изменения скорости потока от площади поперечного сечения струи. При дозвуковом течении ($M < 1$) производная $dF/dV < 0$. Если площадь сечения струи уменьшается ($dF < 0$), то $dV > 0$, а значит, скорость дозвукового потока возрастает. Наоборот, увеличение площади сечения струи ($dF > 0$) приводит к уменьшению скорости дозвукового потока. Для сверхзвуковых течений ($M > 1$) знаки dF и dV совпадают. Следовательно, при увеличении площади сечения струи ($dF > 0$) скорость возрастает ($dV > 0$), а в противоположном случае — уменьшается.

Сопло Лавала. Режимы работы сопла

Чтобы разогнать газ от полностью заторможенного (с параметрами p_0, ρ_0, T_0) до сверхзвукового, необходимо взять насадок, который сначала имеет форму сужающегося канала, а затем расширяющегося (рис. 4.6). В критическом (самом узком) сечении канала, которому соответствует значение производной $dF/dV = 0$, число Маха должно быть равно единице, т. е. $V = a^*$. Такая скорость воз-

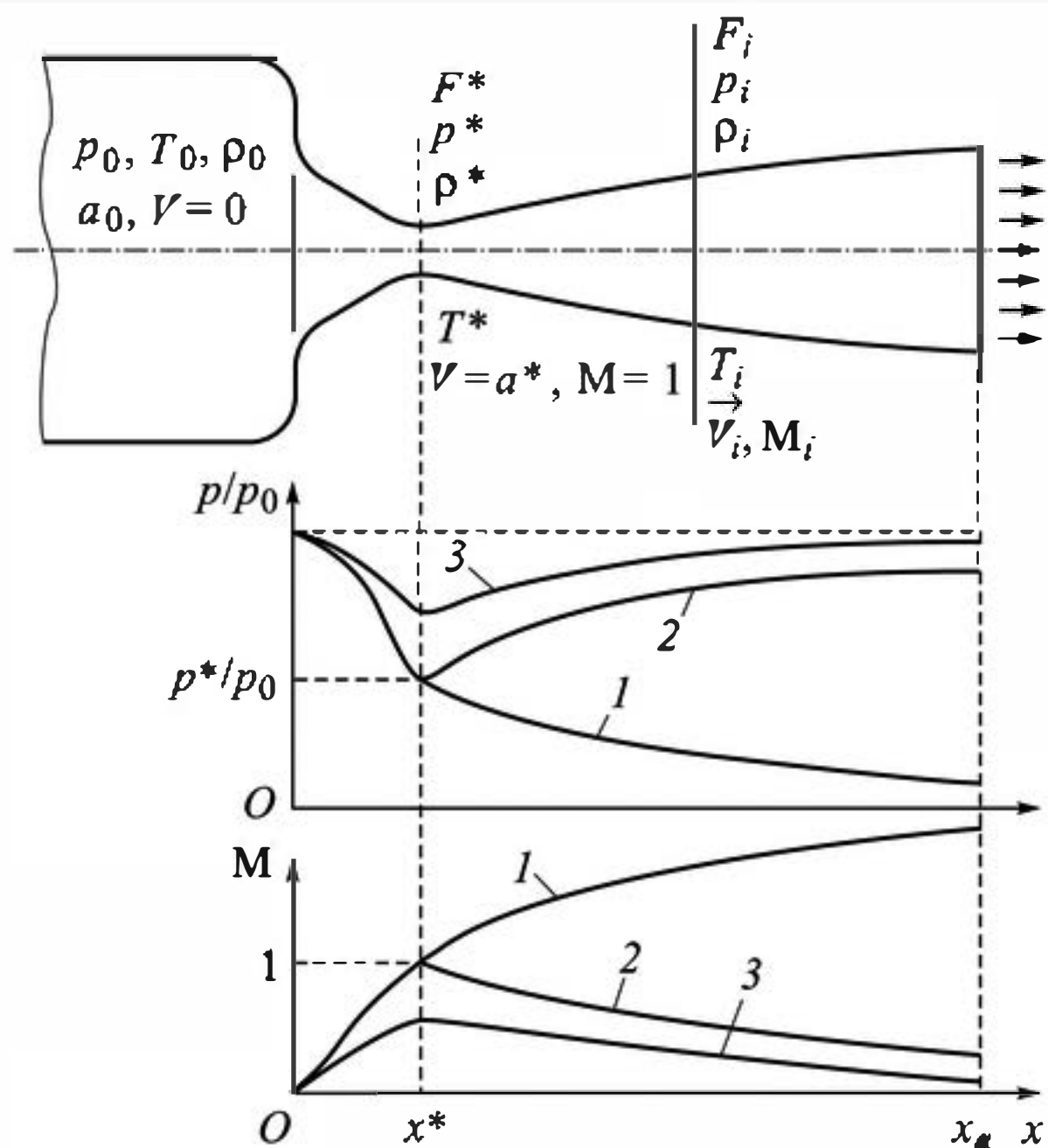


Рис. 4.6. Режимы работы сопла Лавали

можно при условии, что полное давление должно быть не ниже, чем $p_0 = p^* \left[\frac{k+1}{2} \right]^{k/(k-1)}$. Для воздуха с показателем адиабаты $k = 1,4$ необходимый для движения газа перепад давлений во входном и в критическом сечениях должен составлять $p_0/p^* \geq 1,89$. Например, если на выходе канал сообщается с атмосферным воздухом с $p_{\text{атм}} = 0,1$ МПа (давление на выходе из канала называется противодавлением), то в критическом сечении должно быть $p^* \geq 0,1$ МПа, а $p_0 \geq 0,189$ МПа.

При достижении критических параметров в самом узком сечении канала дальнейшее уменьшение противодавления не сказывается на значениях p^*, a^* , зависящих только от параметров заторможенного потока. Однако при этом создаются условия для возникновения сверхзвуковой скорости движения газа по расширяющейся части канала. На рис. 4.6 этому режиму изэнтропического течения соответствуют кривые 1.

В случае если давление на выходе из канала возрастает, для сохранения условий движения газа должно возрасть и давление в критическом сечении насадка. При фиксированном значении полного давления получаем $p_0/p^* < 1,89$, т. е. скорость в критическом

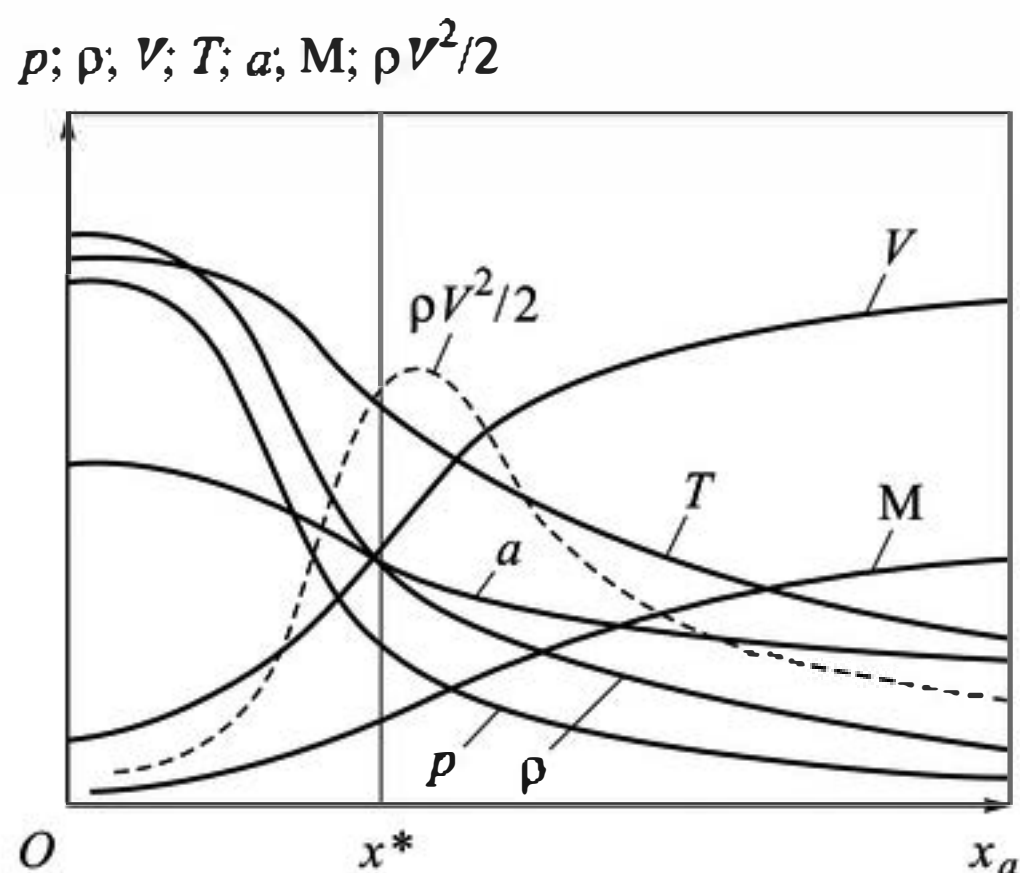


Рис. 4.7. Изменение параметров потока по длине сопла

сечении будет дозвуковой ($V < a^*$). В расширяющейся части канала скорость будет снижаться (см. рис. 4.6, кривые 2, 3).

Канал переменного сечения, вдоль которого скорость потока непрерывно возрастает, становясь сверхзвуковой (кривая 1 на рис. 4.6), называется *соплом Лавала*.

При известных параметрах торможения p_0, ρ_0, T_0 (см. рис. 4.6) и заданном профиле сопла вдоль оси Ox можно рассчитать газодинамические параметры потока по длине сопла. Используя газодинамическую функцию $q(M, k)$, по формуле (4.39) вычисляют число M_i в текущем сечении сопла площадью F_i . Считая течение газа изэнтропическим, т. е. пренебрегая диссипацией энергии вследствие трения и теплообмена через стенки сопла, по газодинамическим функциям (4.33)–(4.35) находят статическое давление p_i , плотность ρ_i и температуру T_i , а по формуле (4.17) — скорость звука a_i , а следовательно, и скорость потока ($V_i = M_i a_i$). Качественное изменение определяемых параметров по длине сопла Лавала показано на рис. 4.7.

4.2. Основные соотношения для определения параметров газа за скачком уплотнения

Общие сведения о скачках уплотнения

Отличительной особенностью сверхзвуковых газовых потоков является то, что в них при условии торможения образуются поверхности разрыва, при переходе через которые практически все пара-

метры газа меняются скачкообразно (скорость резко уменьшается, а давление, плотность и температура возрастают) и поток переходит от одного состояния к другому. Такие поверхности, перемещающиеся относительно газовой среды, представляют собой ударные волны. Если положение этих поверхностей в любой момент времени не изменяется, то они называются *скачками уплотнения*.

Возникающий в реальных условиях скачок уплотнения характеризуется некоторой толщиной, соизмеримой со средним путем пробега молекул. Изменение параметров газа в таком скачке будет не мгновенным, а быстропротекающим с непрерывным изменением состояния газа. При этом процесс перехода через скачок характеризуется настолько большими градиентами скорости и температуры, что в областях сжатия весьма существенно влияние трения и теплопроводности, которые вызывают диссипацию энергии в потоке и увеличение энтропии.

При больших сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростях движения газа его резкое торможение сопровождается диссоциацией, ионизацией и физико-химическими превращениями за скачком уплотнения и термодинамическое равновесие достигается по истечении некоторого времени. Исследование таких скачков представляет собой сложную задачу, которая связана прежде всего с изучением механизма неравновесных процессов.

Большой теоретический и практический интерес представляет задача о течении газа за скачком уплотнения в случае, если удельные теплоемкости остаются постоянными. Хотя такое течение считается идеализированным движением газа, не учитывающим физико-химические превращения при переходе через скачок уплотнения, задача дает возможность представить качественную картину скачкообразного перехода. Получаемые при этом зависимости можно использовать и для приближенной оценки параметров газа при переменных теплоемкостях. Наконец, рассматриваемая задача имеет и самостоятельное значение, поскольку ее решение применимо непосредственно для определения параметров газа за скачком уплотнения, возникающем в диапазоне умеренных сверхзвуковых скоростей обтекания ($M_1 < 6$), когда изменение удельных теплоемкостей в газе пренебрежимо мало.

Наиболее распространенный случай формирования скачков уплотнения соответствует обтеканию тел, движущихся прямолинейно с постоянной сверхзвуковой скоростью (рис. 4.8).

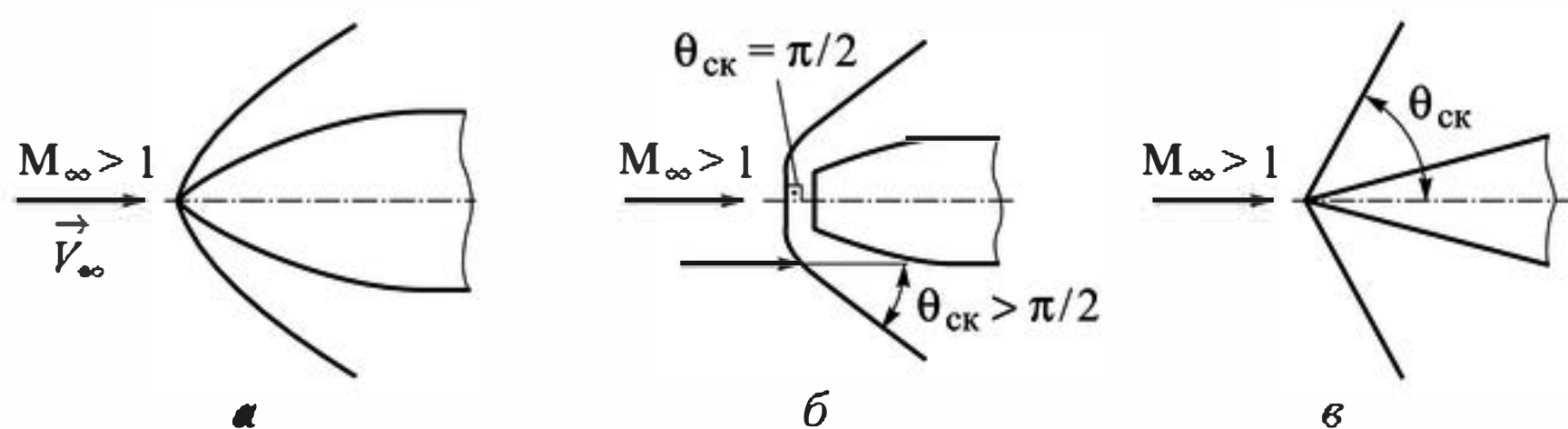


Рис. 4.8. Основные типы скачков уплотнения

Присоединенный криволинейный скачок уплотнения образуется при обтекании заостренного тела вращения криволинейной формы (параболической, оживальной и т. д.) (см. рис. 4.8, а). Отсоединенный криволинейный скачок уплотнения формируется перед затупленной поверхностью, обтекаемой сверхзвуковым потоком (см. рис. 4.8, б). При сверхзвуковом обтекании заостренного тела с прямолинейной образующей возникает прямолинейный присоединенный скачок (см. рис. 4.8, в).

На рис. 4.8 видно, что поверхности скачков уплотнения могут быть ориентированы нормально по отношению к вектору скорости набегающего потока ($\theta_{\text{ск}} = 90^\circ$) или наклонены к нему под некоторым углом ($\theta_{\text{ск}} < 90^\circ$). В первом случае скачок называется *прямым*, во втором — *косым*.

Прямой скачок уплотнения в газе при $c_p, c_v = \text{const}$

Обозначим индексами «1» и «2» соответственно параметры в невозмущенном потоке и за скачком уплотнения вблизи поверхности разрыва. Для прямого скачка уплотнения, возникающего в идеальном газе, неизвестных параметров будет семь: $p_2, \rho_2, T_2, V_2, a_2, i_2, S_2$. Следовательно, необходимо составить систему из семи уравнений, в которую в качестве известных величин будут входить параметры газа до скачка: $p_1, \rho_1, T_1, V_1, a_1, i_1, S_1$.

Для этого выделим в пространстве элемент течения, содержащий скачок уплотнения (рис. 4.9), и запишем уравнения сохранения аэрогазодинамики (неразрывности, движения, энергии) для единичной площадки F соответственно в виде

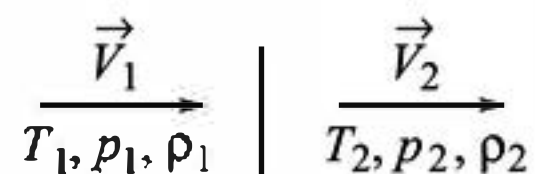


Рис. 4.9. Прямой скачок уплотнения

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2; \quad (4.43)$$

$$\rho_1 V_1 (V_1 - V_2) = p_2 - p_1; \quad (4.44)$$

$$i_1 + \frac{V_1^2}{2} = i_2 + \frac{V_2^2}{2}, \quad (4.45)$$

а также уравнения состояния для условий до и после скачка:

$$p_2 - p_1 = R(\rho_2 T_2 - \rho_1 T_1). \quad (4.46)$$

Эти выражения позволяют определить четыре неизвестных параметра p_2 , ρ_2 , T_2 и V_2 за скачком уплотнения. Поскольку течение за скачком будет, как и до скачка, изоэнтропическим (при условии отсутствия трения и теплообмена с окружающей средой), энтальпию и скорость звука можно вычислить по зависимостям, известным из теории изоэнтропических течений:

$$i_2 = \frac{k}{k-1} RT_2 = c_p T_2; \quad (4.47)$$

$$a_2 = \sqrt{kRT_2}. \quad (4.48)$$

Изменение энтропии недиссоциирующего совершенного газа

$$dS = \frac{di}{T} - \frac{dp}{\rho T}$$

или с учетом равенств $di = c_p dT$ и $dp = d(\rho RT) = \rho R dT + T R d\rho$

$$dS = c_p d \ln T - R d \ln T - R d \ln \rho.$$

Поскольку $c_p - R = c_v$, а $R/c_v = k - 1$, получаем

$$dS = c_v [d \ln T - (k - 1) d \ln \rho]. \quad (4.49)$$

Интегрируя уравнение (4.49) при $k = \text{const}$, находим

$$S = c_v \ln \frac{T}{\rho^{k-1}} + C. \quad (4.50)$$

Из уравнения состояния имеем

$$\frac{T}{\rho^{k-1}} = \frac{p}{\rho^k R};$$

$$\ln \frac{p}{\rho^k R} = \ln \frac{p}{\rho^k} - \ln R.$$

Включая в правую часть уравнения (4.50) постоянную $\ln R$, получаем зависимость для энтропии в следующем виде:

$$S = c_V \ln \frac{p}{\rho^k} + C. \quad (4.51)$$

Применительно к условиям до скачка уплотнения и после него это уравнение имеет вид

$$S_1 = c_V \ln \frac{p_1}{\rho_1^k}; \quad S_2 = c_V \ln \frac{p_2}{\rho_2^k}. \quad (4.52)$$

Определив разность энтропий, находим уравнение для вычисления градиента возрастания энтропии за скачком уплотнения:

$$S_2 - S_1 = c_V \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1^k}{\rho_2^k} \right).$$

Таким образом, используя зависимости (4.43)–(4.48), а также (4.52), можно рассчитать параметры газа при переходе через прямой скачок уплотнения.

Получим теперь соотношение, определяющее связь между скоростями V_1 и V_2 . Разделим уравнение движения (4.44) на уравнение неразрывности (4.43):

$$\frac{p_2}{\rho_2 V_2} - \frac{p_1}{\rho_1 V_1} = V_1 - V_2.$$

Заменяя отношения p_2/ρ_2 и p_1/ρ_1 соответственно на a_1^2/k и a_2^2/k и используя уравнение для скорости звука в виде

$$a^2 = \frac{k+1}{2} a^{*2} - \frac{k-1}{2} V^2,$$

записанное для течения до скачка уплотнения и после него, находим

$$\frac{1}{kV_2} \left(\frac{k+1}{2} a_1^{*2} - \frac{k-1}{2} V_2^2 \right) - \frac{1}{kV_1} \left(\frac{k+1}{2} a_2^{*2} - \frac{k-1}{2} V_1^2 \right) = V_1 - V_2. \quad (4.53)$$

Из теории изэнтропических течений известно, что критическая скорость до и после скачка уплотнения

$$a_1^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_{01}}; \quad a_2^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_{02}}, \quad (4.54)$$

где T_{01} , T_{02} — параметры торможения до и после скачка уплотнения.

Согласно уравнению энергии (4.45), полная энтальпия до скачка уплотнения $i_{01} = c_p T_{01}$, а после него $i_{02} = c_p T_{02}$. Поскольку при постоянных теплоемкостях полная энтальпия при переходе через скачок уплотнения сохраняется ($i_{01} = i_{02}$), то равны и полные температуры ($T_{01} = T_{02}$). Следовательно, критическая скорость звука (см. (4.54)) будет также постоянной ($a_1^* = a_2^* = a^*$) и соотношение (4.53) примет вид

$$\frac{1}{kV_2} \left(\frac{k+1}{2} a^{*2} - \frac{k-1}{2} V_2^2 \right) - \frac{1}{kV_1} \left(\frac{k+1}{2} a^{*2} - \frac{k-1}{2} V_1^2 \right) = V_1 - V_2.$$

Приводя подобные члены и сокращая на разность $V_1 - V_2 \neq 0$, получаем

$$V_1 V_2 = a^{*2}, \quad (4.55)$$

или

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (4.56)$$

Уравнение (4.56) является одним из основных уравнений теории прямого скачка уплотнения. Если до прямого скачка $V > a^*$, то после него $V < a^*$, т. е. при наличии прямого скачка уплотнения сверхзвуковой поток всегда переходит в дозвуковой.

Используя соотношение (4.56), найдем изменение параметров газа при переходе через скачок. Для определения отношения давлений p_2/p_1 , которое характеризует интенсивность скачка уплотнения, разделим обе части уравнения (4.44) на p_1 :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\rho_1 V_1 (V_1 - V_2)}{p_1} = 1 + \frac{\rho_1 V_1^2}{p_1} \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Умножив и разделив второе слагаемое в правой части этого уравнения на k , получим

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{k \rho_1 V_1^2}{k p_1} \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right),$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + k M_1^2 \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right).$$

С учетом выражений (4.27) и (4.55) находим

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1}(M_1^2 - 1) = \frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}. \quad (4.57)$$

Из уравнения неразрывности (4.43) следует, что

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \lambda_{1*}^2.$$

Тогда, проводя элементарные преобразования, получаем выражение для отношения плотностей потока после и до скачка уплотнения:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)M_1^2}{2 + (k-1)M_1^2}. \quad (4.58)$$

Для вычисления отношения температур T_2/T_1 в соответствии с уравнением состояния (4.46) можно записать

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

или с учетом выражений (4.57) и (4.58)

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \right) \left(\frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2} \right). \quad (4.59)$$

Таким образом, перепад газодинамических параметров при переходе через прямой скачок уплотнения является функцией только безразмерной скорости набегающего потока (M или λ) и показателя адиабаты k .

Исключив из соотношений (4.57) и (4.58) M_1 , получим зависимость между отношением давлений и плотностей — уравнение Гюгонио, или ударной адиабаты:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\rho_2/\rho_1 - (k-1)}{(k+1) - (k-1)\rho_2/\rho_1}.$$

В отличие от обычного изэнтропического закона вида $p/\rho^k = \text{const}$ она определяет изменение параметров при переходе через скачок уплотнения. Согласно (4.57) и (4.59), при $M_1 \rightarrow \infty$ отношение давлений и температур безгранично возрастает, в то время как отношение плотностей $(\rho_2/\rho_1)_{\max} = (k+1)/(k-1)$ достигает максималь-

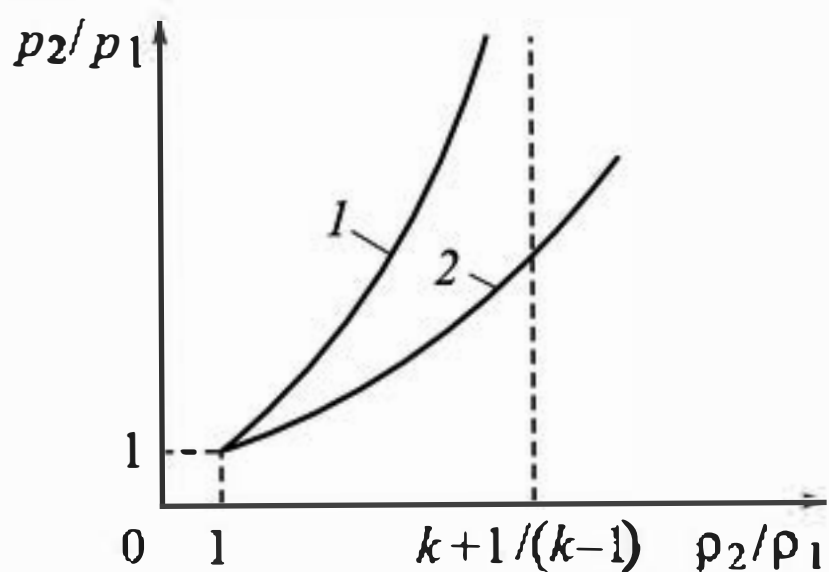


Рис. 4.10. Ударная адиабата (1) и изэнтропа (2)

ного значения, которое для воздуха ($k = 1,4$) равно 6. На рис. 4.10 изображены ударная адиабата и для сравнения изэнтропа вида $p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^k$. Видно, что в изэнтропическом процессе безграничному увеличению давления соответствует безграничное увеличение плотности, в то время как ударная адиабата имеет вертикальную асимптоту ρ_2/ρ_1 .

Определим полное давление за прямым скачком уплотнения, используя коэффициент восстановления полного давления $v = p_{02}/p_{01}$. Поскольку $p_1/\rho_1^k = p_{01}/\rho_{01}^k$ и $p_2/\rho_2^k = p_{02}/\rho_{02}^k$ (где $p_{01}, \rho_{01}, p_{02}, \rho_{02}$ — параметры торможения до и после скачка уплотнения), можно записать

$$v = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \left(\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \right)^k.$$

Умножив обе части этого равенства на отношение $(p_{01}/p_{02})^k$, получим

$$v^{1-k} = \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{1-k} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \left(\frac{\rho_{02} p_{01}}{\rho_{01} p_{02}} \right)^k.$$

Учитывая, что $i_{01} = i_{02}$, в соответствии с соотношениями для полной энтальпии:

$$i_{01} = \frac{k}{k-1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}}; \quad i_{02} = \frac{k}{k-1} \frac{p_{02}}{\rho_{02}},$$

имеем

$$\frac{p_{01}}{\rho_{01}} = \frac{p_{02}}{\rho_{02}}.$$

Следовательно, коэффициент восстановления полного давления может быть найден по формуле

$$v = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.60)$$

или с учетом зависимостей (4.57) и (4.58)

$$v = \left[\frac{k+1}{2kM_1^2 - (k-1)} \right]^{\frac{1}{k-1}} \left[\frac{(k+1)M_1^2}{2 + (k-1)M_1^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Анализ выражения (4.60) показывает, что за скачком уплотнения конечной интенсивности отношение давлений p_{02}/p_{01} всегда меньше единицы, причем чем сильнее скачок (больше p_2/p_1), тем значительнее потери полного торможения, а следовательно, меньше отношение p_{02}/p_{01} .

Косой скачок уплотнения в газе при $c_p, c_v = \text{const}$

Рассмотрим обтекание клина сверхзвуковым потоком. Перед клином образуется косой скачок уплотнения, фронт которого наклонен по отношению к скорости невозмущенного потока на угол $\theta_{\text{ск}}$, отличный от 90° (рис. 4.11). Разложим вектор скорости $\vec{V}$ набегающего потока на два направления: параллельно скачку $V_{1\tau}$ и перпендикулярно ему V_{1n} . Тогда

$$V_{1\tau} = V_1 \cos \theta_{\text{ск}}; \quad V_{1n} = V_1 \sin \theta_{\text{ск}};$$

$$V_1 = \sqrt{V_{1\tau}^2 + V_{1n}^2}; \quad \text{tg } \theta_{\text{ск}} = V_{1n}/V_{1\tau}.$$

Для скорости потока за скачком уплотнения имеем

$$V_{2\tau} = V_2 \cos (\theta_{\text{ск}} - \beta); \quad V_{2n} = V_2 \sin (\theta_{\text{ск}} - \beta);$$

$$V_2 = \sqrt{V_{2\tau}^2 + V_{2n}^2}; \quad \text{tg } (\theta_{\text{ск}} - \beta) = V_{2n}/V_{2\tau},$$

где β — угол разворота потока, равный углу наклона клина (см. рис. 4.11).

Для косого скачка уплотнения неизвестными величинами будут: $p_2, \rho_2, T_2, V_2, i_2, S_2, a_2$ и $\theta_{\text{ск}}$. Рассматривая косой скачок уплотнения как прямой относительно скорости V_{1n} , нормальной к фронту скачка, основные уравнения, необходимые для определения параметров потока за скачком уплотнения, можно записать аналогично уравнениям (4.43) и (4.44):

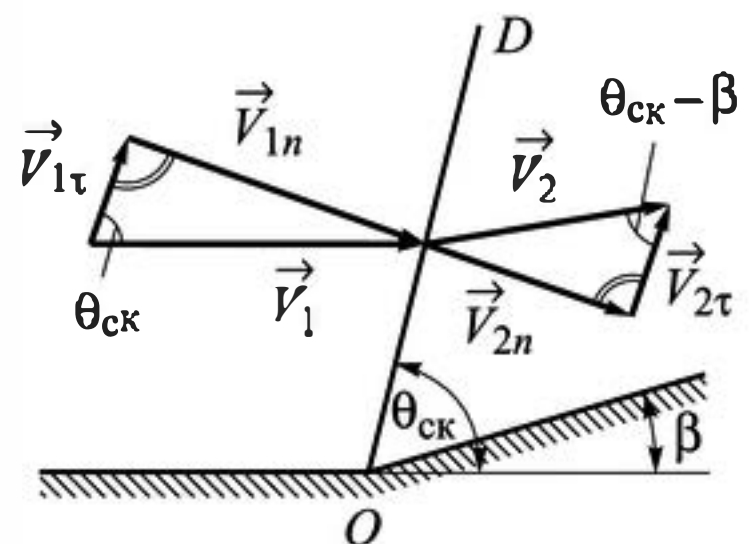


Рис. 4.11. Треугольники скоростей до и после косого скачка уплотнения

$$\begin{aligned}\rho_1 V_{1n} &= \rho_2 V_{2n}; \\ \rho_1 V_{1n}^2 - \rho_2 V_{2n}^2 &= p_2 - p_1.\end{aligned}\tag{4.61}$$

При выводе основных соотношений, связывающих параметры до и после косого скачка уплотнения, полагаем, что касательные составляющие скорости при переходе через скачок не меняются:

$$V_{1\tau} = V_{2\tau} = V_\tau.$$

Это условие позволяет установить простую геометрическую связь между скоростями V_1 и V_2 :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\cos \theta_{\text{ск}}}{\cos(\theta_{\text{ск}} - \beta)}.$$

Поскольку $V_1 = \sqrt{V_{1\tau}^2 + V_{1n}^2}$, $V_2 = \sqrt{V_{2\tau}^2 + V_{2n}^2}$, $V_{1\tau} = V_{2\tau}$, уравнение энергии (4.45) для нормальных составляющих скоростей имеет вид

$$i_1 + V_{1n}^2/2 = i_2 + V_{2n}^2/2,$$

а уравнение состояния для параметров потока до и после скачка аналогично (4.46). Проводя те же, что и для прямого скачка, преобразования, определяем связь между составляющими скоростей до и после косого скачка уплотнения:

$$V_{2n} V_{1n} = a^{*2} - \frac{k-1}{k+1} V_\tau^2.$$

Отношения газодинамических параметров при переходе через косой скачок уплотнения можно также записать относительно нормальной составляющей числа Маха невозмущенного потока:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_{1n}^2 - \frac{k-1}{k+1};\tag{4.62}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)M_{1n}^2}{2 + (k-1)M_{1n}^2};\tag{4.63}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2k}{k+1} M_{1n}^2 - \frac{k-1}{k+1} \right) \left(\frac{2 + (k-1)M_{1n}^2}{(k+1)M_{1n}^2} \right),\tag{4.64}$$

где M_{1n} — нормальное к фронту скачка значение числа Маха, $M_{1n} = M_1 \sin \theta_{\text{ск}}$.

В соотношениях (4.62)–(4.64) неизвестным является угол наклона косо́го скачка уплотнения $\theta_{\text{ск}}$, который можно найти, используя геометрические соотношения для треугольника скоростей (см. рис. 4.11) и уравнение неразрывности (4.61). Нормальная составляющая скорости до скачка $V_{1n} = V_\tau \operatorname{tg} \theta_{\text{ск}}$, а после скачка $V_{2n} = V_\tau \operatorname{tg} (\theta_{\text{ск}} - \beta)$. Тогда отношение скоростей

$$\frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{\operatorname{tg} \theta_{\text{ск}}}{\operatorname{tg} (\theta_{\text{ск}} - \beta)}$$

или с учетом уравнений (4.61) и (4.63)

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_{\text{ск}}}{\operatorname{tg} (\theta_{\text{ск}} - \beta)} = \frac{(k+1)M_1^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}{2 + (k-1)M_1^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}. \quad (4.65)$$

Поскольку для плоского скачка уплотнения угол разворота потока равен углу наклона клина, неизвестным в соотношении (4.65) является только угол наклона скачка уплотнения $\theta_{\text{ск}}$. Зависимость (4.65) позволяет также найти угол разворота потока за скачком по известному углу его наклона. На рис. 4.12 представлена графичес-

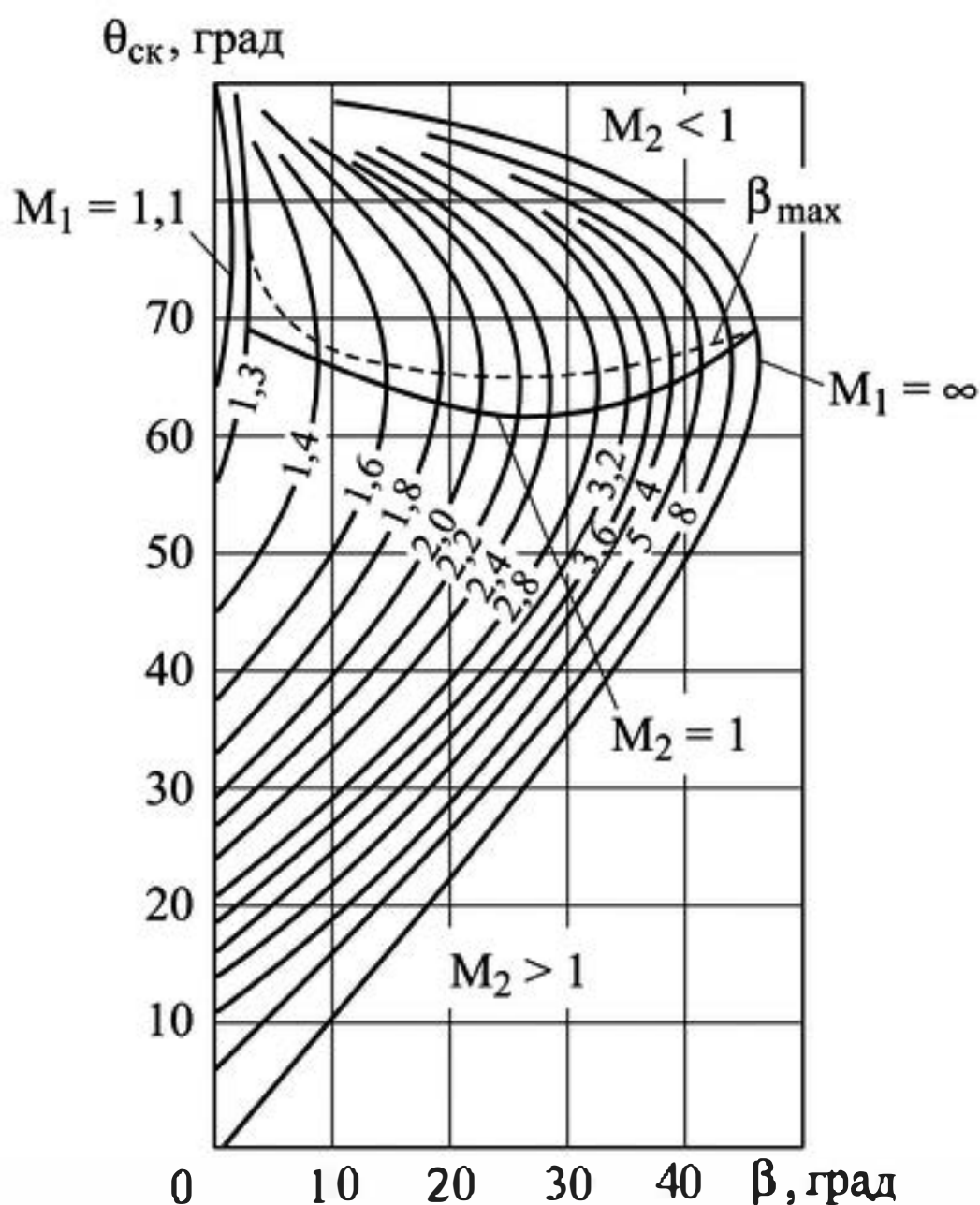


Рис. 4.12. Изменение угла разворота потока в зависимости от угла $\theta_{\text{ск}}$ при различных числах Маха и $k = 1,4$

ки связь между углами $\theta_{\text{ск}}$ и β при различных числах M_1 . Видно, что каждому значению β соответствуют два значения $\theta_{\text{ск}}$, определяемые числом M_1 . Значения, лежащие ниже штриховой линии, соответствуют образованию присоединенного скачка уплотнения при обтекании заостренных тел и формированию устойчивой структуры течения за скачком. По мере утолщения тела угол β может стать равным $\beta_{\text{кр}}$ (значения этого угла находятся на штриховой кривой). Угол $\beta_{\text{кр}}$ характеризуется тем, что скачок уплотнения перед заостренным телом, отделяясь, приобретает криволинейную форму; при этом вблизи оси потока появляется участок прямого скачка с $\theta_{\text{ск}} = 90^\circ$. Из двух возможных структур течения физически реализуется структура с образованием присоединенного скачка уплотнения (нижние ветви кривых). Это объясняется тем, что изменение энтропии при переходе газа из одного состояния в другое будет минимальным, т. е. система будет стремиться перейти в устойчивое состояние с наименьшей диссипацией.

Угол β разворота потока рассчитывают по формуле

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \theta_{\text{ск}} \left(M_1^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}} - 1 \right) \left[1 + \left(\frac{k+1}{2} - \sin^2 \theta_{\text{ск}} \right) M_1^2 \right]^{-1},$$

а угол $\theta_{\text{ск}}$ наклона скачка уплотнения при известном значении β — согласно выражению

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{ск}} = \operatorname{ctg} \beta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right)^2 - \operatorname{tg}^2 \beta \frac{\rho_2}{\rho_1}} \right]. \quad (4.66)$$

При движении тел с гиперзвуковыми скоростями возрастает интенсивность скачков уплотнения и, следовательно, уменьшается угол их наклона. В этом случае поперечная протяженность возмущенной зоны, ограниченной линией скачка и поверхностью обтекаемого тела, сокращается. При обтекании тонких тел такое физическое явление позволяет определить зависимость между углом наклона скачка уплотнения и углом разворота потока с использованием линейной теории. Считая, что углы $\theta_{\text{ск}}$ и β малы, т. е. $\operatorname{tg} \theta_{\text{ск}} \approx \sin \theta_{\text{ск}} \approx \theta_{\text{ск}}$ и $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$, соотношение (4.66) можно записать в виде

$$\frac{\theta_{\text{ск}}}{\beta} = \sqrt{\frac{(k+1)^2}{4} + \frac{1}{(M_1 \beta)^2}}.$$

При $M_1\beta \rightarrow \infty$ второе слагаемое в правой части этого уравнения стремится к нулю, а значит, отношение углов $\theta_{ск}/\beta \rightarrow (k+1)/2$.

Изменение параметров потока за скачком уплотнения с учетом диссоциации и ионизации

Значительное увеличение скорости движения ЛА приводит к необходимости учитывать в аэродинамических исследованиях особенности газовых течений, обусловленные изменением физико-химических свойств воздуха. Все приведенные ранее в этой главе зависимости были получены для условий движения с малыми и умеренными сверхзвуковыми скоростями, когда влияние температуры на термодинамические параметры, в частности на удельные теплоемкости, не учитывают. При гиперзвуковых скоростях на первое место выдвигаются особенности, связанные с влиянием возникающих при торможении потока высоких температур. Теплоемкости c_p и c_v газа в этом случае возрастают вследствие возбуждения поступательных и вращательных степеней свободы (при этом отношение $k = c_p/c_v$ снижается), и двухатомные молекулы, входящие в состав воздуха, распадаются на одноатомные (диссоциируют). По мере роста температуры и еще большего притока энергии происходит возбуждение колебательных уровней и отрыв электронов от атома, т. е. ионизация воздуха.

Важным элементом расчетов таких течений является определение термодинамических параметров и кинетических коэффициентов диссоциированного и ионизированного воздуха, а также его состава.

При определении равновесных параметров p_2 , ρ_2 , T_2 , V_2 , i_2 , S_2 , a_2 , M_2 и $\theta_{ск}$ за скачком уплотнения в диссоциирующем газе необходимо составить систему из девяти уравнений. Зависимости $i_2 = f_1(p_2, T_2)$; $S_2 = f_2(p_2, T_2)$; $M_2 = f_3(p_2, T_2)$; $a_2 = f_4(p_2, T_2)$ находят с использованием таблиц или графиков термодинамических функций воздуха при высоких температурах*, значения ρ_2 , p_2 и $\theta_{ск}$ — по формулам (4.62), (4.63) и (4.65), а T_2 — с помощью уравнения состояния, записанного с учетом диссоциации.

Расчеты показали, что диссоциация и ионизация газа значительно изменяют температуру и плотность за скачком уплотнения, тогда как давление в меньшей степени зависит от физико-химических

* Подробнее об этом см.: Атлас гидродинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока / Ю.А. Кибардин, С.И. Кузнецов, Л.Н. Любимов, Б.Я. Шумацкий. М.: Госэнергоиздат, 1961.

превращений в воздухе. Отношение p_2/p_1 мало отличается от максимального $p_2/p_1 = 1 + k_1 M_{1n}^2$, определяемого только условиями набегающего потока (k_1 — показатель адиабаты в набегающем потоке). Температура за скачком уплотнения в диссоциированном газе будет меньше, чем в газе с постоянной теплоемкостью, что объясняется затратами энергии на тепловую диссоциацию молекул. Снижение температуры вызывает увеличение плотности, что, в свою очередь, приводит к уменьшению угла наклона скачка уплотнения.

4.3. Взаимодействие скачков уплотнения

Рассмотрим сверхзвуковое плоское течение невязкого газа вблизи поверхности тела с двумя изломами в точках A и B (рис. 4.13, a). Последовательный разворот потока на углы $\beta_1 < \beta_{кр}$ и $\beta_2 < \beta_{кр}$ приводит к образованию двух присоединенных скачков уплотнения AC и BC . Угол наклона второго скачка $\theta_{ск AC} > \theta_{ск BC}$, поскольку он формируется газом с параметрами за первым скачком уплотнения, для которого $V_2 < V_1$. В результате такого взаимодействия скачки AC и BC пересекаются в точке C и сливаются в один скачок CP .

Выделим в потоке две линии тока. Первая линия mn , пересекающая два скачка, деформируется и разворачивается в точках a и b

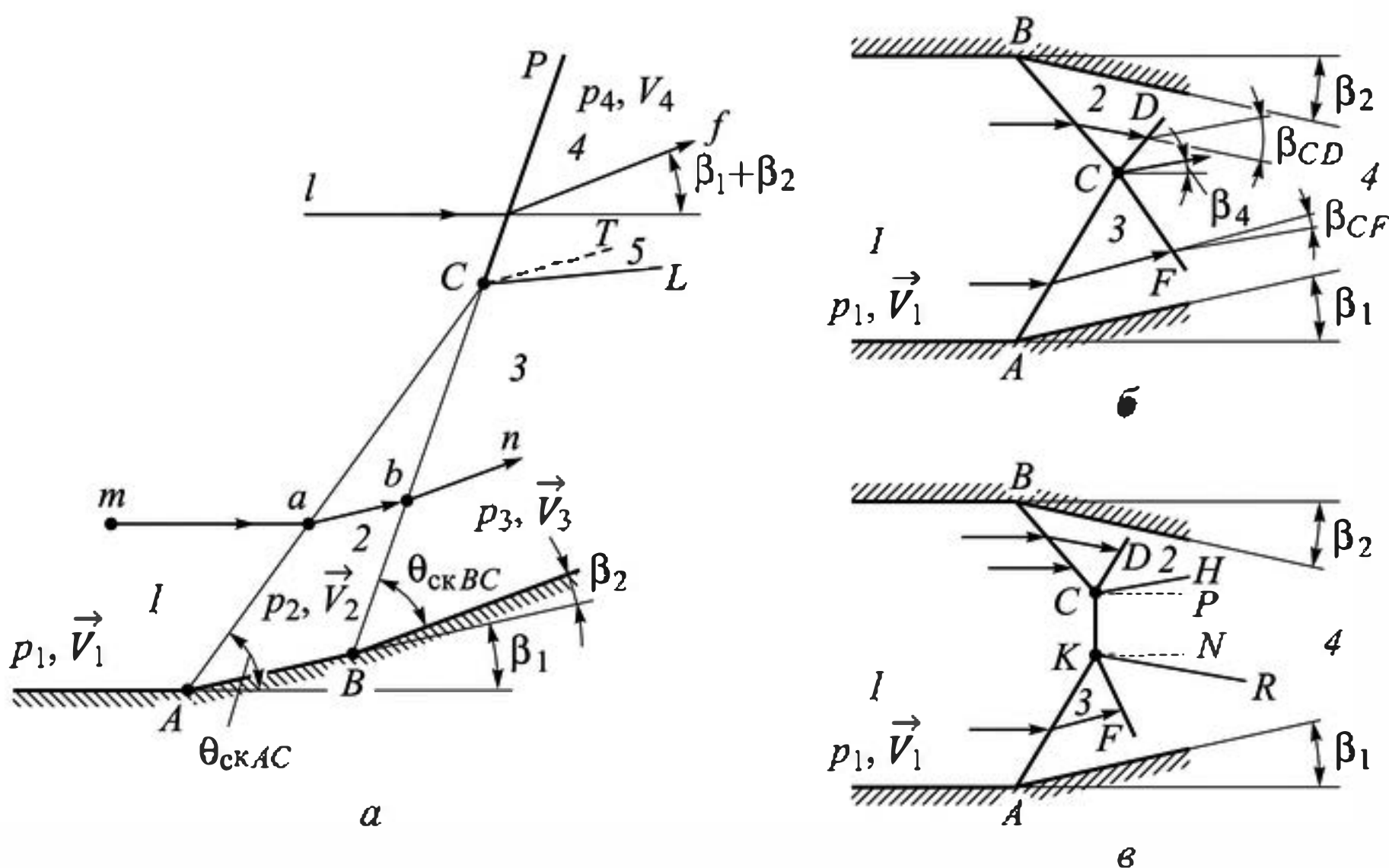


Рис. 4.13. Взаимодействие скачков уплотнения

на углы β_1 и β_2 . Если предположить, что направление второй линии тока lf , проходящей через скачок CP , будет таким же, как и первой, то давления в областях 3 и 4 будут различными, так как суммарные потери в двух скачках уплотнения AC и BC не равны потерям в скачке CP . При этом соотношение между давлениями p_3 и p_4 может быть произвольным, что приведет к образованию за точкой C либо слабой волны разрежения CT ($p_3 < p_4$), либо сжатия CL ($p_3 > p_4$) (область 5). При прохождении потока через область 5 давления в газе выравниваются.

Как показали расчеты, интенсивность волны CL невелика, что делает обоснованным предположение о развороте потока за скачком CP на угол $\beta_1 + \beta_2$. Для расчета такой системы справедливы зависимости, используемые в теории косого скачка уплотнения. Зная параметры невозмущенного потока $p_1, \rho_1, M_1, \dots$, а также углы β_1 и β_2 , можно по формулам (4.62)–(4.65) последовательно определить параметры течения в областях 2 и 3, а вычислив суммарный угол $\beta_1 + \beta_2$, по аналогичным зависимостям рассчитать p_4, ρ_4 и M_4 за скачком уплотнения CP . Отношение давлений p_4/p_3 определяет интенсивность волны CL . Характерно, что скорость за скачком CP всегда меньше, чем за скачком BC . Это приводит к образованию в потоке линии CT тангенциального разрыва скоростей.

Еще один случай пересечения скачков уплотнения соответствует течению газа в канале переменного сечения (рис. 4.13, б, в). Присоединенные косые скачки уплотнения AC и BC возникают в результате отклонения внутрь противоположных стенок канала на углы $\beta_1 < \beta_{кр}$ и $\beta_2 < \beta_{кр}$. Поскольку в областях 2 и 3 потоки направлены навстречу один другому, их взаимодействие приведет к образованию скачков уплотнения CD и CF , за которыми поток должен иметь одинаковое давление p_4 и общий угол разворота β_4 (см. рис. 4.13, б).

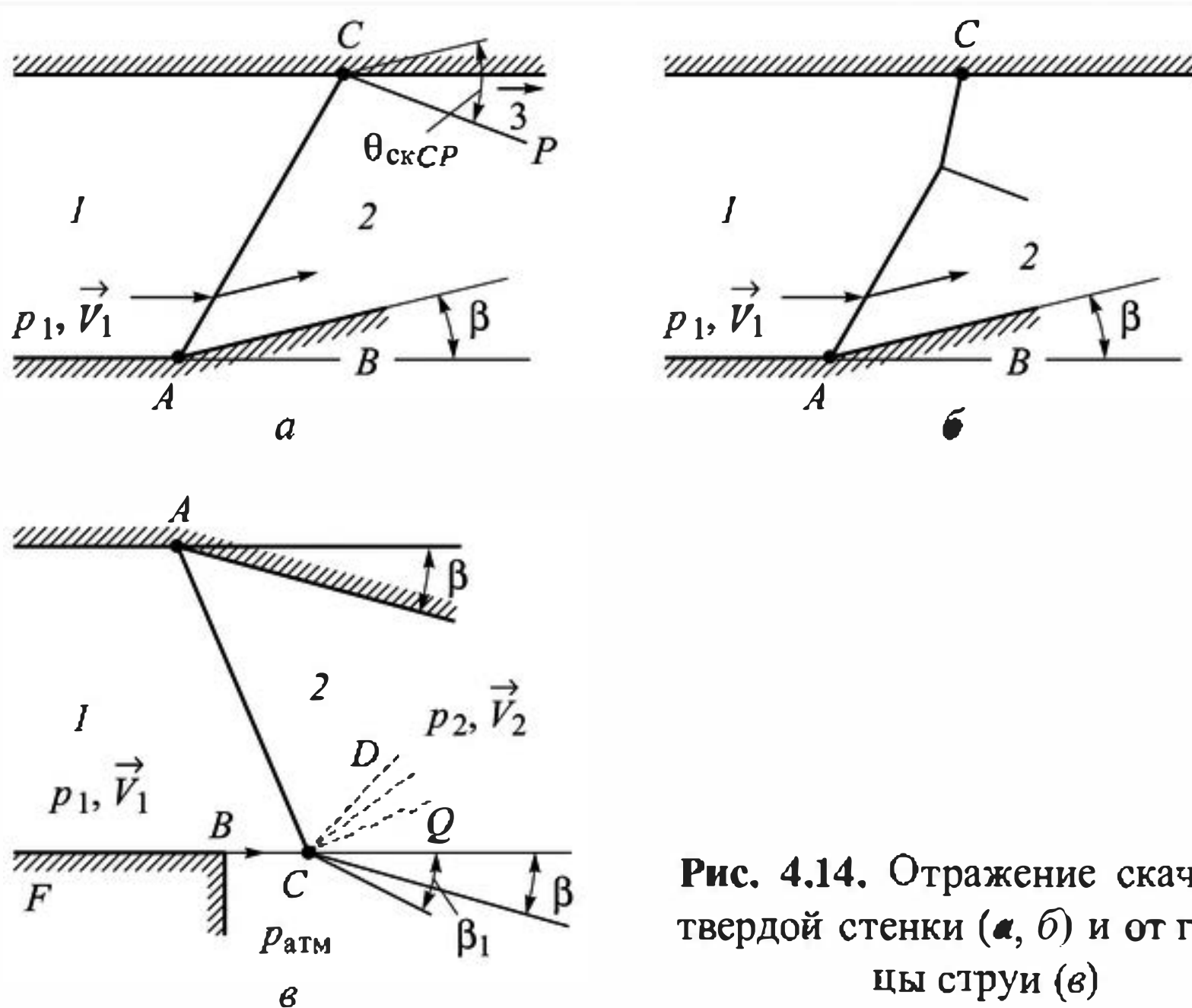
Такую схему взаимодействия скачков — иногда ее называют *схемой правильного взаимодействия* — рассчитывают итерационным способом. Первоначально по параметрам невозмущенного потока и углам β_1 и β_2 определяют параметры потока за скачками уплотнения AC и BC , т. е. в областях 2 и 3. Затем, задавая давление p_4 в зоне 4, с помощью зависимости (4.62) определяют углы $\theta_{ск CD}$, $\theta_{ск CF}$ наклона скачков CD и CF . Поскольку за скачком CD поток отклоняется на угол $\beta_{CD} = \beta_1 + \beta_4$, а за скачком CF — на угол $\beta_{CF} = \beta_2 - \beta_4$, используя соотношение (4.65) можно определить угол β_4 . Давление p_4 , при котором значения угла β_4 , рассчитанные по параметрам зон 2 и 3, будут одинаковыми, является искомым.

Устойчивое существование системы двух пересекающихся косых скачков возможно при условии, если углы разворота потока в скачках CD и CF меньше критических. При $\beta_{CD} > \beta_{кр}$ или $\beta_{CF} > \beta_{кр}$ вблизи центральной линии тока образуется скачок уплотнения $СК$, по форме близкий к прямому (см. рис. 4.13, в). Аналогично первой схеме взаимодействия (см. рис. 4.13, а) в точках C и K возникают линии тангенциального разрыва скоростей CP и KN , а также слабые волны сжатия (разрежения) CH и KR . В этом случае параметры потока за скачками CD и KF рассчитывают аналогично схеме правильного взаимодействия (см. рис. 4.13, б), а за скачком $СК$ — с помощью соотношений теории прямого скачка уплотнения.

Отражение скачка от прямой твердой стенки является частным случаем схемы взаимодействия, представленной на рис. 4.13, б, которая реализуется в случае замены центральной линии тока твердой стенкой. Если угол отклонения стенки $\beta < \beta_{кр}$, в точке излома образующей A возникает присоединенный косой скачок уплотнения $АС$ (рис. 4.14, а). При переходе через этот скачок поток разворачивается на угол β по направлению к твердой стенке. В результате взаимодействия потока со стенкой в точке C возникает отраженный скачок уплотнения CP , за которым поток разворачивается на угол β и движется параллельно твердой стенке. При такой схеме отражения углы наклона скачков $АС$ и CP будут отличаться, поскольку при одном и том же угле разворота потока скорости в областях 1 и 2 различны.

Если во втором скачке угол $\beta < \beta_{кр}$, возникает схема *правильного отражения* скачка (аналогично схеме правильного взаимодействия). В этом случае параметры потока за скачком уплотнения $АС$ вычисляют с использованием зависимостей (4.62)–(4.65). Зная угол разворота потока в области 3, по параметрам потока в области 2 можно определить угол $\theta_{ск CP}$ наклона скачка CP и состояние газа за ним. При $\beta > \beta_{кр}$ отраженный скачок не может обеспечить выравнивание потока. Прилегающий к стенке поток становится дозвуковым, и вся система скачков деформируется, приобретая λ -образную форму, которая в предельном случае преобразуется в огошедший криволинейный скачок (рис. 4.14, б).

На рис. 4.14, в представлена схема отражения скачка от свободной границы струи. Косой скачок уплотнения, формирующийся в точке A сверхзвуковым потоком, падает на границу свободной струи в точке C . При условии, что давление $p_{атм}$ в канале равно давлению p_1 в струе, участок BC является продолжением стенки FB . При



5. ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ И АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ НАГРЕВ

Аэродинамика пограничного слоя – один из наиболее изученных разделов науки о движении газа и жидкости, в котором исследуется движение вязкого газа в пограничном слое. Знание параметров пограничного слоя дает возможность найти распределение касательных напряжений и, следовательно, суммарных аэродинамических сил и моментов от трения, а также позволяет рассчитать теплопередачу от разогретого омывающего газа к стенке. При этом выводы теории пограничного слоя могут быть использованы для корректировки решения о невязком обтекании. В главе изложены основы теории пограничного слоя и методы расчета трения в вязких потоках. Рассмотрены однородные и смешанные пограничные слои в несжимаемой и сжимаемой средах.

5.1. Пограничный слой

Движение реального газа отличается от течения идеальной среды наличием силы вязкости, или внутреннего трения, обусловленной перераспределением количества движения между слоями в потоке. Значение этой силы зависит от кинематических условий процесса и может изменяться в широких пределах в зависимости от среды и ее термодинамического состояния (в основном температуры).

Непрерывное распределение скорости сохраняется вплоть до обтекаемой поверхности, причем частицы среды, непосредственно примыкающие к ней, неподвижны, т. е. на обтекаемой поверхности обращаются в нуль не только нормальная (условие непроницаемости поверхности), но и тангенциальная составляющие скорости (так называемое условие прилипания вязкой среды). По мере удаления

от поверхности тела скорость непрерывно возрастает от нуля до ее значений в свободно двигающемся газе. Следует отметить, что скорость увеличивается весьма интенсивно и уже на небольшом расстоянии от поверхности достигает своего конечного значения. В области резкого изменения скорости существенное влияние на течение оказывает сила вязкости. Согласно закону Ньютона, напряжение трения в вязкой среде, например для ламинарного режима движения,

$$\tau = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y},$$

где $\partial V_x / \partial y$ — градиент продольной скорости в направлении, перпендикулярном рассматриваемой площадке.

Следовательно, при больших значениях $\partial V_x / \partial y$ сила трения может быть значительной даже в газах, обладающих малой вязкостью.

Итак, если сопоставить картину течения с ее идеализированной схемой, можно заметить, что различия, обусловленные особенностями представления о невязкой среде, сосредоточены в очень узкой области, непосредственно прилегающей к поверхности обтекаемого тела. Вне этой области упрощение свойств газа не искажает действительных условий процесса. Таким образом, всю область течения можно рассматривать как совокупность некоторого пограничного слоя и внешнего потока (рис. 5.1).

Пограничным слоем называют зону течения вблизи поверхности тела, которая характеризуется высокой степенью неоднородности параметров потока (в частности, скорости), а следовательно, значительной вязкостной силой. В пределах этой зоны силы инерции и вязкости следует рассматривать как величины одного порядка.

При исследовании течения газа в пограничном слое используют систему координат, в которой ось Ox направлена вдоль поверхности тела, а Oy — по нормали к этой поверхности. Толщину δ пограничного слоя измеряют по нормали к обтекаемой поверхности как расстояние от стенки до границы пограничного слоя.

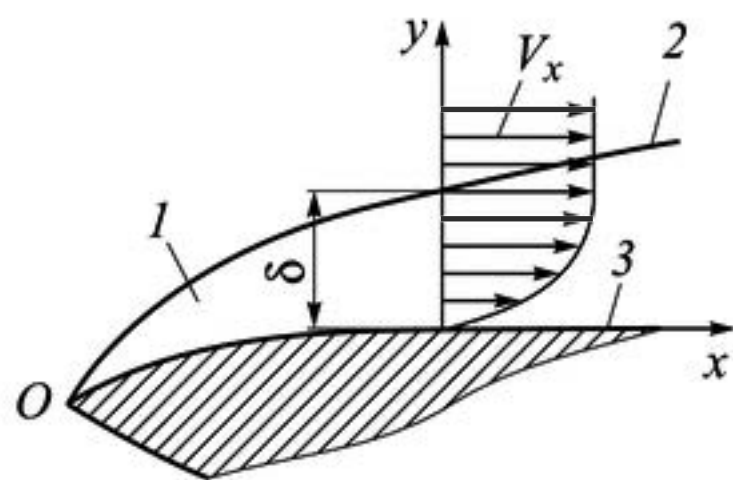


Рис. 5.1. Схема пограничного слоя:

1 — пограничный слой; 2 — граница слоя; 3 — обтекаемая поверхность

Внешний поток — это оставшаяся область течения (см. рис. 5.1), в пределах которой можно пренебречь силой вязкости (вследствие малости $\partial V_x / \partial y$) и воспользоваться при определении параметров потока системой уравнений, описывающих движение идеальной среды.

В пределах пограничного слоя по мере удаления от поверхности влияние силы внутреннего трения ослабевает, соответственно изменяется распределение скорости и совершается плавный переход к условиям, характерным для внешнего потока.

Итак, задача по исследованию обтекания тела сводится к рассмотрению двух самостоятельных задач (о движении реальной среды в пограничном слое и идеальной — во внешнем потоке), которые объединяются в одно целое тем, что полученные решения должны быть согласованы на границе пограничного слоя.

5.2. Интегральное соотношение и условная толщина пограничного слоя

В приближенной теории пограничного слоя важное практическое значение имеет его интегральное соотношение. Выделим в пограничном слое бесконечно малый элемент слоя $ABCD$ единичной ширины, ограниченный твердой поверхностью AD , внешней границей BC и отрезками AB и CD , нормальными к обтекаемой поверхности (рис. 5.2). Для вывода интегрального соотношения пограничного слоя воспользуемся уравнением движения в направлении оси

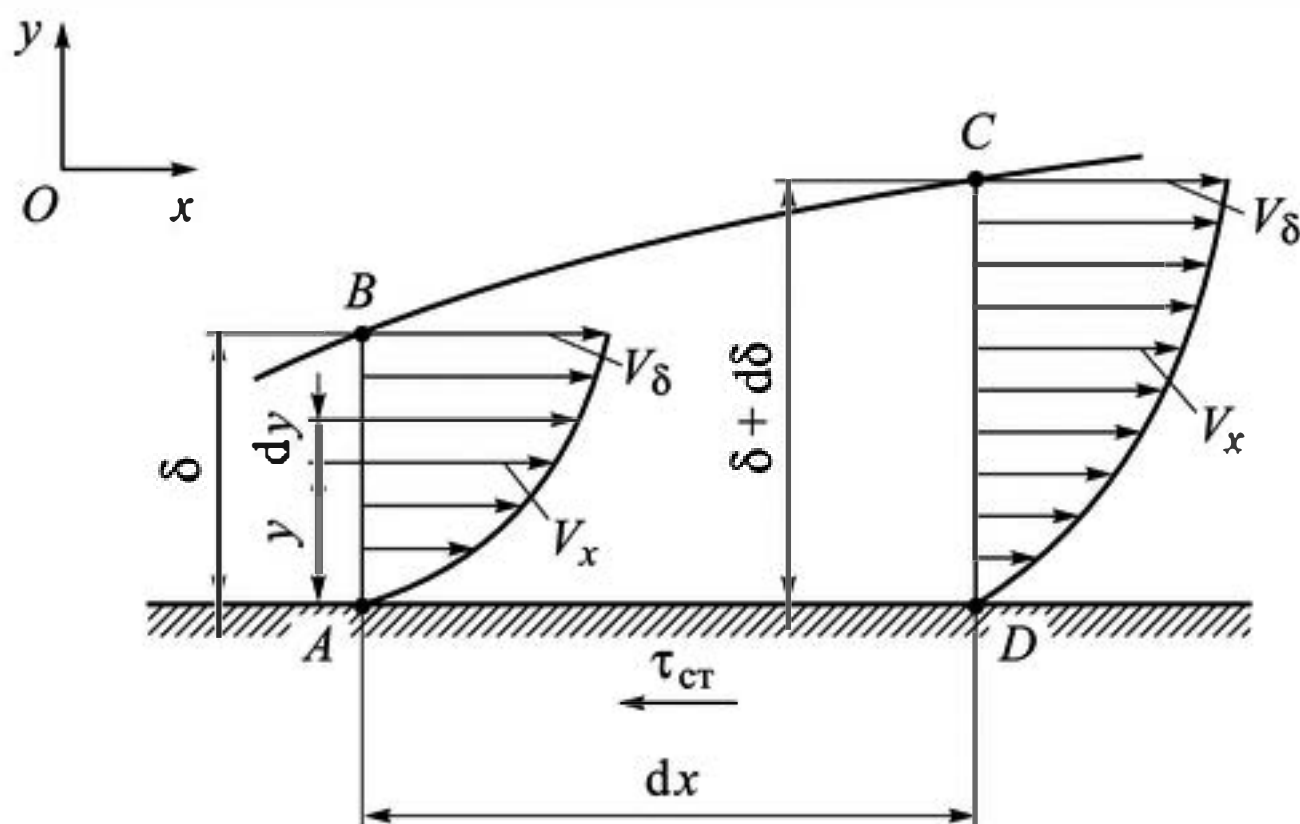


Рис. 5.2. Контрольный объем пограничного слоя

Ох, считая течение установившимся. Количество движения среды в единицу времени через грани AB и CD контрольного объема элемента пограничного слоя определяется соотношениями

$$\int_0^{\delta} \rho V_x^2 dy; \quad \int_0^{\delta} \rho V_x^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho V_x^2 dy \right) dx,$$

где V_x — скорость потока в пограничном слое; δ — толщина пограничного слоя.

Для вычисления количества движения газа, вносимого в контрольный объем через поверхность BC , необходимо предварительно определить массу, которая поступает в указанный объем через эту поверхность, т. е. разность потоков массы, проходящей через грани CD и AB :

$$\int_0^{\delta} \rho V_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho V_x dy \right) dx - \int_0^{\delta} \rho V_x dy = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho V_x dy \right) dx.$$

В соответствии с этим количество движения, вносимое в элемент пограничного слоя через его внешнюю граничную поверхность BC , определяется выражением

$$V_{\delta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho V_x dy \right) dx,$$

где V_{δ} — скорость потока на внешней границе пограничного слоя.

Согласно теореме импульсов, изменение количества движения газа, протекающего через выделенный элемент пограничного слоя, должно быть равно импульсу сил, действующих на грани этого элемента в направлении оси Ox . Силы от давления и трения, действующие на грани AB , BC , CD , AD , определяются соответственно выражениями $p\delta$; $p d\delta$; $p\delta + \frac{\partial}{\partial x}(p\delta)dx$; $\tau_{ct}dx$. Тогда, согласно уравнению

движения, для рассматриваемых условий течения имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta} \rho V_x^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho V_x^2 dy \right) dx - \int_0^{\delta} \rho V_x^2 dy - V_{\delta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho V_x dy \right) dx = \\ & = p\delta + p d\delta - \left[p\delta + \frac{\partial}{\partial x}(p\delta)dx \right] - \tau_{ct}dx \end{aligned}$$

или после элементарных преобразований

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho V_x^2 dy - V_\delta \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho V_x dy = -\tau_{\text{ст}} - \delta \frac{dp}{dx}. \quad (5.1)$$

Это и есть одна из форм записи интегрального соотношения импульсов для пограничного слоя.

Для несжимаемого газа ($\rho = \text{const}$) соотношение (5.1) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta V_x^2 dy - V_\delta \frac{d}{dx} \int_0^\delta V_x dy = -\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho} - \frac{\delta}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) содержит три неизвестные величины: δ , $\tau_{\text{ст}}$, $V_x(y)$, поэтому для его решения необходимы дополнительные соотношения. Путем тождественных преобразований приведем уравнение (5.1) к следующему виду:

$$\frac{d}{dx} \left(V_\delta \int_0^\delta \rho V_x dy \right) = \frac{dV_\delta}{dx} \int_0^\delta \rho V_x dy + V_\delta \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho V_x dy.$$

Выразим отсюда $V_\delta \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho V_x dy$ и подставим полученное выражение в интегральное соотношение (5.1):

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho V_x^2 dy + \frac{dV_\delta}{dx} \int_0^\delta \rho V_x dy - \frac{d}{dx} \left(V_\delta \int_0^\delta \rho V_x dy \right) = -\tau_{\text{ст}} - \delta \frac{dp}{dx}.$$

Используя уравнение Бернулли для внешнего потока:

$$V_\delta \frac{dV_\delta}{dx} + \frac{1}{\rho_\delta} \frac{dp}{dx} = 0,$$

после несложных преобразований находим

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho (V_\delta V_x - V_x^2) dy + \frac{dV_\delta}{dx} \int_0^\delta (\rho_\delta V_\delta - \rho V_x) dy = \tau_{\text{ст}}. \quad (5.3)$$

Для несжимаемой среды ($\rho = \text{const}$)

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (V_{\delta} V_x - V_x^2) dy + \frac{dV_{\delta}}{dx} \int_0^{\delta} (V_{\delta} - V_x) dy = \frac{\tau_{ст}}{\rho}. \quad (5.4)$$

Рассмотрим более подробно интегралы, входящие в соотношение (5.3). Интеграл $\int_0^{\delta} \rho_{\delta} V_{\delta} dy = \rho_{\delta} V_{\delta} \delta$ характеризует расход газа в единицу времени через сечение пограничного слоя, определенный по параметрам внешнего (невязкого) потока, а $\int_0^{\delta} \rho V_x dy$ — действительный расход газа через то же сечение пограничного слоя δ . Следовательно, $\int_0^{\delta} (\rho_{\delta} V_{\delta} - \rho V_x) dy$ представляет собой уменьшение (по сравнению с невязким потоком) расхода газа через сечение пограничного слоя, обусловленное вязкостью среды.

Запишем следующее выражение:

$$\delta^* = \frac{\int_0^{\delta} (\rho_{\delta} V_{\delta} - \rho V_x) dy}{\rho_{\delta} V_{\delta}} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho V_x}{\rho_{\delta} V_{\delta}} \right) dy. \quad (5.5)$$

Здесь δ^* — в соответствии с ее физическим смыслом так называемая *толщина вытеснения*, представляющая собой высоту площадки, через которую в невязком течении протекает количество среды, равное потере расхода через пограничный слой вследствие торможения газа в реальном течении.

Толщина δ^* характеризует смещение линий тока в направлении, перпендикулярном обтекаемой поверхности, т. е. вытесняющее действие пограничного слоя. Особенно важно ее учитывать в задачах об обратном влиянии пограничного слоя на внешний поток, которые решают путем последовательных приближений. При этом нулевым приближением служит исходный контур тела, а в каждом последующем приближении находят фиктивный контур, смещая точки контура, полученного в предыдущем приближении, нормально к поверхности на толщину вытеснения.

Аналогично рассуждая для интеграла, входящего в первое слагаемое уравнения (5.3), приходим к выводу, что он характеризует уменьшение количества движения газа, протекающего через сечение пограничного слоя:

$$\delta^{**} = \frac{\int_0^\delta \rho (V_\delta V_x - V_x^2) dy}{\rho_\delta V_\delta^2} = \int_0^\delta \frac{\rho V_x}{\rho_\delta V_\delta} \left(1 - \frac{V_x}{V_\delta} \right) dy. \quad (5.6)$$

Здесь δ^{**} — так называемая *толщина потери импульса*, или высота площадки (толщина слоя), через которую в условиях течения идеальной среды в единицу времени переносится количество движения, равное количеству движения, потерянного вследствие торможения среды в пограничном слое.

Подставив выражения для условных толщин пограничного слоя в интегральное соотношение импульсов (5.4), получим уравнение для несжимаемого газа в форме Кармана:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**}}{V_\delta} \frac{dV_\delta}{dx} \left(2 + \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right) = \frac{\tau_{ст}}{\rho V_\delta^2}, \quad (5.7)$$

которое широко применяют для анализа изменения параметров пограничного слоя на криволинейной поверхности.

5.3. Уравнения Прандтля для пограничного слоя

Рассмотрим плоское течение несжимаемой среды вдоль поверхности малой кривизны. В этом случае система уравнений движения и неразрывности имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Поскольку в дальнейшем мы будем оценивать порядки величин, входящих в эти уравнения, их целесообразно привести к безразмерной форме. Для этого в качестве характерных параметров выберем размер L и скорость V_∞ невозмущенного потока, а для времени и давления — комплексы L/V_∞ и ρV_∞^2 , имеющие соответствующие размерности.

Итак, соотношения для перехода к безразмерным величинам имеют вид

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{y} = \frac{y}{L}; \quad \bar{V}_x = \frac{V_x}{V_\infty}; \quad \bar{V}_y = \frac{V_y}{V_\infty};$$

$$\bar{t} = \frac{t}{L/V_\infty}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho V_\infty^2}. \quad (5.9)$$

Рассмотрим более подробно преобразование первого уравнения движения (5.8). Подставим в него безразмерные величины, найденные с помощью соотношений (5.9):

$$\frac{\partial(\bar{V}_x V_\infty)}{\partial(\bar{t}L/V_\infty)} + \bar{V}_x V_\infty \frac{\partial(\bar{V}_x V_\infty)}{\partial(\bar{x}L)} + \bar{V}_y V_\infty \frac{\partial(\bar{V}_x V_\infty)}{\partial(\bar{y}L)} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} \rho V_\infty^2)}{\partial(\bar{x}L)} + \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial(\bar{x}L)} \left[\frac{\partial(\bar{V}_x V_\infty)}{\partial(\bar{x}L)} \right] + \frac{\partial}{\partial(\bar{y}L)} \left[\frac{\partial(\bar{V}_x V_\infty)}{\partial(\bar{y}L)} \right] \right\},$$

или

$$\frac{V_\infty^2}{L} \left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{V_\infty^2}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu V_\infty}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2} \right).$$

Разделив левую и правую части последнего уравнения на V_∞^2/L , получим

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu}{V_\infty L} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2} \right).$$

Поскольку $V_\infty L/\nu = \text{Re}_L$, окончательно имеем

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2} \right). \quad (5.10)$$

Аналогично для второго уравнения движения системы (5.8) можно записать

$$\frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{t}} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial \bar{y}^2} \right). \quad (5.11)$$

Уравнение неразрывности после почленного деления на V_∞/L примет вид

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (5.12)$$

Оценим теперь порядки отдельных величин, входящих в уравнения (5.10)–(5.12). Если изменение некоторой переменной x ограничено интервалом $(0, x_0)$, то она определена как величина порядка x_0 :

$$O(x) = x_0,$$

где O — символ порядка значения данной величины (от лат. *ordo* — порядок).

Порядок производной определяют так:

$$O\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) = \frac{y_0}{x_0^m}. \quad (5.13)$$

Соответствующие рассуждения целесообразно начать с уравнения неразрывности (5.12). С учетом выражения (5.13) имеем

$$O\left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}}\right) = \frac{\bar{V}_x}{\bar{x}}; \quad O\left(\frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}}\right) = \frac{\bar{V}_y}{\bar{y}}.$$

Поскольку x изменяется в пределах от нуля до L , а V_x — от нуля у стенки до V_δ на границе пограничного слоя, то, согласно соотношениям (5.9), легко установить, что $O(\bar{x}) = 1$, $O(\bar{V}_x) = 1$. Следовательно,

$$O\left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}}\right) = O\left(\frac{\bar{V}_x}{\bar{x}}\right) = 1.$$

Однако в соответствии с уравнением неразрывности оба слагаемых в левой части уравнения (5.12) должны быть величинами одного порядка, поэтому

$$O\left(\frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}}\right) = O\left(\frac{\bar{V}_y}{\bar{y}}\right) = 1. \quad (5.14)$$

Поскольку в пограничном слое поперечная координата y изменяется в пределах от 0 до δ , то

$$O(\bar{y}) = \bar{\delta},$$

где $\bar{\delta} = \delta/L$ — безразмерная толщина пограничного слоя.

Согласно выражению (5.14),

$$O(\bar{V}_y) = \bar{\delta}.$$

а так как $\bar{\delta} \ll 1$, то и $\bar{V}_y \ll 1$.

Таким образом, в пределах пограничного слоя продольная составляющая скорости существенно больше поперечной, поэтому можно учитывать лишь составляющую V_x .

Оценим порядки величин, входящих в уравнения движения (5.10), (5.11), и запишем их под каждым членом этих уравнений. Рассмотрим наиболее общий случай, когда для инерционной силы одинаково важны как нестационарность, так и неоднородность поля скорости. Кроме того, будем считать, что все слагаемые, определяющие силы, — величины одного порядка (в противном случае некоторыми из них можно было бы пренебречь). Тогда имеем

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{t}}}_1 + \underbrace{\bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}}}_{1 \cdot 1} + \underbrace{\bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}}}_{\bar{\delta} \cdot 1/\bar{\delta}} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial \bar{x}}}_1 + \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{x}^2}}_1 + \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2}}_{1/\bar{\delta}^2} \right);$$

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{t}}}_{\bar{\delta}} + \underbrace{\bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{x}}}_{1 \cdot \bar{\delta}} + \underbrace{\bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}}}_{\bar{\delta} \cdot 1} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial \bar{y}}}_{\bar{\delta}} + \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial \bar{x}^2}}_{\bar{\delta}} + \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial \bar{y}^2}}_{1/\bar{\delta}} \right).$$

В первом из приведенных уравнений в левой части все три слагаемые имеют порядок единицы, а в правой части первое слагаемое в скобках несоизмеримо меньше, чем второе. Это означает, что скорость в продольном направлении изменяется значительно медленнее, чем в поперечном. В соответствии с этим первым слагаемым в скобках можно пренебречь и записать составляющую, обусловленную силой трения, в виде

$$\frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2}.$$

Как отмечалось ранее, в пределах пограничного слоя сила трения и сила инерции — величины одного порядка, а значит,

$$\frac{1}{\text{Re}_L} \frac{1}{\bar{\delta}^2} \cong 1, \text{ или } \bar{\delta} \cong \frac{1}{\text{Re}_L}.$$

Следовательно, толщина пограничного слоя мала по сравнению с размерами тела только при больших числах Рейнольдса, в соответствии с чем рассматриваемую теорию следует понимать как учение о движении среды при больших числах Рейнольдса.

Во втором уравнении движения все члены имеют порядок $\bar{\delta}$, но поскольку $\bar{\delta} \ll 1$, справедлив вывод о том, что составляющие сил в направлении, перпендикулярном обтекаемой поверхности, пренебрежимо малы и это уравнение можно вообще не учитывать. Вместо него получаем очень важное условие о распределении статического давления по толщине пограничного слоя:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, в пределах любого сечения пограничного слоя давление постоянно и является функцией лишь продольной координаты x и времени t , т. е. $p = f(x, t)$.

Итак, после всех упрощений система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2};$$

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}} = 0$$

или

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2};$$

(5.15)

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

Система уравнений (5.15) содержит три неизвестные величины (V_x, V_y, p) и является незамкнутой. Эту неопределенность устраняют следующим образом. Поскольку толщина пограничного слоя очень мала и смещение линий тока, происходящее вследствие вязкости среды, в направлении, перпендикулярном обтекаемой поверхности, весьма незначительно, можно считать в большинстве случаев справедливым гипотезу об отсутствии обратного влияния пограничного слоя на внешний поток. При этом внешнее течение можно

отождествлять с движением идеальной среды вдоль рассматриваемой поверхности, что позволяет находить параметры невязкого потока на стенке (при $y = 0$), т. е. принимать в дальнейшем равными параметрам на границе пограничного слоя. Следовательно, давление можно считать известной функцией, что допустимо лишь при отсутствии обратного влияния пограничного слоя.

Давление p оказывается связанным простой зависимостью со скоростью V_δ на границе пограничного слоя, т. е. со скоростью невязкого потока. Действительно, записав первое уравнение системы (5.15) для условий идеальной жидкости, находим

$$\frac{\partial V_\delta}{\partial t} + V_\delta \frac{\partial V_\delta}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

В соответствии с этим уравнения (5.15) можно представить так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \frac{\partial V_\delta}{\partial t} + V_\delta \frac{\partial V_\delta}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Система (5.16) является замкнутой, поскольку содержит лишь две неизвестные величины: V_x и V_y . Дополним ее граничными и начальными условиями. Первые должны выражать условие «прилипания» жидкости к поверхности и удовлетворять требованию плавного перехода продольной составляющей скорости V_x в скорость внешнего течения, т. е.

$$\begin{aligned} V_x = V_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \\ V_x \rightarrow V_\delta \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.17)$$

а вторые, имеющие смысл только для неустановившихся течений, — быть заданы в виде распределения скоростей V_x , V_y в начальный момент.

Для стационарных течений система уравнений (5.15) принимает вид

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

причем первое из этих уравнений можно записать иначе:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = V_\delta \frac{dV_\delta}{dx} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2},$$

где $p(x)$, $V_\delta(x)$ — известные функции продольной координаты.

Интегрирование системы уравнений (5.16) с граничными условиями (5.17) затруднительно, и довести решение до конечных результатов удастся лишь для некоторых частных случаев распределения скорости во внешнем потоке. В соответствии с этим в теории пограничного слоя широкое распространение получили приближенные методы, основанные на использовании интегральных соотношений.

Следует также отметить, что общая теория пограничного слоя включает в себя наряду с учением о движении среды в «чистом» виде (рассмотренный выше процесс внешнего обмена количеством движения) также учение о тепло- и массообмене. В зависимости от физической природы процесса различают динамический, тепловой и диффузионный пограничные слои.

5.4. Приближенные методы расчета пограничного слоя на плоской пластине

Ламинарный пограничный слой

Приближенные методы расчета пограничного слоя основаны на использовании интегрального соотношения импульсов. Суть этих методов состоит в том, что распределение скорости по сечениям пограничного слоя представляют функциями, которые задают, а не получают как результат интегрирования уравнений пограничного слоя. Выбор функций обусловлен определенными соображениями, порой достаточно тонкими и сложными. Зависимости, используемые в качестве аппроксимаций действительных распределений скорости, имеют вид однопараметрических функций (скорость как явная функция поперечной координаты), в состав которых входит параметр, зависящий от продольной координаты. Изменение этого параметра, называемого формпараметром, вниз по течению позволяет воспроизвести картину перестройки профиля скорости. Аппроксимирующие функции, в качестве которых выбирают степенные полиномы, должны быть согласованы с граничными условиями.

Как уже отмечалось ранее, при течении вдоль пластины профиль скорости не зависит от координаты x . Следовательно, задача о пограничном слое на плоской пластине не связана с понятием формпараметра, а значит, наиболее трудоемкая часть решения, связанная с его определением на основании уравнения импульсов, исключается. В качестве безразмерных переменных выберем V_x/V_∞ и $\eta = y/\delta$ (δ — неизвестная величина), а функцию, аппроксимирующую распределение скорости по толщине пограничного слоя, представим в виде полинома третьей степени:

$$V_x/V_\infty = \xi(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3. \quad (5.18)$$

Поскольку функция ξ не зависит от x , коэффициенты a_i являются постоянными числами. Для их определения воспользуемся граничными условиями, записанными для внешней границы пограничного слоя (при $y = \delta$, $\eta = 1$) и на поверхности пластины (при $y = 0$, $\eta = 0$).

На внешней границе слоя $V_x = V_\delta = V_\infty$, а также $\tau = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0$, откуда следует, что $\frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0$ и в соответствии с этим

$$\xi(1) = 1; \quad \xi'(1) = 0. \quad (5.19)$$

На обтекаемой поверхности $V_x = 0$, поэтому

$$\xi(0) = 0. \quad (5.20)$$

Условия (5.19), (5.20) действительны при самых общих предположениях. В частном случае обтекания плоской пластины (безградиентное течение, $dp/dx = 0$) необходимое дополнительное условие получают на основании уравнения движения (5.15) при $y = 0$ ($\eta = 0$). Поскольку, согласно гипотезе «прилипания» вязкого газа, на поверхности тела $V_x = V_y = 0$, а для плоской пластины $dp/dx = 0$,

то $\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0$, т. е.

$$\xi''(0) = 0. \quad (5.21)$$

Решение системы уравнений (5.19)–(5.21) позволяет определить коэффициенты, входящие в выражение для закона распределения скорости по толщине пограничного слоя (5.18):

$$a_0 = 0; a_1 = \frac{3}{2}; a_2 = 0; a_3 = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{V_x}{V_\delta} = \xi(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3. \quad (5.22)$$

Для определения $\delta(x)$ воспользуемся интегральным соотношением (5.7), которое для случая плоской пластины имеет вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_{ст}}{\rho V_\infty^2}. \quad (5.23)$$

Приведем это соотношение к безразмерным переменным. Введем следующие величины:

$$H^* = \frac{\delta^*}{\delta}; \quad H^{**} = \frac{\delta^{**}}{\delta},$$

причем $H^*/H^{**} = H$. Очевидно, что в соответствии с (5.5) и (5.6)

$$H^* = \int_0^1 [1 - \xi(\eta)] d\eta; \quad H^{**} = \int_0^1 \xi(\eta) [1 - \xi(\eta)] d\eta.$$

Подставляя в эти соотношения зависимость $\xi(\eta)$ вида (5.22), получаем

$$H^* = \frac{3}{8}; \quad H^{**} = \frac{39}{280}.$$

Преобразуем к безразмерным переменным отношение $\tau_{ст}/\rho$, входящее в выражение (5.23):

$$\frac{\tau_{ст}}{\rho} = \nu \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\nu V_\infty}{\delta} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{\nu V_\infty}{\delta} \xi'(0).$$

Согласно (5.22), $\xi'(0) = 3/2$, поэтому уравнение (5.23) принимает вид

$$\frac{d(H^{**}\delta)}{dx} = \frac{3}{2} \frac{\nu}{V_\infty \delta}$$

или после разделения переменных

$$\delta d\delta = \frac{140}{13} \frac{\nu}{V_\infty} dx. \quad (5.24)$$

Интегрируя (5.24) с учетом того, что при $x = 0$ $\delta = 0$, находим

$$\delta = 4,64 \sqrt{\nu x / V_\infty},$$

или

$$\delta = 4,64 x / \sqrt{Re_x},$$

где $Re_x = V_\infty x / \nu$.

Таким образом, интегральные характеристики слоя

$$\delta^* = 1,74 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}; \quad \delta^{**} = 0,646 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}, \quad (5.25)$$

а характеристики трения — напряжение, местный и средний по длине пластины коэффициенты трения — определяются соотношениями

$$\tau_{ст} = \mu \left. \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{0,323 \rho V_\infty^2}{\sqrt{Re_x}};$$

$$c_{fx} = \frac{\tau_{ст}}{q_\infty} = \frac{0,646}{\sqrt{Re_x}};$$

$$c_f = \frac{1}{L} \int_0^L c_{fx} dx = \frac{1,292}{\sqrt{Re_L}}.$$

Сопоставление полученных результатов с данными точного решения показывает, что приближенная теория пограничного слоя конечной толщины и принятая в расчетах аппроксимация дают удовлетворительные результаты.

Турбулентный пограничный слой

Современные представления о структуре турбулентного пограничного слоя основываются на анализе экспериментальных данных. В поперечном направлении можно выделить пять областей: вязкий ламинарный подслой; переходная область; область с логарифмическим профилем скорости; область, в которой профиль скорости подчиняется закону следа, и область перемежаемости. Первые три области принято объединять в одну внутреннюю область,

составляющую около 20 % от толщины турбулентного пограничного слоя несжимаемой среды на теплоизолированной поверхности. Согласно измерениям, в ней генерируется до 80 % энергии турбулентности. Четвертую и пятую обычно объединяют во внешнюю область турбулентного пограничного слоя, которая занимает основную часть его толщины.

При описании течения во внутренней части турбулентного пограничного слоя принимают, что она не испытывает влияния невязкого течения вне пограничного слоя. Тогда в качестве определяющих параметров можно использовать величины $\tau_{\text{ср}}$, μ , ρ , ν . В качестве масштабов скорости и длины выберем величины $u_T = \sqrt{\tau_{\text{ср}}/\rho}$ и ν/u_T , где u_T — динамическая скорость. Безразмерные скорость в пограничном слое и расстояние от стенки можно представить в виде V_x/u_T и $\tilde{y} = \nu u_T/\nu$. Профиль скорости во внутренней части турбулентного пограничного слоя, представленный в этих безразмерных координатах, называют *законом стенки*. График зависимости $V_x/u_T = f(\lg \tilde{y})$ показан на рис. 5.3, а.

Непосредственно около стенки в ламинарном подслое профиль скорости почти линейный вплоть до значений $\tilde{y}$, при которых наблюдается переход ламинарной формы течения в турбулентную. Опыты показывают, что между вязким ламинарным подслоем и турбулентным течением расположена переходная область, но в приближенных расчетах часто полагают, что переход происходит скачкообразно при $\tilde{y} = 11$.

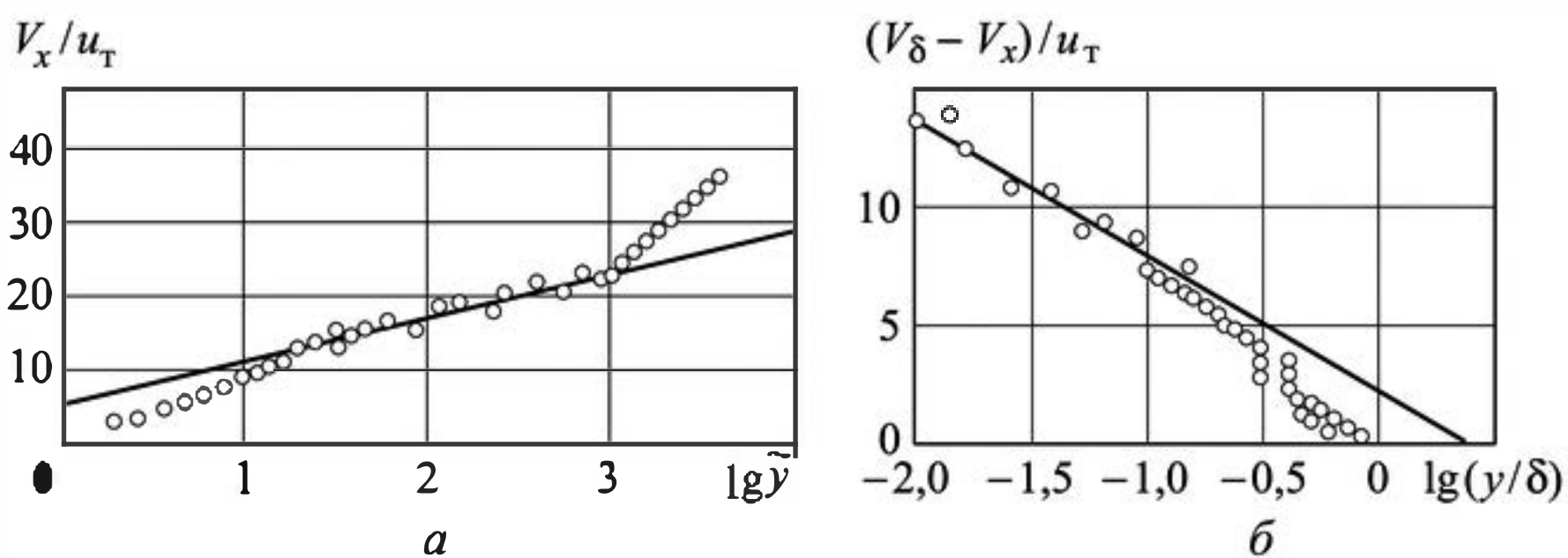


Рис. 5.3. Профили скорости во внутренней (а) и внешней (б) частях турбулентного пограничного слоя:

точки — экспериментальные значения; линия — данные расчета

Для анализа течения во внутренней части турбулентного пограничного слоя выше области вязкого подслоя воспользуемся формулой Прандтля для турбулентного трения:

$$\tau_T = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2.$$

Эксперименты показывают, что на небольших расстояниях от стенки можно принять $l_m \approx ky$, где $k = 0,4$, а $\tau_{ст} \cong \tau_T$. Тогда

$$\frac{dV_x}{dy} = \frac{\sqrt{\tau_{ст}/\rho}}{ky} = \frac{u_T}{ky}. \quad (5.26)$$

После интегрирования уравнения (5.26) и некоторых преобразований получаем

$$\frac{V_x}{u_T} = A \lg \frac{yu_T}{\nu} + B.$$

Экспериментальные данные хорошо согласуются с полученным уравнением при $A = 5,6$ и $B = 4,9$. Функция, описывающая профиль скорости, имеет универсальный характер, не зависит от числа Рейнольдса и градиента давления.

На профиль скорости во внутренней части пограничного слоя шероховатость обтекаемой поверхности влияет существенно, если средняя высота Δ соизмерима с толщиной вязкого подслоя, и слабо, если $u_T \Delta / \nu < 5$. В координатах $(V_x / u_T; y u_T / \nu)$ профиль скорости при обтекании шероховатой поверхности остается логарифмическим примерно с тем же углом наклона, что и в случае гладкой поверхности, но сдвигается в сторону от стенки с ростом средней высоты Δ неровностей поверхности.

Внешняя часть турбулентного пограничного слоя по своим свойствам близка к турбулентным струям, поэтому в первом приближении можно считать, что длина пути смешения l_m и кинематическая турбулентная вязкость ν_T в этой области мало изменяются с увеличением расстояния от обтекаемой поверхности. Параметры течения во внутренней части турбулентного слоя, в частности динамическая вязкость μ и шероховатость стенки, слабо сказываются на профиле скорости в его внешней части. Поэтому в качестве определяющих параметров во внешней части турбулентного пограничного слоя используют величины u_T , y , δ , а профиль скорости описывают зависимостью

$$V_\delta - V_x/u_\tau = F(y/\delta).$$

В турбулентном пограничном слое несжимаемой среды с нулевым продольным градиентом давления, например на плоской пластине, функция $F(y/\delta)$ имеет универсальный характер, не зависит от продольной координаты x , числа Рейнольдса и шероховатости поверхности. Эту функцию называют *законом дефекта скорости*, а ее вид показан на рис. 5.3, б.

В практике применения приближенных методов расчета турбулентных течений используют степенные зависимости вида

$$V_x/V_\delta = (y/\delta)^{1/n},$$

где $n \approx 7$ для $Re_x < 10^7$. С ростом числа Рейнольдса значение n слабо увеличивается.

Пусть на пластине, начиная с передней кромки, развивается турбулентный пограничный слой. При расчете параметров турбулентного пограничного слоя можно использовать степенной закон распределения скорости по толщине слоя:

$$V_x/V_\infty = (y/\delta)^{1/n}.$$

В этом выражении, как правило, $n = 7$.

Согласно данным о движении жидкости по круглой трубе,

$$\tau_{ст} = 0,0225\rho V_\infty^2 [\nu/(V_\infty \delta)]^{1/4}.$$

В результате решения интегрального соотношения импульсов (5.4) получаем

$$\delta = \frac{0,37x}{\sqrt[5]{Re_x}}; \quad c_{fx} = \frac{0,0578}{\sqrt[5]{Re_x}}; \quad c_f = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re_L}}.$$

Условные толщины вытеснения, потери импульса и толщины турбулентного пограничного слоя связаны следующими соотношениями:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = H^* = \frac{1}{n+1}; \quad \frac{\delta^{**}}{\delta} = H^{**} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}.$$

При больших числах Re справедлив степенной (показатель степени есть функция числа Рейнольдса) или логарифмический закон распределения скорости по толщине турбулентного слоя. Для расчета коэффициентов трения в этом случае можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$c_{fx} = 0,0263(Re_x)^{-1/7}, \quad c_{fx} = \frac{0,37}{(\lg Re_x)^{2,584}};$$

$$c_f = 0,0307 Re_L^{-1/7}, \quad c_f = \frac{0,455}{(\lg Re_L)^{2,2584}}.$$

Таким образом, сравнение зависимостей для ламинарного и турбулентного пограничных слоев на плоской пластине показывает, что в турбулентном слое эпюра продольных скоростей более «наполненная», толщина слоя по длине пластины возрастает интенсивнее, а сопротивление трению значительно больше, чем в ламинарном.

5.5. Смешанный пограничный слой. Критическое число Рейнольдса

Приступая к расчету пограничного слоя, необходимо прежде всего проанализировать его характер на обтекаемой поверхности, который зависит от режима обтекания, определяемого числом Рейнольдса. В носовой части тела образуется ламинарный пограничный слой, затем следует некоторая область перехода ламинарного течения в турбулентное и, наконец, он становится полностью турбулентным (рис. 5.4). Такой пограничный слой называют *смешанным*. Число Re , которое соответствует границе области, отделяющей устойчивое ламинарное течение от остальных участков поверхности, называют *критическим числом Рейнольдса*:

$$Re'_{кр} = \frac{V_\delta x'_{кр} \rho_\delta}{\mu_\delta},$$

где $x'_{кр}$ — расстояние до начала области перехода ламинарного течения в турбулентное. Это число Рейнольдса называют *первым* или *минимальным критическим*. Второе критическое число Рейнольдса

$$Re''_{кр} = \frac{V_\delta x''_{кр} \rho_\delta}{\mu_\delta}$$

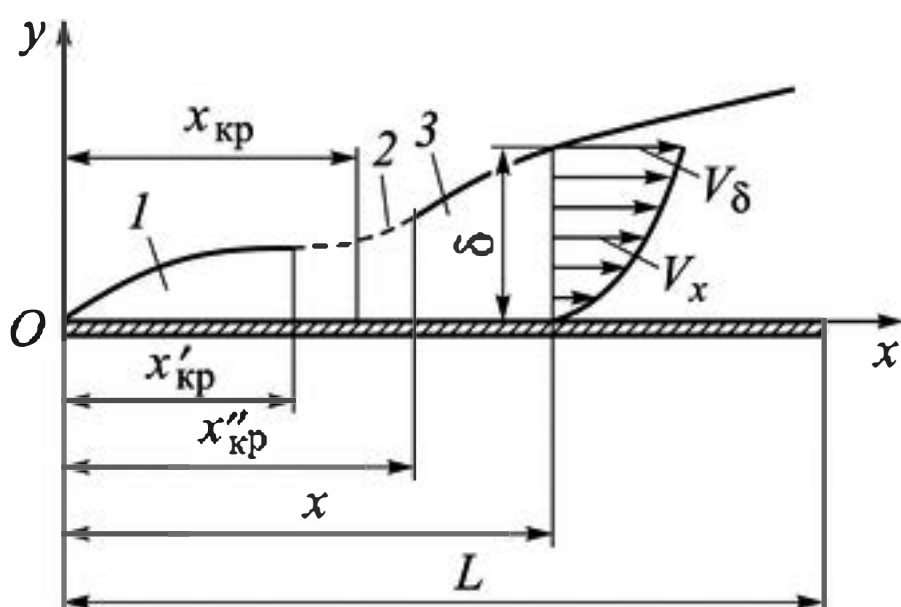


Рис. 5.4. Смешанный пограничный слой на плоской пластине:

1 — ламинарный пограничный слой; 2 — область перехода; 3 — турбулентный пограничный слой

соответствует границе (координате $x''_{кр}$), отделяющей область перехода от зоны развитой турбулентности.

Часто при решении практических задач можно исходить из того, что ламинарный пограничный слой отделен от турбулентного областью перехода с бесконечно малыми размерами. Иными словами, можно считать, что переход одной формы течения в другую происходит мгновенно при $x_{кр} = x_{\Pi}$ (рис. 5.5). Координату $x_{кр}$ этой

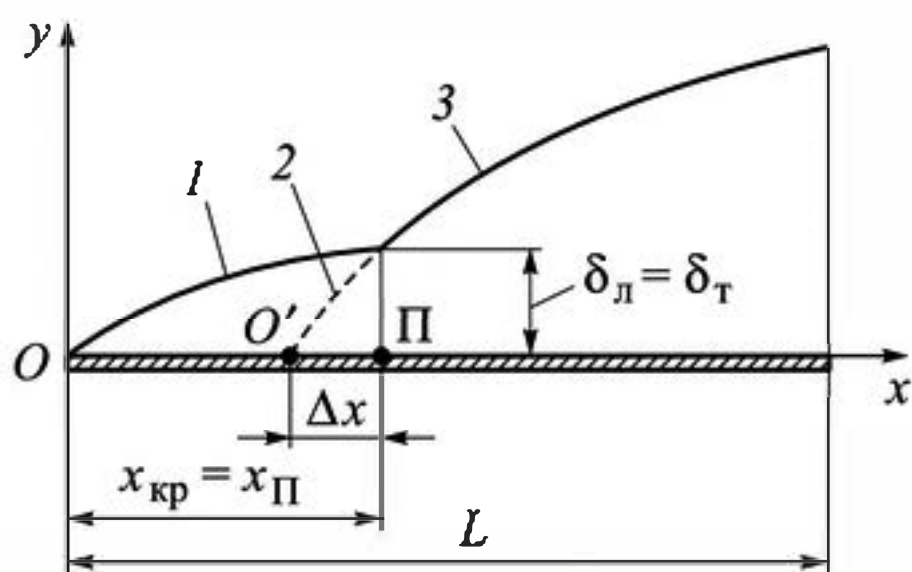


Рис. 5.5. Схема перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный: 1 — ламинарный пограничный слой; 2 — фиктивный участок турбулентного пограничного слоя; 3 — турбулентный пограничный слой за точкой перехода

точки перехода определяют по критическому числу $Re_{кр}$, которое зависит от многих факторов (числа Маха M_{∞} , температурного фактора $T_{ст}/T_{\delta}$, шероховатости поверхности, начальной степени турбулентности потока, градиента давления и т. п.):

$$Re_{кр} = V_{\delta} x_{кр} \rho_{\delta} / \mu_{\delta},$$

где V_{δ} , ρ_{δ} , μ_{δ} — скорость, плотность и динамическая вязкость на границе пограничного слоя.

Значение $Re_{кр}$ определяют на основе экспериментальных данных, позволяющих количе-

ственно и качественно анализировать явление стабилизации ламинарного пограничного слоя, процесс перехода его в турбулентный пограничный слой и закономерности формирования здесь потока. В частности, установлено, что наличие ламинарного участка не влияет на закон развития турбулентного пограничного слоя после точки перехода. Следовательно, для расчета пограничного слоя за точкой перехода можно использовать обычные зависимости, полученные для полностью турбулентного течения.

Положение точки перехода на обтекаемой поверхности зависит от ряда факторов: степени турбулентности внешнего потока, состояния поверхности, температуры стенки, числа Ma_{δ} на внешней границе пограничного слоя и продольного градиента давления.

Увеличение степени турбулентности внешнего потока, которая определяется зависимостью

$$\varepsilon = \frac{1}{V_{ср}} \sqrt{\frac{1}{3} (V_x'^2 + V_y'^2 + V_z'^2)} \cdot 100 \%,$$

где V'_x, V'_y, V'_z — пульсационные составляющие скорости; $V_{\text{ср}}$ — осредненная скорость потока, приводит к дополнительным возмущениям в пограничном слое, способствующим наступлению ранней турбулизации и, как следствие, уменьшению $Re_{\text{кр}}$.

Качественно к такому же эффекту снижения устойчивости ламинарного пограничного слоя приводит имеющаяся шероховатость поверхности, которую также следует рассматривать как источник возмущений. Если состояние поверхности охарактеризовать относительной шероховатостью

$$\bar{\Delta} = \Delta / \delta^*,$$

где Δ — высота неровностей поверхности; δ^* — толщина вытеснения, то влияние этого состояния на критическое число Рейнольдса для несжимаемой среды определяется уменьшением устойчивости ламинарного пограничного слоя с увеличением относительной шероховатости.

При рассмотрении сжимаемого пограничного слоя на плоской пластине важнейшим фактором является температура стенки $T_{\text{ст}}$. Установлено, что охлаждение обтекаемой поверхности способствует стабилизации пограничного слоя и повышению критического числа Рейнольдса. Это объясняется тем, что от охлаждения снижается температура и увеличивается плотность газа у стенки, вследствие чего возрастает кинетическая энергия потока. Понятно, что частицы с большей энергией менее подвержены влиянию возмущающих пульсаций. При этом замечено, что при очень больших скоростях обтекания число Рейнольдса как критерий устойчивости играет менее существенную роль, чем относительная температура стенки $\tilde{T}_{\text{ст}} = T_{\text{ст}} / T_r$ (где T_r — температура потока у поверхности стенки) и число M_δ на внешней границе пограничного слоя.

Используя приведенные на рис. 5.6 результаты исследований, можно уточнить положение точки $x_{\text{кр}}$ ($Re_{\text{кр}}$) перехода от ламинарного течения к турбулентному. Кроме того, эти данные позволяют установить

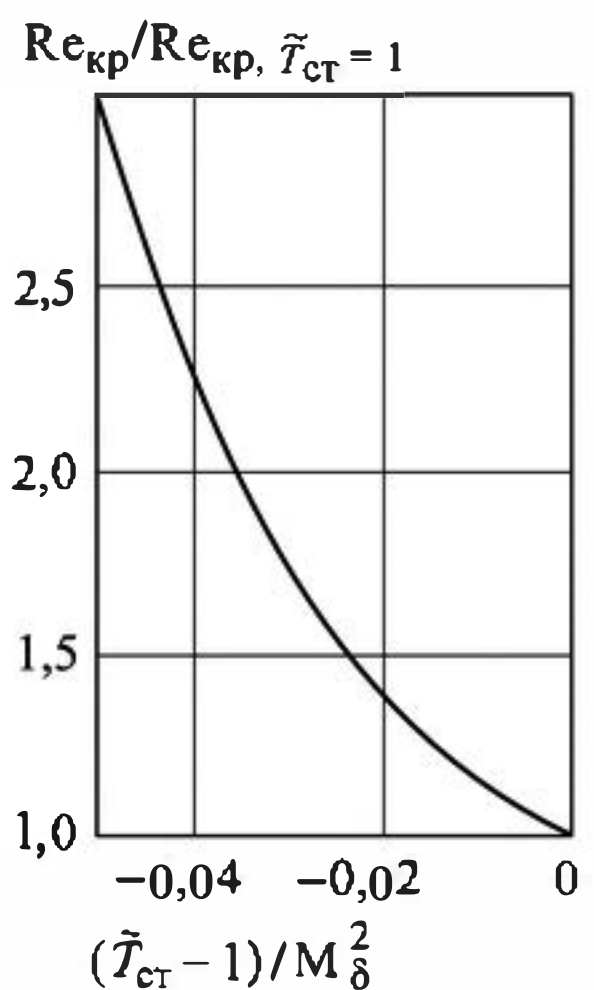


Рис. 5.6. Зависимость, характеризующая изменение числа $Re_{\text{кр}}$ от температурного фактора $\tilde{T}_{\text{ст}}$ и числа M_δ

влияние числа M_δ на устойчивость ламинарного пограничного слоя на его внешней границе. Так, с увеличением M_δ число $Re_{кр}$ уменьшается, поскольку при этом повышается температура восстановления, а значит, снижается плотность и кинетическая энергия газа у стенки. На частицы газа с меньшей кинетической энергией, естественно, сильнее сказывается воздействие возмущений, что приводит к более ранней турбулизации пограничного слоя.

При исследовании устойчивости ламинарного пограничного слоя на криволинейной поверхности необходимо наряду с указанными факторами также учитывать влияние продольного градиента давления. Если он положительный, то частицы газа движутся с замедлением и их кинетическая энергия уменьшается. Это обуславливает меньшую сопротивляемость к возмущающим воздействиям, что приводит к более интенсивному поперечному перемешиванию и, как следствие, к снижению критического числа Рейнольдса. Ускорение частиц, вызванное отрицательным градиентом давления, способствует «затягиванию» ламинарного движения до весьма больших значений $Re_{кр}$.

В приближенных расчетах в случае обтекания плоской пластины при дозвуковых скоростях потока принимают $Re_{кр} = 4,5 \cdot 10^5$, а при сверхзвуковых — $Re_{кр} = (2...5) \cdot 10^6$.

Параметры смешанного пограничного слоя рассчитывают следующим образом. На участке пластины от передней кромки до точки П (см. рис. 5.5) параметры вязкого обтекания (толщина слоя, коэффициент трения и др.) определяют по соотношениям для ламинарного пограничного слоя с учетом сжимаемости, теплопередачи и диссоциации.

Для расчета турбулентного течения, начинающегося за точкой П, нельзя непосредственно применять зависимости для турбулентного пограничного слоя, поскольку этот слой начинается не с нулевой толщины, а с какого-то конечного значения. Эти зависимости можно использовать, если входящую в них координату x отсчитывать от условного начала турбулентного пограничного слоя, например от точки O' на рис. 5.5.

Согласно одной из схем определения положения точки O' , принимают, что расстояние $\Delta x = O'П$, равное длине условной пластины с турбулентным пограничным слоем, должно обеспечивать толщину δ_t турбулентного пограничного слоя в точке перехода, равную толщине δ_l ламинарного слоя на длине $x_{кр} = x_P$, т. е.

$$\delta_{\text{л}x_{\text{кр}}} = \delta_{\text{т}} \Delta x. \quad (5.27)$$

Толщины пограничных слоев рассчитывают по формулам для ламинарного и турбулентного течений, причем толщину ламинарного слоя определяют по критическому числу $Re_{\text{кр}} = V_{\delta} x_{\text{кр}} / \nu_{\delta}$, а толщину турбулентного — по $Re = V_{\delta} \Delta x / \nu_{\delta}$. Таким образом, условие (5.27) позволяет рассчитать величину Δx , найти положение точки O' и определить все необходимые параметры турбулентного пограничного слоя.

Средний коэффициент трения c_f для смешанного пограничного слоя вычисляют по формуле

$$c_f = c_{f\text{л}} \frac{x_{\text{л}}}{L} + c_{f\text{т}_1} \frac{x_1}{L} - c_{f\text{т}_2} \frac{\Delta x}{L},$$

где $c_{f\text{л}}$ — средний коэффициент трения для ламинарного слоя на участке ОП (см. рис. 5.5), рассчитанный по критическому числу Рейнольдса; $c_{f\text{т}_1}$, $c_{f\text{т}_2}$ — средние коэффициенты трения для турбулентного слоя соответственно на участках $x_1 = L - x_{\text{л}} + \Delta x$ и Δx , вычисленные по числам Рейнольдса Re_{x_1} и $Re_{\Delta x}$.

5.6. Пограничный слой на криволинейной поверхности

Ламинарный пограничный слой

Для пограничного слоя на плоской пластине характерно, что давление во всех его сечениях одинаково, т. е. $dp/dx = 0$. Однако при обтекании криволинейной поверхности (например, профиля крыла или тела вращения с криволинейной образующей) этот градиент отличен от нуля, поскольку давление на внешней границе пограничного слоя будет зависеть от координаты x . Это влечет за собой изменение напряжения трения, а следовательно, распределения скорости и толщины пограничного слоя по сравнению со случаем обтекания плоской пластины или конуса.

Если рассмотреть профиль крыла с криволинейным контуром, обтекаемым дозвуковым потоком (рис. 5.7), то на участке OB градиент давления будет отрицательным, а на участке BC на задней кромке — положительным. Такой характер изменения градиента давления dp_{δ}/dx обусловлен особенностями обтекания профиля: на переднем участке скорость в направлении от точки O к точке B воз-

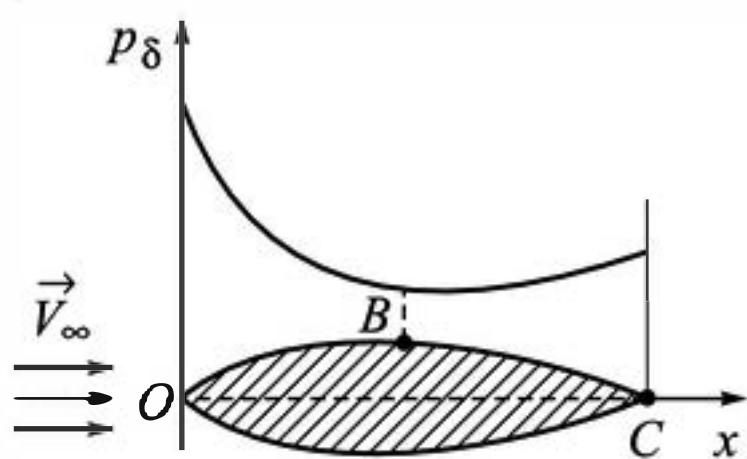


Рис. 5.7. Распределение давления по профилю крыла

растает, а давление, согласно уравнению Бернулли, снижается; на участке, примыкающем к задней кромке, скорость, наоборот, уменьшается, а давление увеличивается.

В случае сверхзвуковых скоростей за точкой B в направлении к задней кромке профиля давление p_δ и производная dp_δ/dx уменьшаются, т. е. на этой части поверхности крыла течение в пограничном слое будет испыты-

вать влияние отрицательного градиента давления.

Рассмотрим предложенный Л.Г. Лойцянским метод расчета параметров пограничного слоя на криволинейной поверхности, базирующийся на использовании интегрального соотношения (5.7). Пусть вязкий газ обтекает некоторую криволинейную поверхность, течение считается установившимся ламинарным плоским и несжимаемым, а распределение скоростей в пограничном слое подчиняется соотношению

$$\frac{V_x}{V_\delta} = \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}}, \psi\right), \quad (5.28)$$

где ψ — неизвестный параметр, характеризующий влияние формы тела на распределение скоростей в пограничном слое.

При выполнении условия (5.28) отношение δ^*/δ^{**} будет являться функцией только одного параметра ψ . В самом деле, поскольку

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{V_x}{V_\delta}\right) dy \approx \int_0^\infty \left(1 - \frac{V_x}{V_\delta}\right) dy,$$

или

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{V_x}{V_\delta}\right) dy = \delta^{**} \int_0^\infty \left[1 - \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}}, \psi\right)\right] d\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right),$$

то

$$\frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \int_0^\infty \left[1 - \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}}, \psi\right)\right] d\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right) = H(\psi). \quad (5.29)$$

Напряжение $\tau_{\text{ст}}$ на поверхности при $y = 0$ также будет функцией параметра ψ . Действительно, для ламинарного пограничного слоя

$$\tau_{\text{ст}} = \mu \left. \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{V_\delta}{\delta^{**}} \xi(\psi), \quad (5.30)$$

где $\xi(\psi) = \left. \frac{\partial (V_x/V_\delta)}{\partial (y/\delta^{**})} \right|_{y=0}$, так как градиент скорости $\partial V_x/\partial y$ является функцией только ψ .

Подставив в интегральное соотношение (5.7) для пограничного слоя выражения (5.29) и (5.30), содержащие функции $H(\psi)$, $\xi(\psi)$, получим

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{V'_\delta}{V_\delta} \delta^{**} [2 + H(\psi)] = \frac{\nu}{V_\delta \delta^{**}} \xi(\psi), \quad (5.31)$$

где $V'_\delta = \partial V_\delta/\partial x$.

Умножим обе части уравнения (5.31) на $2V_\delta \delta^{**2}/\nu$ и примем, что

$$\psi = V'_\delta \delta^{**2}/\nu. \quad (5.32)$$

Тогда

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{V'_\delta}{V_\delta} \Phi(\psi) + \frac{V''_\delta}{V'_\delta} \psi, \quad (5.33)$$

где $\Phi(\psi) = 2 \{ \xi(\psi) - \psi [2 + H(\psi)] \}$; $V''_\delta = \partial V'_\delta/\partial x$.

В общем виде уравнение (5.33) не интегрируется. Его можно решить численно для каждого конкретного случая распределения скоростей в потенциальном потоке.

Таким образом, расчет пограничного слоя сводится к нахождению функций $\Phi(\psi)$, $\xi(\psi)$, $H(\psi)$ по известному профилю скорости в пограничном слое. Зная эти функции, можно достаточно просто определить $\psi(x)$ из уравнения (5.33), δ^{**} — по формуле (5.32) и искомое напряжение трения $\tau_{\text{ст}}$ — из уравнения (5.30).

Согласно экспериментальным данным, распределение скорости в пограничном слое аппроксимируется многочленом:

$$\varphi(\eta) = V_x/V_\delta = 1 + a_1 \eta^n + a_2 \eta^{n+1} + a_3 \eta^{n+2}, \quad (5.34)$$

где $\eta = 1 - y/\delta$; a_1, a_2, a_3 — коэффициенты.

Для вычисления коэффициентов a_1, a_2, a_3 воспользуемся граничными условиями на поверхности тела:

$$\text{при } y=0 \quad V_x = V_y = 0; \quad \left. \frac{\partial^3 V_x}{\partial x^3} \right|_{y=0} = 0, \quad (5.35)$$

и дифференциальным уравнением движения газа в пограничном слое:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho v} \frac{dp}{dx}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = -\frac{V_\delta}{v} \frac{dV_\delta}{dx} = -\frac{V_\delta V'_\delta}{v}. \quad (5.36)$$

Обозначив безразмерную величину

$$\frac{V'_\delta \delta^2}{v} = \lambda$$

и решая систему уравнений (5.35), (5.36), находим коэффициенты многочлена (5.34):

$$a_1 = \frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{6} (n+1)(n+2);$$

$$a_2 = -\frac{n}{n+1} \lambda + \frac{1}{3} (n-1)(n+2);$$

$$a_3 = \frac{n-1}{2(n+1)} \lambda - \frac{1}{6} (n-1)n.$$

Зная a_1, a_2, a_3 и выражая V_x через λ и n , получаем

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left(1 - \frac{V_x}{V_\delta} \right) dy = -\frac{a_1}{n+1} - \frac{a_2}{n+2} - \frac{a_3}{n+3} = H^*(\lambda, n); \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^{**}}{\delta} &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{V_x}{V_\delta} \left(1 - \frac{V_x}{V_\delta} \right) dy = H^* - \frac{a_1^2}{2n+1} - \frac{a_2^2}{2n+3} - \frac{a_3^2}{2n+5} - \\ &\quad - \frac{a_1 a_2}{n+1} - \frac{a_1 a_3}{2n+3} - \frac{a_2 a_3}{n+2} = H^{**}(\lambda, n). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Аналогично для ψ и ξ находим

$$\psi = \frac{V_\delta' \delta^{**2}}{\nu} = \frac{V_\delta' \delta^2}{\nu} \left(\frac{\delta^{**}}{\delta} \right)^2 = \lambda H^{**2};$$

(5.39)

$$\xi = \frac{\partial(V_x/V_\delta)}{\partial(y/\delta^{**})} \bigg|_{y=0} = \frac{\delta^{**}}{\delta} \frac{\partial(V_x/V_\delta)}{\partial(y/\delta)} \bigg|_{y=0} = H^{**}(\lambda, n) b(\lambda, n),$$

(5.40)

где $b(\lambda, n) = \frac{1}{n+1} \lambda + \frac{1}{3} (n+2)$.

Напряжение трения

$$\tau_{\text{ст}} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \bigg|_{y=0} = \sqrt{\mu \rho V_\delta' V_x^2} \cdot \frac{b(\lambda, n)}{\sqrt{\lambda}}.$$

(5.41)

Поскольку величины, определяемые соотношениями (5.37)–(5.41), являются функциями двух параметров (λ и n), а профиль скорости описывается однопараметрическим уравнением (5.34), была установлена приближенная зависимость показателя степени n от параметра λ :

$$n = 0,15\lambda + 4.$$

Важно отметить, что при однопараметрической зависимости профиля скорости вид функций $\Phi(\psi)$, $\xi(\psi)$, $H(\psi)$ не зависит от характера изменения $V_\delta(x)$ (формы крыла и его угла атаки), т. е. они являются универсальными (табл. 5.1).

Таблица 5.1. Значения функций $\Phi(\psi)$, $\xi(\psi)$, $H(\psi)$

ψ	$\Phi(\psi)$	$\xi(\psi)$	$H(\psi)$	ψ	$\Phi(\psi)$	$\xi(\psi)$	$H(\psi)$
–0,089	1,040	0	3,85	0,010	0,380	0,236	2,55
–0,085	1,000	0,019	3,66	0,020	0,330	0,253	2,50
–0,080	0,960	0,039	3,50	0,030	0,275	0,270	2,46
–0,070	0,880	0,071	3,28	0,040	0,220	0,286	2,41
–0,060	0,810	0,097	3,12	0,050	0,170	0,302	2,36
–0,050	0,740	0,120	3,00	0,060	0,120	0,318	2,32
–0,040	0,680	0,142	2,90	0,070	0,070	0,335	2,28
–0,030	0,615	0,162	2,82	0,080	0,020	0,350	2,24
–0,020	0,550	0,181	2,74	0,084	0,003	0,357	2,22
–0,010	0,495	0,200	2,67	0,085	–0,002	0,357	2,22
0	0,44	0,219	2,61				

На основании данных, приведенных в табл. 5.1, можно установить, что величины Φ и ψ связаны между собой зависимостью, близкой к линейной:

$$\Phi(\psi) = 0,44 - 5,75\psi.$$

Подставим последнее выражение в уравнение (5.33):

$$\frac{d\psi}{dx} = \left[\frac{V_\delta''}{V_\delta'} - 5,75 \frac{V_\delta'}{V_\delta} \right] \psi + 0,44 \frac{V_\delta'}{V_\delta}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение и определяя произвольную постоянную из условия конечности ψ при $x = 0$, получаем приближенную формулу для нахождения параметра $\psi(x)$:

$$\psi(x) = 0,44 \frac{V_\delta'(x)}{[V_\delta(x)]^{5,75}} \int_0^x [V_\delta(x)]^{4,75} dx$$

или в более удобной для расчета форме

$$\psi(x) = 0,46 \frac{V_\delta'(x)}{[V_\delta(x)]^6} \int_0^x [V_\delta(x)]^5 dx. \quad (5.42)$$

Ошибка вычисления значения δ^{**} с использованием выражения (5.42) не превышает 3 %.

Соотношение (5.42) применяют для расчета характеристик ламинарного пограничного слоя на поверхности криволинейного профиля. В первом приближении вычисления проводят по следующей схеме.

Зная распределение скорости V_δ , а следовательно, и V_δ' , V_δ'' , которые находят из расчета обтекания тела потоком идеального газа, по формуле (5.42) определяют значение параметра $\psi(x)$.

Используя выражение (5.32), подсчитывают толщину потери импульса:

$$\delta^{**}(x) = \sqrt{\frac{\psi(x)v}{V_\delta'(x)}}.$$

Далее по $\psi(x)$ находят значения $H(\psi)$, $\xi(\psi)$ и вычисляют следующие величины:

$$\delta^*(x) = \delta^{**}(x) H(\psi); \quad \tau_{\text{ст}} = \mu \frac{V(x)}{\delta^{**}(x)} \xi[\psi(x)];$$

$$H^{**}(\lambda) = \frac{\xi(\psi)}{b(\lambda)}; \quad \lambda = \frac{\psi}{H^{**2}}; \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda v}{V_\delta'}}.$$

Полученные результаты позволяют найти положение точки отрыва ламинарного пограничного слоя на криволинейной поверхности. Действительно, в точке отрыва $\tau_{\text{от}} = 0$, т. е. $\xi(\psi) = 0$, а значит, $\psi = -0,089$ (см. табл. 5. 1). Следовательно, для точки отрыва можно записать

$$\frac{V_{\delta}' \delta^{**2}}{\nu} = -0,089, \text{ или } \frac{dV_{\delta}}{dx} = 0,089 \frac{\nu}{\delta^{**2}}. \quad (5.43)$$

Выражение (5.43) можно считать критерием отрыва ламинарного течения на криволинейном профиле.

Для расчета аэродинамических характеристик профиля крыла при заданных условиях обтекания необходимо знать положение точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный, т. е. определить протяженность соответствующих областей течения. Предложим, что ламинарный пограничный слой теряет устойчивость и становится турбулентным на некотором расстоянии Δx_s до точки возможного отрыва, координата которой определяется уравнением (5.43). Вводя в рассмотрение число $Re^{**} = V_{\delta} \delta^{**} / \nu$, условие отрыва ламинарного слоя можно записать так:

$$\frac{\nu V_{\delta}'}{V_{\delta}^2} \left(\frac{V_{\delta} \delta^{**}}{\nu} \right)^2 = \frac{\nu V_{\delta}'}{V_{\delta}^2} Re^{**2} = -0,089$$

или с учетом некоторого смещения вверх по потоку

$$\left(\frac{\nu V_{\delta}'}{V_{\delta}^2} + \gamma \right) Re^{**2} = -0,089, \quad (5.44)$$

где γ — величина, характеризующая потерю устойчивости ламинарного пограничного слоя, $\gamma \approx (-2,5 \dots -0,5) 10^{-7}$.

Координату точки перехода рассчитывают в следующей последовательности. Перейдя к безразмерным величинам, с учетом формулы (5.42) определяют

$$Re^{**2} = Re \varphi(\bar{x}),$$

где $Re = \frac{V_{\infty} b}{\nu}$; $\varphi(\bar{x}) = \frac{0,46}{\bar{V}_{\delta}^4} \int_0^{\bar{x}} \bar{V}_{\delta}^5 d\bar{x}$; $\bar{x} = \frac{x}{b}$; $\bar{V}_{\delta} = \frac{V_{\delta}}{V_{\infty}}$, b — хорда профиля.

Очевидно, что

$$\frac{vV_{\delta}'}{V_{\delta}^2} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\bar{V}_{\delta}'}{\bar{V}_{\delta}^2}.$$

Подставив полученные выражения в формулу (5.44), находим уравнение

$$\left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\bar{V}_{\delta}'}{\bar{V}_{\delta}^2} + \gamma \right) \text{Re} \varphi(\bar{x}) = -0,089,$$

решение которого дает координату $\bar{x} = \bar{x}_{\Pi}$ точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

Турбулентный пограничный слой

Для турбулентного пограничного слоя параметр ψ и функция ξ трения в общем виде имеют вид

$$\psi = \frac{\delta^{**}}{V_{\delta}} \frac{dV_{\delta}}{dx} G(\text{Re}^{**}); \quad \xi = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho V_{\delta}^2} G(\text{Re}^{**}),$$

где $G(\text{Re}^{**})$ — некоторая функция (для ламинарного пограничного слоя $G(\text{Re}^{**}) = \text{Re}^{**}$). Умножив обе части уравнения (5.7) на $G(\text{Re}^{**})$, получим

$$G(\text{Re}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} + (2 + H) \psi = \xi. \quad (5.45)$$

Преобразуем первый член уравнения (5.45):

$$\begin{aligned} G(\text{Re}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[G(\text{Re}^{**}) \frac{V_{\delta}' \delta^{**}}{V_{\delta}} \frac{V_{\delta}}{V_{\delta}'} \right] - \delta^{**} G(\text{Re}^{**}) \frac{d\text{Re}^{**}}{dx} = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\psi \frac{V_{\delta}}{V_{\delta}'} \right) - \delta^{**} G'(\text{Re}^{**}) \left(\frac{V_{\delta}}{v} \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{V_{\delta}' \delta^{**}}{v} \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\psi \frac{V_{\delta}}{V_{\delta}'} \right) - \text{Re}^{**} G'(\text{Re}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} - \text{Re}^{**} \frac{G'(\text{Re}^{**})}{G(\text{Re}^{**})} \psi = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\psi \frac{V_{\delta}}{V_{\delta}'} \right) - \text{Re}^{**} \frac{G'(\text{Re}^{**})}{G(\text{Re}^{**})} G(\text{Re}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} - \text{Re}^{**} \frac{G'(\text{Re}^{**})}{G(\text{Re}^{**})} \psi. \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$m = m(\text{Re}^{**}) = \text{Re}^{**} \frac{G'(\text{Re}^{**})}{G(\text{Re}^{**})} = \frac{d[\log G(\text{Re}^{**})]}{d(\log \text{Re}^{**})}. \quad (5.46)$$

Тогда, согласно выражению (5.45),

$$[1 + m(\text{Re}^{**})] G(\text{Re}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\psi \frac{V_\delta}{V'_\delta} \right) - m(\text{Re}^{**}) \psi,$$

или

$$\frac{d}{dx} \left(\psi \frac{V_\delta}{V'_\delta} \right) = (1 + m) \xi - [3 + m + (1 + m)H] \psi. \quad (5.47)$$

Раскрывая производную в левой части уравнения (5.47), окончательно находим

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{V'_\delta}{V_\delta} F(\psi, \text{Re}^{**}) + \frac{V''_\delta}{V'_\delta} \psi, \quad (5.48)$$

где $F(\psi, \text{Re}^{**}) = (1 + m) \xi - [3 + m + (1 + m)H] \psi$.

Дифференциальное уравнение (5.48) аналогично уравнению (5.33) для ламинарного пограничного слоя при $G(\text{Re}^{**}) = \text{Re}^{**}$, $m = 1$.

Для турбулентного пограничного слоя формпараметр ψ выражается через функцию $G(\text{Re}^{**})$, которая в первом приближении вдали от точки отрыва может быть представлена следующей экспериментальной зависимостью:

$$G(\text{Re}^{**}) = 153,2 (\text{Re}^{**})^{1/6}.$$

Тогда, согласно (5.46), значение $m = 1/6 \cong 0,167$.

В целях использования основных величин, характеризующих ламинарный слой, для расчета турбулентного слоя введем следующие нормированные величины. Параметр ψ нормируем так, чтобы в точке отрыва его значение равнялось единице, т. е. $\bar{\psi} = \psi / \psi_S$, где ψ_S — параметр ψ в точке отрыва $S(x = x_S)$, имеющий разные значения для турбулентного и ламинарного пограничных слоев (для ламинарного слоя $\psi_S^{\text{л}} = -0,089$).

Функции $\xi(\psi)$, $H(\psi)$ нормируем таким образом, чтобы при $\psi = 0$ ($V'_\delta = 0$) для точки минимума давления их безразмерные значения равнялись единице, т. е.

$$\bar{\xi} = \xi / \xi_{\psi=0} = \xi / \xi_0; \quad \bar{H} = H / H_{\psi=0} = H / H_0,$$

где ξ_0, H_0 — параметры ξ и H в точке минимума давления (разные значения для ламинарного и турбулентного пограничных слоев).

Дифференциальное уравнение (5.48) можно записать в безразмерном виде:

$$\frac{d\bar{\psi}}{dx} = \frac{V'_\delta}{V_\delta} \bar{F}(\bar{\psi}, Re^{**}) + \frac{V''_\delta}{V'_\delta} \bar{\psi}, \tag{5.49}$$

где $\bar{F}(\bar{\psi}, Re^{**}) = \frac{1+m}{\psi_0} \xi_0 \bar{\xi}(\bar{\psi}) - [3+m+(1+m)H_0 \bar{H}(\bar{\psi})] \bar{\psi}.$

Для определения функции $\bar{F}(\bar{\psi}, Re^{**})$ в случае турбулентного пограничного слоя необходимо кроме $m(Re^{**})$, ψ_S , H_0 и ξ_0 знать значения $\bar{\xi}(\bar{\psi})$ и $\bar{H}(\bar{\psi})$. Анализ экспериментальных исследований течений газа вблизи поверхности показал, что функции $\bar{\xi} = \xi(\bar{\psi})$, $\bar{H} = H(\bar{\psi})$ для ламинарного и турбулентного режимов течения практически одинаковы (табл. 5.2).

Используя полученные на основе экспериментов значения постоянных $m = 0,167$, $\psi_S = -4 \dots -2$, $\bar{H}_0 = 1,4$, $\xi_0 = 1$, а также данные табл. 5.2, можно легко вычислить $\bar{F}(\bar{\psi}, Re^{**})$ для турбулентного пограничного слоя. С достаточной для практики точностью эту функцию можно считать линейной:

$$\bar{F}(\bar{\psi}) = -a_1 - a_2 \bar{\psi}, \tag{5.50}$$

где $a_1 = 0,6$, $a_2 = 4,8$.

Таблица 5.2. Значения функций $\bar{\xi}(\bar{\psi})$ и $\bar{H}(\bar{\psi})$

$\bar{\psi}$	$\bar{\xi}(\bar{\psi})$	$\bar{H}(\bar{\psi})$	$\bar{\psi}$	$\bar{\xi}(\bar{\psi})$	$\bar{H}(\bar{\psi})$
-0,95	1,630	0,850	0,1	0,930	1,020
-0,90	1,600	0,860	0,2	0,850	1,040
-0,80	1,530	0,870	0,3	0,770	1,070
-0,70	1,470	0,880	0,4	0,690	1,100
-0,60	1,410	0,900	0,5	0,600	1,125
-0,50	1,340	0,915	0,6	0,515	1,160
-0,40	1,280	0,930	0,7	0,420	1,200
-0,30	1,210	0,950	0,8	0,310	1,260
-0,20	1,140	0,970	0,9	0,175	1,350
-0,10	1,080	0,985	1,0	0	1,480
0	1,000	1,000			

Подставив (5.50) в уравнение (5.49), после интегрирования получим

$$\bar{\psi}(x) = \frac{V'_\delta(x)}{[V_\delta(x)]^{a_2}} \left\{ c - a_1 \int_0^x [V_\delta(x)]^{a_2-1} dx \right\}.$$

При полностью турбулентном слое $c = 0$ (это следует из условия конечности $\bar{\psi}$ при $x = 0$, $V_\delta = 0$), а значит,

$$\bar{\psi}(x) = -\frac{a_1 V'_\delta(x)}{[V_\delta(x)]^{a_2}} \int_0^x [V_\delta(x)]^{a_2-1} dx$$

или, подставив значения a_1, a_2 ,

$$\bar{\psi} = -0,6 \frac{V'_\delta}{V_\delta^{4,8}} \int_0^x V_\delta^{3,8}(x) dx.$$

При наличии начального ламинарного участка длиной x_Π из условия совпадения толщины потери импульса δ^{**} на границе между ламинарным и турбулентным участками имеем

$$\bar{\psi} = \frac{V'_\delta}{V_\delta^{4,8}} \left[\bar{\psi}_\Pi \frac{V_{\delta\Pi}^{4,8}}{V'_\delta} - 0,6 \int_{x_\Pi}^x V_\delta^{3,8}(x) dx \right],$$

где индекс «П» соответствует параметрам течения в точке перехода ламинарного режима в турбулентный.

5.7. Тепловой пограничный слой

Параметры восстановления

При малых скоростях обтекания тел нагрев газа, обусловленный торможением потока в пограничном слое, незначителен и температуру в нем можно считать практически равной ее значению во внешнем потоке. При больших скоростях вследствие торможения газа происходит значительное повышение температуры и энтальпии в пограничном слое, которое соответствует характеру изменения скорости по его сечению, что влечет за собой изменение термодинамических параметров и кинетических коэффициентов газа.

Ранее пограничный слой рассматривали без учета сжимаемости газа (малые скорости обтекания). В этом случае число $Pr = 1$. В действительности процессы в пограничном слое характеризуют-

ся наличием теплопередачи у стенки, изменяющей распределение температур и оказывающей тем самым влияние на трение. Рассмотрим возможный характер распределения температур в связи с возникновением тепловых потоков в пограничном слое у поверхности стенки при числе $Pr \neq 1$. Такой пограничный слой, как известно, определяется как *тепловой*.

При рассмотрении адиабатической теплоизолированной стенки перенос энергии в пограничном слое происходит следующим образом. Вследствие торможения потока, обусловленного вязкостью среды, температура возрастает от значения на границе слоя до некоторого значения на стенке ($\partial T / \partial y \neq 0$). В таком случае, в соответствии с законом Фурье, возникает передача теплоты путем теплопроводности во внешние слои газа с меньшей температурой. Нагрев возрастает, пока не установится равновесие между этой теплопередачей и противоположным потоком теплоты от внешних слоев к внутренним. В связи с отводом теплоты от участков пограничного слоя, расположенных у стенки, температура на обтекаемой поверхности $T_{ст} = T_r$ становится меньше температуры торможения T_0 . Снижение температуры у стенки можно охарактеризовать параметром $r = (T_r - T_\delta) / (T_0 - T_\delta)$, называемым *коэффициентом восстановления температуры*. В недиссоциированном потоке

$$T_r = T_\delta \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_\delta^2 \right).$$

В первом приближении коэффициент восстановления принимают для ламинарного пограничного слоя $r_\lambda = 0,83 \dots 0,85$, а для турбулентного — $r_T = 0,88 \dots 0,90$.

Соотношение между тепловыми потоками, обусловленными трением, и теплотой, уносимой молекулами при их перемешивании, определяется числом Прандтля $Pr = c_p \mu / \lambda$. Коэффициент восстановления зависит от этого критерия следующим образом:

$$r_\lambda = \sqrt{Pr}; \quad r_T = \sqrt[3]{Pr}.$$

При $Pr = 1$ коэффициент $r = 1$, т. е. температура восстановления совпадает с температурой торможения.

Изменение температуры и энтальпии по сечению пограничного слоя для различных условий обтекания показано на рис. 5.8. При этом кривые на рис. 5.8, б характеризуют изменение этих величин для теплоизолированной стенки при $Pr = 1$ и $Pr \neq 1$. Естественно, распределение температуры и энтальпии будет другим в случае не-

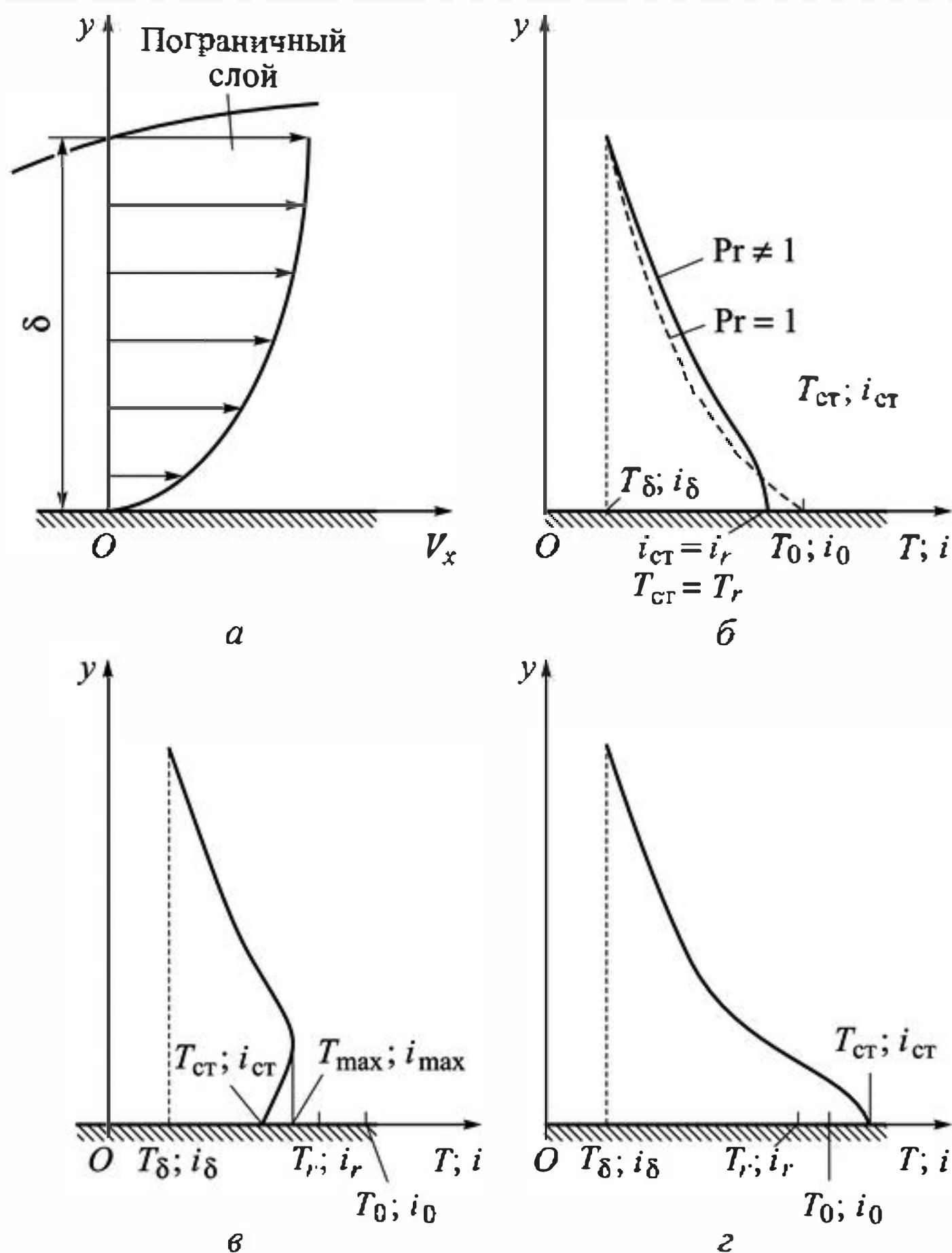


Рис. 5.8. Распределение скорости потока (а), а также температуры и энтальпии по сечению пограничного слоя для случая адиабатической (теплоизолированной) (б), охлажденной (в) и нагреваемой (г) стенок

теплоизолированной стенки, т. е. при наличии отвода или подвода теплоты (см. рис. 5.8, в, г). При отводе теплоты (охлаждаемая стенка) нетеплоизолированный пограничный слой будет охлаждаться, в связи с чем у такой стенки $T_{ст} < T_r$ и $i_{ст} < i_r$. При этом температуру $T_{ст}$ газа можно рассматривать как температуру поверхности стенки, поэтому в дальнейшем будем называть ее температурой стенки. Если теплота подводится от какого-либо внешнего источника и температура стенки превышает максимальную температуру пограничного слоя (нагреваемая стенка), то пограничный слой будет также нагреваться. Для газа у поверхности $T_{ст} > T_r$, $i_{ст} > i_r$.

Интегральное соотношение для теплового пограничного слоя

Около поверхности обтекаемого тела образуется область переменных температур, которая по аналогии с вязким пограничным слоем называется тепловым пограничным слоем. Интегральное соотношение для этого слоя является, по существу, уравнением теплового баланса. В нем выражено условие равенства результирующего теплового потока, проникающего в контрольный объем, количеству теплоты, отдаваемой (поглощаемой) элементом поверхности тела.

Рассмотрим установившееся течение газа и выделим в тепловом пограничном слое бесконечно малый элемент $ABCD$ единичной ширины, ограниченный поверхностью тела AD , внешней границей теплового пограничного слоя BC и отрезками (гранями) AB , CD , перпендикулярными обтекаемой поверхности (рис. 5.9).

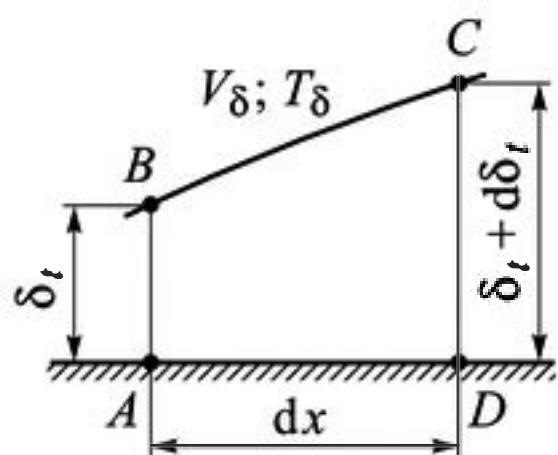


Рис. 5.9. К выводу интегрального соотношения для теплового пограничного слоя

Потоки теплоты, вносимой движущимся газом в элемент $ABCD$ через его грань AB и уносимой из него через грань CD в единицу времени, определяются соответственно следующими выражениями:

$$\int_0^{\delta_1} c_p T \rho V_x dy;$$

$$\int_0^{\delta_1} c_p T \rho V_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta_1} c_p T \rho V_x dy \right) dx,$$

где δ_1 — толщина теплового пограничного слоя.

Количество теплоты, вносимой в элемент теплового пограничного слоя через его внешнюю граничную поверхность, равно

$$c_p T_\delta \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta_1} \rho V_x dy \right) dx,$$

где $\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta_1} \rho V_x dy \right) dx$ — масса газа, втекающего в этот элемент и

равная разности масс газа, поступающего через грань AB и уносимого через грань CD ; $c_p T_\delta$ — энтальпия единицы массы газа, соответствующая условиям на внешней границе слоя.

В соответствии с законом Фурье: $q_{\text{отв}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$, тепловой поток, отводимый через грань AD , определяется соотношением

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} dx \quad (5.51)$$

В условиях стационарного процесса приток теплоты, равный

$$\int_0^{\delta_t} c_p T \rho V_x dy + c_p T_\delta \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta_t} \rho V_x dy \right) dx - \\ - \left[\int_0^{\delta_t} c_p T \rho V_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta_t} c_p T \rho V_x dy \right) dx \right],$$

должен равняться количеству теплоты, отдаваемой элементом теплового пограничного слоя поверхности тела в единицу времени:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} dx$$

или после элементарных преобразований

$$c_p T_\delta \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} \rho V_x dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} c_p T \rho V_x dy = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

В случае несжимаемой среды ($\rho = \text{const}$) при $c_p = \text{const}$ имеем

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} V_x (T_\delta - T) dy = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (5.52)$$

Если ввести в выражение (5.52) температуропроводность $a_t = \lambda / (c_p \rho)$, характеризующую изменение температуры газа вследствие его теплопроводности, то интегральное соотношение для теплового пограничного слоя примет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} V_x (T_\delta - T) dy = a_t \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (5.53)$$

Параметры теплового пограничного слоя на плоской пластине

Рассмотрим теперь расчет параметров теплового пограничного слоя на плоской пластине, если вязкий пограничный слой ламинарный. При этом считаем, что вязкий и тепловой пограничные слои начинают развиваться с носка пластины, причем толщина каждого из них возрастает в направлении течения.

Введем в рассмотрение температурные напоры

$$\upsilon = T_{\text{ст}} - T \quad \text{и} \quad \theta = T_{\text{ст}} - T_{\delta}$$

(здесь T — текущая температура в пограничном слое) и будем считать, что распределение относительного температурного напора υ/θ по толщине теплового пограничного слоя аналогично распределению относительной скорости V_x/V_{δ} по толщине динамического слоя (рис. 5.10), т. е.

$$\frac{\upsilon}{\theta} = \frac{T_{\text{ст}} - T}{T_{\text{ст}} - T_{\delta}} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3. \quad (5.54)$$

В соответствии с этим выражением можно записать

$$T = T_{\text{ст}} - (T_{\text{ст}} - T_{\delta}) \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right]; \quad (5.55)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{3}{2\delta_t} (T_{\text{ст}} - T_{\delta}).$$

Подставляя уравнения (5.55) в интегральное соотношение (5.53) для теплового пограничного слоя, находим

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} V_x \left[T_{\delta} - T_{\text{ст}} + (T_{\text{ст}} - T_{\delta}) \left(\frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2} \frac{y}{\delta_t} \right) \right] dy = -\frac{3}{2} \frac{a_t}{\delta_t} (T_{\text{ст}} - T_{\delta}),$$

или

$$V_{\delta} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} \frac{V_x}{V_{\delta}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right] dy = \frac{3}{2} \frac{a_t}{\delta_t}. \quad (5.56)$$

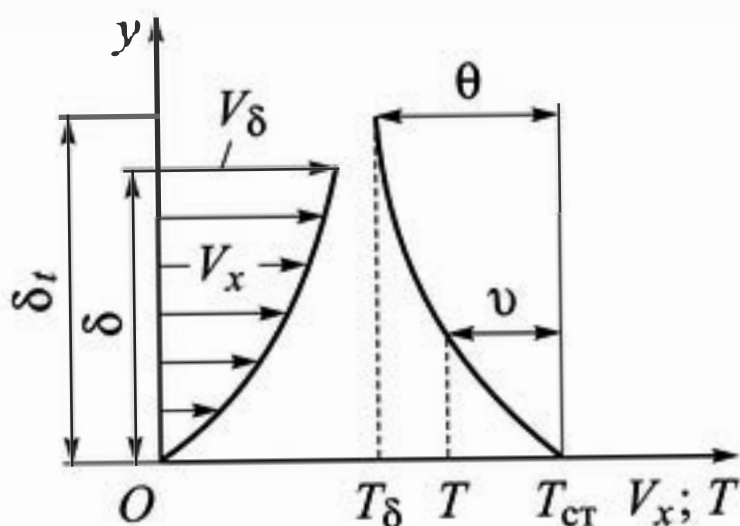


Рис. 5.10. Распределение температурного напора по толщине теплового пограничного слоя

Вычислим интеграл, входящий в левую часть уравнения (5.56).

Поскольку $\frac{V_x}{V_\delta} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$,

$$\int_0^{\delta_t} \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \left\{ 1 - \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right] \right\} dy = \frac{3}{20} \delta \left(\xi^2 - \frac{1}{14} \xi^4 \right),$$

где $\xi = \delta_t / \delta$.

Величина ξ близка к 1, поэтому членом $\xi^4/14$ можно пренебречь и записать уравнение (5.56) в виде

$$V_\delta \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} \xi^2 \delta \right) = \frac{3}{2} \frac{a_t}{\delta_t}.$$

Отношение ξ толщин теплового и динамического пограничных слоев — очень слабая функция продольной координаты x . Следовательно, получаем

$$\frac{V_\delta \xi^2}{10} \frac{d\delta}{dx} = \frac{a_t}{\xi \delta}, \text{ или } \xi^3 = \frac{10 a_t}{V_\delta \delta \frac{d\delta}{dx}}.$$

С учетом соотношения (5.24) находим

$$\xi^3 = \frac{13}{14} \frac{\lambda}{c_p \mu} = \frac{13}{14} \frac{1}{\text{Pr}}.$$

Отсюда

$$\xi = \frac{\delta_t}{\delta} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}.$$

Таким образом, толщина теплового пограничного слоя

$$\delta_t = \xi \delta = \frac{4,64}{\sqrt[3]{\text{Pr}}} \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

или в безразмерной форме, приняв для δ_t в качестве масштаба отнесения $x/\sqrt{\text{Re}_x}$,

$$\frac{\delta_t}{x} \sqrt{\text{Re}_x} = \frac{4,64}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}. \quad (5.57)$$

Это подтверждает частичную автомодельность решения тепловой задачи. При $Pr = 1$ величина $\xi = 1$ и решения обеих задач (тепловой и динамической) становятся тождественными. Для газов число Pr мало отличается от единицы, например для воздуха при не очень высоких температурах $Pr = 0,72$ и $\delta_t \cong 1,1\delta$.

5.8. Расчет параметров течения в пограничном слое на плоской пластине при высоких скоростях обтекания с помощью определяющих параметров

Рассмотрим сравнительно простой приближенный метод расчета параметров пограничного слоя с учетом влияния изменения температуры (сжимаемости). В его основе лежат зависимости, которые по форме аналогичны соотношениям, полученным для пограничного слоя в несжимаемой среде, поскольку вблизи поверхности в пристеночной области пограничного слоя поток сильно заторможен, а следовательно, газ близок по свойствам к несжимаемой среде. При этом необходимо считать, что течение в этой области основное влияние оказывает на процессы трения и теплопередачи, однако параметры, входящие в эти зависимости, следует определять как функции температуры. Установлено, что расчеты лучше вести по так называемой определяющей температуре T^* , которая представляет собой некоторое среднее значение по сечению пограничного слоя. Параметры газа, рассчитанные по температуре T^* , называются *определяющими*. Обозначают их, как и температуру, со звездочкой: i^* , ρ^* , μ^* и др.

Известно несколько зависимостей для расчета определяющей температуры, однако наиболее точной считается формула Эккерта:

$$T^* = 0,5(T_{ст} + T_\delta) + 0,22(T_r - T_\delta),$$

которую можно применять как для ламинарного, так и для турбулентного пограничных слоев в широком диапазоне чисел M_∞ .

Термодинамические параметры и кинетические коэффициенты вычисляют с использованием определяющей температуры по соотношениям

$$\frac{c_p^*}{c_{p\infty}} = \left(\frac{T^*}{T_\infty}\right)^\varphi; \quad \frac{\mu^*}{\mu_\infty} = \left(\frac{T^*}{T_\infty}\right)^n; \quad \frac{\lambda^*}{\lambda_\infty} = \left(\frac{T^*}{T_\infty}\right)^\xi,$$

где в приближенных расчетах для воздушного потока можно принять $\varphi = 0,1$; $n = 0,76$; $\xi = 0,85$.

Эти параметры рассчитывают аналогично соответствующим величинам для несжимаемого слоя (индекс «нс») в функции определяющей температуры T^* и температуры на границе пограничного слоя T_δ .

Используя определяющие параметры, найдем связь между основными характеристиками ламинарного пограничного слоя для несжимаемого и сжимаемого газа. Рассмотрим толщину пограничного слоя. Для несжимаемого газа

$$\delta_{\text{нс}} = 4,64 \sqrt{\mu_\delta x / (\rho_\delta V_\delta)},$$

а для сжимаемого —

$$\delta = 4,64 \sqrt{\mu^* x / (\rho^* V_\delta)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta_{\text{нс}}} = \sqrt{\frac{\mu^*}{\mu_\delta} \frac{\rho_\delta}{\rho^*}}.$$

Аналогичные выражения можно записать для напряжения трения:

$$\tau_{\text{ст нс}} = 0,323 \rho_\delta V_\delta^2 \sqrt{\frac{\mu_\delta}{\rho_\delta V_\delta x}}; \quad \tau_{\text{ст}} = 0,323 \rho_\delta V_\delta^2 \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho^* V_\delta x}};$$

$$\frac{\tau_{\text{ст}}}{\tau_{\text{ст нс}}} = \sqrt{\frac{\rho_\delta}{\rho^*} \frac{\mu^*}{\mu_\delta}}.$$

Для местных коэффициентов трения, отнесенных к скоростному напору $q_\delta = \rho_\delta V_\delta^2 / 2$ внешнего потока, будем иметь

$$c_{fx \text{ нс}} = \frac{2\tau_{\text{ст нс}}}{\rho_\delta V_\delta^2} = 0,646 \sqrt{\frac{\mu_\delta}{\rho_\delta V_\delta x}}; \quad c_{fx} = \frac{2\tau_{\text{ст}}}{\rho_\delta V_\delta^2} = 0,646 \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho^* V_\delta x}};$$

$$\frac{c_{fx}}{c_{fx \text{ нс}}} = \sqrt{\frac{\rho_\delta}{\rho^*} \frac{\mu^*}{\mu_\delta}}.$$

При постоянной температуре стенки параметры μ^* , ρ^* не зависят от продольной координаты x , а следовательно, отношение средних по длине пластины коэффициентов трения будет таким же, как и местных, т. е.

$$\frac{c_f}{c_{f \text{ нс}}} = \sqrt{\frac{\rho_\delta}{\rho^*} \frac{\mu^*}{\mu_\delta}}.$$

Для условных толщин пограничного слоя имеем

$$\frac{\delta^*}{\delta_{\text{нс}}^*} = \frac{\delta}{\delta_{\text{нс}}}; \quad \frac{\delta^{**}}{\delta_{\text{нс}}^{**}} = \frac{c_{fx}}{c_{fx\text{нс}}};$$

где $\delta_{\text{нс}}^* = 1,74x / \sqrt{\text{Re}_x}$; $\delta_{\text{нс}}^{**} = 0,646x / \sqrt{\text{Re}_x}$.

Рассмотрим случай, когда в пограничном слое вследствие высокой температуры возникает диссоциация, в то время как свободное течение происходит при постоянных теплоемкостях. Полагая, что давление по толщине пограничного слоя одинаковое, и используя уравнение состояния, можно записать

$$\frac{\rho^*}{\rho_{\delta}} = \frac{M^*}{M_{\delta}} \frac{T_{\delta}}{T^*},$$

где M^* — молярная масса газа при определяющей температуре.

Считая, что динамическая вязкость изменяется по степенному закону, получаем

$$\frac{\mu^*}{\mu_{\delta}} = \left(\frac{T^*}{T_{\delta}} \right)^n; \quad \frac{\delta}{\delta_{\text{нс}}} = \left(\frac{T^*}{T_{\delta}} \right)^{(n+1)/2} \left(\frac{M_{\delta}}{M^*} \right)^{1/2};$$

$$\frac{c_{fx}}{c_{fx\text{нс}}} = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\tau_{\text{стнс}}} = \frac{c_f}{c_{f\text{нс}}} = \left(\frac{T^*}{T_{\delta}} \right)^{(n-1)/2} \left(\frac{M^*}{M_{\delta}} \right)^{1/2}.$$

Толщина ламинарного пограничного слоя существенно возрастает по мере увеличения отношения T^*/T_{δ} , а следовательно, M_{δ} и $T_{\text{ст}}/T_{\delta}$. Зависимость коэффициентов трения от этих параметров слабее и носит противоположный характер: с ростом определяющей температуры коэффициенты трения уменьшаются. Анализируя полученные зависимости с учетом особенностей изменения молярной массы газа, можно сказать, что диссоциация приводит к снижению толщины пограничного слоя и некоторому увеличению напряжения трения.

Запишем теперь аналогичные зависимости для турбулентного пограничного слоя. При этом будем исходить из соотношений, найденных с использованием степенного закона распределения скорости по сечению турбулентного пограничного слоя в несжимаемой среде. Рассмотрим общий случай диссоциирующего газа. По аналогии с ламинарным пограничным слоем имеем

$$\frac{\delta}{\delta_{\text{нс}}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta} \right)^{(n+1)/5} \left(\frac{M_\delta}{M^*} \right)^{1/5};$$

$$\frac{c_{fx}}{c_{fx\text{нс}}} = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\tau_{\text{стнс}}} = \frac{c_f}{c_{f\text{нс}}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta} \right)^{(n-4)/5} \left(\frac{M_\delta}{M^*} \right)^{-4/5};$$

$$\frac{\delta^*}{\delta_{\text{нс}}^*} = \frac{\delta}{\delta_{\text{нс}}}; \quad \frac{\delta^{**}}{\delta_{\text{нс}}^{**}} = \frac{c_{fx}}{c_{fx\text{нс}}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta} \right)^{(n-4)/5},$$

где $\delta_{\text{нс}} = 0,37x/\sqrt[5]{\text{Re}_x}$; $c_{fx\text{нс}} = 0,0289/\sqrt[5]{\text{Re}_x}$; $c_{f\text{нс}} = 0,074/\sqrt[5]{\text{Re}_{x2}}$; x_2 — длина участка, на котором определяют средний коэффициент трения; $\delta_{\text{нс}}^* = \delta_{\text{нс}}/(n+1)$; $\delta_{\text{нс}}^{**} = n\delta_{\text{нс}}/[(n+1)(n+2)]$; $n = 7$.

Из этих формул следует, что качественная картина изменения толщин пограничного слоя и параметров трения при турбулентном движении такая же, как и при ламинарном: с ростом определяющей температуры толщина слоя увеличивается, а сила трения снижается. Количественная оценка таких изменений показывает, что толщина турбулентного пограничного слоя с повышением определяющей температуры растет значительно медленнее, чем ламинарного, а коэффициент трения падает более интенсивно.

Влияние диссоциации, как и при ламинарном пограничном слое, будет сказываться в некотором уменьшении толщины пограничного слоя и росте напряжения трения.

5.9. Аэродинамический нагрев

Уравнение теплового баланса

При полете в атмосфере теплота окружающей среды переходит к ЛА, если на близком расстоянии от его поверхности температура газа становится выше температуры тела. Области высоких температур возникают вследствие торможения потока в ударных волнах и в пограничном слое, вызывающего увеличение энтальпии воздуха.

Расчет теплопередачи заключается в определении удельного (количество теплоты, подводимой к единице поверхности в единицу времени), а также полного тепловых потоков к обтекаемой поверхности за некоторый промежуток времени. Такой расчет позволяет правильно выбрать систему охлаждения или другие средства, обес-

печивающие предохранение поверхности от перегрева, а также дает возможность определить участки, где достигаются чрезмерные тепловые напряжения и возможно разрушение конструкции.

Рассмотрим *уравнение теплового баланса*, которое в общем виде определяет суммарный удельный тепловой поток, идущий на нагрев стенки ЛА. Величина этого удельного теплового потока $q_{ст}$ равна разности подводимого $q_{под}$ и отводимого от нее $q_{отв}$ тепловых потоков, т. е.

$$q_{ст} = q_{под} - q_{отв}.$$

Подводимый к стенке тепловой поток $q_{под}$ возникает вследствие теплопроводности, диффузии и излучения газа, солнечной и земной радиаций, а также передачи теплоты от оборудования.

Отводимый поток $q_{отв}$ складывается из теплоты, излучаемой нагретой поверхностью, поглощаемой материалом стенки, рассеиваемой в окружающую среду, отводимой различными охлаждаемыми устройствами и идущей на разогрев оборудования.

Рассмотрим подробнее тепловые потоки, участвующие в теплообмене у поверхности ЛА. При этом будем считать, что отдельные виды теплообмена осуществляются независимо один от другого.

Конвективный теплообмен. Общий тепловой поток от разогретого газа к поверхности ЛА, определяемый теплопередачей вследствие молекулярной теплопроводности и выделением теплоты в результате рекомбинации участвующих в диффузии атомов, можно представить как *конвективный теплообмен* между движущейся поверхностью ЛА и окружающей средой. На практике эту теплоотдачу обычно вычисляют по формуле Ньютона:

$$q_k = \alpha_x (T - T_{ст}), \quad (5.58)$$

где q_k — удельный конвективный тепловой поток; α_x — коэффициент теплоотдачи, численно равный количеству теплоты, воспринимаемой (или отдаваемой) участком поверхности единичного размера в единицу времени при разности температур между поверхностью и обтекающим ее потоком в один градус; T — характерная температура обтекающего потока; $T_{ст}$ — температура поверхности ЛА.

При выборе значения T в формуле (5.58) исходят из следующих соображений. Известно, что если стенка ЛА теплоизолирована, то температура потока максимальна у обтекаемой поверхности и равна T_r . Ее можно рассматривать как наиболее существенный фактор, определяющий теплопередачу от газа к поверхности ЛА. В соот-

ветствии с этим за характерную температуру T принимают температуру восстановления T_r и формулу Ньютона записывают в виде

$$q_k = \alpha_x (T_r - T_{ст}).$$

В условиях очень больших скоростей, когда происходящие в пограничном слое химические превращения являются существенными, при расчете теплопередачи следует учитывать изменение энтальпии:

$$q_k = \frac{\alpha_x}{c_{p\text{ст}}} (i_r - i_{ст}), \quad (5.59)$$

где $c_{p\text{ст}}$ — средняя удельная теплоемкость газа для условий на стенке; $i_r, i_{ст}$ — соответственно энтальпия газа при T_r и $T_{ст}$.

Для характеристики теплоотдачи вместо размерного коэффициента α_x удобно применять безразмерные критерии, например число Стантона

$$St_x = q_k / [\rho_\delta V_\delta (i_r - i_{ст})] \quad (5.60)$$

или число Нуссельта

$$Nu_x = \alpha_x x / \lambda,$$

которые связаны между собой соотношением

$$Nu_x = St_x Re_x Pr.$$

Определение коэффициента теплоотдачи α_x или безразмерных критериев St_x, Nu_x теплоотдачи является основной задачей теории аэродинамического теплообмена.

Лучистый теплообмен. Согласно закону Стефана — Больцмана, лучистый теплообмен, т. е. тепловой поток, излучаемый с единицы поверхности ЛА в единицу времени,

$$q_{\text{изл}} = \varepsilon \sigma T_{ст}^4, \quad (5.61)$$

где ε — степень черноты поверхности ЛА, зависящая от материала, способа обработки поверхности и ее температуры; σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Солнечная радиация. В теплообмене на поверхности ЛА участвует тепловой поток, вызванный *солнечной радиацией*:

$$q_{с.р} = A_{с.р} \bar{q}_{с.р} \beta_{с.р} \cos \psi,$$

где $A_{с.р}$ — коэффициент затенения, зависящий от состояния атмосферы (облачность и др.); $\bar{q}_{с.р}$ — облучательная способность Солн-

ца в зените без учета поглощения лучей атмосферой; $\beta_{c.p}$ — коэффициент поглощательной способности материала стенки ЛА; ψ — угол между направлением солнечных лучей и нормалью к поверхности тела.

Определение температуры стенки

Температура стенки (поверхности ЛА), определяемая из условия равенства подводимых к ней и отводимых от нее тепловых потоков и соответствующая установившемуся обтеканию, называется *равновесной*.

Предположим, что теплопередача характеризуется только подводом конвективного теплового потока к стенке и отводом от нее тепловой энергии путем радиации. При этом с учетом выражений (5.59) и (5.61) можно записать

$$\frac{\alpha_x}{c_{p_{ст}}}(i_r - i_{ст}) = \epsilon \sigma T_{ст}^4. \quad (5.62)$$

Температура стенки, определяемая уравнением (5.62), называется *равновесной радиационной* и обозначается $T_{ст} = T_e$. Температура T_e представляет собой некоторый верхний предел для излучающей поверхности, достигаемый в случае, когда разогретая стенка полностью излучает полученную энергию. Расчет равновесной радиационной температуры стенки проводят методом последовательных приближений.

Прежде всего определяют параметры невязкого потока на обтекаемой поверхности (в случае плоской пластины они равны параметрам невозмущенного потока) и области ламинарного и турбулентного течений в пограничном слое. Затем находят определяющую энтальпию i^* , причем в первом приближении принимают $i_{ст} = i_r$, а коэффициент восстановления для ламинарного пограничного слоя $r_{л} = 0,85$ (для турбулентного $r_{т} = 0,90$). После этого из таблиц термодинамических функций по значениям энтальпии i^* и давления p_δ находят определяющую температуру T^* и соответствующие ей определяющие параметры c_p^* , μ^* , λ^* , ... Далее по этим параметрам рассчитывают местный коэффициент трения c_{fx}^* и число Стантона St_x^* . Наконец, обращаются к уравнению теплового баланса $q_k = q_{изл}$, которое, согласно выражениям (5.60) и (5.61), имеет вид

$$St_x^* \rho_\delta V_\delta (i_r - i_{ст}) = \epsilon \sigma T_{ст}^4. \quad (5.63)$$

Величины ϵ , δ , St_x^* , ρ_δ , V_δ и i_r здесь известны (часть из них задана, остальные рассчитаны). Для решения уравнения (5.63) и определения температуры стенки в первом приближении задают ряд значений энтальпии $i_{ст}$. Зная ρ_δ , с помощью таблиц термодинамических функций находят соответствующие значения $T_{ст}$. Затем путем интерполирования или графически определяют температуру стенки $T_{ст} = T_e$ в первом приближении.

Последовательность вычислений для следующих приближений аналогична приведенной выше, поэтому следует отметить лишь особенности, приводящие к уточнению результатов. Во-первых, при определении i^* из предыдущего приближения берут значение $i_{ст}$, соответствующее $T_{ст} = T_e$ в этом приближении; во-вторых, коэффициент восстановления r вычисляют с использованием определяющего числа Прандтля $Pr^* = c_p^* \mu^* / \lambda^*$, т. е. $r_L^* = (Pr^*)^{1/2}$; $r_T^* = (Pr^*)^{1/3}$.

Расчеты проводят до тех пор, пока полученные в двух последних приближениях значения температуры стенки не совпадут между собой с заданной степенью точности.

5.10. Связь между трением и теплопередачей

Удельный тепловой поток, подводимый от газа к стенке, может быть определен по формуле Ньютона либо в соответствии с законом Фурье. Приравнивая эти выражения:

$$\alpha_x (T_\delta - T_{ст}) = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0},$$

и учитывая второе соотношение (5.55), справедливое для ламинарного пограничного слоя, получаем зависимость для коэффициента теплоотдачи

$$\alpha_x = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\delta_T},$$

которую, согласно (5.57), можно преобразовать к виду

$$\alpha_x = 0,323 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \lambda / x. \quad (5.64)$$

Умножив левую и правую части уравнения (5.64) на x/λ , найдем выражение для одного из критериев теплообмена:

$$Nu_x = \alpha_x x / \lambda = 0,323 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}. \quad (5.65)$$

В аэродинамике более широкое применение получил иной критерий теплообмена — число Стантона, определяемое выражением (5.60). С учетом соотношений (5.64) и (5.65), число St_x для ламинарного и турбулентного пограничных слоев соответственно имеет вид

$$St_x = 0,323 Pr^{-2/3} Re_x^{-1/2}; \quad (5.66)$$

$$St_x = 0,0289 Pr^{-2/3} Re_x^{-1/5}. \quad (5.67)$$

Установим теперь связь между трением и теплопередачей. Для ламинарного пограничного слоя на плоской пластине величину $Re_x^{-1/2}$, входящую в выражение (5.66), можно представить так:

$$Re_x^{-1/2} = c_{fx} / 0,646.$$

Следовательно,

$$St_x = c_{fx} Pr^{-2/3} / 2. \quad (5.68)$$

Зависимость (5.68) является более общей, чем соотношения (5.66) и (5.67), справедлива как для ламинарного, так и для турбулентного пограничных слоев и отражает аналогию Рейнольдса, согласно которой критерий теплоотдачи зависит в основном от того же параметра, что и местный коэффициент трения — от числа Re_x .

Отношение $2St_x / c_{fx}$ называют *фактором аналогии Рейнольдса*, который в общем случае является функцией не только числа Pr , но и чисел M , Re , а также отношений T_{ct} / T_δ , dp/dx . Если фактор аналогии Рейнольдса известен, то легко установить связь между St_x и c_{fx} . В практических расчетах его принимают равным $Pr^{-2/3}$, т. е. пользуются соотношением (5.68), полученным для безградиентных течений несжимаемой среды.

Влияние физико-химических превращений на теплопередачу в пограничном слое при высоких температурах можно учесть путем использования определяющих параметров. В частности, с учетом соотношения (5.68) выражение для определяющего числа Стантона принимает следующий вид:

$$St_x^* = c_{fx}^* (Pr^*)^{-2/3} / 2.$$

В соответствии с этим тепловой поток к стенке

$$q_x^* = \frac{\alpha_x^*}{c_p^*} (i_r - i_{ct}) = St_x^* \rho_\delta V_\delta (i_r - i_{ct}). \quad (5.69)$$

Здесь определяющий коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_x^* = \frac{c_p^* q_x^*}{i_r - i_{ст}} = St_x^* c_p^* \rho_\delta V_\delta.$$

При гиперзвуковых скоростях потока ($M_\delta > 10$) в случае безградиентных течений параметры теплопередачи для ламинарного пограничного слоя можно определить по зависимости

$$\frac{St_x Re_x^{1/2}}{(2\varepsilon + 1)^{1/2}} = 0,69 M_\delta^{-0,4},$$

где $\varepsilon = 0,1$ и $1,0$ для плоских и пространственных течений соответственно.

Параметры теплопередачи, а также число Re_x рассчитывают по значениям на внешней границе пограничного слоя. Полученные выше выражения для них указывают на прямую зависимость нагрева от трения на обтекаемой поверхности. Напряжение трения, а следовательно, и теплопередача значительно больше в случае турбулентного пограничного слоя, поэтому для уменьшения аэродинамического нагрева нужно обеспечить его ламинаризацию.

6. ТЕОРИЯ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Движение ЛА в атмосфере, как правило, сопровождается отрывом потока, который приводит к перераспределению давления на поверхности аппарата и изменению его аэродинамических характеристик. Наличие отрывных течений играет отрицательную роль при движении ЛА. Однако в случае направленного изменения размеров зон отрыва и параметров потока в них возможно формирование необходимых дополнительных управляющих сил. Сложность и многообразие существующих отрывных течений требует детального изучения структур потока, выявления особенностей и закономерностей их изменения.

В главе рассмотрены основные понятия, дающие представление о возникновении и развитии отрыва, представлены схемы течений в отрывных зонах, описаны особенности трансформации структур потоков при изменении определяющих параметров. Приведены основные соотношения, позволяющие рассчитать течение в возмущенных областях для различных видов и условий обтекания препятствий.

6.1. Виды отрывных течений и причины их возникновения

Отрыв потока от обтекаемой поверхности — одно из характерных явлений, сопровождающих движение жидкости или газа. При отрыве происходит перераспределение давления по поверхности ЛА, вследствие чего изменяются его аэродинамические характеристики.

В некоторых случаях отрыв приводит к вредным последствиям: уменьшению несущей способности, ухудшению управляемости, возрастанию тепловых потоков на отдельных участках обтекаемой поверхности. Однако отрыв потока может быть и полезен. Например,

управляя отрывом, создают требуемые силы и моменты, обеспечивают допустимый режим теплопередачи, улучшают аэродинамические характеристики ЛА.

На рис. 6.1 представлены часто встречающиеся отрывные течения, возникающие около выступов (надстроек), изломов поверхностей и различных видов каверн (*a–и*), падающих на обтекаемую поверхность скачков уплотнения и тел сложной формы. Отрывные течения наблюдаются также при обтекании элеронов, элевонов, интерцепторов, а также крыльев на закритических углах атаки (см. рис. 6.1, *к, л*). При работе диффузоров и сопел на нерасчетных режимах скачки уплотнения взаимодействуют с пограничным слоем на стенках, что также приводит к отрыву потока (см. рис. 6.1, *м, н*). Отрывное течение может быть вызвано струйным взаимодействием при истечении продуктов сгорания топлива двигателей в спутный поток (см. рис. 6.1, *о*), при работе управляющих или тормозных реактивных устройств (рис. 6.1, *п, р*), аэродинамических и газодинамических органов управления: аэродинамических игл (см. рис. 6.1, *с*) и дефлекторов (см. рис. 6.1, *т*).

Для всего многообразия структур течения можно выделить следующие характерные области (рис. 6.2), имеющие место во всех случаях отрыва потока. Область отрыва *1*, в которой происходит переход от течения в невозмущенном пограничном слое к началу его отрыва. За областью *1* следует область *2* смешения, в которой происходит взаимодействие оторвавшегося пограничного слоя с внешним потоком и возвратным течением, а также область *3* присоединения потока к обтекаемой поверхности, сопровождающегося его разделением на основное и возвратное *4* течения.

Область возвратного течения в зависимости от типа отрыва и конфигурации обтекаемой поверхности может быть закрытой или открытой. Под *закрытой* понимается такая область возвратного течения, в которой при установившемся режиме циркулирует постоянная масса газа, несмотря на массообмен с внешним течением, происходящий в области смешения или осуществляемый специально (вдув или отсос). В *открытой* области также существуют циркуляционные течения и одновременно происходит образование спутных вихревых потоков, сопровождающееся частичным уносом массы газа.

Отрывные течения в зависимости от протяженности препятствия в поперечном направлении подразделяют на *двух-* (плоские или осесимметричные) и *трехмерные* (пространственные).

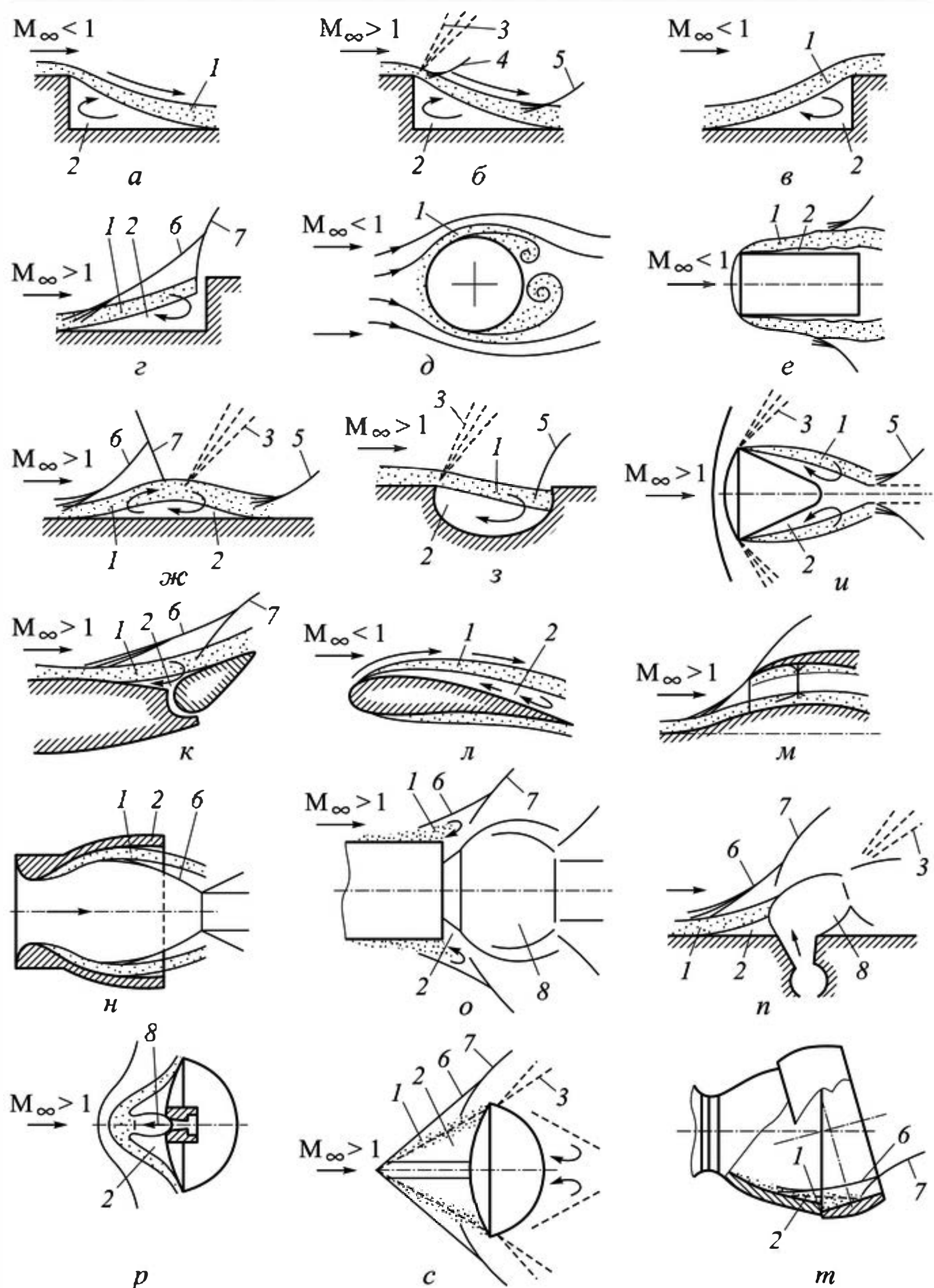


Рис. 6.1. Основные виды отрывных течений:

1 – оторвавшийся пограничный слой; 2 – область возвратного течения; 3 – веер волн разрежения; 4 – «висячий» скачок уплотнения; 5 – скачок уплотнения, вызванный присоединением потока; 6 – скачок уплотнения, обусловленный отрывом потока; 7 – основной скачок уплотнения; 8 – струя

В общем случае (см. рис. 6.2) положение областей отрыва и присоединения заранее предсказать невозможно. Однако в частных случаях местонахождение этих зон, характеризующихся соответственно точками отрыва S и присоединения R , оказывается определенным. Такие течения носят название *течений с фиксированными точками отрыва или присоединения*. Отрывные течения с неизвестными координатами точек S или R называются соответственно *течениями со свободным отрывом или присоединением*.

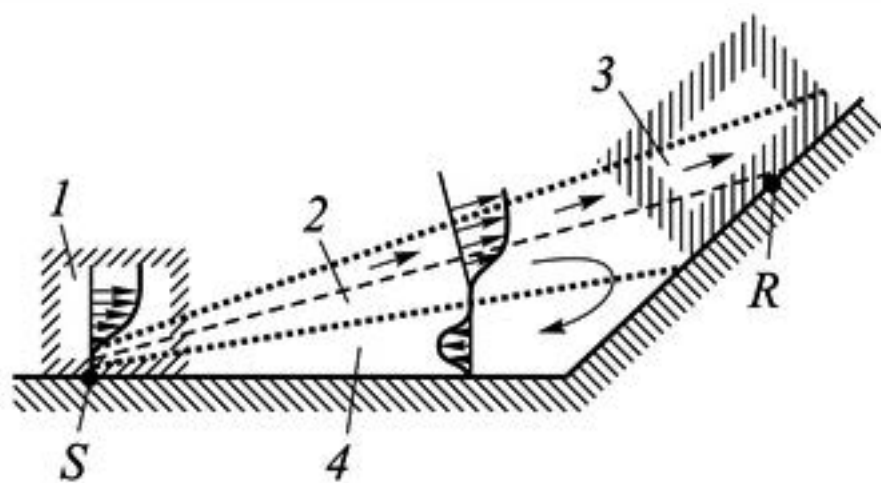


Рис. 6.2. Схема отрывного течения

Классическая концепция течения в области отрыва потока сформулирована для плоского и осесимметричного течений. Одним из необходимых условий отрыва потока от стенки является возрастание давления в направлении течения, т. е. *наличие положительного градиента давления*. Однако отрыв может произойти лишь при выполнении другого условия — *наличия в потоке вязкости, приводящей к появлению пограничного слоя и диссипации энергии*. Действительно, поток не отрывается от плоской пластинки, для которой характерны постоянство давления во всех сечениях пограничного слоя и, следовательно, равенство нулю продольного градиента давления.

Если рассмотреть криволинейный профиль, обтекаемый дозвуковым потоком (рис. 6.3), то на участке от точки O полного торможения до некоторой точки B градиент давления будет отрицательным ($\partial p / \partial x < 0$), а на участке от точки B до C на задней кромке — положительным ($\partial p / \partial x > 0$). Такой характер изменения градиента давления обусловлен особенностями обтекания профиля, при котором на переднем участке скорость в направлении от точки O к точке B возрастает, а на участке, примыкающем к задней кромке, наоборот, уменьшается.

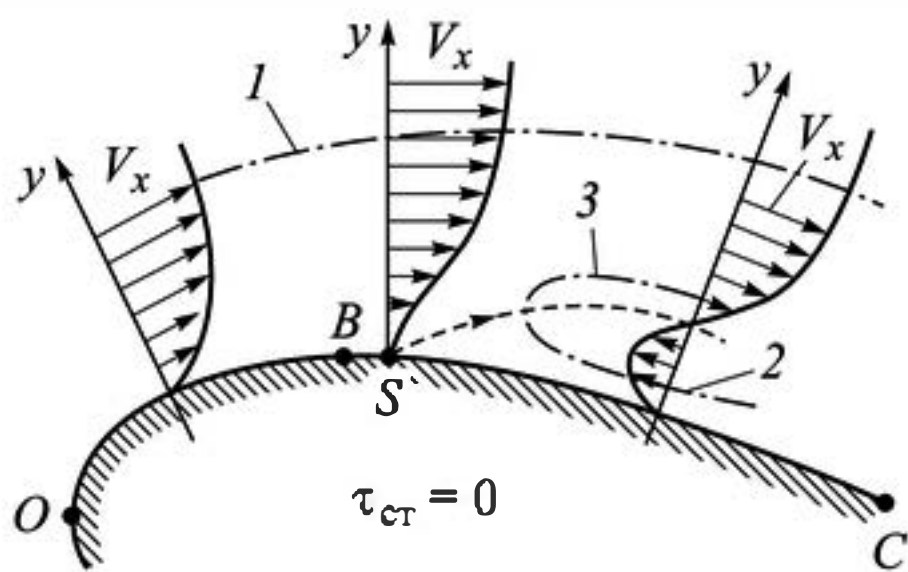


Рис. 6.3. Схема отрыва пограничного слоя:

1 — линия тока; 2 — вихрь; 3 — зона возврата течения; S — точка отрыва

Там, где градиент давления отрицательный, а поток ускоряется, касательное напряжение τ будет больше, чем при равномерном движении. Наоборот, в той зоне, где давление повышается и течение замедляется, напряжение уменьшается. На обтекаемой поверхности можно указать точку, в которой $\tau = 0$, а за этой точкой становится отрицательным. Такой характер изменения напряжения тесно связан с распределением скорости V_x по сечению пограничного слоя.

По сравнению с основным потоком скорость течения в пограничном слое меньше. Механическая энергия частиц вблизи стенки мала и их способность к движению в направлении возрастания давления оказывается ограниченной. Наступает такой момент, когда запас этой энергии ввиду необратимого перехода ее части в теплоту вследствие трения может оказаться недостаточным для преодоления положительного градиента давления. Поэтому газ вблизи поверхности сначала претерпевает полное торможение, а затем изменяет направление движения. В результате образования возвратного течения происходит отгеснение линий тока и, как следствие, отрыв пограничного слоя от поверхности в точке S . В этой точке напряжение $\tau_{cr} = \mu_{cr}(\partial V_x / \partial y)_{cr} = 0$, т. е. вязкость исчезает. Рассмотренный случай возникновения отрыва относится к *сингулярному* типу, т. е. отрыву с особой точкой, для которой $\tau_{cr} = 0$. Течение за точкой отрыва характеризуется наличием двух потоков: *внешнего*, имеющего направление

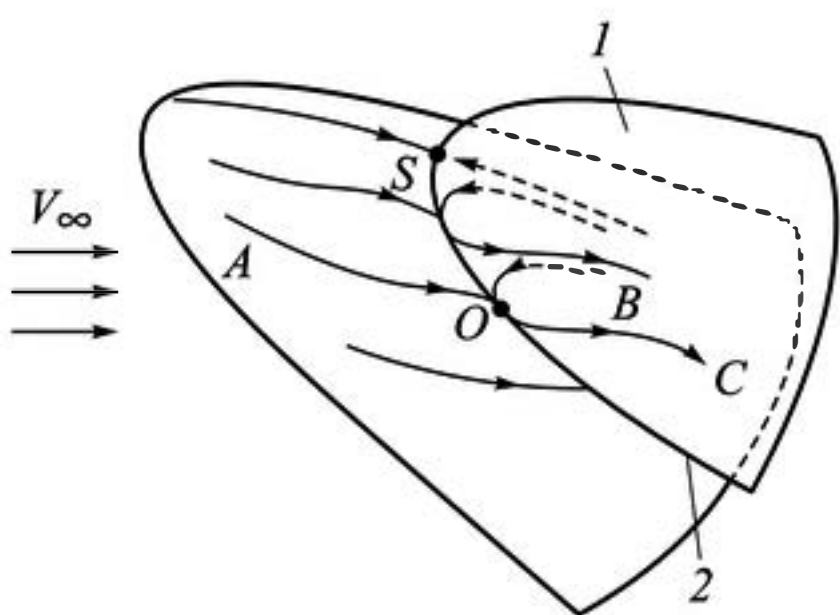


Рис. 6.4. Схема пространственного отрыва:

1 – поверхность тока; 2 – линия стекания

внутреннего, движущегося в обратную сторону. Пограничный слой как бы скручивается, образуя вихри. Возникновение вихрей сопровождается накоплением за точкой отрыва заторможенной жидкости и образованием области возвратного течения.

Для пространственных трехмерных течений характерен отрыв, в каждой точке которого сходятся две различные поверхностные линии тока AO и BO (рис. 6.4), отходящие от обтекаемой поверхности в виде единой разделяющей линии тока OC . Совокупность этих линий образует разделяющую *поверхность тока*, а пересечение ее с обтекаемой поверхностью — линию отрыва, называемую *линией стекания*.

Экспериментально установлено, что для линий тока AO и BO параметр $A = \lim_{y \rightarrow 0} (\tau_x / \tau_z)$ в любой точке стекания при пространственном отрыве одинаков. Здесь τ_x, τ_z — составляющие напряжения трения в плоскости, касательной к обтекаемой поверхности. Это означает, что линии тока в этой плоскости должны иметь общую касательную. В случае сингулярного отрыва в точке S напряжения τ_x и τ_z одновременно обращаются в нуль, величина A становится неопределенной, а значит, параметры течения на поверхности тела могут претерпевать разрыв и быть неоднозначными. Если направления вихря и внешнего течения не совпадают, то оторвавшийся поток вращается с образованием спиралеобразных вихрей (рис. 6.5, *а*). Такие течения наблюдаются при обтекании тонких стреловидных крыльев, сужающихся хвостовых частей фюзеляжей, различного рода выступов и надстроек.

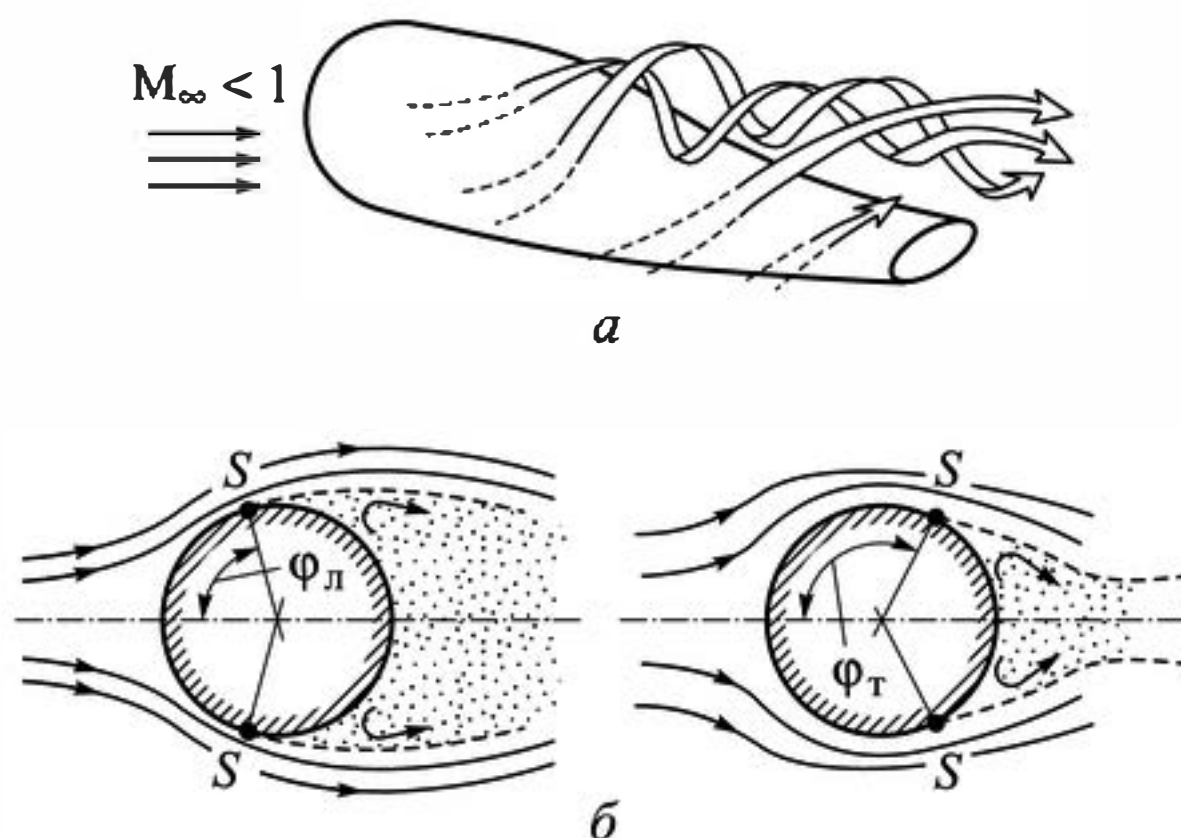


Рис. 6.5. Отрыв потока за телом сложной формы (*а*) и за цилиндром (*б*)

Возможность отрыва пограничного слоя зависит от механической энергии газа вблизи стенки, различной для ламинарного и турбулентного пограничных слоев. Турбулентное перемешивание увеличивает скорость газа вблизи стенки, и ему легче преодолевать возрастание давления и трение. Поэтому турбулентный пограничный слой при прочих равных условиях отрывается ниже по потоку, чем ламинарный. Следует отметить, что отрывное течение газа в дозвуковом потоке является неустановившимся. Например, при обтекании цилиндра (рис. 6.5, *б*) за точкой отрыва S образуется вихрь, который за счет трения между слоями газа втягивает все большую

массу в область возвратного течения. В некоторый момент времени вихрь отходит от тела и уносится потоком. Область отрывного течения сокращается, точка отрыва смещается вниз по потоку, и процесс образования нового вихря повторяется. В отрывном течении первоначально возникает пара симметричных вихрей у нижней и верхней поверхностей цилиндра. Далее симметричность картины нарушается: как правило, начинает развиваться один из вихрей, который затем уносится потоком. На некотором расстоянии позади обтекаемого тела образуется правильная последовательность вихрей, вращающихся попеременно вправо и влево, называемая *вихревой дорожкой Кармана*.

Возникающие при сверхзвуковых скоростях скачки уплотнения, взаимодействуя с пограничным слоем, могут вызвать его отрыв. На рис. 6.6 показан такой отрыв на плоской поверхности 1 в месте падения скачка уплотнения 4 . Этот скачок создает положительный градиент давления, достаточный, чтобы вызвать отрыв. Переход через скачок сопровождается повышением давления, которое распространяется вверх по потоку в дозвуковой части пограничного слоя, способствуя его утолщению. В результате этого сверхзвуковая часть пограничного слоя 2 отклоняется во внешнюю сторону, что, в свою очередь, порождает систему сходящихся волн сжатия 3 , распрост-

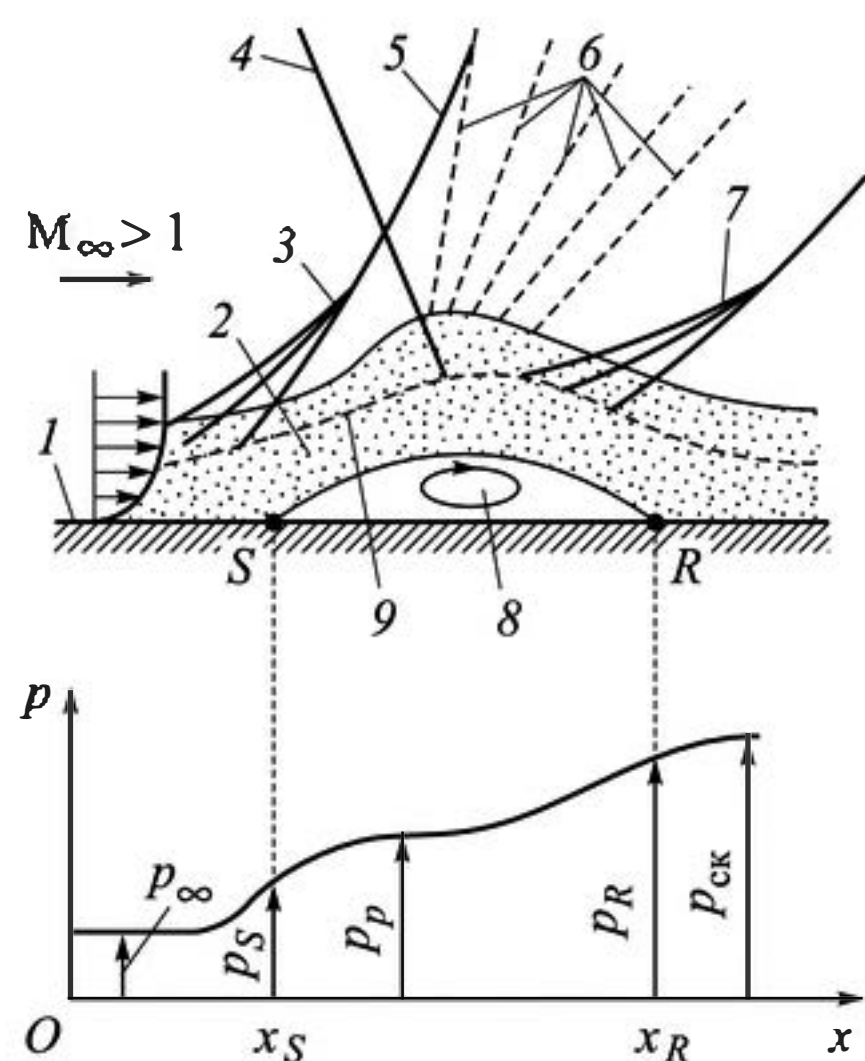


Рис. 6.6. Взаимодействие пограничного слоя со скачком уплотнения

раняющихся во внешний поток в виде скачка уплотнения 5 . Когда градиент давления достигает своего критического значения, при котором частицы жидкости вблизи поверхности не могут его преодолеть, возникает отрыв потока (точка S). Оторвавшийся поток в области за скачком уплотнения 4 расширяется, образуя веер волн разрежения 6 , и ослабляет рост толщины пограничного слоя. Вторая серия волн сжатия 7 может формировать скачок и образуется там, где в результате присоединения к обтекаемой поверхности (точка R) течение снова становится параллельным поверхности 1 . Звуковая линия 9

как бы огибает область отрыва 8. Картина взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем зависит от интенсивности скачка уплотнения, режима течения в пограничном слое и формы обтекаемой поверхности.

На рис. 6.6 приведен также график распределения давления в возмущенных областях течения. Давление возрастает до точки S , в которой существует необходимый для отрыва пограничного слоя критический перепад давления. Затем градиент давления уменьшается и в области смещения давление близко к постоянной величине p_p («плато» постоянного давления). Для области присоединения характерно дальнейшее возрастание давления до $p_{ск}$ за скачком уплотнения. В точке присоединения R давление $p_R < p_{ск}$.

Положительный градиент давления dp/dx при сверхзвуковых скоростях может создаваться не только падающим скачком уплотнения, но и скачком от излома образующей обтекаемой поверхности 1 (рис. 6.7). При обтекании преграды 5 невязким потоком в окрестности угловой точки возникает скачок уплотнения 4, за которым поток поворачивается параллельно поверхности 5. Происходит взаимодействие скачка уплотнения 4, достигающего звуковой линии 7, с пограничным слоем, приводящее к появлению волн сжатия 2, скачка 3 и к отрыву в точке S . Оторвавшийся поток при достаточно большой протяженности поверхности за точкой излома присоединяется к ней в точке R . При этом область возвратного течения оказывается закрытой и образуется застойная зона 6, изменяющая положение скачка 4.

Более сложная структура течения возникает при трехмерном отрыве сверхзвукового потока. Обтекание выступающего элемента сопровождается образованием перед ним пространственного скачка уплотнения, который взаимодействует с пограничным слоем и вызывает его отрыв с образованием открытой области возвратного

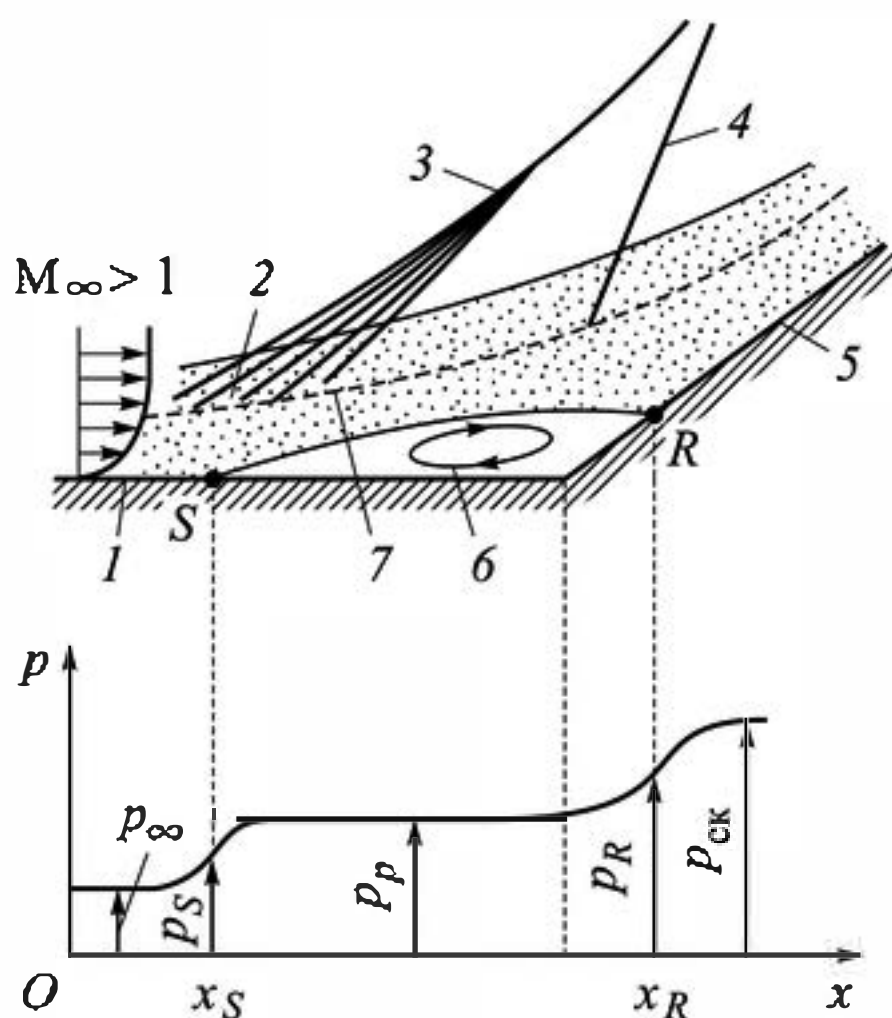


Рис. 6.7. Отрыв, вызванный клином

течения. Такой вид отрывного течения имеет свои особенности. Вследствие воздействия на пограничный слой искривленной ударной волны перед преградой возникает градиент давления не только в продольном, но и в поперечном направлении. Это приводит к возникновению внутри зоны отрыва вторичного течения, скорость которого направлена под некоторым углом к линиям тока основного потока. Поэтому часть газа, попавшая в застойную зону из области смещения, эжектируется внешним потоком, а часть растекается в боковых направлениях с образованием спиралеобразных вихрей.

На параметры потока в зонах отрыва и их геометрические размеры оказывают влияние параметры внешнего течения: скорость и число Re , которое определяет режим течения в пограничном слое (ламинарный или турбулентный). При плоском двухмерном отрыве давление в области отрывного течения не зависит от условий, вызывающих отрыв. Если отрыв трехмерный, то параметры отрывного течения определяются дополнительно формой и размерами преград.

Несколько иная физическая картина течения образуется в случае обтекания кормовых частей ЛА, а также различных уступов, расположенных по потоку (рис. 6.8, а). Течение характеризуется

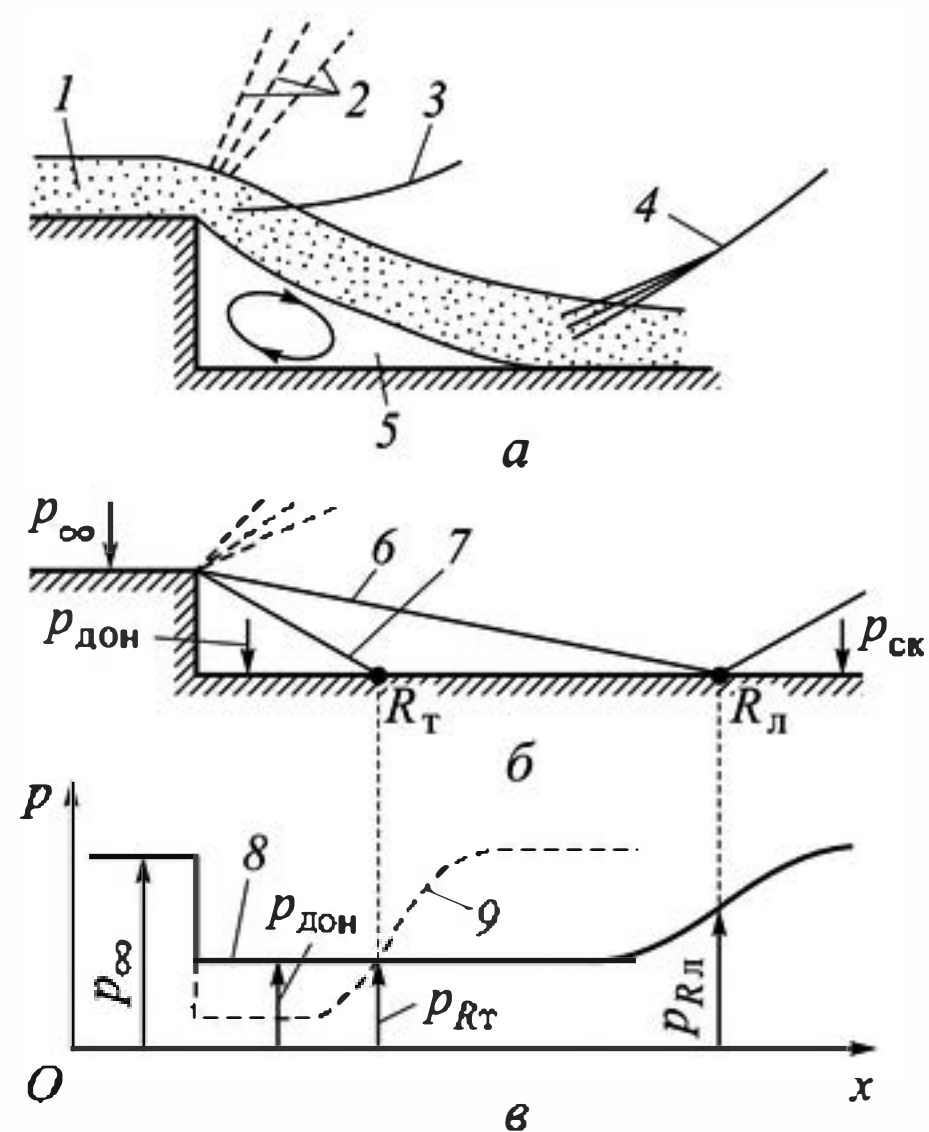


Рис. 6.8. Отрыв сверхзвукового потока за обратным уступом

большим местным расширением около угловой точки. Эксперименты показывают, что отрыв пограничного слоя I происходит непосредственно за угловой точкой на донном срезе. За счет искривления линий тока за изломом поверхности возникают волны сжатия, формирующие висячий (краевой) скачок уплотнения 3 . Характер течения около угловой точки является более сложным, чем обычное течение Прандтля — Майера. Поток вначале расширяется в волне 2 , а затем его давление увеличивается при переходе через краевой скачок уплотнения 3 до значения $p_{дон}$.

Обычно при расчете такого отрыва сложный характер течения вблизи угловой точки не учитывают и считают, что отрыв потока происходит в вершине угла. Присоединение оторвавшегося потока происходит с образованием скачка уплотнения 4 и зоны циркуляционного течения 5.

На рис. 6.8, б, в представлены схемы отрыва 6, 7 и характер распределения давления 8, 9 за донным срезом для случаев ламинарного и турбулентного сверхзвуковых течений соответственно. Давление в области отрыва и ее длина при турбулентном режиме меньше, чем при ламинарном обтекании донного среза.

Оторвавшийся пограничный слой дает начало зоне смешения, в которой ввиду переноса массы, количества движения и энергии происходит формирование слоя смешения с существенным изменением в поперечном направлении скорости, плотности и температуры. Эксперименты показывают, что давление в области смешения остается постоянным, а другие параметры течения изменяются по законам развития свободных струй.

При турбулентном отрыве слой смешения остается турбулентным. В условиях ламинарного отрыва возможны переходные типы течений, когда в области смешения ламинарный режим течения переходит в турбулентный.

Неравномерность параметров слоя смешения (рис. 6.9) приводит к тому, что энергия потока для каждой струйки газа в поперечном направлении не одинакова. Поскольку в окрестности области присоединения потока к поверхности 3 происходит его сжатие, то низкоэнергетические частицы газа, не способные преодолеть повышенное давление в области присоединения, поступают в область 2 возвратного течения. Высокоэнергетические частицы газа, находящиеся выше *разделяющей линии тока* ab , уходят вниз по потоку. На линии присоединения, или *растекания*, напряжение $\tau_{ст} = 0$. Частицы газа, попадающие в область возвратного течения, имеют различные скорости (на линии l они равны нулю). Скорость газового потока в застойных зонах может достигать сверхзвуковых значений.

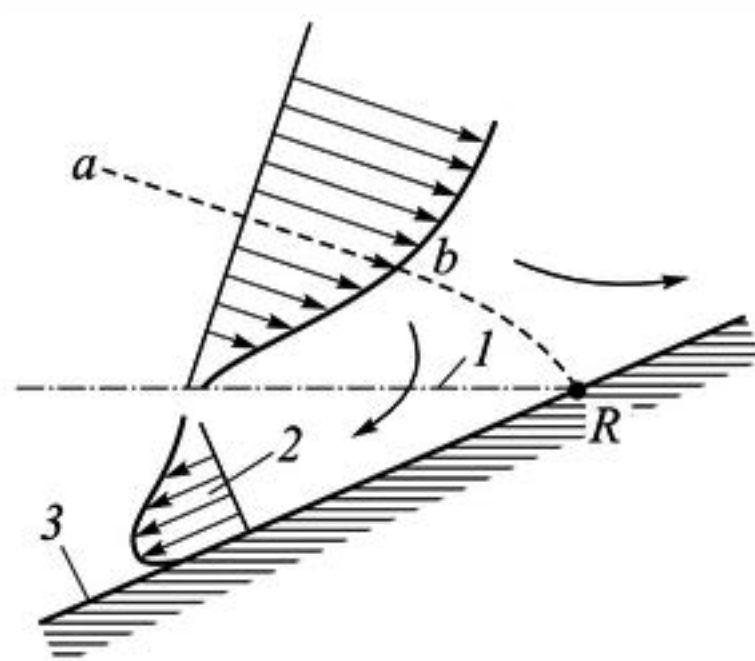


Рис. 6.9. Схема присоединения потока

6.2. Общие закономерности течений с отрывом и присоединением потока

Отрыв сверхзвуковых потоков при обтекании уступов и наклонных преград

Любое отрывное течение можно отнести к одному из трех видов: ламинарному, переходному (ламинарному с турбулизацией потока в области между отрывом и присоединением или с точкой отрыва в переходной области пограничного слоя) и турбулентному.

При ламинарном отрыве статическое давление в возмущенной области практически постоянно, его значение на 20...30 % больше, чем в невозмущенном потоке, и зависит от чисел M_∞ и Re . При этом угол отрыва сравнительно невелик и составляет несколько градусов.

Турбулизация потока в зоне отрыва приводит к резкому повышению давления в областях смещения и присоединения, которое в значительной степени зависит от условий обтекания. Для турбулентного отрыва характерно более резкое возрастание давления по сравнению с ламинарным, длина зоны отрыва при этом значительно меньше, а для отрыва требуется больший перепад давлений. Это объясняется существованием вихревого движения в турбулентном слое, повышающего механическую энергию газа, в связи с чем отсутствует явно выраженное «плато» давлений. При отрыве этого типа число Re слабо влияет на характеристики течения.

Распределения давления перед уступами в диапазоне чисел $M_\infty = 1,3...3,4$ представлены на рис. 6.10. Эти зависимости получены для отрывов, соответствующих ламинарному, переходному и турбулентному режимам течения.

При ламинарном отрыве ($Re = 0,13 \cdot 10^6$) давление в возмущенной зоне и ее протяженность зависят от числа M_∞ (см. рис. 6.10, а). С увеличением числа M_∞ возрастает давление и уменьшается длина зоны отрыва. Для переходного режима ($Re = 0,6 \cdot 10^6$) с увеличением числа Маха невозмущенного потока область начала турбулизации смещается вниз по потоку (см. рис. 6.10, б). При малой сверхзвуковой скорости (например, $M_\infty = 1,3$) оторвавшийся ламинарный слой неустойчив и переход происходит вблизи точки отрыва. При увеличении сверхзвуковой скорости ($M_\infty = 3,3$) пограничный слой более устойчив, а поэтому турбулизация начинается у точки присоединения. Для турбулентного течения ($Re = 2,6 \cdot 10^6$) протяженность области взаимодействия почти постоянна, изменяется лишь максимальное значение давления в области отрыва, являющееся функцией числа M_∞ (см. рис. 6.10, в).

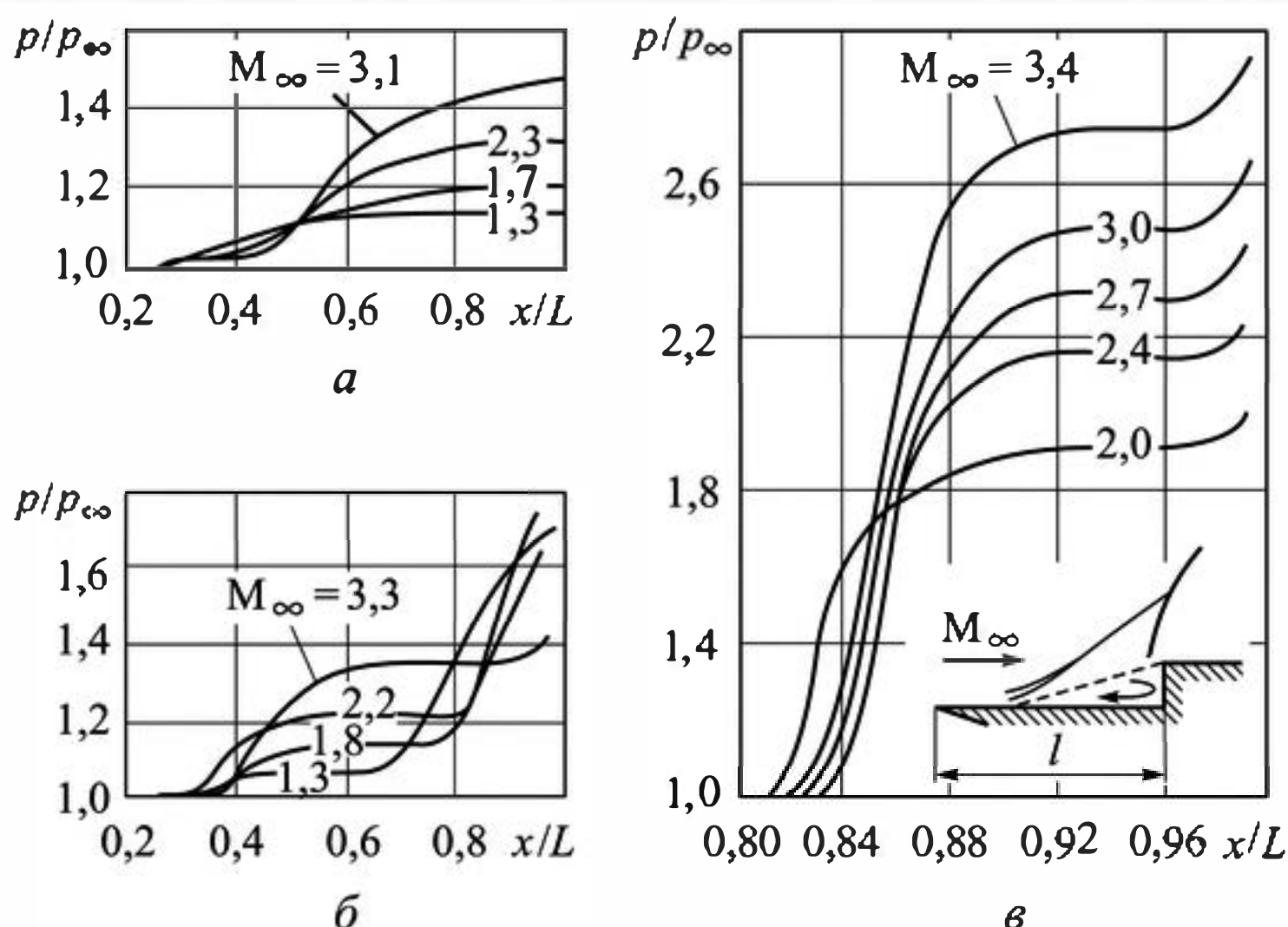


Рис. 6.10. Влияние числа M_∞ на распределение давления при отрыве

Рассмотрим изменение параметров потока: относительной длины зоны отрыва l_s/δ_1 (здесь индекс «1» обозначает параметры невозмущенного потока перед точкой отрыва), относительного давления p/p_∞ , местного коэффициента трения c_{fx} а также профили статического давления в поперечных сечениях при отрыве около углов сжатия.

Распространение возмущений вверх по потоку и их величина связаны с интенсивностью скачка уплотнения, который возникает в вязком потоке перед преградой, имеющей форму клина с углом $\beta_{пр}$. С увеличением $\beta_{пр}$ интенсивность скачка растет, что приводит к возрастанию размеров возмущенной области, а следовательно, и зоны отрыва l_s/δ_1 (рис. 6.11).

Для $M_\infty = 2,84$ отрыв начинает зарождаться при $\beta_{пр} = 10^\circ$ (рис. 6.12). Его развитие по мере увеличения $\beta_{пр}$ представляет постепенный процесс перехода от присоединенного течения к отрывному. На рисунке показано положение точек отрыва S и присоединения R для случая обтекания, соответствующего углу $\beta_{пр} = 24^\circ$ (развитый отрыв). Начало отрыва в эксперименте определяют одним из следующих способов: а) по осевой координате первой точки перегиба на кривой распределения статического давления; б) по положению линии стекания сажемасляного покрытия; в) путем экстраполяции линии скачка уплотнения, вызванного отрывом, до обтекаемой поверхности. Каждый из названных способов с доста-

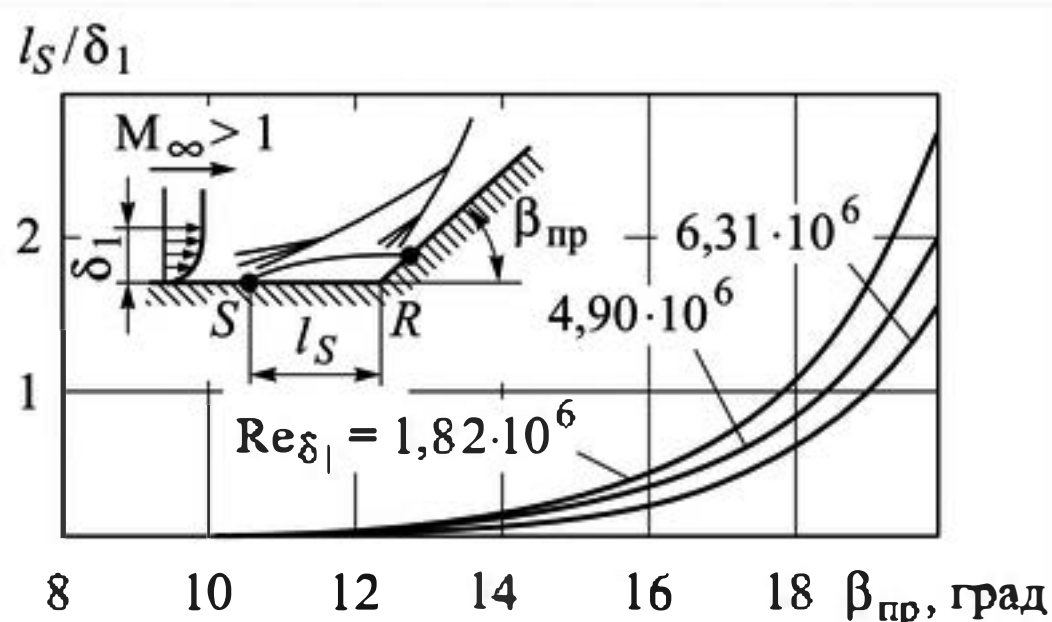


Рис. 6.11. Зависимость относительной длины зоны отрыва от угла преграды при $M_\infty = 2,84$

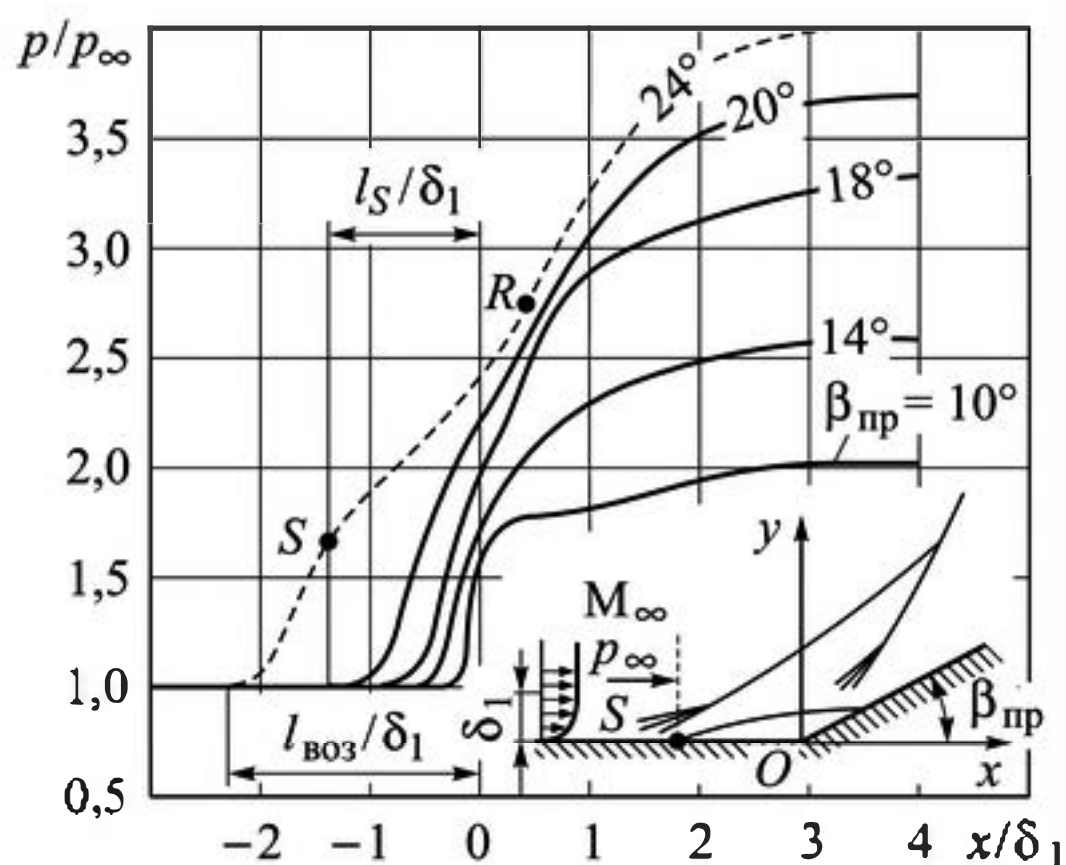


Рис. 6.12. Распределение давления вдоль угла сжатия при $M_\infty = 2,84$ и $Re_{\delta_1} = 6,21 \cdot 10^6$ (сплошные линии) и $1,33 \cdot 10^6$ (штриховая линия)

точной степенью точности определяет начало отрыва. При зонах отрыва, превосходящих толщину пограничного слоя, полученные данные хорошо согласуются между собой.

Введем понятие относительной длины зоны распространения возмущений (зоны взаимодействия) $l_{\text{воз}}/\delta_1$ (где $l_{\text{воз}}$ — расстояние от точки начала повышения давления до источника возникновения возмущений — угла сжатия, уступа и т. д.).

Местный коэффициент поверхностного трения c_{fx} в точках отрыва S и присоединения R достигает нулевых значений (рис. 6.13). В предотрывной области, где начинает повышаться давление, значение коэффициента быстро падает от начального, соответствующего пограничному слою на плоской пластине, до нуля на линии отрыва. За точкой присоединения потока, в которой также $c_{fx} = 0$,

коэффициент возрастает и снова приближается к значению на плоской пластине.

Согласно приведенным на рис. 6.14 графикам, при турбулентном обтекании угла сжатия с увеличением числа Re_{δ_1} область распространения повышенного давления монотонно уменьшается. Это объясняется возрастанием сопротивления со стороны невозмущенного потока проникновению возмущений вверх по течению до дозвуковой части пограничного слоя.

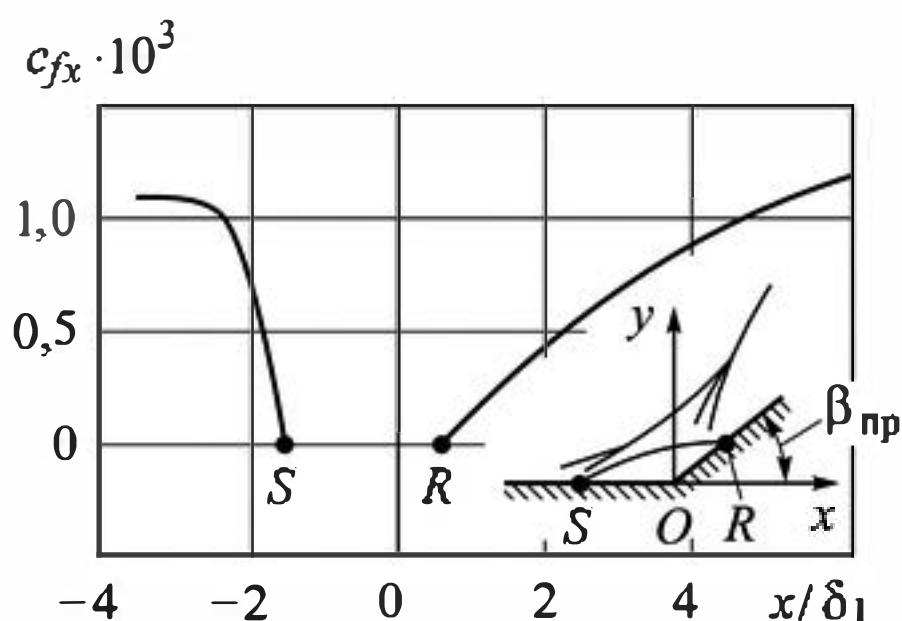


Рис. 6.13. Изменение местного коэффициента поверхностного трения в области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем

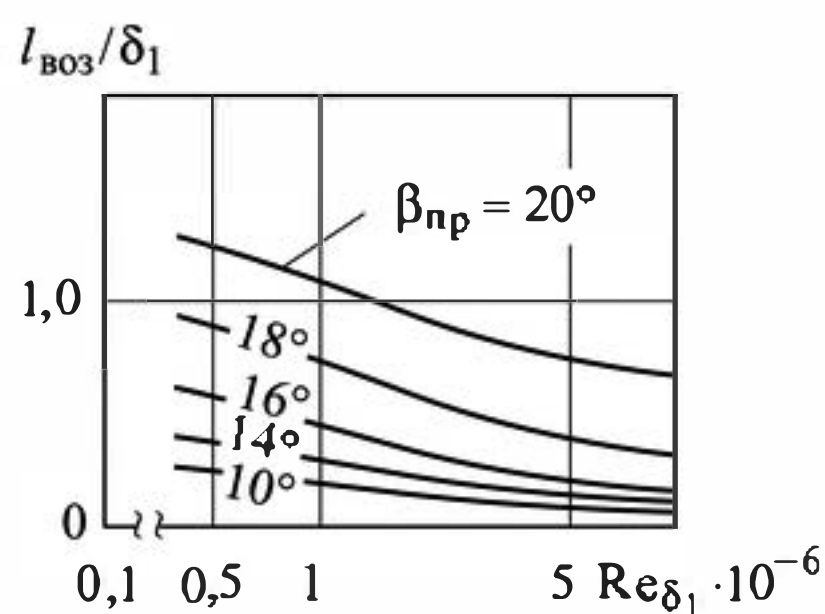


Рис. 6.14. Зависимость относительной длины зоны распространения возмущения от числа Re_{δ_1} при $M_{\infty} = 2,9$

Характер распределения статического давления при обтекании угла сжатия не меняется по сравнению с плоским случаем, если этот угол образован цилиндрической и конической («юбкой») поверхностями (рис. 6.15). С увеличением угла $\beta_{пр}$ возрастает длина области отрыва потока. Явно выраженное «плато» давления появ-

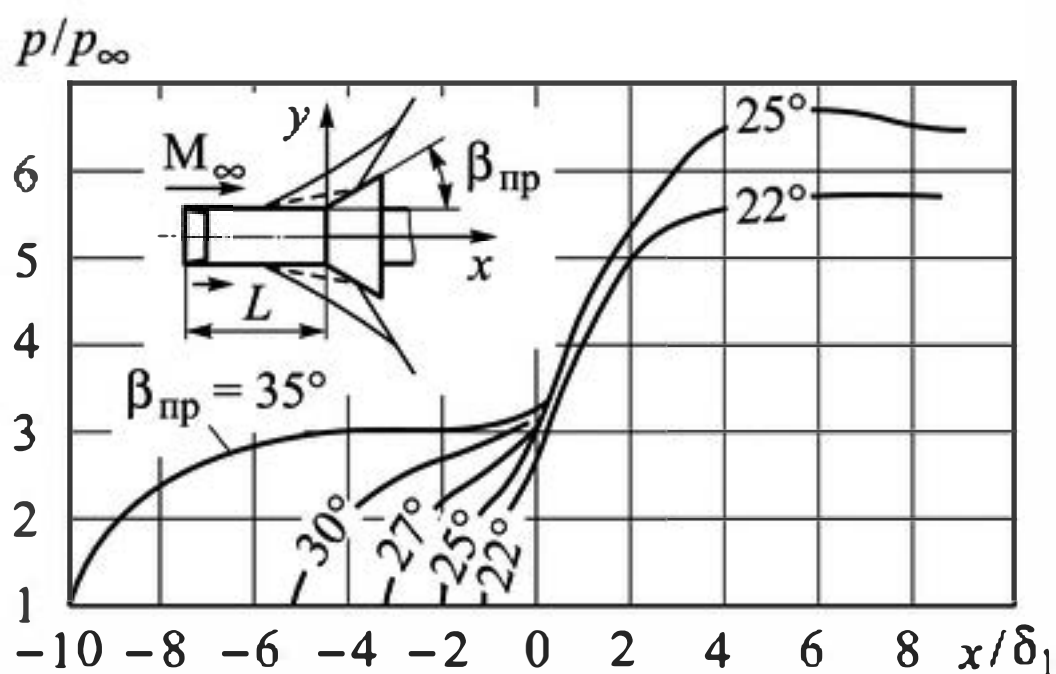


Рис. 6.15. Распределение статического давления при отрыве перед «юбкой» при $M_{\infty} = 3,96$ и $Re_L = 30 \cdot 10^6$

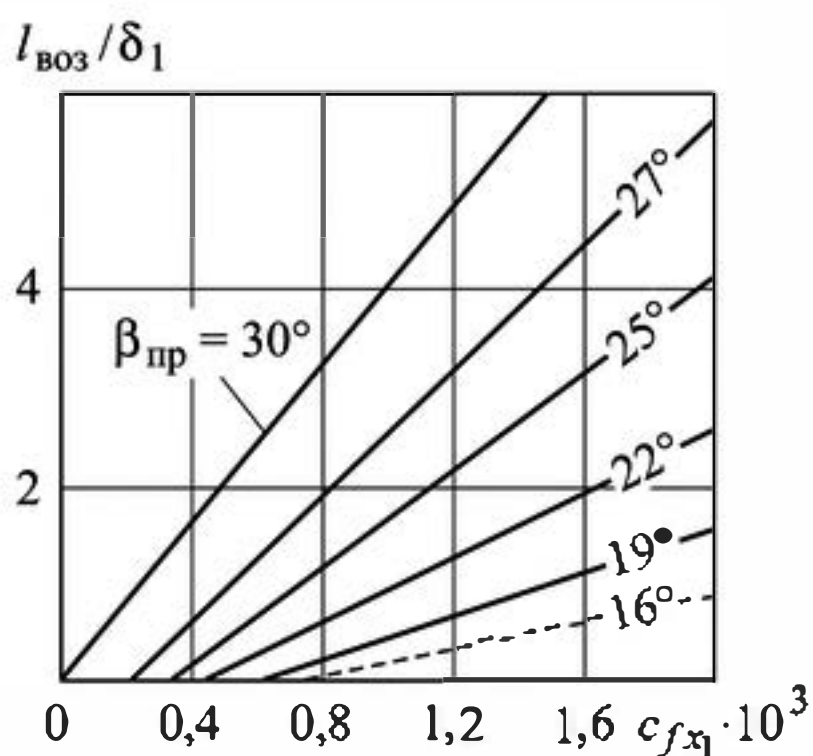


Рис. 6.16. Зависимость длины области распространения возмущений от местного коэффициента поверхностного трения при осесимметричном (сплошные линии) и плоском (штриховая линия) обтекании

ляется лишь при $\beta_{\text{пр}} > 30^\circ$ и соответствует $p_p/p_\infty = 3,12$. К этому значению стремятся все кривые распределения давления, соответствующие условиям развитого отрывного течения. Значения статического давления в области «плато» близки к его значениям для плоских наклонных преград.

Результаты экспериментов показали, что если построить зависимость длины зоны взаимодействия от местного коэффициента поверхностного трения c_{fx_1} , рассчитанного по параметрам течения перед ней, то для каждого угла $\beta_{\text{пр}}$ как при осесимметричном, так и при плоском обтекании все данные описываются одинаковыми зависимостями,

близкими к линейным, при любых значениях числа M_∞ (рис. 6.16).

Обозначим тангенс угла наклона этих прямых через α , а местный коэффициент трения в точке пересечения их с осью абсцисс — c_{fx}^* . Тогда

$$l_{\text{воз}}/\delta_1 = \alpha(c_{fx_1} - c_{fx}^*). \quad (6.1)$$

Согласно экспериментальным данным, величины α и c_{fx}^* являются функциями угла наклона преграды $\beta_{\text{пр}}$. Для теплоизолированной стенки они могут быть представлены эмпирическими уравнениями

$$\alpha = 0,2829 \beta_{\text{пр}}^{2,81}; \quad c_{fx}^* = 10^{-3} (1 - 0,001189 \beta_{\text{пр}}^2),$$

где $\beta_{\text{пр}}$ — в градусах.

Тогда уравнение (6.1) принимает вид

$$l_{\text{воз}}/\delta_1 = 0,2839 \beta_{\text{пр}}^{2,81} [c_{fx_1} - 10^{-3} (1 - 0,001189 \beta_{\text{пр}}^2)].$$

Поскольку с увеличением числа Рейнольдса коэффициент поверхностного трения уменьшается, то при его неограниченном росте длина зоны распространения возмущений стремится к нулю.

При турбулентном обтекании преград, имеющих угол наклона $\beta_{\text{пр}} = 90^\circ$, область взаимодействия от точки отрыва S вверх по потоку распространяется на расстояние $l_{\text{воз}} \approx 2,5\delta_1$. За точкой отрыва давление достигает значения, соответствующего области смешения, а непосредственно перед уступом оно резко возрастает. Для широкого диапазона чисел M_∞ средний угол отрыва $\beta_p \approx 13^\circ$. Незначительная чувствительность угла отрыва к изменению чисел M_∞ и Re_x приводит к тому, что относительная длина зоны отрыва $l_S/h \approx 4,2$ при условии, что высота уступа $h > \delta_1$.

Распределение давления в зоне отрыва по торцевой стороне уступа сложное (рис. 6.17). В средней части торцевой поверхности давление близко к значению, соответствующему области смешения.

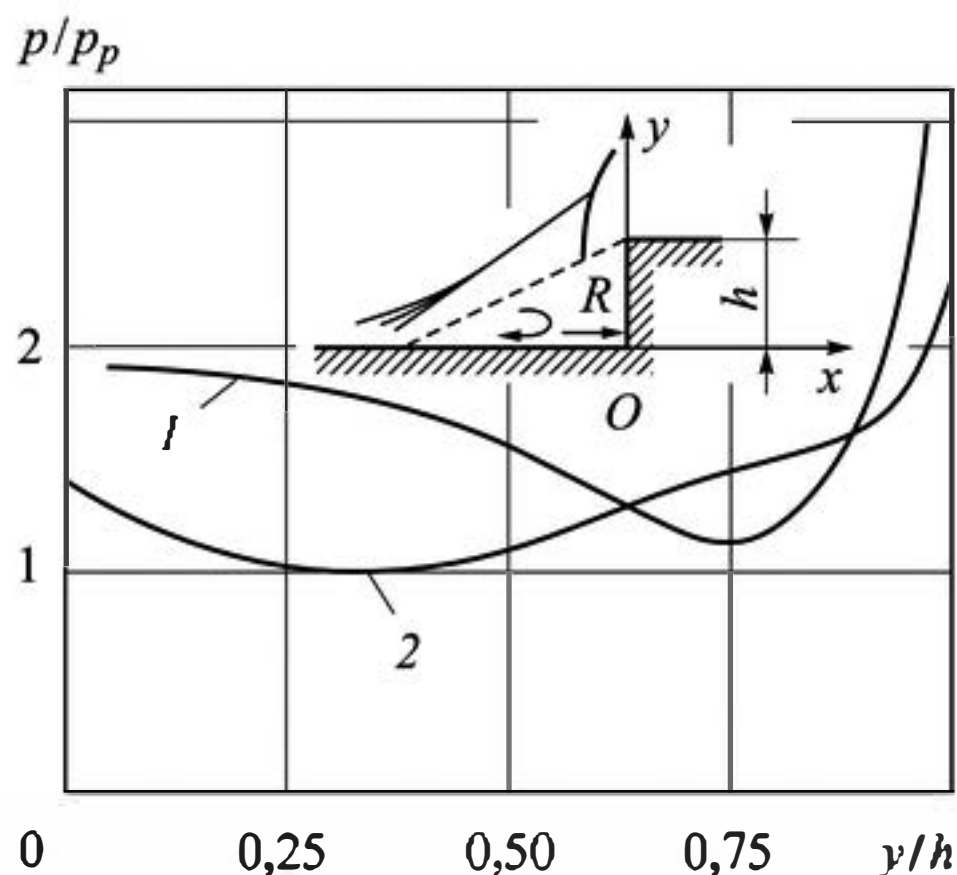


Рис. 6.17. Распределение давления по торцевой поверхности уступа:
1 – ламинарный отрыв ($Re_L = 5 \cdot 10^5$; $M_\infty = 9,7$; $T_{ст}/T_{0\infty} = 0,29$); 2 – турбулентный отрыв ($Re_L = 1,1 \cdot 10^6$; $M_\infty = 1,72$; $T_{ст}/T_{0\infty} = 1$)

У верхней части уступа оно резко возрастает, что обусловлено торможением и присоединением оторвавшегося потока. Вблизи основания уступа давление возрастает вследствие торможения возвратного течения. Как и для области возмущенного течения перед уступом, распределение давления по его торцевой поверхности зависит от режима течения, чисел M_∞ и Re_x .

Взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем

Воздействие скачка уплотнения на пограничный слой приводит к его утолщению и оттеснению внешнего потока от стенки, что вызывает волны сжатия в сверхзвуковом потоке. Пограничный слой

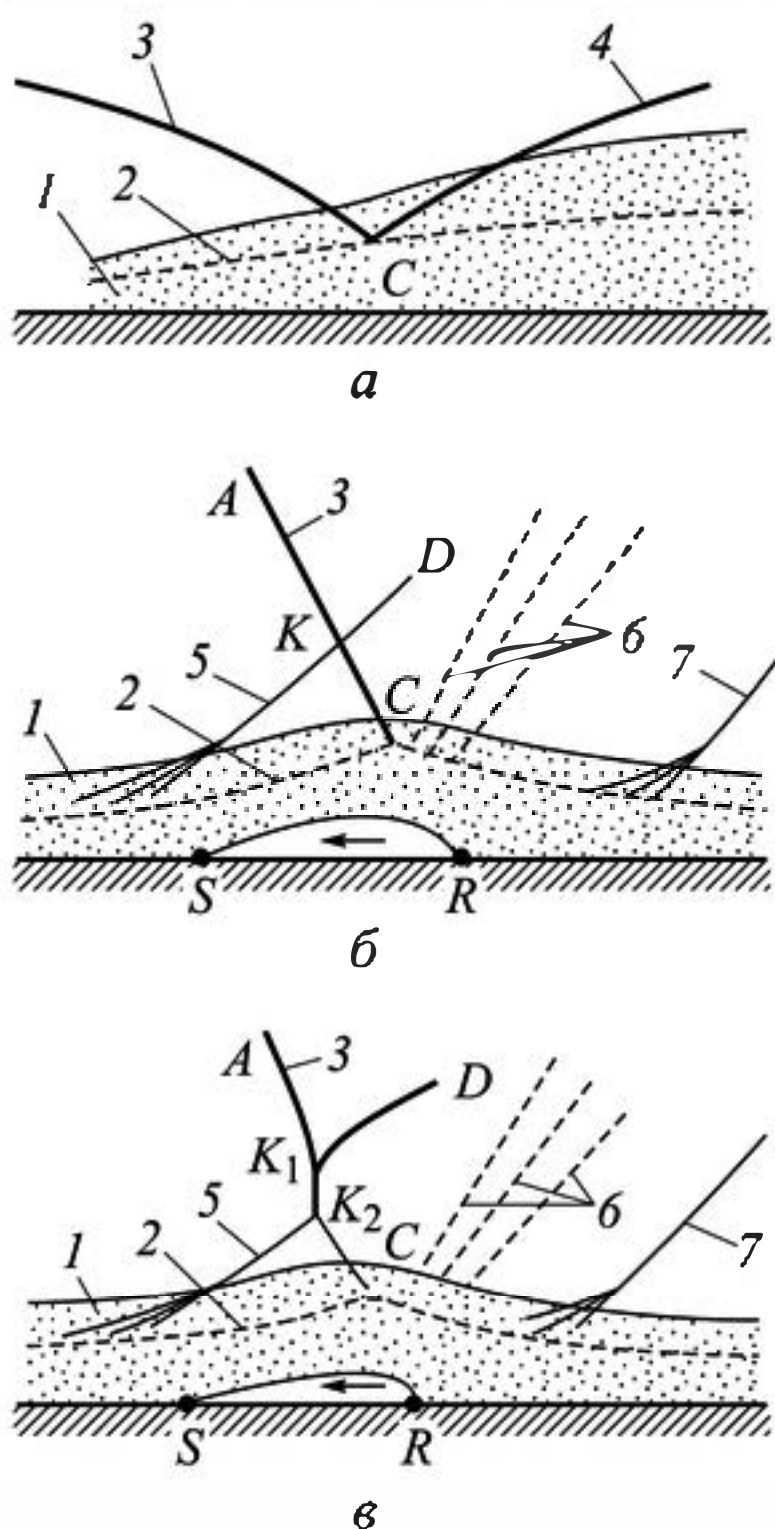


Рис. 6.18. Схемы течения при взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем

малой сверхзвуковой скоростью и большим углом падения скачка, когда угол одного из скачков больше критического, вблизи пограничного слоя возникает мостообразный скачок уплотнения с участком прямого скачка K_1K_2 (рис. 6.18, в).

Для каждого числа M_∞ существует свой угол наклона падающего скачка уплотнения, при котором происходит зарождение отрывного течения (рис. 6.19). Область выше кривой AB соответствует условиям появления отрывного течения, тогда как ниже кривой AB скачок не способен создать положительный градиент давления, приводящий к отрыву. Чем меньше число M_∞ , тем более высокой интенсивности (больше угол $\theta_{сж}$) требуется скачок уплотнения, необходимый для отрыва. Согласно приведенным на рис. 6.19 данным, при $M_\infty = 1,3$ скачок уплотнения, вызывающий отрыв, должен быть прямым.

сглаживает скачок, создавая у поверхности градиент давления конечного значения. Линии тока во внешнем течении отклоняются от стенки, что, в свою очередь, несколько деформирует падающий скачок уплотнения.

Структуры потока в области взаимодействия существенно зависят от режима течения в пограничном слое, интенсивности скачка уплотнения и угла его падения. Если интенсивность мала (рис. 6.18, а), то пограничный слой 1 не отрывается от стенки и падающий скачок уплотнения 3 отражается от звуковой линии 2 скачком уплотнения 4 . При большой интенсивности скачка поток у обтекаемой стенки тормозится сильнее, что может привести к его отрыву. Это вызывает дальнейшее отклонение внешнего потока и образование характерной системы скачков уплотнения $3, 5, 7$ и волн разрежения 6 (рис. 6.18, б). В некоторых случаях, характеризующихся

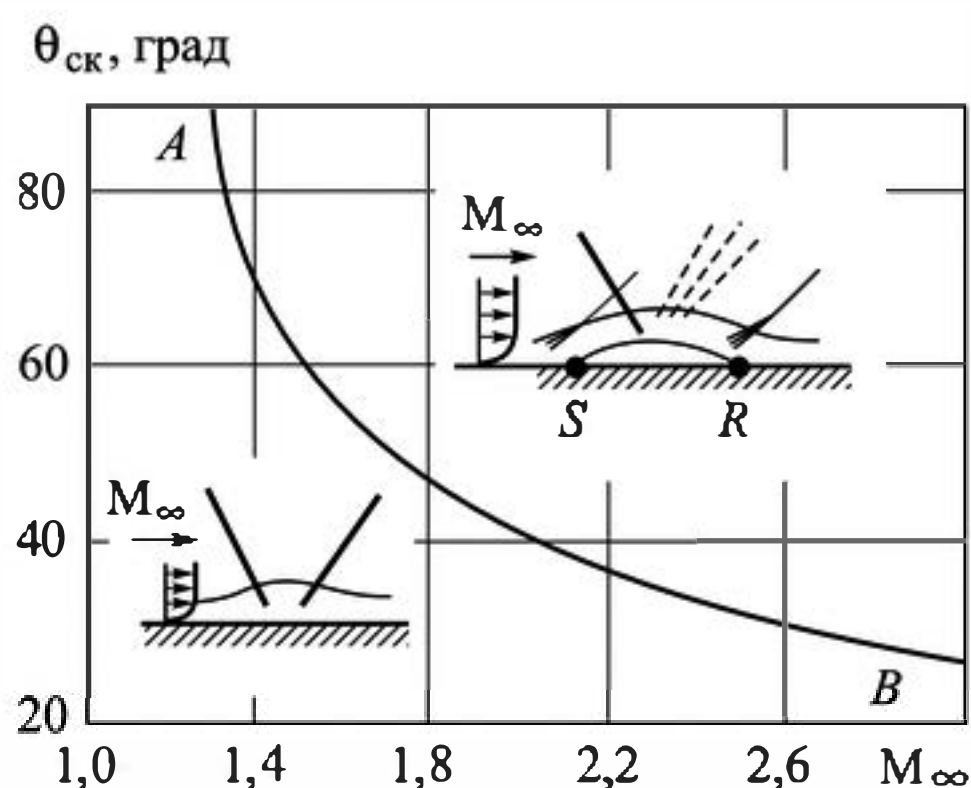


Рис. 6.19. Влияние числа Маха и угла наклона падающего скачка уплотнения на отрыв двумерного потока

Возмущения от скачка уплотнения распространяются вверх по потоку на расстояние, равное нескольким толщинам пограничного слоя. На рис. 6.20 показаны зависимости для скачка уплотнения, генерируемого плоским клином с переменным углом $\beta_{\text{кл}}$, при взаимодействии с турбулентным пограничным слоем. Длина зоны отрыва приведена к безразмерному виду $(x_C - x_S)/\delta_1$ (где x_C — расстояние от передней кромки пластины до точки C пересечения продолжения скачка уплотнения с обтекаемой поверхностью). С увеличением угла $\beta_{\text{кл}}$ возрастают интенсивность скачка уплотнения

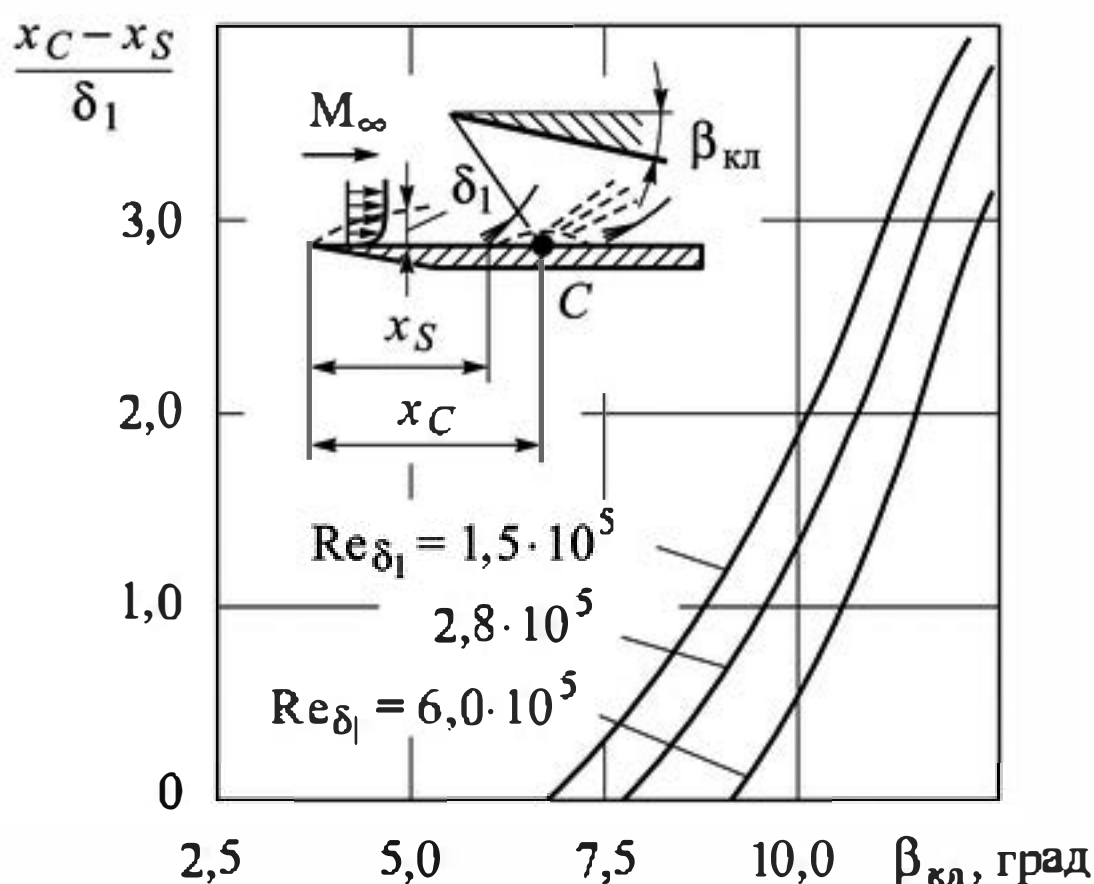


Рис. 6.20. Зависимость относительной длины зоны отрыва от угла клина при $M_\infty = 2,96$

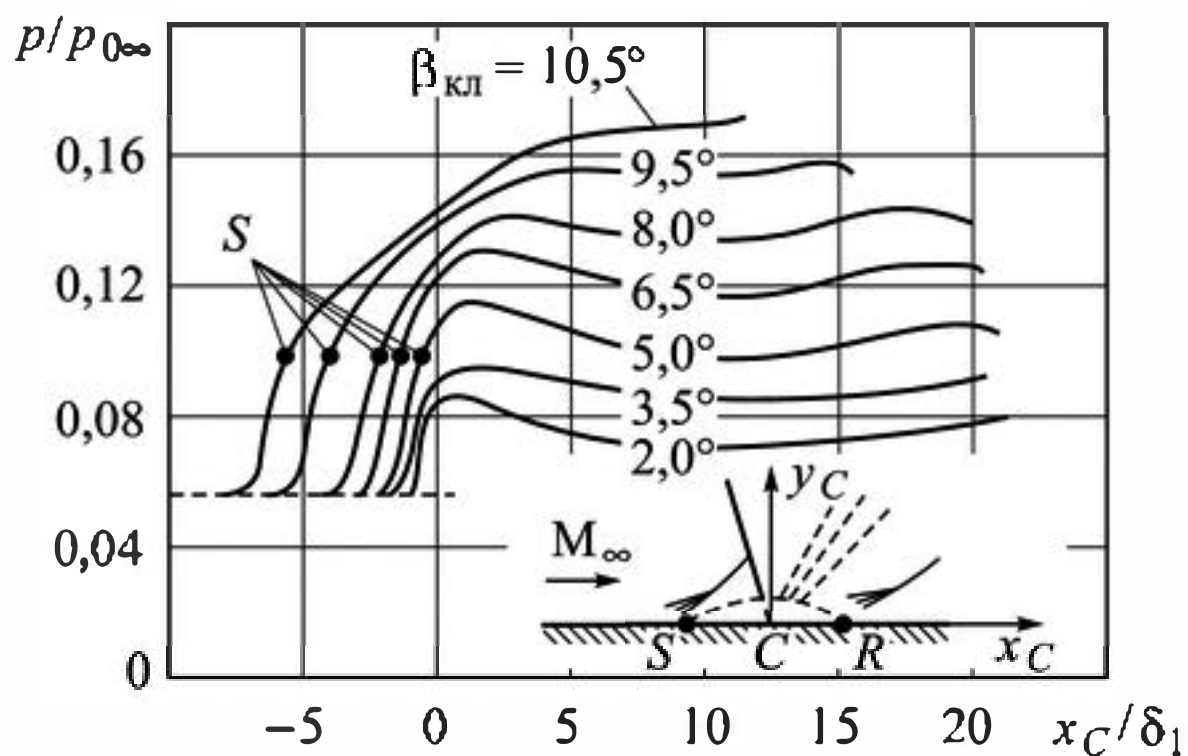


Рис. 6.21. Изменение относительного давления в зоне возмущенного течения при отрыве турбулентного пограничного слоя

и расстояние, на которое распространяются возмущения, а точка отрыва смещается вверх по потоку. Размеры зоны отрыва зависят также и от числа Re .

В условиях развитого отрывного течения давление в точке отрыва не зависит от интенсивности скачка уплотнения, вызывающего его (рис. 6.21). При $M_\infty = 2,9$ и $Re_{\delta_1} = 9,73 \cdot 10^5$ отрыв возникает, если угол $\beta_{кл} \geq 5^\circ$. Увеличение $\beta_{кл}$ приводит лишь к росту длины области отрыва и давления в ней.

Свободное взаимодействие при отрыве

Экспериментально установлено, что геометрия обтекаемых тел ниже по потоку и эффекты, вызывающие возникновение отрыва, не оказывают прямого влияния на параметры двухмерного течения. Для характеристики такого явления используют термин «свободное взаимодействие», при котором давление в возмущенной зоне не зависит от условий отрыва потока (рис. 6.22).

Начало эпюр давлений для всех рассмотренных на рисунке случаев совмещено в одной точке. Независимость в распределении давления до точки отрыва S сохраняется при отрыве как ламинарного, так и турбулентного сверхзвуковых потоков. Этот отрыв может быть вызван либо углом сжатия или уступом, либо падающим скачком уплотнения. Для ламинарного отрыва характер свободного взаимодействия распространяется на область за точкой отрыва S (см. рис. 6.22, **а**). При турбулентном отрывном течении профили давления подобны до точки отрыва, тогда как за ней

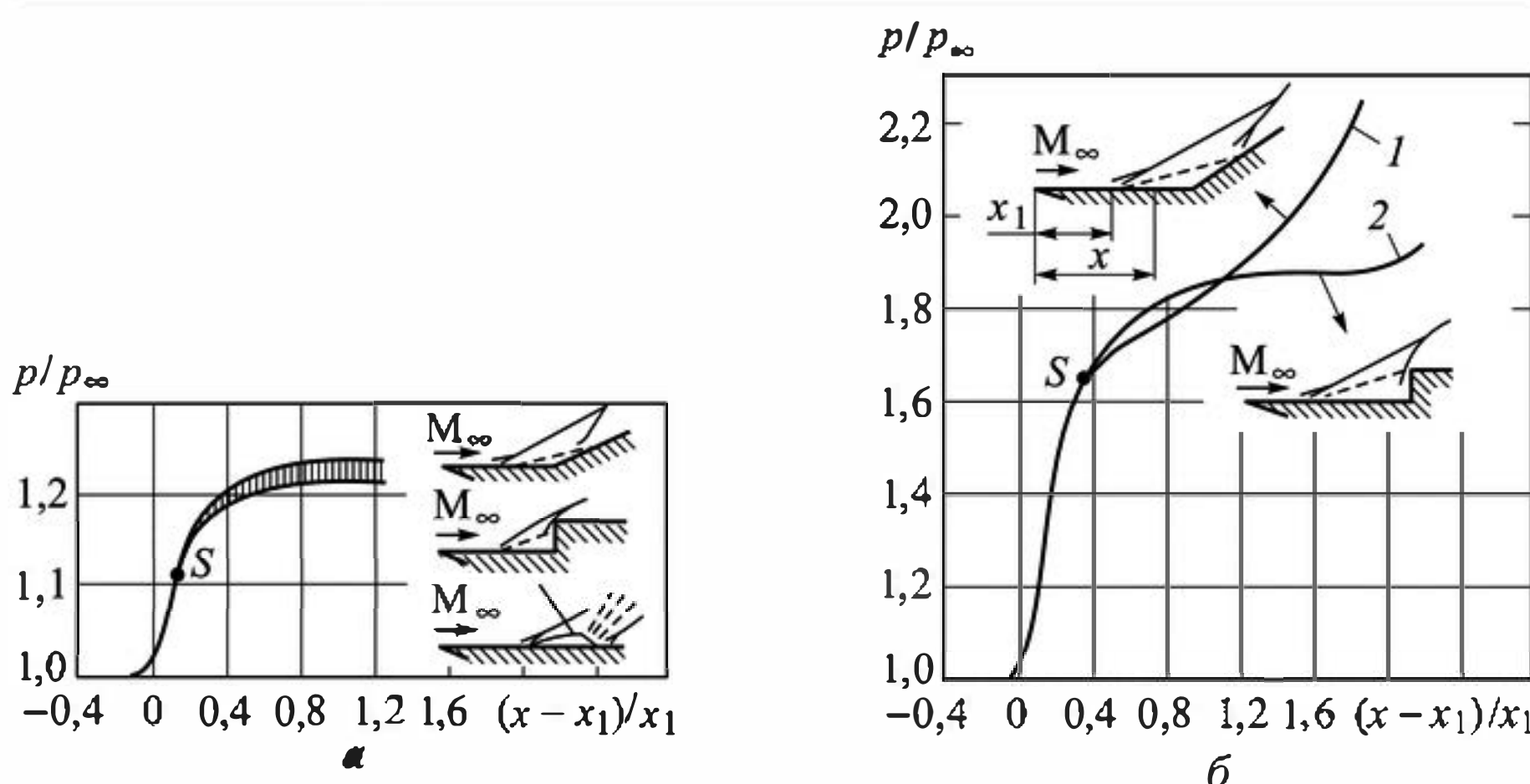


Рис. 6.22. Распределение относительного давления при свободном взаимодействии:

a – ламинарный отрыв ($M_\infty = 2.3$; $Re_{x_1} = 0.2 \cdot 10^6$); b – турбулентный отрыв ($M_\infty = 2.0$; $Re_{x_1} = 3.1 \cdot 10^6$); 1 – отрыв перед углом сжатия; 2 – отрыв перед уступом

давление зависит от формы и размеров обтекаемого тела (см. рис. 6.22, б).

Рассмотренная зависимость отрывных течений позволила установить единые зависимости характерных параметров течений для различных условий отрыва. Так, на рис. 6.23 показано отклонение оторвавшегося потока для условий, когда отрыв вызван падающим на пограничный слой скачком уплотнения и обтеканием угла сжатия.

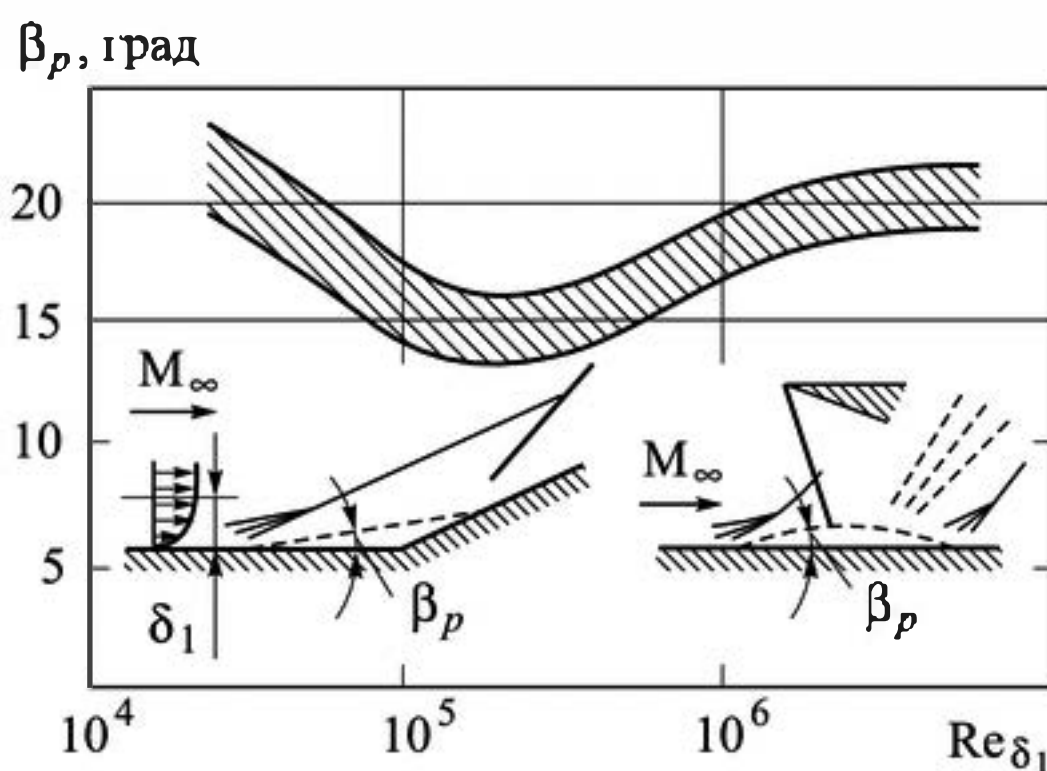


Рис. 6.23. Зависимость угла отрыва потока β_p от числа Re_{δ_1} при $M_\infty = 3$

Течение с отрывом в дозвуковом и гиперзвуковом потоках

Для дозвукового отрывного течения, как и для сверхзвукового, давление перед препятствием возрастает во всей области распространения возмущений. Ее размеры и характер изменения давления определяются режимом течения. При ламинарном дозвуковом отрыве (рис. 6.24, *а*) возмущения распространяются вверх против течения на большее расстояние, чем при турбулентном (рис. 6.24, *в*). В случае переходного режима характерен всплеск давления за точкой перехода (рис. 6.24, *б*).

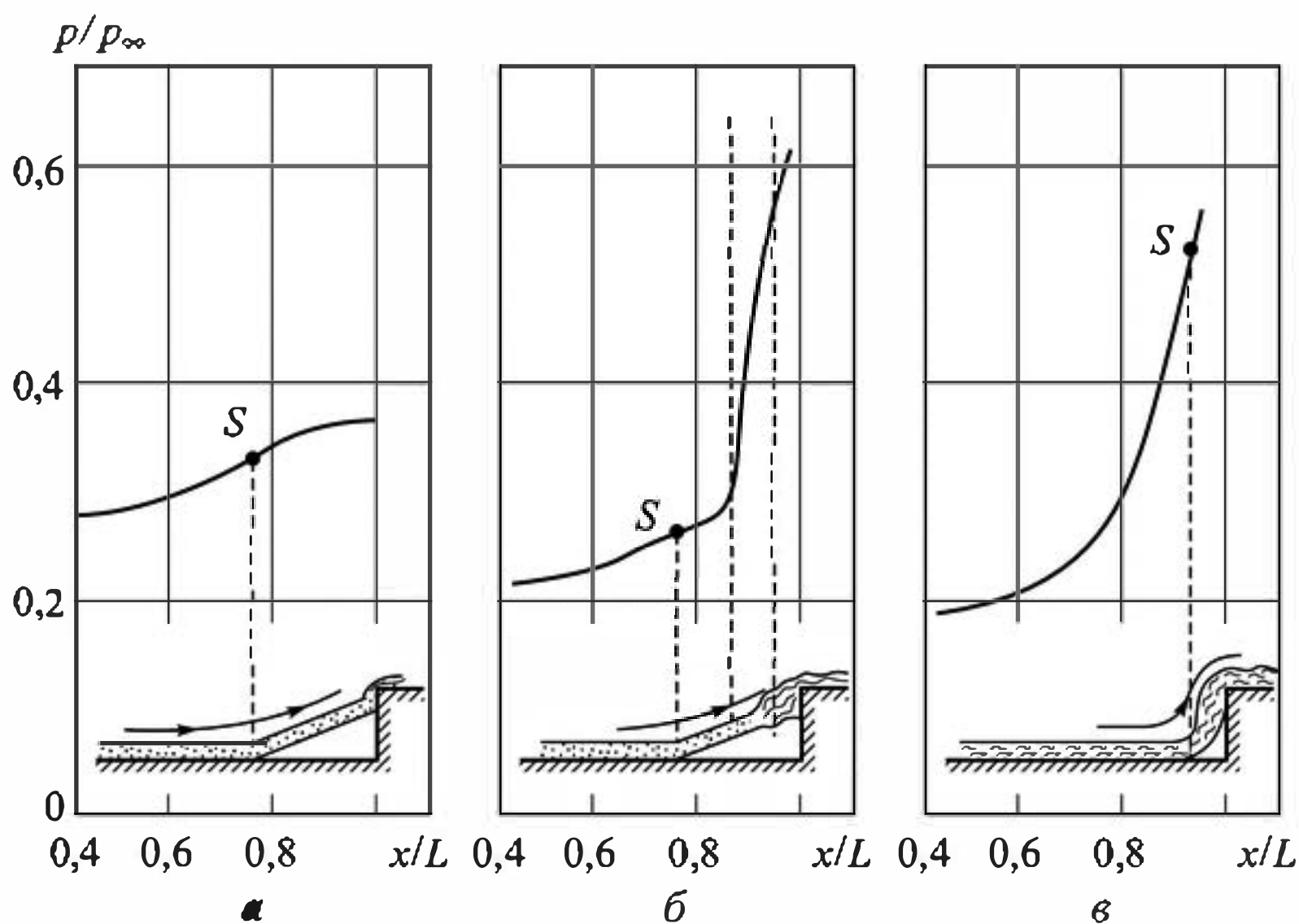


Рис. 6.24. Распределение коэффициента давления при дозвуковом отрыве ($M_\infty = 0,61$) и $Re_L = 0,106 \cdot 10^6$ (*а*), $0,358 \cdot 10^6$ (*б*) и $0,407 \cdot 10^6$ (*в*)

При дозвуковом отрыве ламинарного пограничного слоя перед наклонной преградой число Re меньше влияет на распределение давления, чем при сверхзвуковом.

Увеличение скорости обтекания до гиперзвуковой приводит к появлению некоторых особенностей в отрывных течениях. При сравнении схем таких течений при сверхзвуковом (рис. 6.25, *а*) и гиперзвуковом (рис. 6.25, *б*) обтекании угла сжатия видно, что в последнем случае точка отрыва S расположена ближе, а точка присоединения R оторвавшегося потока — дальше от вершины угла сжатия.

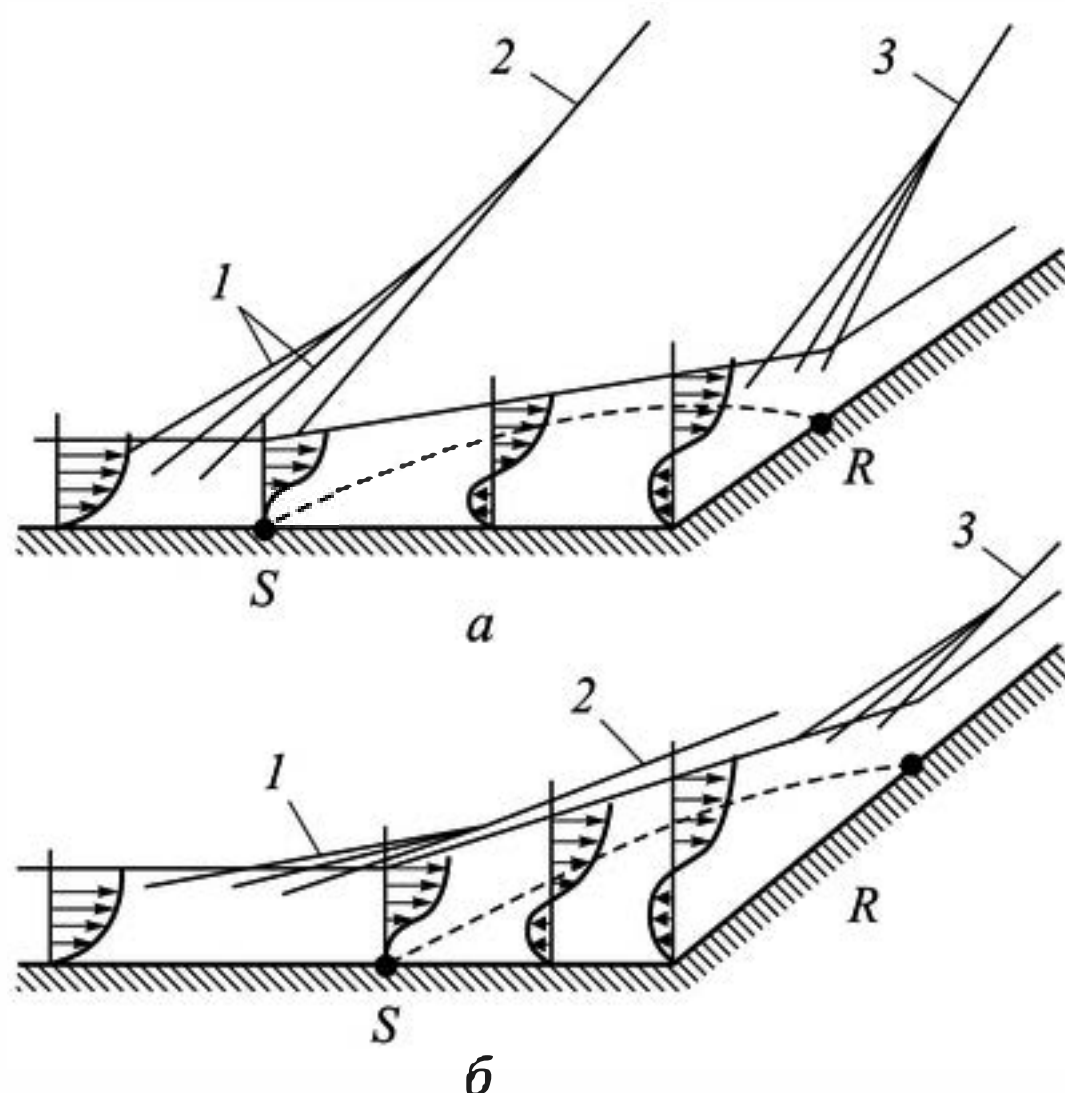


Рис. 6.25. Схемы отрывного течения при сверх- (а) и гиперзвуковом (б) обтекании угла сжатия

В обоих случаях обтекание сопровождается увеличением толщины пограничного слоя, что порождает веер волн сжатия 1 . Но при сверхзвуковом обтекании взаимодействие перед зоной возмущения сравнительно слабое и разворот основного потока в веере волн 1 происходит почти изоэнтропически. При гиперзвуковом обтекании сжатие перед областью отрыва происходит более резко и на границе вязкого слоя образуется сильный скачок 2 , который располагается почти параллельно внешней границе пограничного слоя. Развитие оторвавшегося пограничного слоя осуществляется практически при постоянном давлении. В области присоединения формирование скачка уплотнения 3 на внешней границе пограничного слоя при гиперзвуковой скорости заканчивается ближе к точке присоединения R . Следует отметить, что при больших числах M_∞ и малых Re интенсивность взаимодействия между нарастающим пограничным слоем и невязким потоком перед углом сжатия может быть примерно такой же, как при условии обтекания клина с углом $\beta_{кл} = \beta_{пр}$ невязким потоком.

С увеличением угла $\beta_{пр}$, приводящего к возрастанию интенсивности взаимодействия, давление изменяется не только вдоль поверхности преграды, но и перед ней. При этом, если число $M_\infty = \text{const}$, давление p_p в области «плато» остается примерно постоянным. Экспериментальные данные показывают, что значение p_p зависит от

чисел M_∞ и Re . Коэффициент давления $\bar{p}_p = (p_p - p) / (\rho V_\infty^2 / 2)$ для изобарной области в диапазоне чисел $M_\infty = 2 \dots 16$ хорошо согласуется с корреляционной зависимостью

$$\bar{p}_p = 3 c_{fx1}^{1/2} M_\infty^{-3/4}.$$

Здесь

$$c_{fx1} = 0,664 \sqrt{\frac{\mu_{\delta_1}}{\rho_{\delta_1} V_{\delta_1} x_1}} \times \left[0,45 + 0,55 \frac{T_{ст}/T_0}{\tau(M_\delta)} + 0,09(k-1) M_{\delta_1}^2 \sqrt{Pr} \right]^{(n-1)/2};$$

T_0 — температура торможения потока; $\tau(M_\delta)$ — газодинамическая функция; $k = c_p / c_v$; $n = 0,76$ при $T_{ст} < 1000$ К и $n \approx 0,9$ при $T_{ст} > 1000$ К; Pr — число Прандтля.

На рис. 6.26 в логарифмическом масштабе построена зависимость параметра $\bar{p}_p / c_{fx1}^{1/2}$ от числа M_∞ . Видно, что с увеличением числа Маха коэффициент давления $\bar{p}_p$ непрерывно уменьшается.

В расчетах отрывных течений одним из основных параметров является длина области отрыва, которая в существенной степени зависит от условий присоединения потока. Как показали экспери-

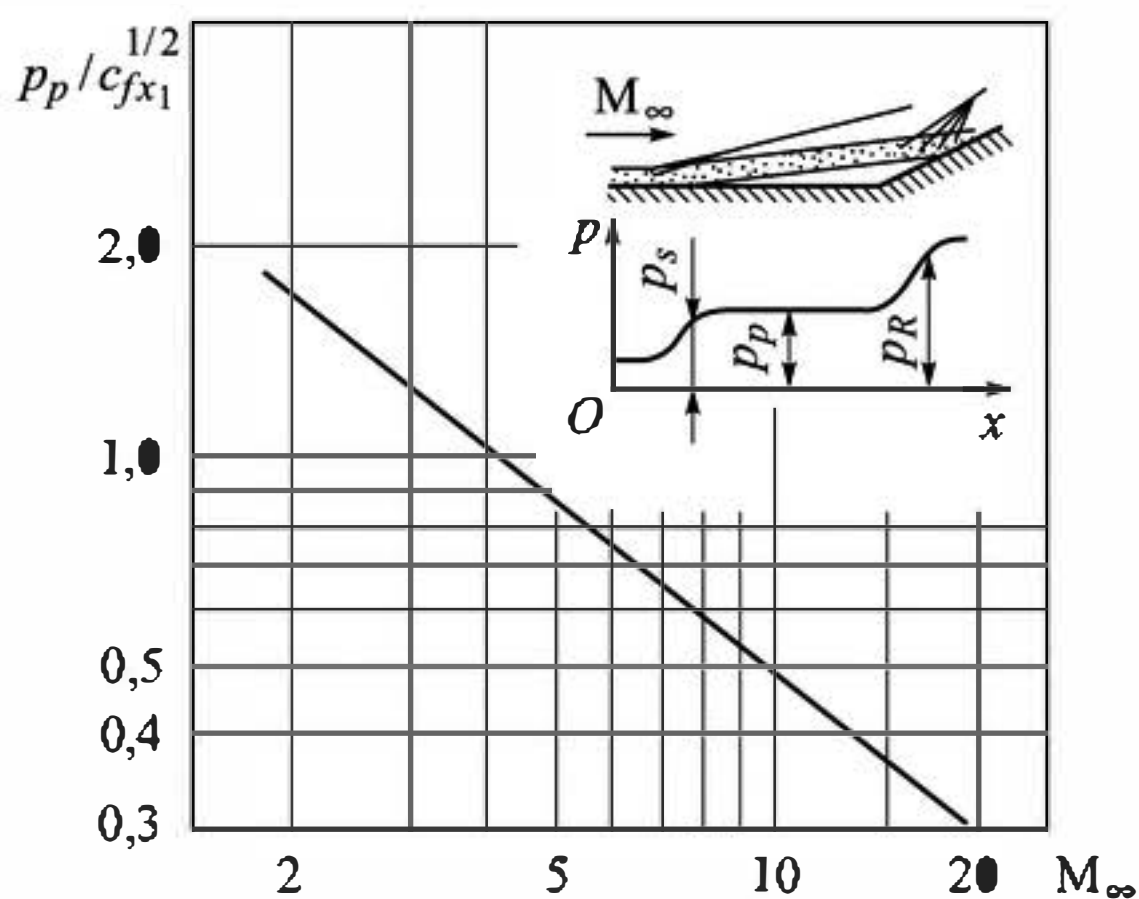


Рис. 6.26. Корреляционная зависимость коэффициентов давления и трения в изобарной области от числа M_∞

менты, на длину зоны отрыва оказывает влияние состояние потока в оторвавшемся пограничном слое. В гиперзвуковом ламинарном потоке с ростом числа Re зона отрыва увеличивается. В турбулентном потоке влияние числа Re проявляется в меньшей степени. В случае переходного пограничного слоя зависимость длины l_S зоны отрыва как функции числа Re_{x_1} является более сложной. Если переход происходит до точки присоединения, то с ростом Re_{x_1} длина l_S уменьшается до значения, соответствующего турбулентному течению, когда точка перехода достигает точки отрыва потока.

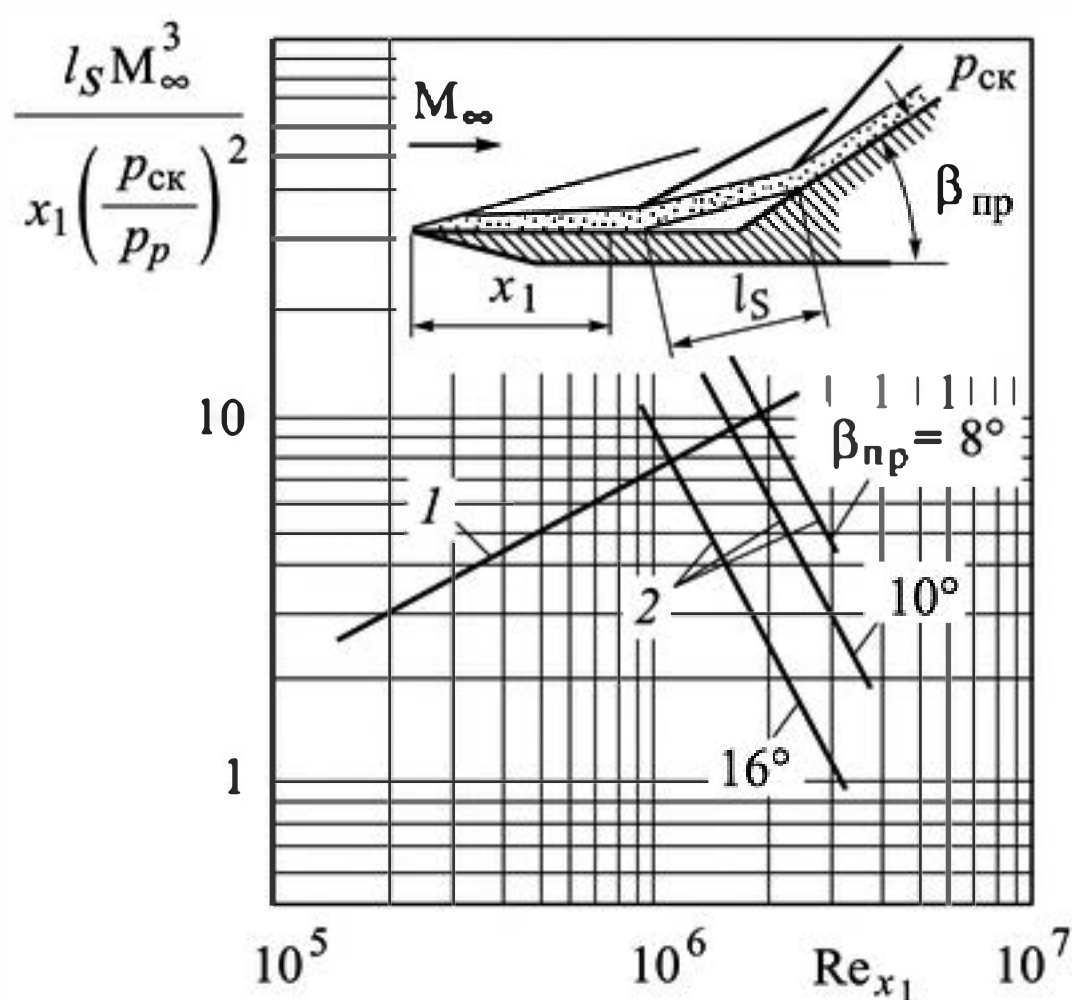


Рис. 6.27. Области изменения параметра $l_S M_\infty^3 / [x_1 (p_{ск} / p_p)^2]$ для ламинарного (1), переходного (2) и турбулентного отрывов

На основе экспериментальных данных была построена корреляционная зависимость безразмерного параметра $l_S M_\infty^3 / [x_1 (p_{ск} / p_p)^2]$ от числа Re_{x_1} (рис. 6.27) в диапазоне чисел $M_\infty = 2 \dots 14,5$. Значительный разброс данных для переходного режима обусловлен зависимостью точки перехода от числа Re_{x_1} и угла $\beta_{пр}$.

Отрывное течение за уступами

Если сверхзвуковой поток обтекает обратный уступ (рис. 6.28), он разворачивается в волне разрежения 1, отрывается с его кромки и присоединяется к обтекаемой поверхности в точке R , в окрестности которой формируется скачок уплотнения 3. Давление в области

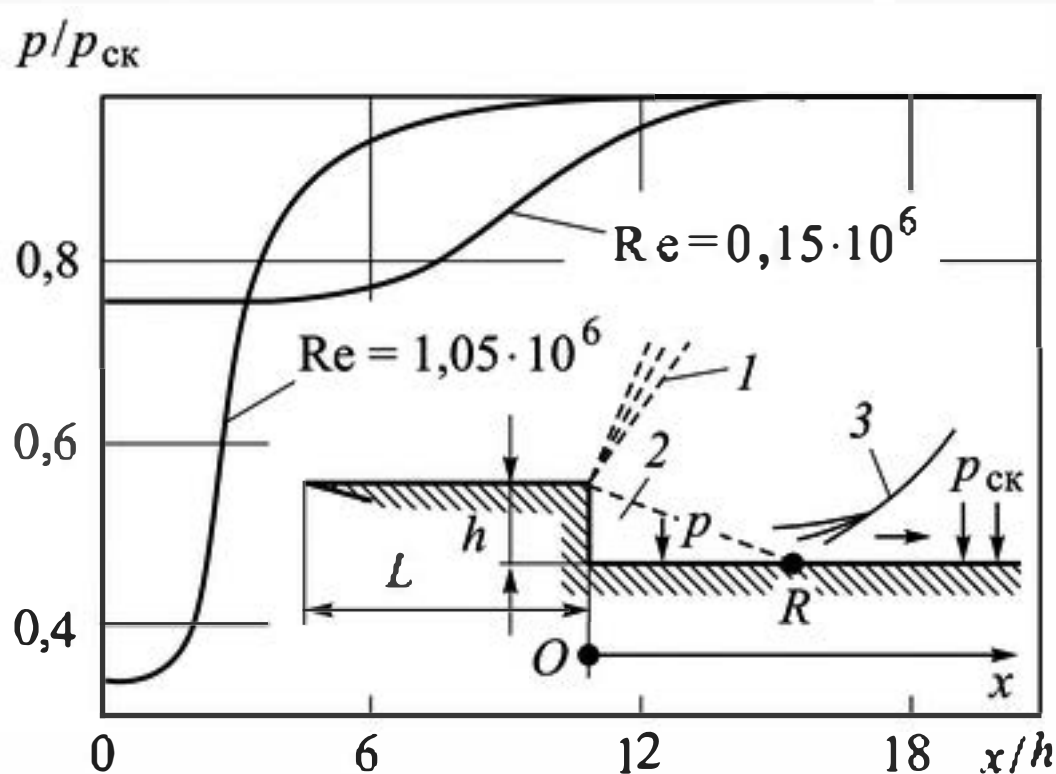


Рис. 6.28. Распределение давления за уступом при ламинарном и турбулентном обтекании ($M_\infty = 2,0$)

отрыва 2 сначала остается примерно постоянным, а затем по мере приближения к точке присоединения возрастает. Участок с постоянным давлением имеет место для любого режима течения (см. рис. 6.28). Значения давления и длина зоны отрыва для каждого режима течения различны. Для ламинарного отрыва давление в донной области за уступом выше и длина зоны отрыва больше, чем для турбулентного. Это объясняется наличием значительной части малоскоростного потока в ламинарном пограничном слое, что делает его более инертным к повороту в волне разрежения. Уменьшение угла поворота приводит к росту как донного давления, так и длины области отрыва.

Исследования выявили слабое влияние формы торцевой поверхности уступов на донное давление, которое зависит от скорости обтекания, формы и размеров верхней кромки уступа, а также от отношения его высоты к толщине пограничного слоя.

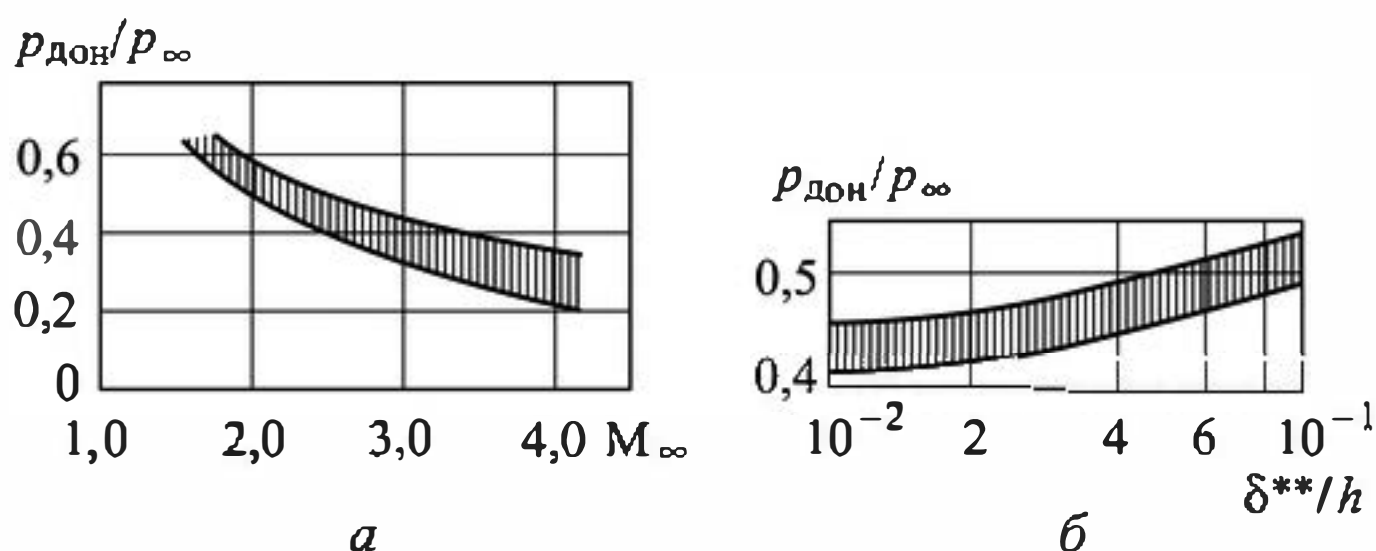


Рис. 6.29. Зависимость относительного донного давления от числа M_∞ (а) и толщины потери импульса пограничного слоя при $M_\infty = 1,5$ (б) для случая турбулентного обтекания обратных уступов

Для уступов как на плоских, так и на осесимметричных телах с ростом числа M_∞ в диапазоне умеренных сверхзвуковых скоростей происходит уменьшение донного давления $p_{\text{дон}}$ (рис. 6.29, а), что связано с возрастанием эжекционных свойств внешнего потока. Тенденция роста относительного донного давления $p_{\text{дон}}/p_\infty$ проявляется с увеличением толщины пограничного слоя перед точкой отрыва, что также связано с расширением слоя с низкими скоростями потока (рис. 6.29, б).

Обтекание каверн

Практический интерес представляет сверхзвуковое течение вблизи выемок (каверн). В зависимости от глубины H и длины L каверны существуют две структуры обтекания: замкнутая и открытая. Для замкнутой (рис. 6.30, а) характерно наличие у передней и задней стенок каверны отдельных замкнутых зон цир-

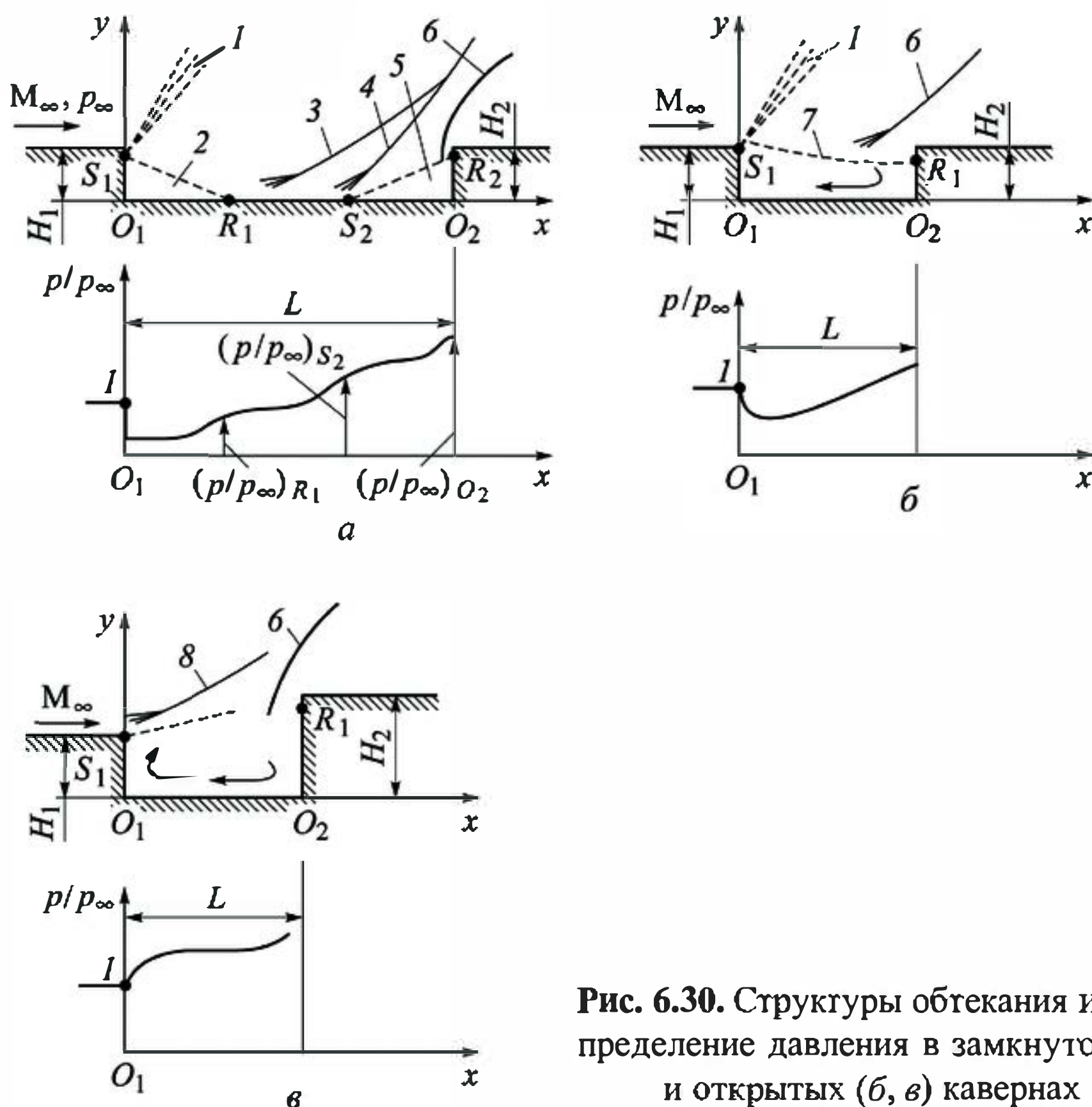


Рис. 6.30. Структуры обтекания и распределение давления в замкнутой (а) и открытых (б, в) кавернах

куляционного течения 2 и 5. Поток отрывается в точке S_1 с образованием веера волн разрежения 1, разворачивается и движется в направлении дна каверны. В точке R_1 происходит присоединение потока, при этом появляется скачок уплотнения 3, за которым поток течет параллельно дну каверны. Задняя стенка каверны в этом случае представляет собой уступ, обтекание которого сопровождается вторичным отрывом в точке S_2 , появлением скачков уплотнения 4 и 6. В соответствии со структурой течения изменяется и распределение давления по дну каверны (см. рис. 6.30, а).

Если поток, отрываясь в точке S_1 , присоединяется непосредственно к задней стенке каверны, то такая каверна называется открытой (рис. 6.30, б). Давление за точкой S_1 резко падает, что является следствием расширения потока в волне 1. При движении газа к задней стенке происходит постепенное торможение потока с образованием во внешней его части скачка уплотнения 6. Часть газа попадает в циркуляционное течение 7 и возвращается к передней стенке каверны. Когда высота задней стенки каверны H_2 больше передней H_1 (рис. 6.30, в), интенсивность скачка уплотнения достаточно большая и повышенное давление передается вверх по каверне к точке S_1 . При этом вместо волн разрежения могут возникать волны сжатия и даже скачок уплотнения 8.

Критерием существования одной из двух структур течения служит относительная длина каверны $\bar{L} = L/H_1$. Когда она превышает некоторое критическое значение

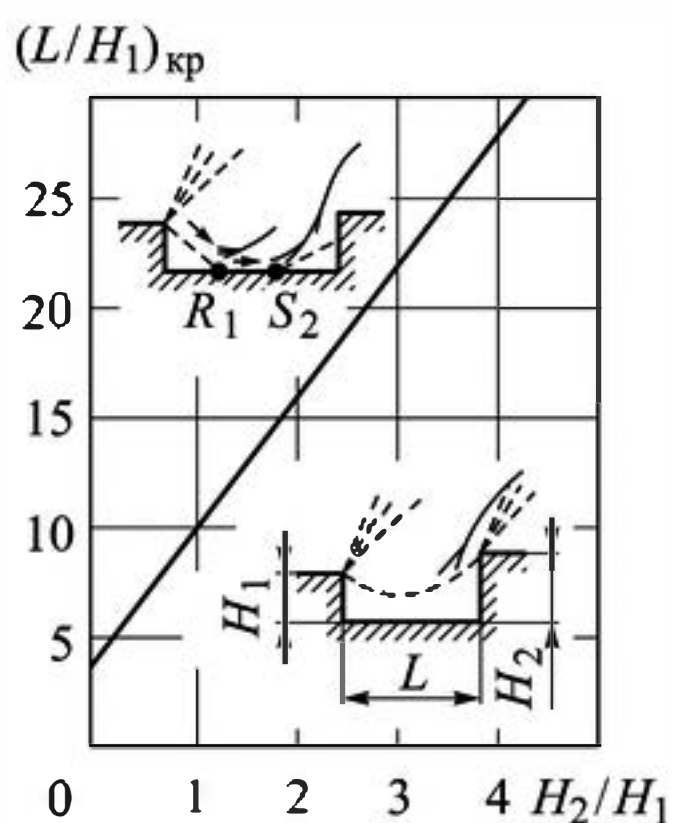


Рис. 6.31. Изменение критической длины каверны $(L/H_1)_{кр}$ в зависимости от отношения H_2/H_1

превышает некоторое критическое значение $(L/H_1)_{кр}$, поток присоединяется к поверхности дна каверны, т. е. образуется замкнутая структура; если $\bar{L} < (L/H_1)_{кр}$ — каверна открытая. На рис. 6.31 показано изменение относительной критической длины $(L/H_1)_{кр}$ от отношения H_2/H_1 в диапазонах чисел $M_\infty = 2,07 \dots 3,43$ и отношений $\delta_1/H_1 = 0,44 \dots 1,91$ (где δ_1 — толщина пограничного слоя перед каверной) при турбулентном режиме течения. Каверна становится открытой, когда совпадают точки R_1 и S_2 и образуется единая зона с циркуляционным течением.

Давление в открытой каверне определяется отклонением внешней границы течения. Если скорость в циркуляцион-

ной зоне каверны мала, то давление близко к постоянному и определяется разностью высот задней и передней стенок каверны. Исследование распределения относительного давления по дну каверны с одинаковыми высотами уступов $H_1 = H_2 = H$ показало, что давление вдоль дна для глубоких выемок ($L/H < 4$) почти не изменяется (рис. 6.32). Если же пограничный слой перед каверной достаточно толстый, то давление в каверне несколько превосходит статическое давление в невозмущенном потоке. Это происходит потому, что рост толщины пограничного слоя и его повторное присоединение вызывают отклонение свободного потока от стенки. Когда отношение длины выемки к ее высоте увеличивается, на кривой распределения давления появляется минимум (примерно на $1/5$ длины вниз по потоку от передней стенки).

Внутри открытых каверн у задней стенки образуется мощный вихрь, диаметр которого приблизительно равен высоте уступа. С противоположной стороны каверны в ее углу располагаются несколько более слабых вихрей с обратным направлением вращения. В центральной части возвратного течения у дна каверны образуется пограничный слой, переходящий с приближением к внешней части потока в слой смешения. На рис. 6.33, а приведены профили скорости в различных сечениях каверны, а также линия нулевой скорости в условиях ламинарного течения. Толщина оторвавшегося пограничного слоя в первой четверти длины выемки увеличивается быстрее, чем у ее конца. Слой смешения расширяется сильнее в сторону выемки, чем в сторону внешнего потока.

Изменение скорости вблизи выемки приводит к перераспределению температуры (рис. 6.33, б). Наибольшее снижение местной температуры наблюдается в слое смешения, а в зоне возвратного течения она практически постоянна, составляет менее 40 % от температуры торможения внешнего потока $T_{0\infty}$ и несколько превышает температуру стенки выемки. Поскольку числа Маха в возвратном течении малы, местная температура торможения почти не отличается от местной статической температуры.

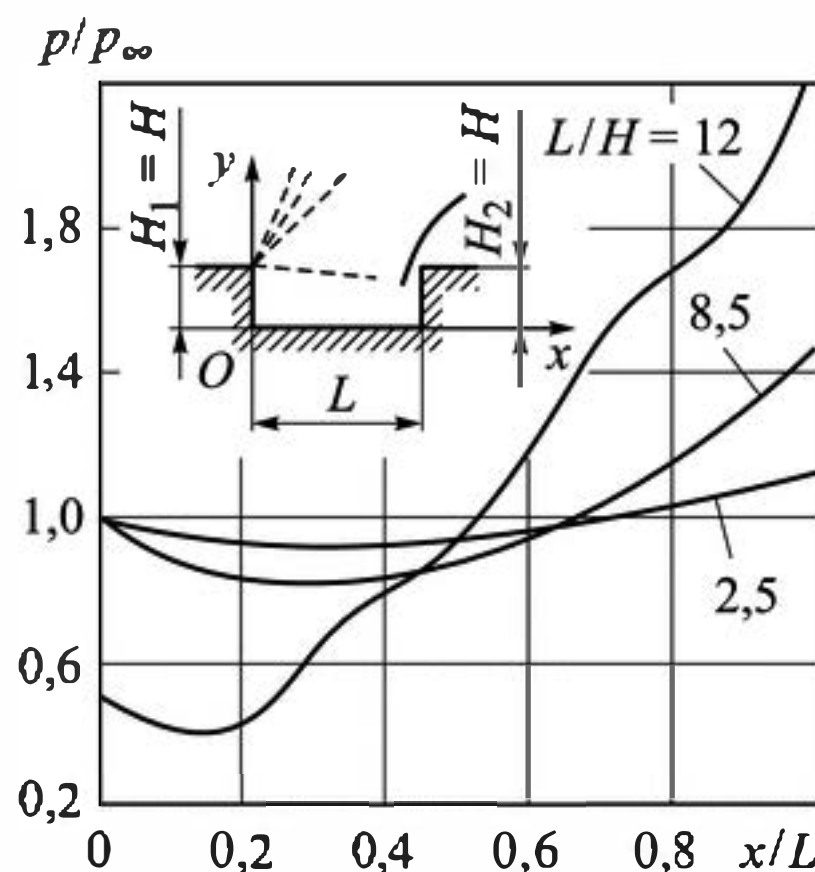


Рис. 6.32. Распределение относительного давления по дну каверны при $M_\infty = 2,78$, $Re_x = 1,5 \cdot 10^6$

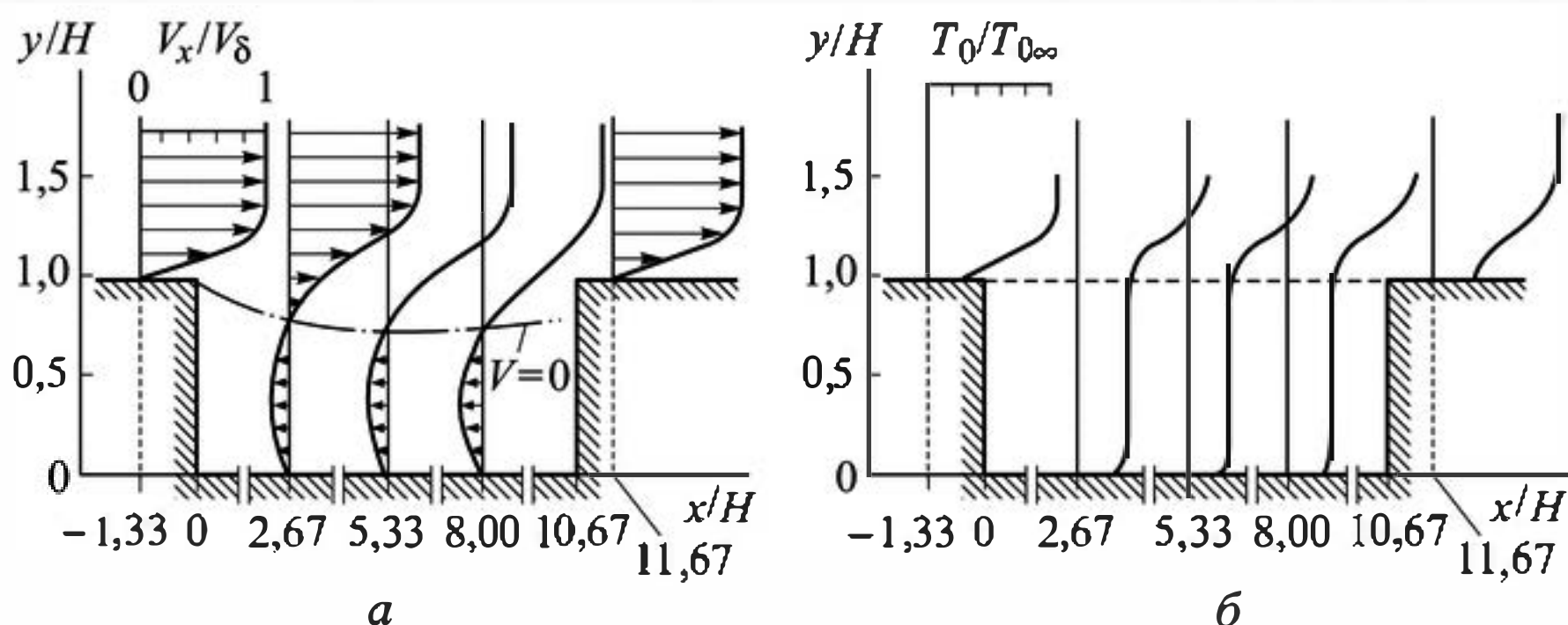


Рис. 6.33. Профили скорости (а) и температуры торможения (б) в различных сечениях каверны при $L/H = 10,67$, $M_\infty = 6,3$, $Re_x = 0,23 \cdot 10^6$

Если в след одного тела внести другое тело, соизмеримое с его размерами, то, считая плоскость симметрии за условную поверхность дна, поток между телами можно рассматривать как течение в каверне. Такие каверны, называемые *свободными*, могут быть *открытыми* и *замкнутыми* (рис. 6.34). Если тела 1 и 5 расположены достаточно близко, так что второе тело 5 попадает в область ближнего следа, то между ними от волны разрежения 2 до скачка уплотнения 4 образуется единая зона отрывного течения 3. При увеличении этого расстояния второе тело попадает в область дальнего следа. Течение за донным срезом первого тела представляет замкнутую отрывную зону, а второе тело обтекается неравномерным потоком. Часть его поверхности попадает в область высокоскоростного внешнего течения, а часть — в область низкоэнергетического потока вблизи оси симметрии, прошедшего через горловину следа 8. Это приводит к перетеканию газа от периферии к центральной части

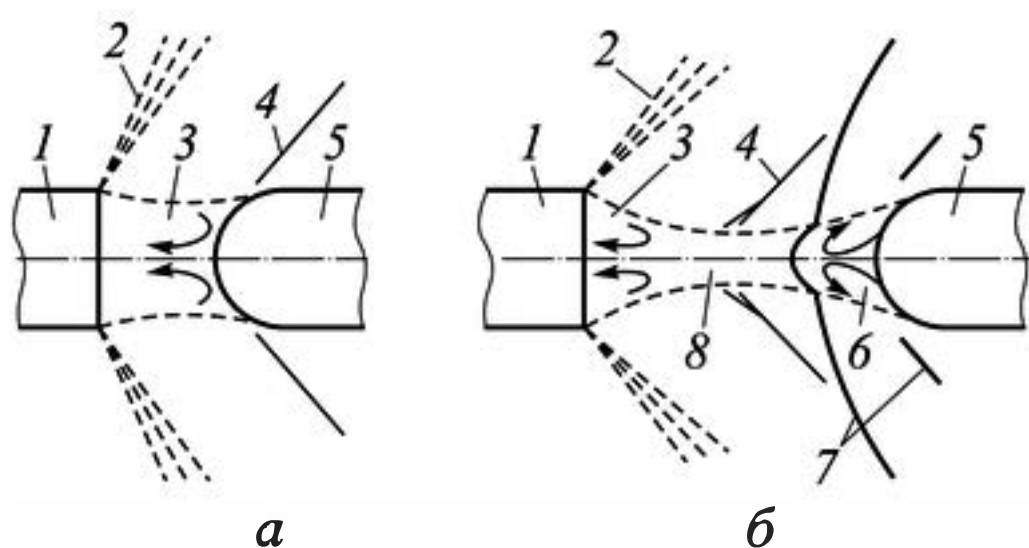


Рис. 6.34. Свободные каверны:

а — открытая; б — замкнутая; 1, 5 — обтекаемые тела; 2 — волны разрежения; 3, 6 — зоны отрывного течения; 4, 7 — скачки уплотнения; 8 — область горловины следа

тела, образованию симметричных вихрей, области отрывного течения 6 и системы скачков уплотнения 4, 7.

6.3. Особенности отрывных течений

Отрывное обтекание малых преград

Почти все ЛА на практике имеют небольшие надстройки, преграды, выступы и т. п., являющиеся источником возмущений. Будем считать преграду *малой*, если ее размеры соизмеримы с толщиной пограничного слоя. Результаты исследования обтекания таких преград применяют не только в расчетах сопротивления ЛА, связанного с переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентный, но и для определения эффективности тормозных и управляющих устройств, в частности щиткового типа, в диапазоне небольших изменений управляющих сил.

На течение около малой преграды влияют такие параметры, как скорость u у ее верхней кромки, число Re в невозмущенном потоке, профиль скорости в пограничном слое, его толщина, форма и размеры выступа. В условиях ламинарного обтекания малых преград ($Re = (2...2,84) \cdot 10^5$) с небольшой дозвуковой скоростью возмущения распространяются на значительные расстояния как вниз, так и вверх по потоку. Так, если на плоской поверхности установлена стержневая цилиндрическая преграда, высота которой $h = (0,71...0,85)\delta^*$ (где δ^* — толщина вытеснения), то поток перед ней возмущен на расстоянии примерно $30h$, а за преградой параметры потока восстанавливаются лишь на расстоянии около $70h$. Присутствие таких малых преград, как правило, способствует переходу ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

В низкоскоростном течении плоская преграда является более эффективным турбулизатором, чем трехмерный элемент при том же значении высоты h . Рассмотрим некоторые результаты исследований обтекания двумерных малых преград-ступенек сверхзвуковым турбулентным потоком.

Распределение давления в возмущенной области течения перед уступом в первую очередь зависит от чисел M_∞ , Re , а также высоты обтекаемого уступа. Влияние высоты уступа на распределение давлений перед ним при числе Re , рассчитанном на единицу длины: $Re' = V_\infty/\nu_\infty$, показано на рис. 6.35, а. Толщина пограничного слоя в экспериментах составляла 63,5...76,2 мм, т. е. была больше

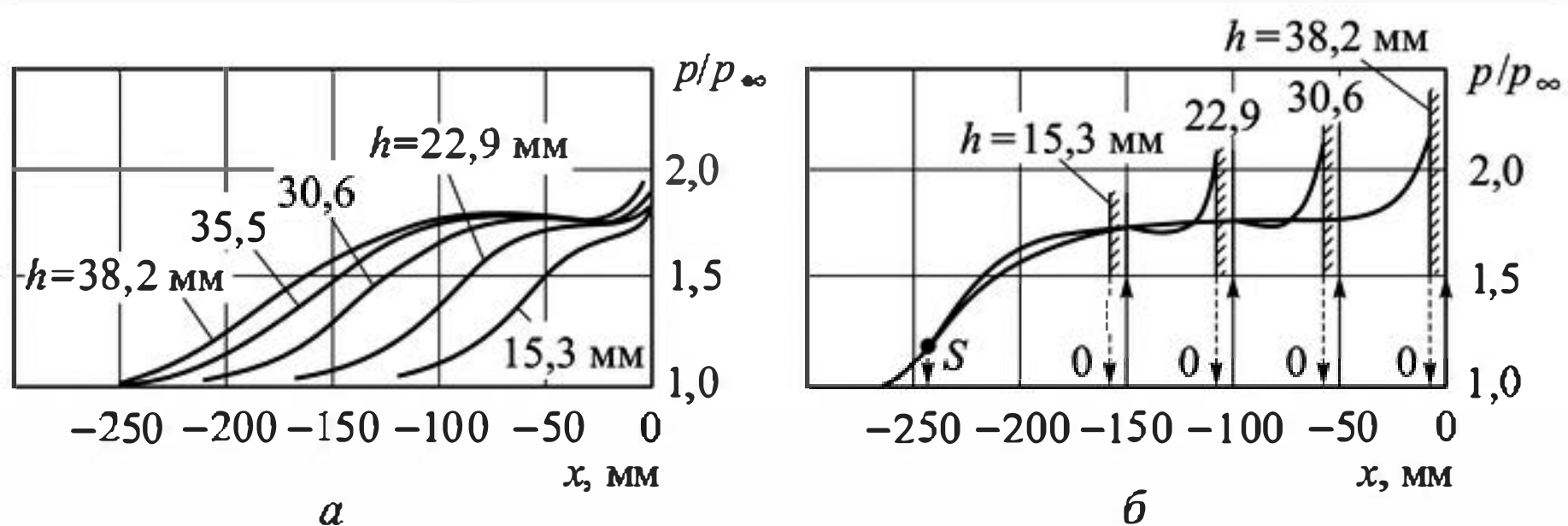


Рис. 6.35. Распределение относительного давления перед преградами различной высоты при $M_\infty = 4,9$ и $Re' = 2,64 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$ (а) и $1,32 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$ (б)

высоты преграды. На рис. 6.35, б графики распределения давления сдвинуты и привязаны к точке отрыва потока S (0 соответствует месту расположения преграды). Оказалось, что высота уступа определяет как протяженность зоны отрыва, так и давление в ней, а число Re изменяет кривизну профиля давления. При одинаковых значениях числа Рейнольдса профили давления подобны.

Для малых уступов длина зоны отрыва l_S является нелинейной функцией высоты h . При рассмотрении экспериментальной зависимости изменения параметра l_S/h от относительной высоты преграды h/δ^* при $M_\infty = 1,61$ (рис. 6.36, а) видно, что отношение l_S/h стремится к предельному значению $4h$, характерному для преград высотой $h \gg \delta$. Аналогичная зависимость наблюдается и при других числах $M_\infty > 1$.

С увеличением относительной высоты преграды повышается и давление $(p/p_\infty)_p$ в области отрывного течения, причем характер возрастания зависит от числа M_∞ (рис. 6.36, б).

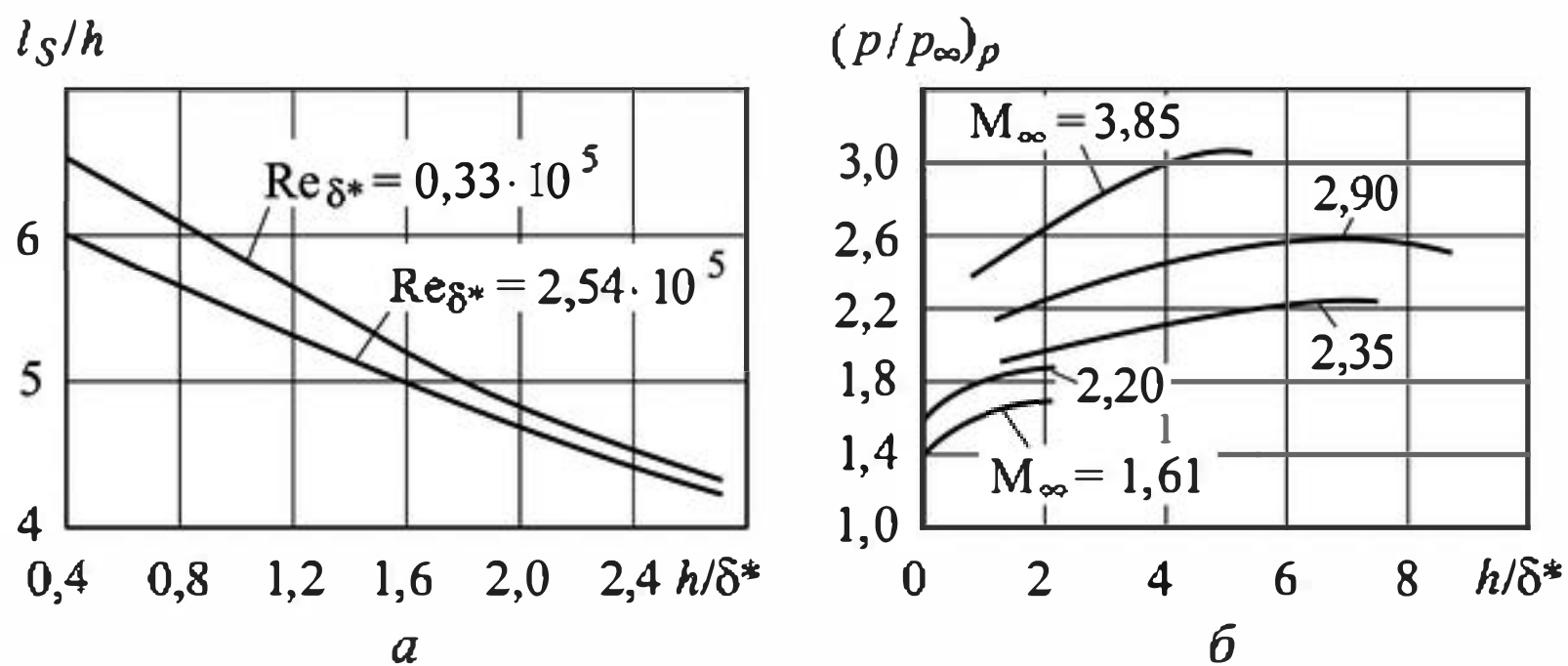


Рис. 6.36. Изменение длины зоны отрыва перед малыми уступами при $M_\infty = 1,61$ (а) и относительного давления в зоне отрыва при $Re_{\delta^*} = 1,82 \cdot 10^6$ (б)

Отрывные пузыри

Отрыв потока, обтекающего крыло с профилем большой толщины, происходит как с задней и передней кромок, так и с носовой части профиля с последующим присоединением и образованием внутреннего циркуляционного течения, так называемого *отрывного пузыря* (рис. 6.37).

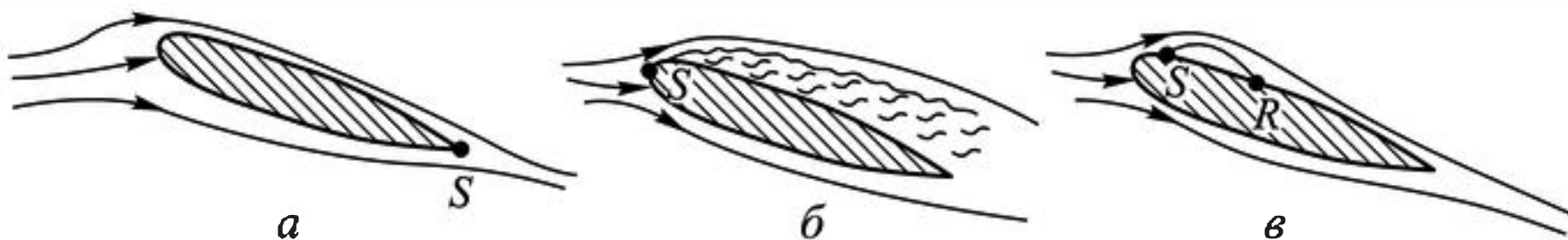


Рис. 6.37. Отрыв с задней (а) и передней (б) кромок и с носовой части профиля (в) при его вязком обтекании

Возможно существование двух видов отрывных пузырей: коротких и длинных. Размер коротких пузырей не превышает 1 % от длины хорды, а поэтому они не оказывают существенного влияния на распределение давления по профилю. Длинный пузырь по своим размерам в 2—3 раза превосходит короткий. Образование того или иного вида пузыря зависит от таких факторов, как число Re , кривизна и шероховатость поверхности, степень турбулентности и скорость потока. При увеличении угла атаки профиля происходит разрушение отрывных пузырей, приводящее либо к полному отрыву потока с подветренной поверхности, либо к отрыву потока с последующим присоединением у задней кромки.

Критерием образования длинных или коротких отрывных пузырей является число $Re_{\delta_1^*} = V_\delta \delta_1^* / \nu_1$ (V_δ — скорость потока в невязкой области; δ_1^* — толщина вытеснения пограничного слоя перед точкой отрыва). При $Re_{\delta_1^*} > Re_{кр}$ появляется короткий пузырь, а при $Re_{\delta_1^*} < Re_{кр}$ — длинный ($Re_{кр} = 400 \dots 500$).

Однако этот критерий не может быть использован для определения момента разрушения отрывного пузыря. Экспериментально установлено, что короткий пузырь разрушается, если коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{p_R - p_S}{\rho_\delta V_\delta^2 / 2} = 0,35.$$

Следовательно, короткий пузырь существует, если $Re_{\delta_1^*} > 500$ и $\bar{p} < 0,35$. Первый критерий связан с переходом к турбулентному

течению в области отрыва, второй — с максимально возможным напряжением трения в области турбулентного смешения, противодействующего перепаду давления.

При разрушении отрывного пузыря происходит резкая перестройка структуры обтекания на профиле, что сопровождается изменением аэродинамических коэффициентов и возникновением гистерезисных явлений.

Осесимметричные и плоские отрывные течения

Экспериментальные исследования отрывных осесимметричных и плоских течений позволили установить общие закономерности и различия в условиях зарождения и развития отрыва потока. На рис. 6.38 представлены графики распределения давления в возмущенных областях перед плоским клином и осесимметричной «юбкой», установленной на цилиндрической поверхности. Характер зависимостей относительного давления p/p_∞ от координаты x , отсчитываемой от места излома образующей контура, одинаков для плоского и осесимметричного течений. В обоих случаях в условиях развитого отрыва значения давления в области смешения примерно одинаковые.

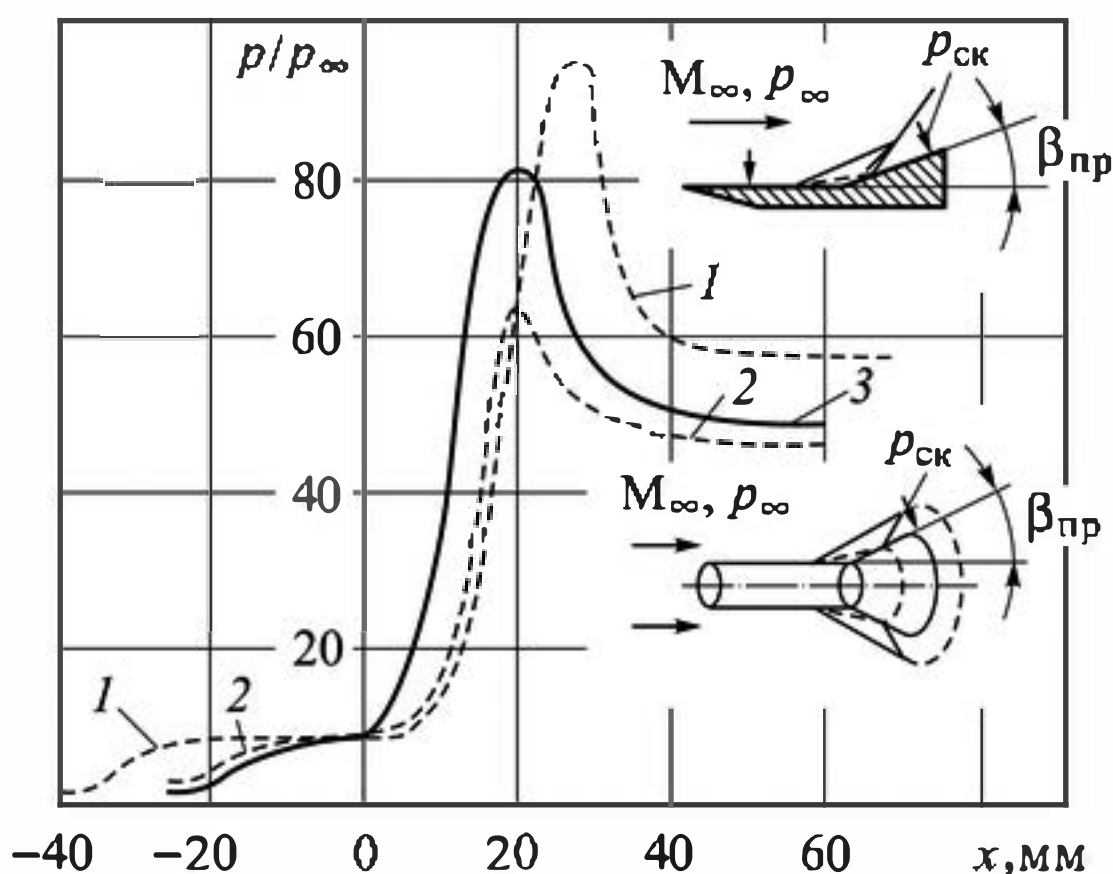


Рис. 6.38. Распределение относительного давления при плоском (1, 2) и осесимметричном (3) течениях при $M_\infty = 9,22$:

1, 2 — $\beta_{пр} = 38^\circ$ и 34° соответственно, $Re_\delta = 3,4 \cdot 10^5$; 3 — $\beta_{пр} = 40^\circ$, $Re_\delta = 2,14 \cdot 10^5$

Установлено, что для осесимметричного течения угол отклонения преграды $\beta_{пр}$, при котором возникает отрыв пограничного слоя, несколько больше, чем для плоского течения, а одинаковая интенсивность скачков уплотнения $p_{ск}/p_\infty$ перед преградой для плоского

и осесимметричного обтекания наблюдается при меньшем угле отклонения плоского потока. В этом проявляется пространственный характер осесимметричного потока.

Вопрос о возможности использования критериальных зависимостей, полученных на основе большого числа имеющихся данных для плоского отрыва, для осесимметричных течений остается пока не решенным, поскольку при осесимметричном переходном или турбулентном отрыве обнаружено существование циркуляционных течений в продольных и поперечных плоскостях, нормальных к поверхности тела.

На рис. 6.39 показана структура потока при обтекании осесимметричного тела с «юбкой» под нулевым углом атаки при сверхзвуковых скоростях. В области смещения дополнительно образуются пары вихрей с противоположным направлением вращения, что приводит к возникновению в зонах отрыва продольных линий растекания и стекания. Линия отрыва имеет сложную геометрию на поверхности цилиндрического тела.

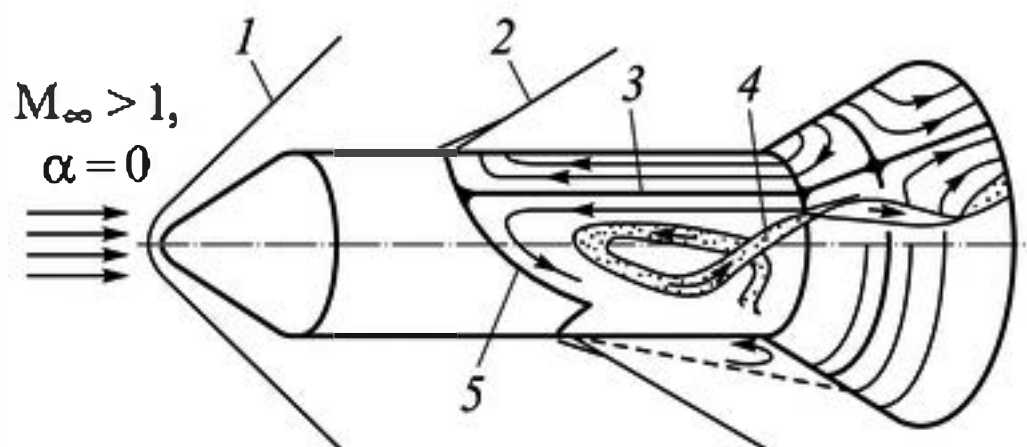


Рис. 6.39. Несимметричный отрыв при осесимметричном обтекании тела вращения:

1 – головной скачок уплотнения; 2 – скачок уплотнения; 3 – линия растекания; 4 – струйка газа в оторвавшемся потоке; 5 – линия отрыва

Наличие трехмерных эффектов в отрывных течениях проявляется также при осесимметричном обтекании обратных уступов на цилиндрических телах. Экспериментально доказано, что в этом случае не наблюдается двухмерного отрыва потока, поэтому линия присоединения является извилистой и имеет характерные для трехмерных течений так называемые седловые (С) и узловые (У) точки (рис. 6.40). Отрывное течение представляется в виде совокупности четного числа локальных отрывов с внутренними циркуляционными течениями, что вызывает периодическое изменение газодинамических параметров по периметру тела в области присоединения.

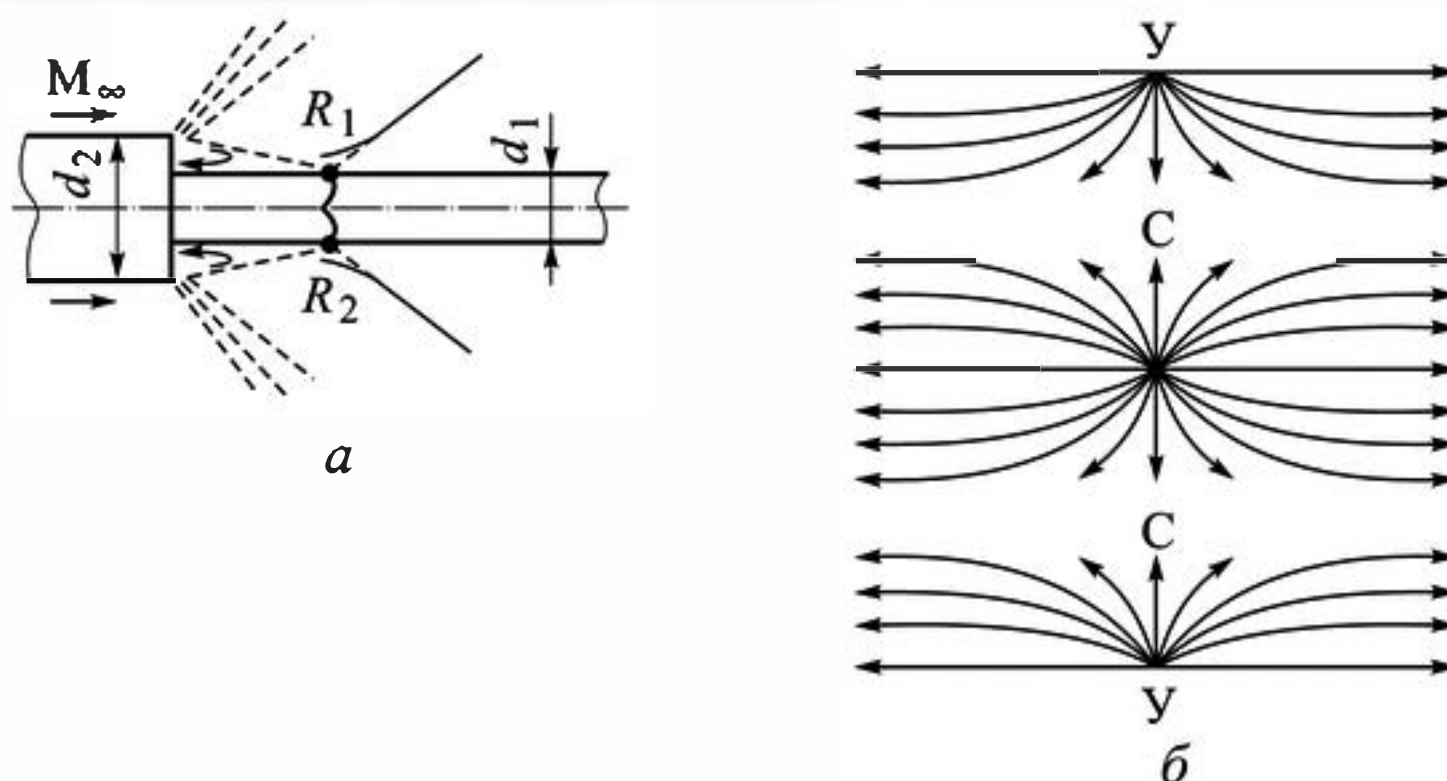


Рис. 6.40. Визуализация течения на поверхности обратного осесимметричного уступа:

a – осесимметричный обратный уступ; *б* – растекание визуализирующего состава по центральному телу в области присоединения

В зависимости от отношения диаметров тел d_1/d_2 (см. рис. 6.40) и числа M_∞ возможно существование двух, четырех и большего числа пар вихрей. Например, в диапазоне околосвуковых скоростей при $d_1/d_2 < 0,2$ оно равно двум, а при $d_1/d_2 = 0,4$ — четырем. Увеличение числа вихрей приводит к спрямлению линии присоединения R_1R_2 в поперечной плоскости.

Трехмерные отрывные течения

Обтекание ЛА носит пространственный характер. При этом параметры возникающих отрывных зон существенно отличаются от аналогичных характеристик в случае двумерного отрыва. Простейший случай трехмерного отрыва потока возможен при сверхзвуковом обтекании преград или надстроечных элементов в виде цилиндров, полусфер, параллелепипедов, а также пластин, расположенных на плоской поверхности.

На рис. 6.41 показана типичная схема течения при отрыве около преграды в виде прямоугольной пластины 7. Перед преградой образуются системы пространственных скачков уплотнения: основной (6 — след скачка уплотнения на вертикальной плоскости W симметрии течения) и скачок, вызванный отрывом потока на линии 3 (5 — его след на плоскости W), за которым течение трехмерное. Механизм возникновения отрыва потока при таком взаимодействии очень похож на случай двумерного отрыва. Однако имеются и свои особенности.

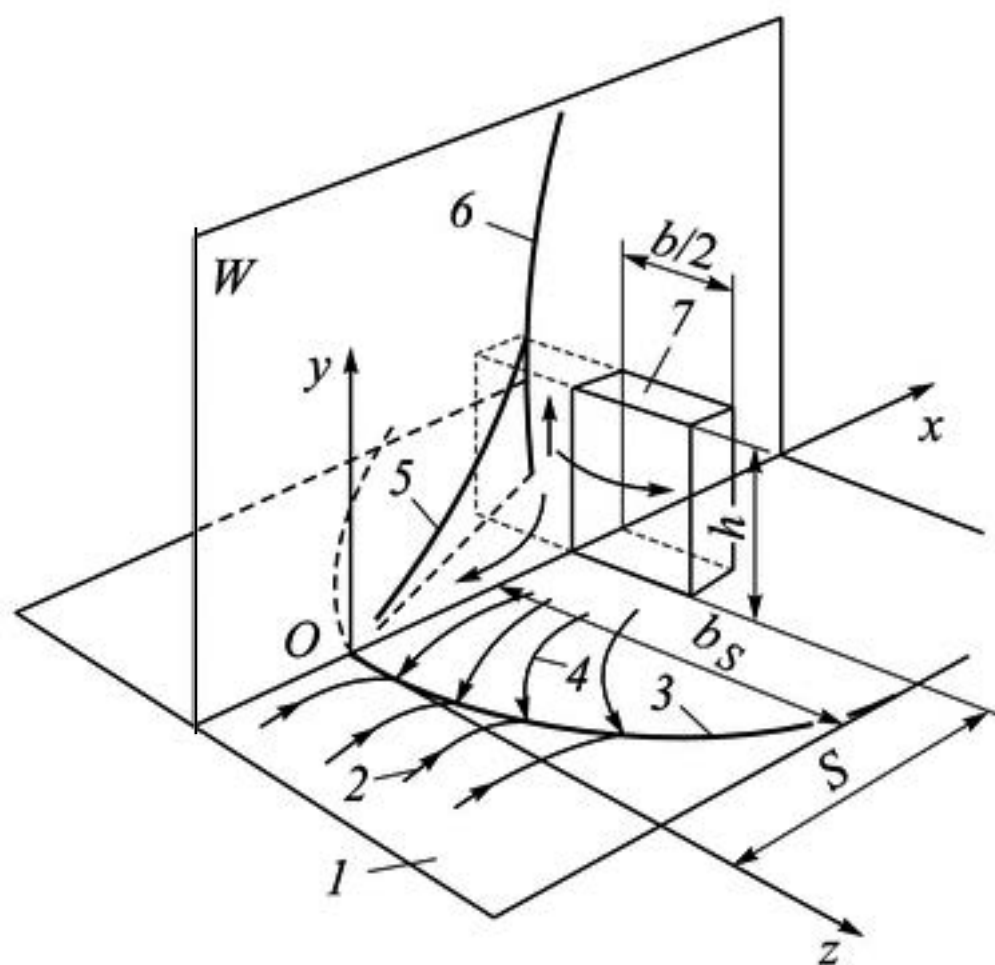


Рис. 6.41. Схема течения около выступающей плоской преграды

Во-первых, трехмерная отрывная зона нестационарна. При турбулентном отрывном течении колебания линейных размеров зон отрыва и изменения параметров в них достигают 20 %.

Во-вторых, неодинаковая интенсивность пространственного скачка уплотнения, возникающего перед преградой во внешнем потоке и взаимодействующего с пограничным слоем на обтекаемой поверхности l , приводит к появлению поперечного (вдоль оси Oz) градиента давления. Вследствие этого возникает боковое растекание, приводящее к спиралеобразным циркуляционным течениям внутри области отрыва, а также искривлению линий тока 2 и 4 возвратного течения перед линией 3 отрыва потока (см. рис. 6.41).

При турбулентном режиме обтекания возмущения от основного скачка уплотнения в области отрыва распространяются более интенсивно в направлении оси Oz , чем против потока (ось Ox). Этот факт иллюстрируют характерные изобары давления на плоскости перед сегментно-сферическим телом (рис. 6.42).

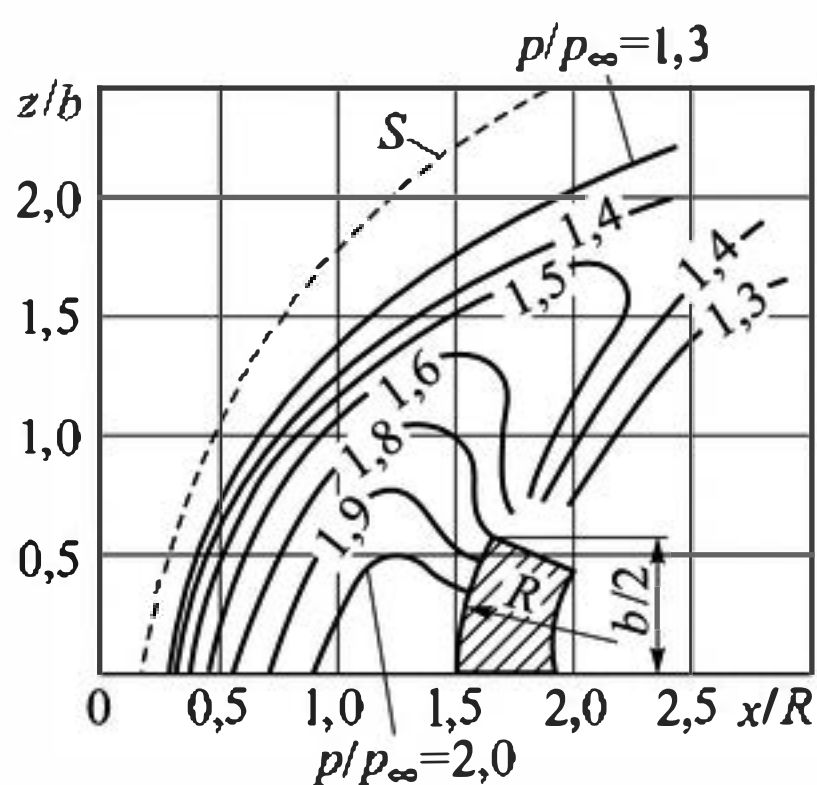


Рис. 6.42. Изобары давления на плоскости перед сегментно-сферическим телом при $M_\infty = 3,4$ (S — линия отрыва)

Экспериментально установлено, что при обтекании пространственных преград, для которых высота h превосходит ширину b (см. рис. 6.41), отношение геометрических параметров зоны отрыва b_S/l_S в широком диапазоне чисел $M_\infty = 1,5 \dots 5,5$ при турбулентном отрыве колеблется в сравнительно узких пределах — $1,7 \dots 2,1$.

Проследим, как изменяется давление при уменьшении ширины преграды, выполненной в виде торцевой прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым турбулентным потоком газа (см. рис. 6.41). Введем параметр b/h , характеризующий степень пространственности. В случае плоского обтекания ($b/h = \infty$) наблюдается явно выраженное «плато» кривой $p/p_\infty = f(x/h)$, а по мере уменьшения b/h — максимумы и минимумы (рис. 6.43). Давление в зоне отрыва при этом становится несколько ниже, чем при двумерном отрывном течении, вследствие уменьшения интенсивности скачка уплотнения, который вызывает отрыв трехмерного пограничного слоя. Минимум давления вблизи преграды, обусловленный поперечным перетеканием, для рассматриваемых режимов и конфигураций имеет место при $b/h \leq 4$ (см. рис. 6.43). Градиенты давления в точках отрыва S для преград, имеющих различную ширину b , одинаковы, а размеры области отрыва меньше, чем в случае двумерного отрыва.

Для торцевых преград конечной ширины при $M_\infty = 2,8 \dots 3,3$ установлено, что уменьшение длины $l_{S\text{тор}}$ по сравнению с $l_{S\text{пл}}$ в случае двумерного обтекания подчиняется зависимости, показанной на рис. 6.44 (заштрихованная область определяет разброс экспериментальных данных). Наибольшее изменение $l_{S\text{тор}}/l_{S\text{пл}}$ имеет место при изменении b до $h/b = 1$, дальнейшее уменьшение ширины преграды не приводит к существенным трансформациям характеристик отрывного течения.

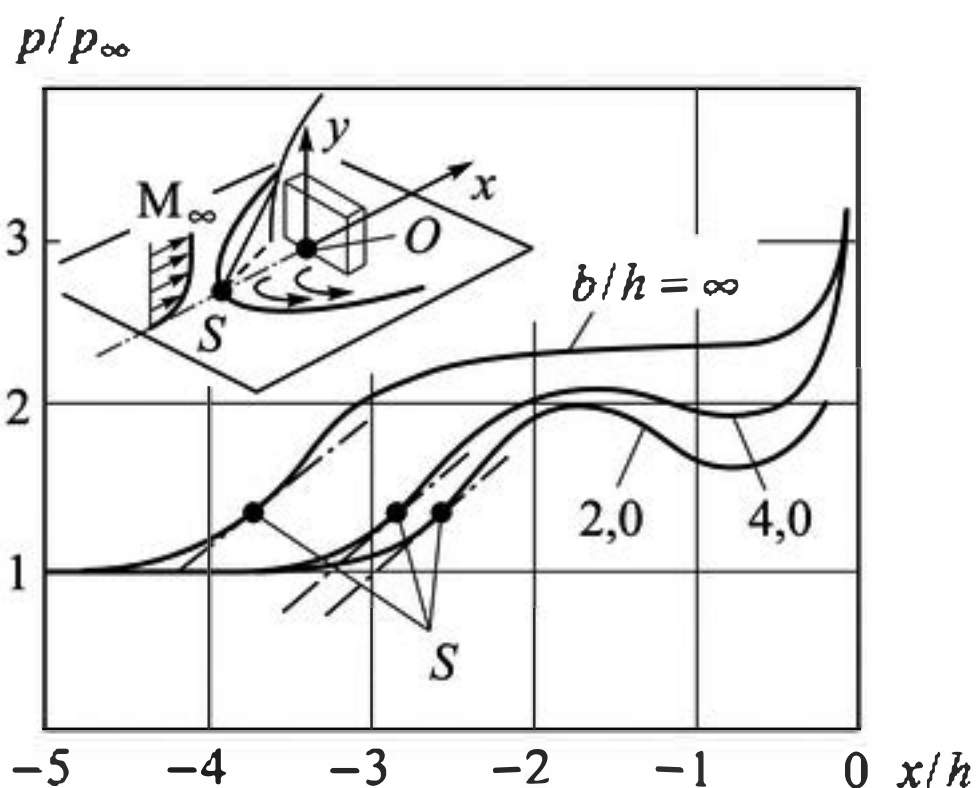


Рис. 6.43. Распределение относительного давления в плоскости симметрии течения перед преградой при пространственном отрыве ($M_\infty = 2,68$)

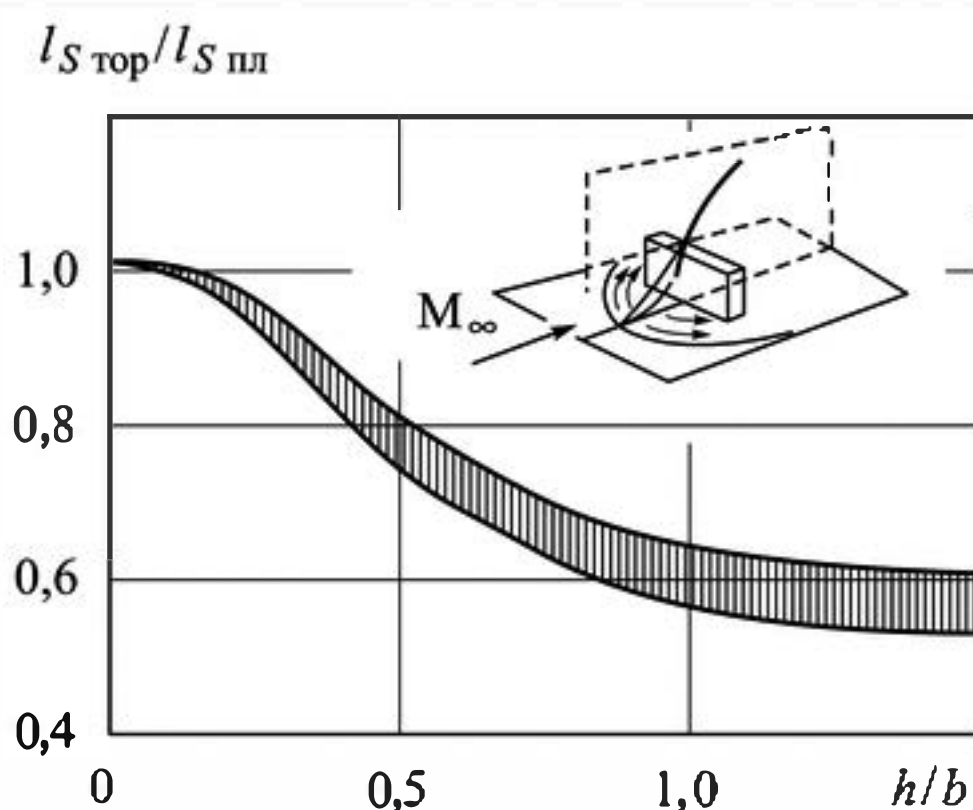


Рис. 6.44. Зависимость относительной длины отрыва от отношения h/b

В третьих, при пространственном отрыве параметры отрывного течения зависят от формы препятствия, в то время как при двухмерном отрыве его характеристики определяются только параметрами невозмущенного потока (принцип «свободного взаимодействия»). Это объясняется неодинаковой интенсивностью поперечной составляющей скорости потока (в направлении оси Oz), вызываемой различием формы преград в плане.

Рассмотрим влияние формы лобовой части пространственных преград на изменение конфигураций линий отрыва. На рис. 6.45 приведены картины поверхностных линий тока и линий отрыва, полученные нанесением масляных покрытий на обтекаемую поверхность перед препятствиями торцевой, цилиндрической и заостренной форм с различными углами стреловидности. Точка A каждой из рассматриваемых разновидностей преград совмещена с началом координат xOz . Видно, что если выступающий элемент обладает большой степенью затупления (см. рис. 6.45, в, варианты $1'$ и $2'$), то происходит отрыв пограничного слоя с образованием развитой зоны отрывного течения, ограниченной линией S (см. рис. 6.45, б, линии 1 и 2). В этом случае наблюдается сильное взаимодействие вязкого и невязкого потоков. Если же у преграды большой угол стреловидности или острая передняя кромка (см. рис. 6.45, в, варианты $4'$ и $5'$), то возможны либо отсутствие отрывного течения, либо зарождающийся отрыв со слабым вязким взаимодействием (см. рис. 6.45, б, линии отрыва 4 , 5).

Конфигурация границы линий отрыва развитого отрывного течения перед трехмерными препятствиями носит автомодельный

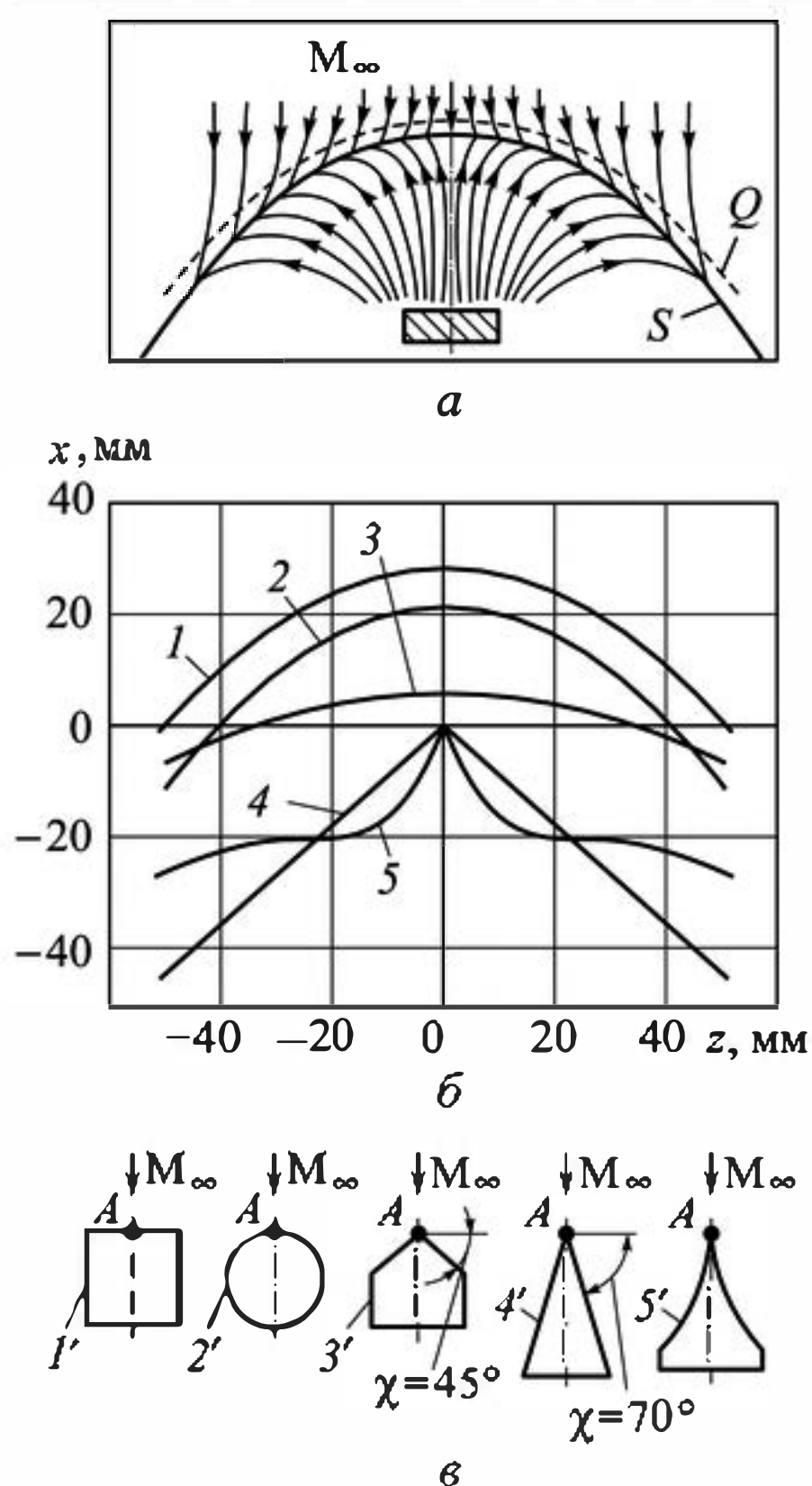


Рис. 6.45. Линии тока (а) и отрыва (б) при $M_\infty = 3,3$ перед торцевой (1'), цилиндрической (2'), клиновой (3', 4') и вогнутой (5') преградами одинаковой ширины (в) (S , Q — соответственно линии отрыва потока и начала повышения давления)

Характерные профили распределения давления перед цилиндром диаметром D и высотой $h \rightarrow \infty$ показаны на рис. 6.47. Начало координат расположено в центре основания цилиндра, а угол φ отсчитывают от линии симметрии. На основании экспериментальных данных получено распределение отношения $p_S(\varphi)/p_S(0)$ вдоль линии отрыва, которое представляет собой универсальную зависимость в интервале $0 \leq \varphi < 90^\circ$:

$$p_S(\varphi)/p_S(0) = -1,650 \cdot 10^{-5}(\varphi + 35^\circ)^2 + 1,02.$$

характер. В координатах z/b_S и x/l_S линии отрыва перед преградами различной формы достаточно хорошо группируются относительно линии, описываемой степенной зависимостью $z/b_S = x^n$. При этом геометрические характеристики l_S и b_S , определяющие размеры отрывной зоны и параметры потока в ней и необходимые для расчета аэродинамических коэффициентов, находятся в прямой зависимости от формы лобовой поверхности обтекаемой преграды.

На рис. 6.46 приведены экспериментальные данные, позволяющие сравнить значения l_S и $p_{\max I}$ (значение $p_{\max I}$ соответствует первому максимуму давления в зоне отрыва) перед торцевой плоской (индекс «тор») и цилиндрической (индекс «цил») поверхностями с различными радиусами кривизны r . Согласно результатам экспериментов, уменьшение радиуса кривизны приводит к снижению l_S и $p_{\max I}$. Предельный случай ($2r/b = 1$) соответствует обтеканию цилиндра.

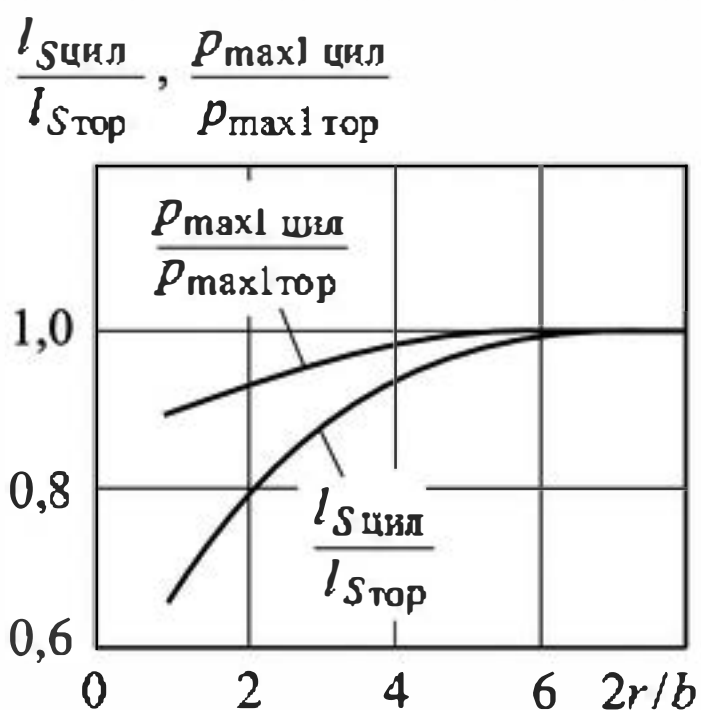


Рис. 6.46. Параметры отрывного течения перед преградами с различной формой лобовой поверхности при $M_\infty = 2,8$

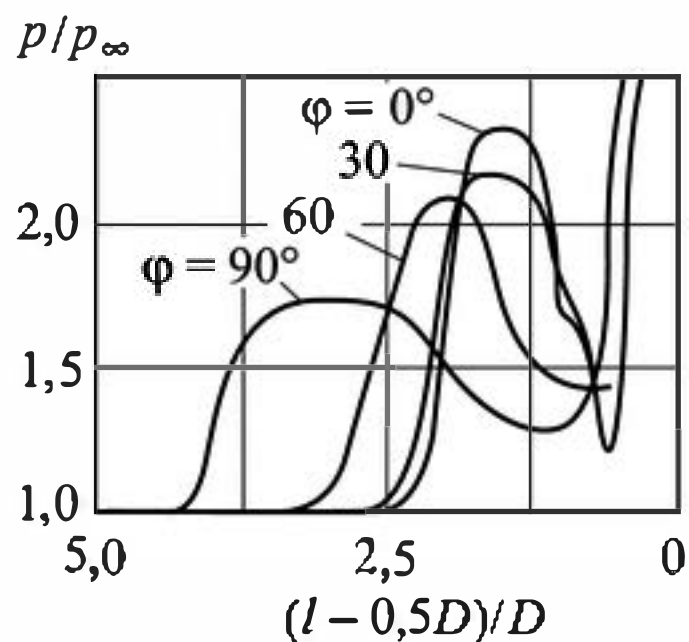


Рис. 6.47. Распределение относительного давления перед цилиндром бесконечно большой высоты при $M_\infty = 3,11$

Длина зоны отрыва перед цилиндрами при сверхзвуковых скоростях зависит от его диаметра, высоты, толщины пограничного слоя, скорости, кинематической вязкости, скорости звука, плотности, уровня турбулентного трения и в безразмерной форме выражается зависимостью

$$l_S/D = f(h/D, D/\delta, Re_D, M_\infty), \quad (6.2)$$

где Re_D — число Рейнольдса, рассчитанное по скорости набегающего потока и характерному размеру D .

Можно предположить, что зависимость (6.2) пригодна и для преград, имеющих отличную от цилиндрической форму. Эксперименты показали, что для цилиндрических препятствий большой высоты, когда $h \gg D$ и $h > \delta$, отношение l_S/D не зависит от h/D (рис. 6.48).

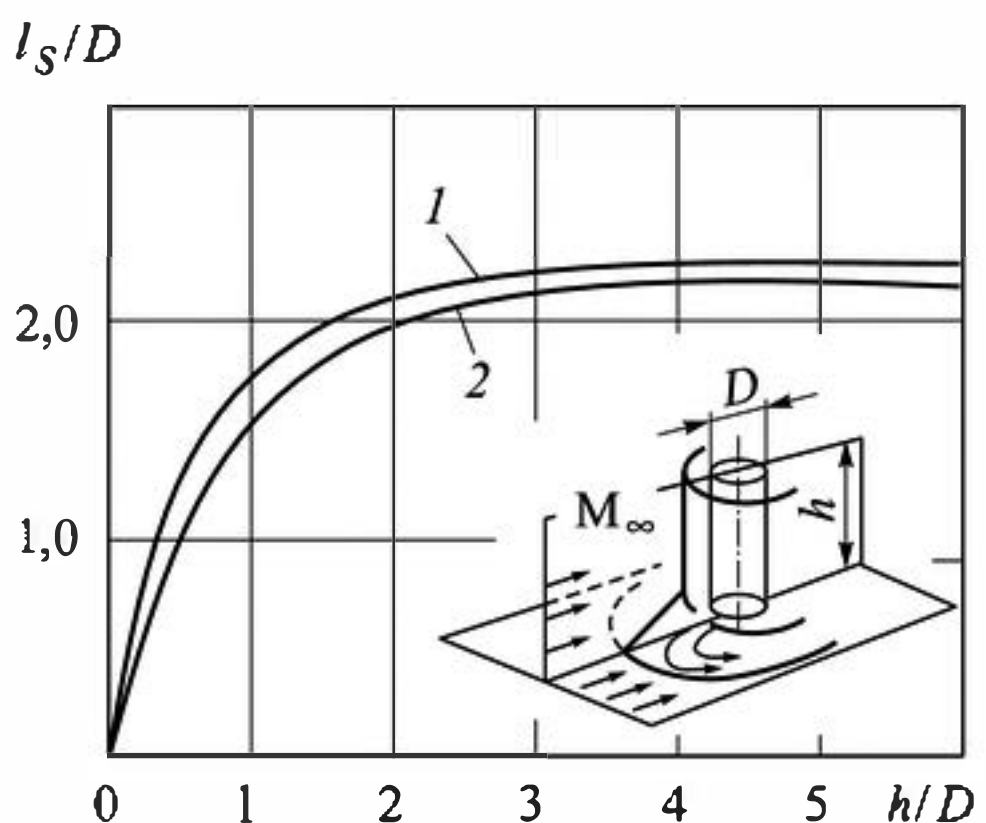


Рис. 6.48. Зависимость относительной длины зоны отрыва перед цилиндрическим препятствием от отношения h/D :

1 — $M_\infty = 3,5$, $0,42 < h/\delta < 4,77$, $3,5 \cdot 10^4 < Re_D < 1,5 \cdot 10^6$; 2 — $M_\infty = 2,5$, $0,38 < h/\delta < 4,05$, $5,65 \cdot 10^4 < Re_D < 1,5 \cdot 10^6$

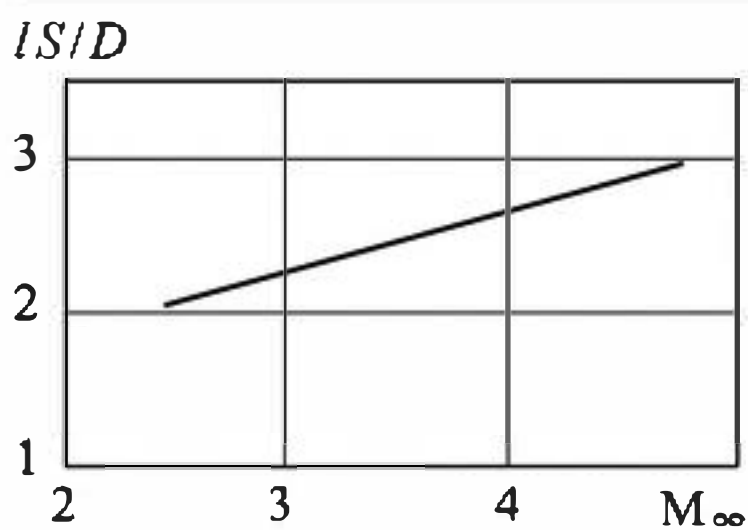


Рис. 6.49. Зависимость относительной длины зоны отрыва перед цилиндром от числа M_∞ при $h/D > 2,5$

Кроме того, определено, что на длину зон отрыва незначительное влияние оказывают число Re_D и отношение D/δ . Поэтому считают, что $l_s/D = f(M_\infty)$. С возрастанием числа M_∞ происходит близкое к линейному увеличению относительной длины зоны отрыва (рис. 6.49).

Влияние температуры обтекаемой поверхности на отрыв пограничного слоя

Изменение температуры стенки, с которой происходит отрыв потока, влечет за собой изменение параметров отрывных течений. Вблизи поверхности вследствие охлаждения стенки температура уменьшается, что вызывает некоторое возрастание плотности потока. Вместе с этим увеличивается кинетическая энергия частиц газа в пограничном слое. Поэтому для отрыва потока требуются большие возмущения, чем при обтекании теплоизолированной стенки. Кроме того, в результате возросшей кинетической энергии в пристеночном слое точка отрыва смещается ближе к месту расположения возмущающего фактора — преграды, уступа, падения скачка уплотнения.

Рассмотрим некоторые особенности в распределении давления и изменении геометрических параметров зон отрыва при принудительном охлаждении поверхности. Экспериментально установлено, что при обтекании двухмерного уступа, перед которым образуется турбулентная отрывная зона, уменьшение температуры стенки $T_{ст}$ приводит к возрастанию давления в зоне отрыва и уменьшению ее протяженности. Сравнение эпюр распределения давления при таком взаимодействии потока с преградой для теплоизолированной 1 и охлаждаемой 2 стенок показано на рис. 6.50.

Эффект уменьшения влияния передающихся вверх по потоку возмущений, характерный для холодной стенки, проявляется и при обтекании как турбулентным, так и ламинарным потоками газа наклонных поверхностей с углом преграды $\beta_{пр}$. Представленные на рис. 6.51 графики выражают явную зависимость безразмерной дли-

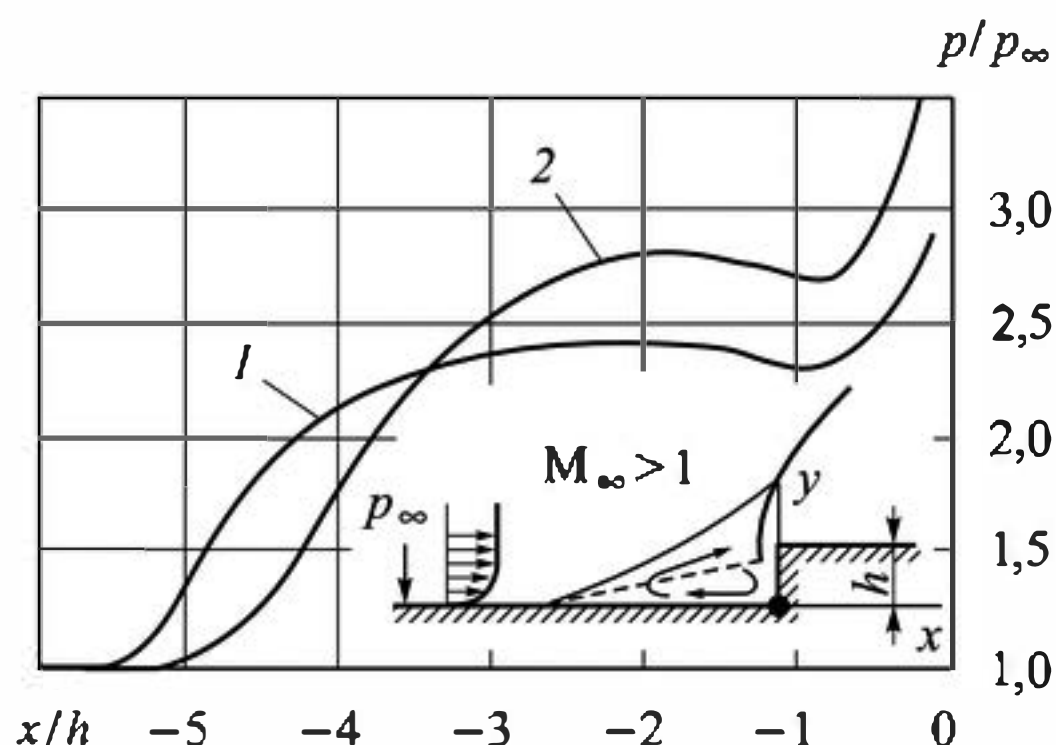


Рис. 6.50. Распределение относительного давления перед уступом при обтекании теплоизолированной (1) и охлаждаемой (2) поверхностей:

1 — $M_\infty = 2,9$, $T_{ст}/T_r = 1,0$, $Re_\delta = 5,59 \cdot 10^4$; 2 — $M_\infty = 2,89$, $T_{ст}/T_r = 0,581$, $Re_\delta = 2,90 \cdot 10^4$

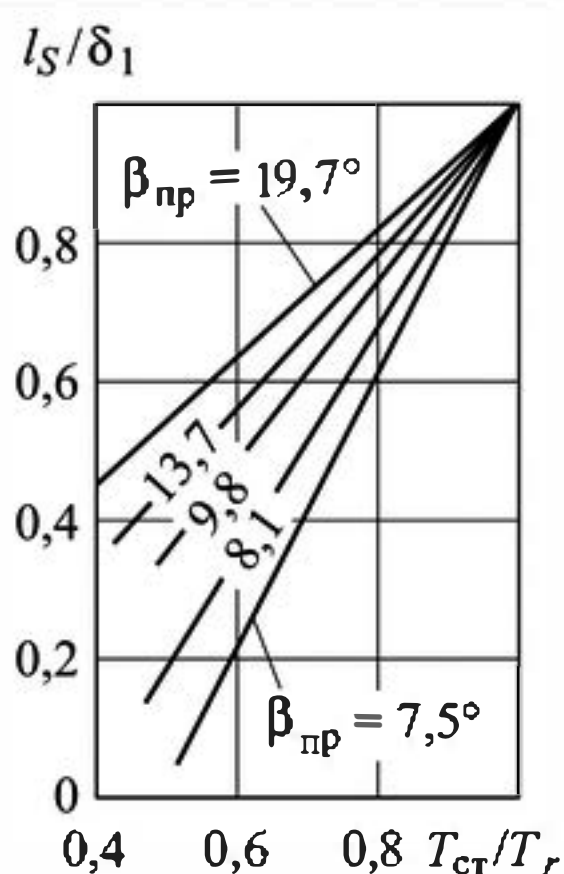


Рис. 6.51. Влияние охлаждения обтекаемой поверхности на длину зоны отрыва перед наклонной стенкой при $M_\infty = 2,9$

ны зоны отрыва l_s/δ_1 для турбулентного режима течения от относительной температуры стенки $T_{ст}/T_r$ при ее охлаждении. Для рассмотренных углов $\beta_{пр}$ приведенные зависимости близки к линейным.

Теплопередача в отрывных течениях

Теоретический и практический интерес представляет теплопередача в отрывных течениях, особенно с позиции теплозащиты от интенсивного нагрева, возникающего при гиперзвуковых скоростях движения возвращаемых в плотные слои атмосферы космических ЛА.

Имеющиеся экспериментальные данные позволяют оценить коэффициенты теплопередачи в простейших случаях отрыва потока, возникающего перед плоскими ступеньками и каверной, характерными элементами надстроек на поверхности ЛА. На рис. 6.52 показано изменение безразмерного коэффициента теплоотдачи α_x/α_{x0} (где α_{x0} — местный коэффициент теплоотдачи при отсутствии преграды, вызывающей отрыв потока) в окрестностях плоского уступа, обтекаемого невозмущенным потоком со сверхзвуковой и гиперзвуковой скоростями. Местоположение отрыва потока соответствует координате $x/h \approx 4$ (I — область отрыва потока). Результаты экспериментов показывают, что характерным для отрыва турбулент-

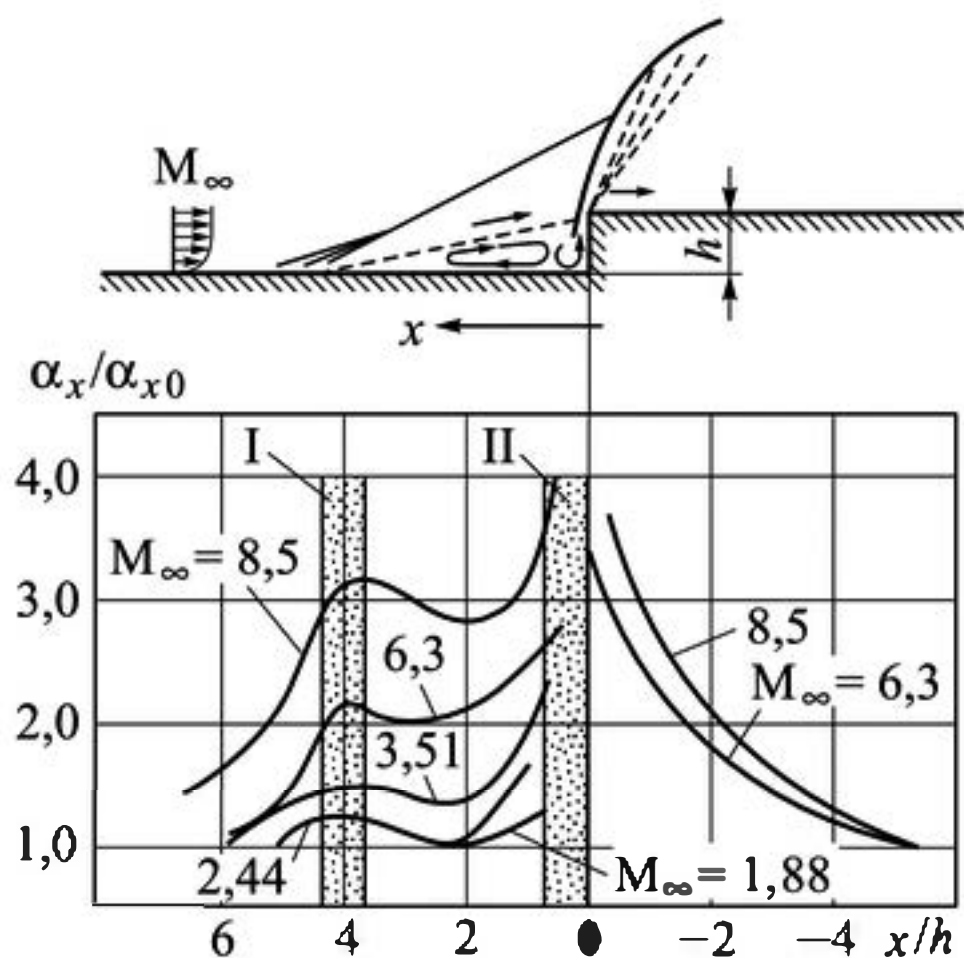


Рис. 6.52. Изменение относительного коэффициента теплоотдачи в зоне отрывного течения

ного потока является существование двух максимумов коэффициента теплоотдачи.

Первый максимум находится в пределах области I. Положение его практически не меняется с ростом числа M_∞ , тогда как относительный коэффициент теплоотдачи α_x/α_{x0} значительно возрастает. Так, при $M_\infty = 8,5$ значение α_x/α_{x0} в области отрыва более чем в 3 раза превосходит соответствующее значение при обтекании пластинки. Второй максимум коэффициента теплоотдачи наблюдается вблизи уступа в области присоединения (см. рис. 6.52, область II) и объясняется наличием критической точки на поверхности. По своему значению он превосходит первый максимум. За областью присоединения после разворота потока до горизонтального направления наблюдается резкое уменьшение коэффициента теплоотдачи, что обусловлено переходом параметров течения к невозмущенному состоянию.

Рассмотрим распределение тепловых потоков при обтекании каверны. Вся каверна будет находиться в области отрывного течения, если ее продольный размер L будет меньше суммы размеров двух отрывных зон за и перед уступами, образующими эту каверну. На рис. 6.53 представлено распределение относительных коэффициента теплоотдачи α_x/α_{x0} и теплового потока q/q_0 (где q_0 — тепловой поток к пластине без выемки для невозмущенного потока) вдоль нижней стенки открытой каверны при полностью отрывном турбулентном режиме обтекания для различных чисел M_∞ .

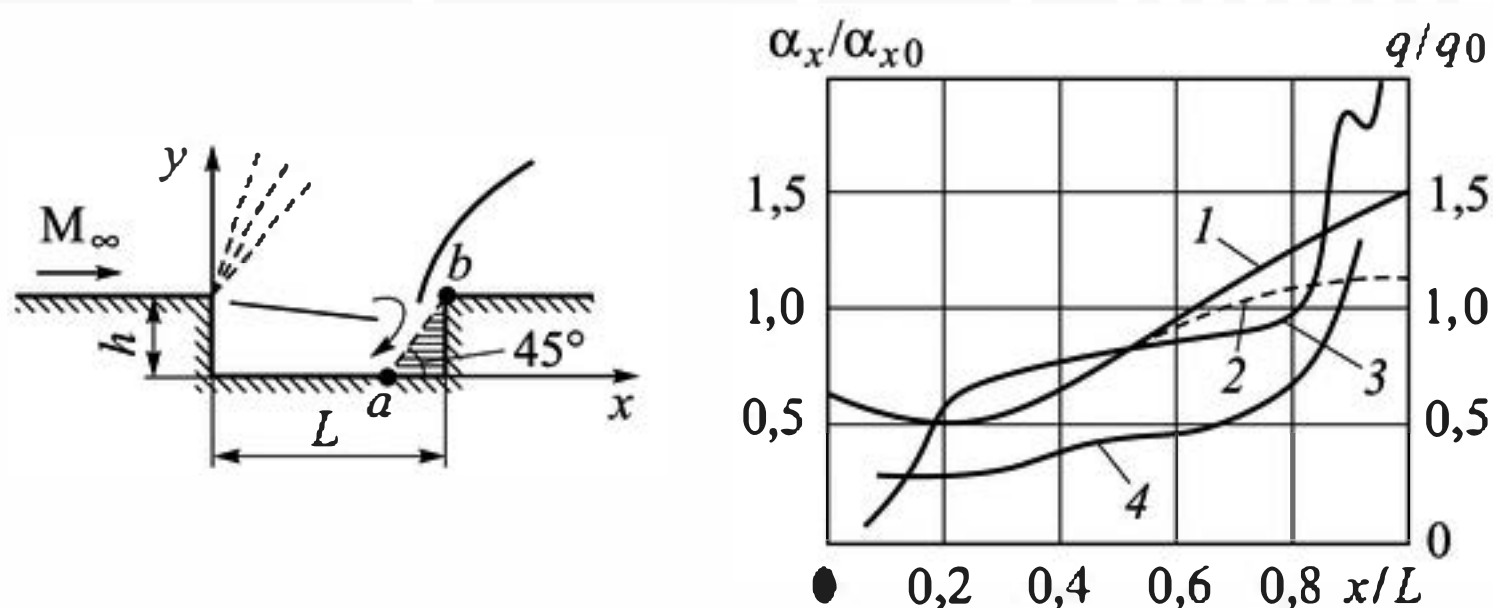


Рис. 6.53. Распределение относительных теплового потока (1, 2) и коэффициента теплоотдачи (3, 4) вдоль нижней стенки каверны: 1 – $M_\infty = 2,9$, $L/h = 5$; 2 – то же при наличии наклонной стенки ab ; 3 – $M_\infty = 6,3$, $L/h = 30$ (замкнутая каверна); 4 – $M_\infty = 6,3$, $L/h = 5$

За точкой отрыва значения α_x/α_{x0} и q/q_0 меньше, чем на пластине при тех же условиях обтекания. С приближением к задней стенке каверны значения α_x/α_{x0} и q/q_0 возрастают (кривые 1 и 4) и непосредственно перед стенкой достигают максимума. Если изменить условия присоединения, например наклонить заднюю стенку ab каверны под углом $< 90^\circ$, то можно уменьшить тепловой поток (кривая 2) в этой области. К такому же эффекту приводит увеличение толщины пограничного слоя перед каверной.

При сложном обтекании каверны, соответствующем течению в замкнутой полости, когда поток расширяется, а затем присоединяется к нижней стенке и отрывается при приближении к лежащему вниз по потоку заднему торцу каверны, относительный коэффициент теплоотдачи к нижней стенке значительно выше, чем для случаев обтекания открытой каверны (кривая 3 на рис. 6.53).

При обтекании обратных уступов значение относительного коэффициента теплоотдачи за донным срезом $\alpha_x/\alpha_{x0} < 1$ и повышается в области присоединения потока (рис. 6.54). Значение α_x/α_{x0} зависит от отношения толщины пограничного слоя перед отрывом к высоте уступа и в общем случае изменяется в преде-

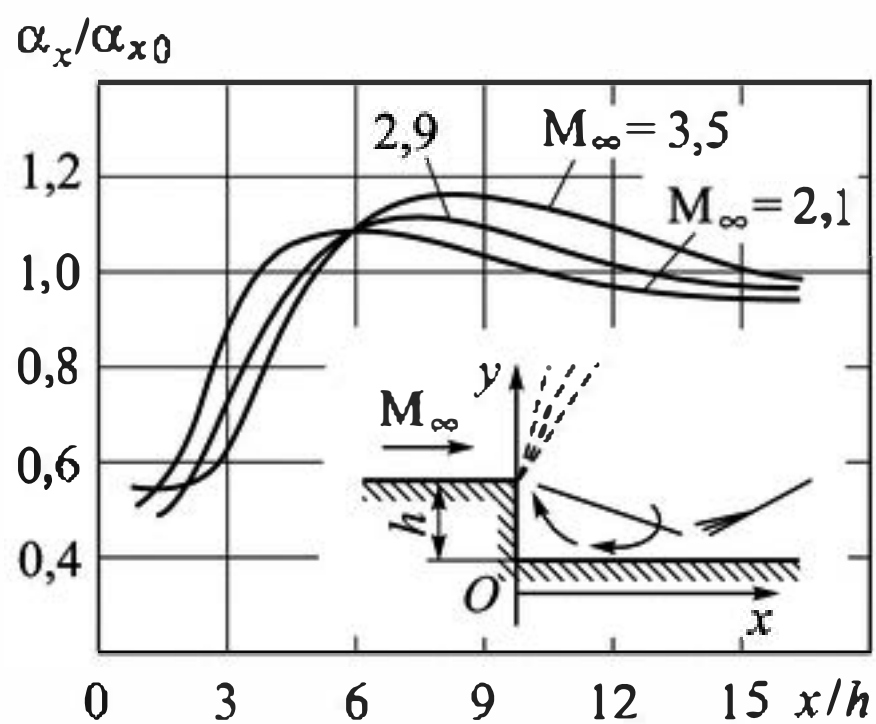


Рис. 6.54. Изменение относительного коэффициента теплоотдачи в зоне отрывного течения за обратным уступом

лах 0,2...0,6. Вниз по потоку значение α_x/α_{x0} увеличивается подобно давлению. Максимум достигается ниже по потоку за точкой присоединения, причем его значение практически одинаково как для турбулентного, так и для ламинарного потоков и слабо зависит от числа M_∞ .

Следует отметить, что изменение относительного коэффициента теплоотдачи за уступом при дозвуковом течении качественно сходно с его изменением в сверхзвуковом потоке.

Гистерезис отрывных течений

При движении ЛА происходит непрерывное изменение как кинематических траекторных параметров (скорость полета, углы атаки и скольжения), так и параметров обтекания (давление, плотность, температура). На структуру и параметры отрывных течений существенным образом влияют не только указанные величины, но и характер их изменения (уменьшение или увеличение). Это означает, что при одной и той же совокупности параметров возможны различные аэродинамические характеристики ЛА. Одной из причин этого является *аэродинамический гистерезис*, обусловленный перестройкой структуры обтекания. Вследствие относительно малого времени перестройки, сопровождающейся резким изменением давления на поверхности, всегда возникают ударные нагрузки. Это необходимо учитывать при прочностных расчетах ЛА.

Наиболее ярко аэродинамический гистерезис проявляется при трансзвуковых скоростях обтекания тел с изломами образующих (комбинации цилиндрических и конических поверхностей, тела вращения с сегментными и торцевыми затуплениями или со стержневыми надстройками), когда изменяется хотя бы один из следующих параметров: скорость невозмущенного потока, угол атаки или число Рейнольдса.

Обтекание затупленного цилиндрического тела, продольная ось которого направлена вдоль потока, как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях сопровождается образованием зон отрывных течений за лобовой частью. С изменением M_∞ структуры обтекания трансформируются. При малых дозвуковых скоростях вблизи точки излома поток отрывается с возникновением незамкнутой на поверхности тела зоны отрывного течения *l* (рис. 6.55). Этому режиму соответствует структура *I* и участок *аб* на кривой изменения давления в точке *A*.

По мере увеличения числа M_∞ в области дозвуковых скоростей зона отрывного течения *l* прижимается к цилиндрической поверх-

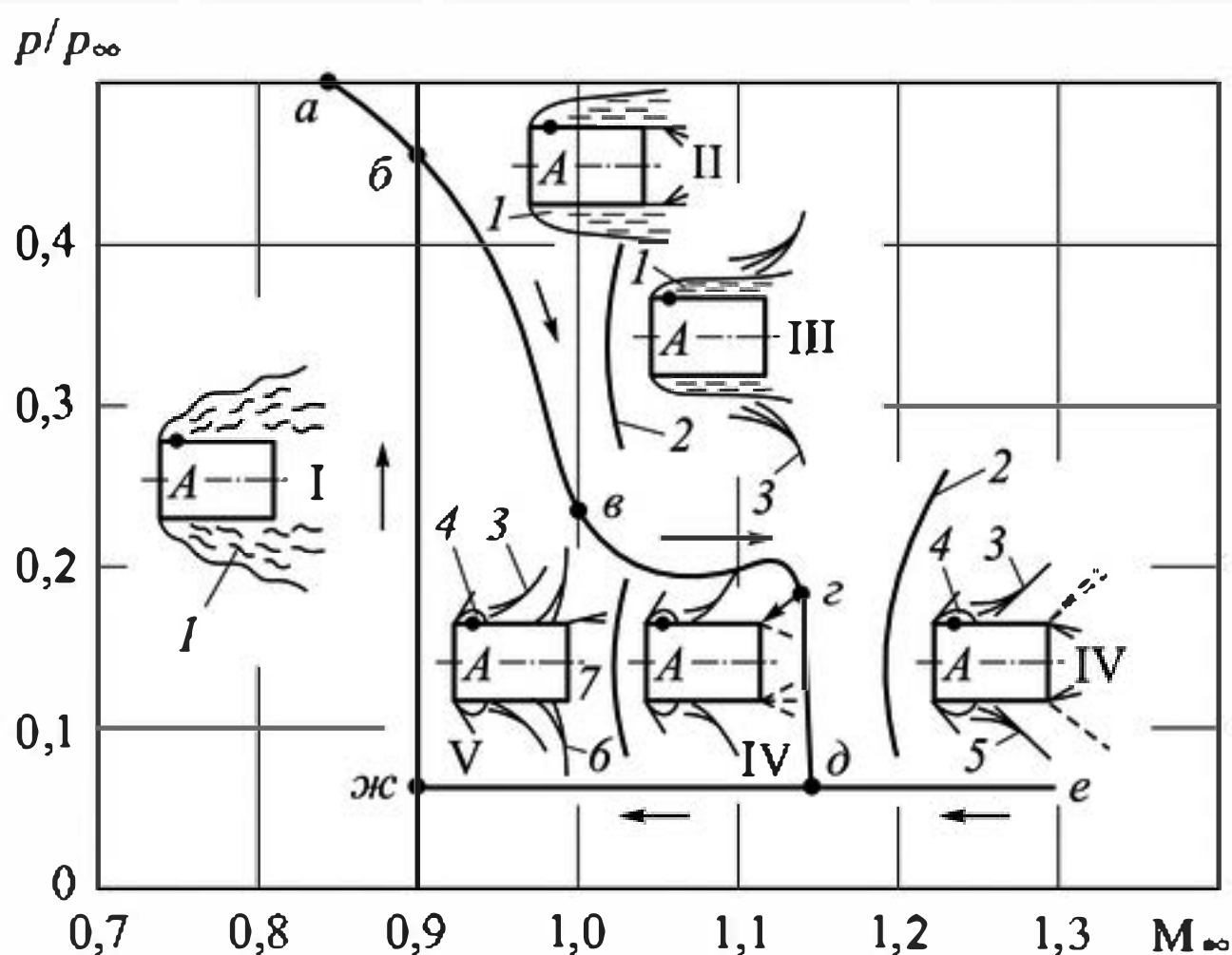


Рис. 6.55. Структуры обтекания и изменение давления на цилиндрической поверхности вблизи торца в зависимости от числа M_∞

ности, ее поперечные размеры и давление в ней уменьшаются (структура II, участок $бв$). Дальнейший рост скорости вызывает изменение во внешней части структуры обтекания. Перед телом и у внешней границы зоны отрыва появляются скачки уплотнения 2 и 3, но незамкнутость отрывного течения 1 сохраняется (структура III). Давление за точкой излома образующей выравнивается (участок $вг$).

Почти мгновенная перестройка структуры обтекания происходит при некотором критическом числе $M_\infty = M_{кр1} \approx 1,14$ (участок $гд$), когда вместо развитого отрывного течения, замыкающегося на след, появляется локальная зона отрыва 4 в носовой части цилиндра. Это сопровождается образованием вблизи обтекаемой поверхности системы скачков уплотнения 3 и 5, обусловленных присоединением локального отрывного течения и торможением внешнего потока. На рис. 6.55 этому режиму соответствует структура IV, называемая *сверхзвуковой*. Давление в зоне отрыва 4 минимально (участок $де$). Дальнейшее увеличение скорости в невозмущенном потоке не изменяет структуру обтекания ЛА

С уменьшением числа M_∞ до $M_\infty = 1$ тип структуры обтекания сохраняется, поскольку отсутствует возмущающий фактор, приводящий к перестройке структуры потока. Однако при $M_\infty < 1$ такой фактор появляется. Известно, что торможение сверхзвукового потока происходит через скачок уплотнения. Если скорость обтекания становится ниже звуковой, то местное сверхзвуковое течение

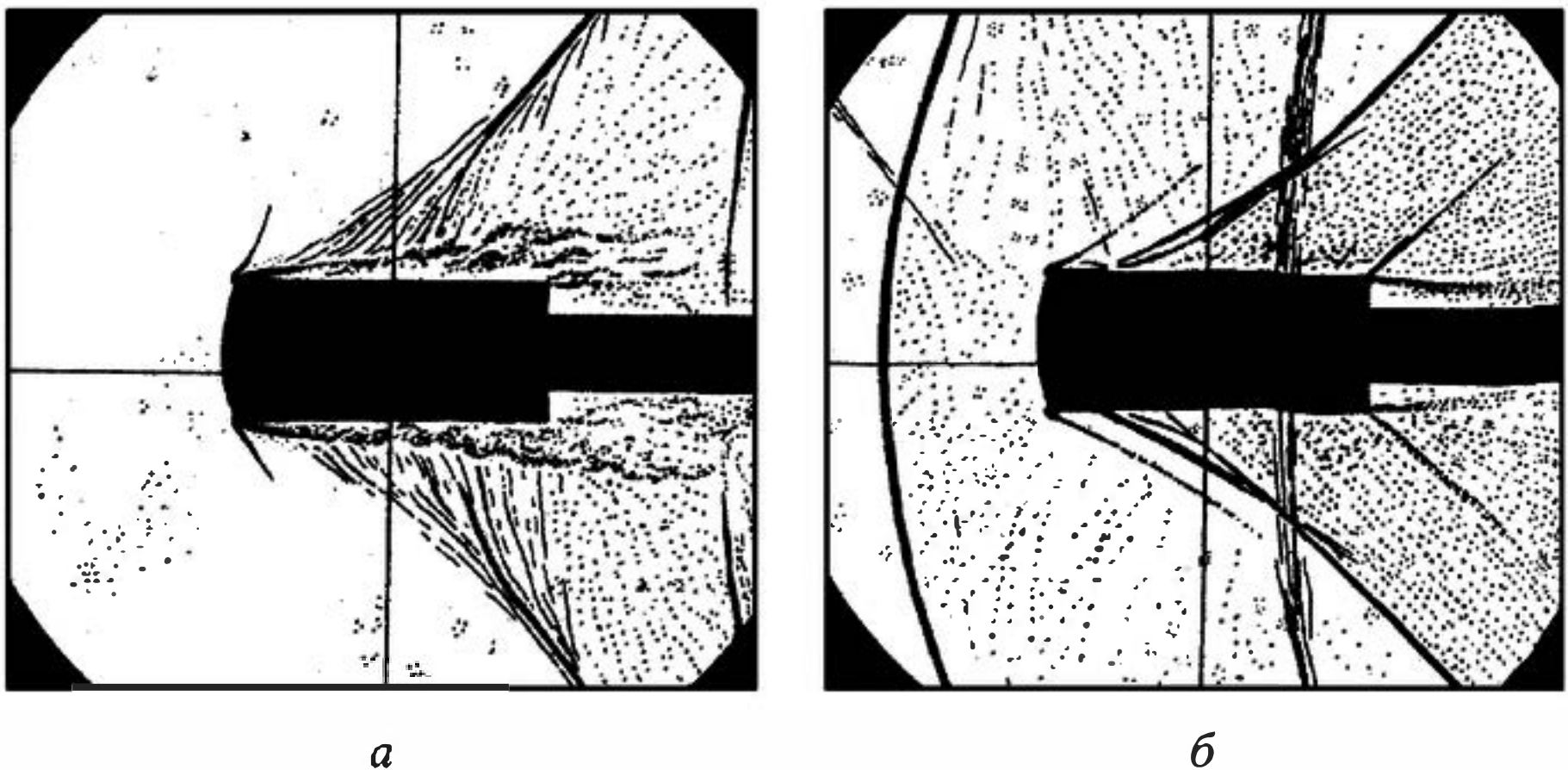


Рис. 6.56. Теневые фотографии структуры обтекания затупленного тела трансзвуковым потоком при числе $M_\infty = 1,0$ (а) и $1,2$ (б)

переходит в дозвуковое через прямой скачок уплотнения δ (структура V). Взаимодействие этого скачка уплотнения с пограничным слоем на поверхности тела приводит к его отрыву, начало которого по мере уменьшения скорости приближается к носовой части. В момент слияния циркуляционной зоны 4 и зоны отрыва 7, вызванной скачком δ , структура течения перестраивается, давление резко возрастает (участок жб) и отрыв, начинающийся в месте излома образующей, распространяется на всю поверхность цилиндра. Перестройка к такой структуре течения осуществляется при критическом числе $M_\infty = M_{\text{кр}2} \approx 0,9$, меньшем числа $M_{\text{кр}1}$. Представление о структурах течения дают теневые фотографии (рис. 6.56).

Таким образом, в диапазоне $M_\infty = 0,9 \dots 1,14$ имеют место неодинаковые структуры обтекания тела, поскольку перестройка структур течения при увеличении и уменьшении числа M_∞ происходит из различного начального состояния системы, для перехода из которого требуется дополнительная энергия, забираемая из набегающего потока.

Неоднозначность структур течения в диапазоне малых сверхзвуковых скоростей $M_\infty = 1 \dots 1,13$ проявляется также с изменением угла атаки цилиндрического тела. На рис. 6.57 показана зависимость коэффициента момента тангажа $m_z(\alpha)$, полученная экспериментально при увеличении и уменьшении угла атаки тела цилиндрической формы с сегментальным затуплением, обтекаемого сверхзвуковым потоком воздуха с $M_\infty = 1,1$. Здесь же для каждого диапазона изме-

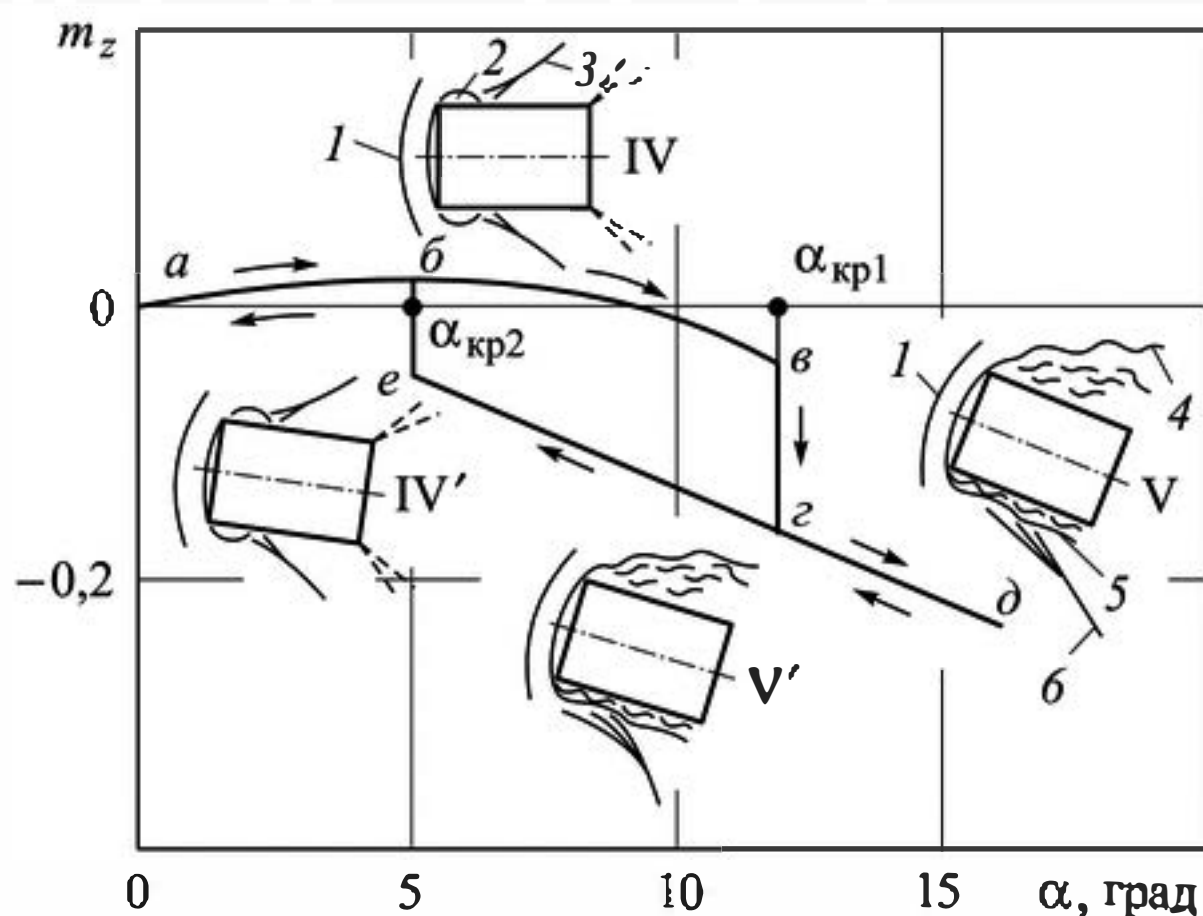


Рис. 6.57. Зависимость коэффициента момента тангажа m_z от угла атаки α при $l/d_m = 2,25$ и $M_\infty = 1,1$

нения угла атаки изображены соответствующие структуры обтекания. Видно, что для нулевых и малых значений α имеет место структура IV с головным скачком уплотнения 1, передней (кольцевой) локальной зоной отрыва 2 и скачком 3 вторичного сжатия потока. Увеличение угла атаки до 12° незначительно изменяет моментную характеристику (участок абв), структура обтекания остается прежней. При достижении некоторого критического значения угла атаки $\alpha_{кр1}$, равного для рассматриваемого случая обтекания 12° , происходит резкое изменение коэффициента момента m_z (участок вг), что обусловлено почти мгновенной перестройкой структуры обтекания. Объясняется это следующими причинами. Повышенное давление с наветренной стороны распространяется на всю цилиндрическую поверхность, включая и подветренную. Для углов атаки $\alpha < \alpha_{кр1}$ распространяющиеся возмущения не способны вызвать отрыв с подветренной стороны. Если $\alpha \geq \alpha_{кр1}$, то происходит слияние локальной отрывной зоны 2 с отрывом на подветренной поверхности. Благодаря существованию кольцевого отрывного течения возмущения распространяются на наветренную поверхность, что приводит к образованию развитого отрывного течения 4 и 5 вокруг всей поверхности (структура V). Скачок б вторичного сжатия становится несимметричным и с наветренной стороны прижимается к внешней границе области отрыва 5. Дальнейшее увеличение угла атаки $\alpha > \alpha_{кр1}$ изменяет лишь геометрические параметры зон отрыва. На участке гд зависимость $m_z(\alpha)$ остается практически линейной.

При уменьшении угла атаки относительно исходного состояния, соответствующего структуре течения V , зависимость коэффициента момента m_z в диапазоне α до $\alpha_{кр2}$ остается непрерывной (участок de). До этих же значений угла атаки сохраняется неизменным и тип структуры обтекания V' . Угол $\alpha_{кр2}$ является вторым критическим углом атаки, приводящим к обратной перестройке отрывного обтекания в структуре течения с локальными зонами отрыва (структура IV'). Кривая зависимости $m_z(\alpha)$ из точки e скачком переходит в точку $б$, а при дальнейшем уменьшении α до нуля изменяется в соответствии с участком $ба$. Двухзначность аэродинамического момента проявляется при углах атаки $\alpha = 5...12^\circ$. Этот диапазон изменения угла α зависит также от числа M_∞ , а природа возникновения гистерезиса такая же, как в случае увеличения и уменьшения скорости невозмущенного потока.

Гистерезисные явления наблюдаются при изменении не только числа M_∞ и угла α , но и таких параметров, как число Рейнольдса, геометрические размеры выступающих элементов. На рис. 6.58 приведен пример гистерезиса характеристики c_y при изменении числа

$Re_d = V_\infty d / \nu_\infty$ (d — диаметр тела) при сверхзвуковом обтекании сегментно-конического тела вращения.

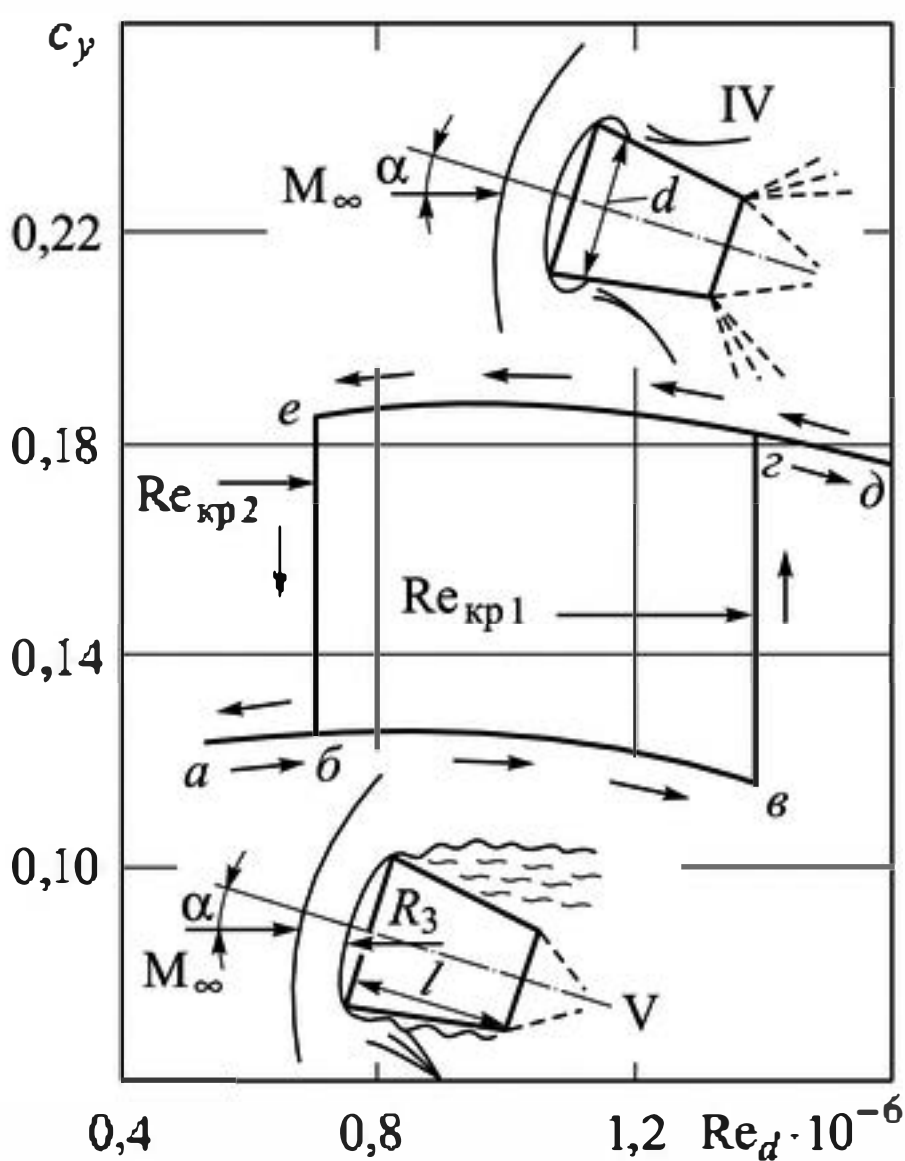


Рис. 6.58. Зависимость коэффициента нормальной силы c_y от числа Re_d при сверхзвуковом обтекании сегментно-конического тела при $M_\infty = 1,8$; $\alpha = 9^\circ$; $l/d = 1,0$; $R_3/d = 1,18$

Если тело установлено под углом атаки и число Re_d мало, то поток отрывается в области сопряжения сферической и конической поверхностей, образуя развитую зону отрывного течения (структура V). Этот режим соответствует ламинарному отрыву. Коэффициент нормальной силы c_y изменяется в соответствии с участком нижней ветви $абв$ кривой на рис. 6.58. С увеличением числа Рейнольдса пограничный слой турбулизируется и его энергия становится достаточной, чтобы преодолеть возмущения, обусловленные углом атаки. Структура течения

при некотором критическом числе $Re_{кр1}$ перестраивается к типу IV с образованием локальных зон отрыва. Нормальная сила при этом резко возрастает. Последующее увеличение числа Re_d не изменяет структуры течения. Обратная перестройка обтекания происходит при числах $Re_{кр2} < Re_{кр1}$, что также определяется различным требуемым уровнем энергии для выведения системы с развитым отрывом в состояние с локальным отрывом, и наоборот.

Рассмотренные случаи возникновения гистерезисных явлений соответствовали стационарным режимам обтекания. В условиях нестационарных течений (например, при дополнительных колебаниях) следует учитывать влияние частоты, амплитуды и положения центра вращения ЛА на его аэродинамические характеристики.

6.4. Определение параметров в характерных областях отрывных течений газа

Течение в области отрыва

Определить параметры отрывных течений, включая нахождение точки отрыва, положение разделяющей линии тока и характеристик потока в области присоединения, можно в результате численных решений соответствующих систем уравнений. Однако сложность структуры течения в области отрыва (в особенности в диапазоне транс- и сверхзвуковых скоростей) вызывает большие математические трудности, не позволяющие пока широко использовать такой подход при решении практических задач. Это и определило появление значительного количества приближенных методов, основанных на применении эмпирических и полуэмпирических зависимостей.

Ламинарный пограничный слой при дозвуковом отрыве более доступен для математического анализа, чем турбулентный, и характеристики отрывных течений могут быть найдены с большей точностью.

Одним из первых методов определения места зарождения отрыва несжимаемого потока был *метод Польгаузена*, который послужил основой для других, более эффективных методов. Цель его — нахождение критериальной зависимости, соответствующей условиям отрыва. В основе метода лежит выбор многочлена, аппроксимирующего профиль скоростей в пограничном слое и удовлетворяющего определенным граничным условиям.

В общем случае изменение скорости в пограничном слое можно представить полиномом вида

$$V_x/V_\delta = a\bar{y} + b\bar{y}^2 + c\bar{y}^3 + d\bar{y}^4, \quad (6.3)$$

где $\bar{y} = y/\delta$; a, b, c, d — коэффициенты, определяемые из граничных условий.

На обтекаемой поверхности, когда $y = 0$, скорость $V_x = V_y = 0$. Тогда из уравнения движения, записанного для модели двухмерного вязкого течения, следует:

$$\nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -V_\delta \frac{\partial V_\delta}{\partial x}.$$

На внешней границе пограничного слоя, когда $y = \delta$, скорость $V_x = V_\delta$ и производные

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = 0.$$

Этим граничным условиям соответствуют следующие значения коэффициентов:

$$a = \frac{12 + \lambda}{6}; \quad b = -\frac{\lambda}{2}; \quad c = -\frac{4 - \lambda}{2}; \quad d = \frac{6 - \lambda}{6},$$

где $\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{\partial V_x}{\partial x}$ — безразмерный параметр.

Подставляя эти значения в уравнение (6.3), получаем

$$\frac{V_x}{V_\delta} = \frac{12 + \lambda}{6} \bar{y} - \frac{\lambda}{2} \bar{y}^2 - \frac{4 - \lambda}{2} \bar{y}^3 + \frac{6 - \lambda}{6} \bar{y}^4.$$

В точке отрыва должно выполняться условие $\tau_{ct} = 0$, т. е.

$$\left. \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \text{для которого } \lambda_s = -12.$$

Для определения координаты x_s точки отрыва, отсчитываемой от начала зарождения пограничного слоя, необходимо решить уравнение

$$\delta^2 \frac{\partial V_\delta}{\partial x} = -12\nu. \quad (6.4)$$

Более точную зависимость, основанную на результатах численных расчетов, предложил Л.Г. Лойцянский (см. гл. 5). С помощью

выражения (5.43) можно определить условия зарождения отрыва на криволинейной поверхности, например на профиле.

Турбулентный пограничный слой не поддается строгому теоретическому расчету, поскольку механизм турбулентности полностью еще не изучен. Поэтому критерии отрыва основаны, как правило, на экспериментальных данных. Для определения координаты точки отрыва несжимаемого двухмерного турбулентного потока используют эмпирическую формулу для местного коэффициента трения:

$$c_{fx} = 0,246 \cdot 10^{-0,678H} \text{Re}_{\delta^{**}}^{-0,268}, \quad (6.5)$$

где $H = \delta^*/\delta^{**}$.

Положение точки отрыва находят следующим образом. По соотношению (6.5) вычисляют зависимость c_{fx} от координаты x (участок AB на рис. 6.59). Путем экстраполяции c_{fx} (участок BC) получают значение x_S , для которого $c_{fx} = 0$, что соответствует точке отрыва потока.

Большой интерес представляет полуэмпирический подход к определению давления в областях как ламинарного, так и турбулентного отрыва в сверхзвуковом потоке.

Уравнение движения газа в пограничном слое до точки отрыва в направлении оси Ox (плоское течение) имеет вид

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

а на обтекаемой поверхности ($y = 0, V_x = V_y = 0$) –

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{y=0} = \frac{\partial \tau_{\text{ст}}}{\partial y}. \quad (6.6)$$

Для области взаимодействия принимают простейшую модель обтекания «эффективного» тела с границей l и высотой сечения, равной толщине вытеснения $\delta^*(x)$ (рис. 6.60). Полагая кривизну этого тела небольшой (угол α мал), поток у его поверхности считают слабовозмущенным и применяют известную формулу для коэффициента давления на пластине, обтекаемой сверхзвуковым линейризованным потоком под углом $\alpha \approx d\delta^*/dx$:

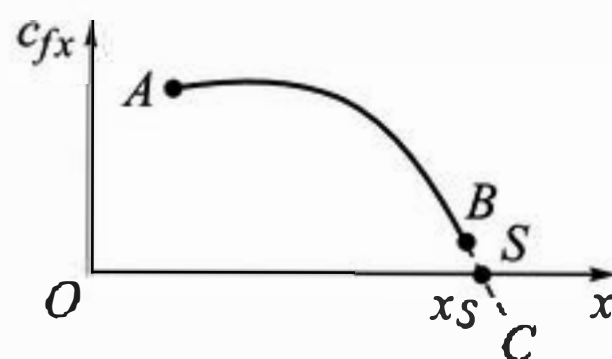


Рис. 6.59. Изменение местного коэффициента трения c_{fx} перед точкой отрыва

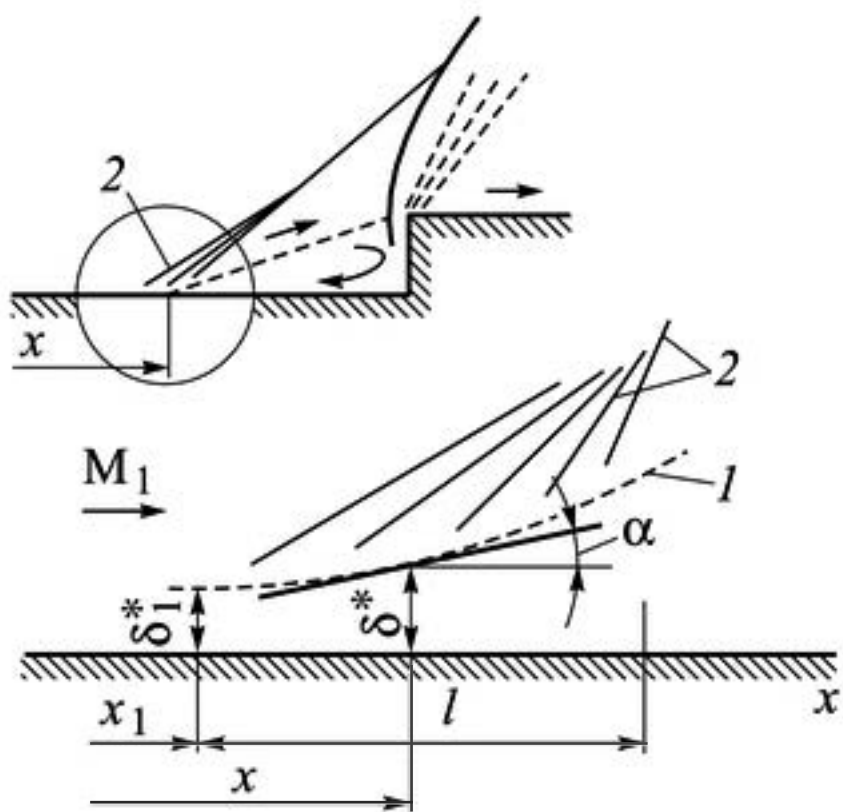


Рис. 6.60. Течение в окрестностях точки отрыва S (x_1 — расстояние от начала пограничного слоя до области взаимодействия длиной l)

параметры являются функцией только местной координаты (см. рис. 6.60):

$$\bar{x} = (x - x_1)/l.$$

Используя это условие, можно получить недостающие уравнения:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{y=0} = \frac{p_{y=0} - p_1}{x - x_1} f_1(\bar{x}); \quad \frac{\partial \tau_{ct}}{\partial y} = \frac{\tau_{ct1}}{\delta_1^*} f_2(\bar{x}); \quad (6.8)$$

$$\frac{d\delta^*}{dx} = \frac{\delta_1^*}{x - x_1} f_3(\bar{x}); \quad \frac{p_{y=0} - p_1}{p - p_1} = f_4(\bar{x}), \quad (6.9)$$

где $p_{y=0}$ — давление на обтекаемой поверхности; $f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$, $f_3(\bar{x})$, $f_4(\bar{x})$ — неизвестные функции; τ_{ct1} — напряжение трения в начале области взаимодействия.

Подставляя уравнения (6.8) в (6.6), а первое уравнение (6.6) — в (6.7), перемножая левые и правые части полученных двух выражений, а также учитывая вторые уравнения (6.9), имеем

$$\frac{p_{y=0} - p_1}{x - x_1} f_1(\bar{x}) \frac{p - p_1}{q_1} \frac{p_{y=0} - p_1}{p - p_1} =$$

$$\bar{p} = \frac{p - p_1}{q_1} = \frac{2\xi}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \frac{d\delta^*}{dx}, \quad (6.7)$$

где M_1 , q_1 — соответственно число Маха и скоростной напор перед областью взаимодействия; ξ — коэффициент, учитывающий вызванную волнами сжатия 2 неизэнтропичность течения, $\xi < 1$.

Экспериментальные исследования показали, что перепад давления p_S/p_1 или p_p/p_1 в области отрыва зависит только от параметров набегающего потока и на течения в области взаимодействия практически не сказываются внешние условия, т. е. его па-

$$= \frac{\tau_{\text{ст1}}}{\delta_1^*} f_2(\bar{x}) \frac{2\xi \delta_1^*}{\sqrt{M_1^2 - 1} \cdot (x - x_1)} f_3(\bar{x}) f_4(\bar{x});$$

$$\bar{p}_{y=0} = \frac{p_{y=0} - p_1}{q_1} = \sqrt{2 \frac{f_2(\bar{x}) f_3(\bar{x}) f_4(\bar{x}) \xi \tau_{\text{ст1}}}{f_1(\bar{x}) q_1 \sqrt{M_1^2 - 1}}}. \quad (6.10)$$

Заменяя в (6.10) неизвестные функции и коэффициент ξ одной функцией $F(\bar{x}) = \sqrt{f_2(\bar{x}) f_3(\bar{x}) f_4(\bar{x}) \xi / f_1(\bar{x})}$, получаем

$$\bar{p}_{y=0} = F(\bar{x}) \frac{\sqrt{2} \cdot c_{fx}^{1/2}}{(M_1^2 - 1)^{1/4}}, \quad (6.11)$$

где местный коэффициент трения $c_{fx} = \tau_{\text{ст1}}/q_1$ соответственно для ламинарного и турбулентного пограничных слоев определяется соотношениями

$$c_{fx\text{л}} = 0,646 \text{Re}_{x1}^{-0,5}; \quad (6.12)$$

$$c_{fx\text{т}} = 0,0578 \text{Re}_{x1}^{-0,2}, \quad (6.13)$$

в которых $\text{Re}_{x1} = V_1 x_1 / \nu_1$ — число Рейнольдса в начале области взаимодействия.

По данным замера давлений на обтекаемой поверхности в пределах области взаимодействия с помощью соотношений (6.11)–(6.13) были найдены значения $F(\bar{x})$ для ламинарного и турбулентного пограничных слоев, которые для конца области взаимодействия оказались равными соответственно $F_{\text{л}}(\bar{x}) = 1,47$ и $F_{\text{т}}(\bar{x}) = 6,0$. Это позволило получить формулы для коэффициента давления в области «плато» при ламинарном и турбулентном отрыве соответственно:

$$\bar{p}_{p\text{л}} = \frac{1,69}{\text{Re}_x^{1/4} (M_1^2 - 1)^{1/4}}; \quad (6.14)$$

$$\bar{p}_{p\text{т}} = \frac{2,04}{\text{Re}_x^{1/10} (M_1^2 - 1)^{1/4}}. \quad (6.15)$$

Зная зависимости (6.14) и (6.15), можно найти критический перепад давления

$$\frac{p_p}{p_1} = 1 + \frac{\bar{p}_p k M_1^2}{2}$$

в отрывных течениях по параметрам потока перед точкой отрыва. Это дает возможность, используя зависимости теории скачков уплотнения, по значениям k , M_1 , p_p/p_1 определять углы наклона скачка $\theta_{ск}$ и поворота потока β , а также число M_p за ним.

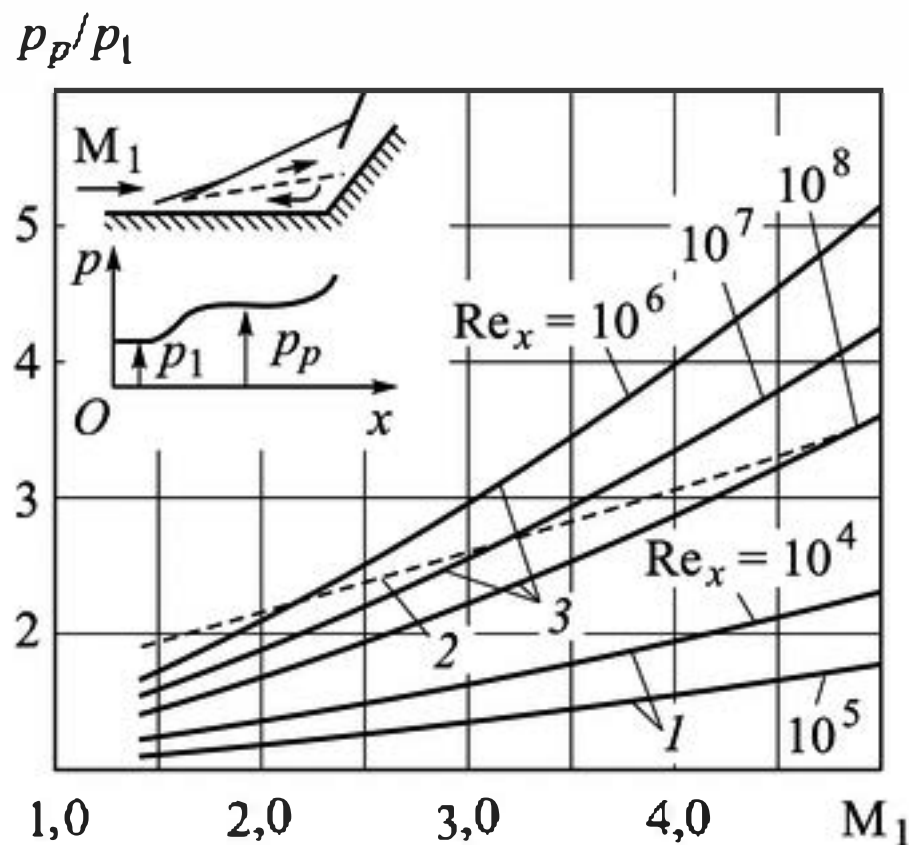


Рис. 6.61. Изменение давления в области отрывного течения в зависимости от числа Маха:

1 – расчет по формуле (6.14); 2 – то же (6.16); 3 – то же (6.15)

Для приближенных расчетов турбулентного сверхзвукового плоского отрывного течения можно применять зависимость

$$p_p/p_1 = 0,93 + 0,55M_1, \quad (6.16)$$

не учитывающую сравнительно слабое влияние числа Re_{x1} и полученную обобщением многих экспериментальных исследований при $M_1 = 2 \dots 4$. Результаты расчетов по формулам (6.14)–(6.16) приведены на рис. 6.61.

Течение в области смешения

Область смешения характеризуется, как правило, постоянным давлением. Расчет течения в ней связан с определением профиля скорости в вязком слое, а также положения разделяющей линии тока в пространстве. Решение задачи о развитии оторвавшегося пограничного слоя в области смешения может быть выполнено либо на основе численного интегрирования уравнений пограничного слоя при соответствующих граничных условиях, либо упрощено путем

сведения уравнений пограничного слоя к уравнениям, имеющим аналитические решения, либо, наконец, с помощью простых интегральных методов.

Оторвавшийся пограничный слой по своим характеристикам близок к струйному течению, для которого в первом приближении полагают, что безразмерный профиль продольной составляющей осредненной скорости является универсальным для широкого класса течений. Для описания универсальных профилей скорости подбирают приближенные аналитические зависимости. В работах Г. Шлихтинга впервые был получен профиль скорости для зоны смешения в виде

$$\varphi = V_x/V_\delta = 1 - (1 - \bar{y}^{3/2})^2,$$

где $\bar{y}$ — безразмерная координата, $\bar{y} = (y - y_{\varphi=0})/b$; b — ширина струйного слоя смешения (рис. 6.62).

Эта зависимость удовлетворяет следующим условиям на границах:

$$\bar{y} = 0, \varphi = 0 \text{ при } y = y_{\varphi=0};$$

$$\bar{y} = 1, \varphi = 1 \text{ при } |y| + |y_{\varphi=0}| = b.$$

В соответствии с интегральным методом, разработанным Г.Н. Абрамовичем, зависимость для поперечного размера слоя смешения представляется соотношением $db/dx = \text{const}$, или $b = cx$, т. е. его толщина пропорциональна удалению от начального сечения. Коэффициент c определяют экспериментально.

Рассмотрим аналитическое решение задачи о смешении потоков в области отрыва. Перед точкой отрыва имеет место установившийся поток сжимаемого газа с турбулентным пограничным слоем толщиной δ . Параметры оторвавшегося потока, например за точкой излома образующей в области смешения (см. рис. 6.62), имеют следующие значения: ρ_p , $V_p = V_\delta$, ρ_p , T_p . Требуется определить профиль скорости V_x в области смешения и положение его относительно свободной границы невязкого потока.

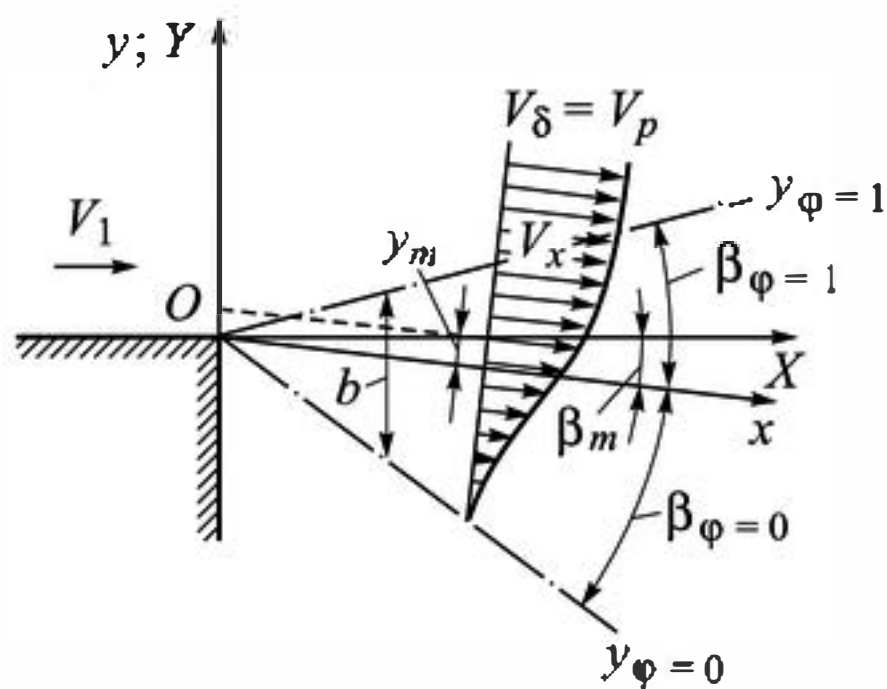


Рис. 6.62. Система координат, используемая для расчета смешения двухмерных струй

При решении дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих свободный вязкий слой, целесообразно использовать некоторую вспомогательную систему координат xOy , ось Ox которой направлена по линии тока (см. рис. 6.62). Уравнение движения с учетом вязкости имеет вид

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (6.17)$$

Упростим выражение (6.17), считая течение слабовозмущенным. Для этого запишем составляющие скорости V_x, V_y в виде $V_x = V_\delta + V'_x, V_y = V'_y$, где V'_x, V'_y — скорости в возмущенном течении, малые по сравнению со скоростью V_δ . Принимая также для области смешения $p = \text{const}$, вместо уравнения (6.17) получаем

$$(V_\delta + V'_x) \frac{\partial (V_\delta + V'_x)}{\partial x} + V'_y \frac{\partial (V_\delta + V'_x)}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}.$$

Отбрасывая в этом уравнении члены второго порядка малости, находим

$$V_\delta \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (6.18)$$

Полагая, что процесс смешения изобарический и теплообмен отсутствует, а число $Pr = 1$, вместо (6.18) имеем упрощенное уравнение движения (турбулентный аналог уравнения Озеена):

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\mu_T}{V_\delta} \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \quad (6.19)$$

где $\mu_T = 1/(2\sigma^2) \bar{x} \delta V_\delta f(\bar{x})$ — турбулентная вязкость, определяемая по упрощенной формуле Прандтля для свободной турбулентности; σ — коэффициент смешения; $f(\bar{x})$ — некоторая функция координаты $\bar{x} = x/\delta$ ($f(\bar{x}) \rightarrow 1$ при $\bar{x} \rightarrow \infty$).

Введем безразмерные параметры $\varphi = V_x/V_\delta$ и $\bar{y} = y/\delta$ и преобразуем уравнение (6.19) к новым переменным. Заменяя первую и вторую производные соответственно выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} &= \frac{\partial V_x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{V_\delta}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}, \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} &= \frac{V_\delta \partial^2 \varphi}{\partial y^2} = V_\delta \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right) = \frac{V_\delta}{\delta^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{y}^2}, \end{aligned}$$

получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} = \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{2\sigma^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{y}^2}. \quad (6.20)$$

Используя новую переменную $\xi = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{\bar{x}} \bar{x} f(\bar{x}) d\bar{x}$, можно привести уравнение (6.20) к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{y}^2}, \quad (6.21)$$

которое решается при следующих граничных условиях:

при $x = 0$

$$\varphi(0, \bar{y}) = 0, \quad -\infty < \bar{y} < 0;$$

$$\varphi(0, \bar{y}) = \varphi_2, \quad 0 < \bar{y} < 1;$$

$$\varphi(0, \bar{y}) = 1, \quad 1 < \bar{y} < +\infty;$$

при $\xi > 0$

$$\varphi(\xi, -\infty) \rightarrow 0;$$

$$\varphi(\xi, +\infty) \rightarrow 0,$$

где φ_2 — безразмерная скорость в пограничном слое перед точкой отрыва.

Решением уравнения (6.21) будет выражение

$$\varphi(\xi, \bar{y}) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\eta - \eta_p)] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta - \eta_p}^{\eta} \varphi_2 \frac{\eta - z}{\eta_p} e^{-z^2} dz, \quad (6.22)$$

где $\eta = \bar{y} \eta_p$; $\eta_p = 1/(2\sqrt{\xi})$ — параметр положения.

Если $\eta_p = 0$ (т. е. $\xi \rightarrow \infty$), то при расчетах второе слагаемое в уравнении (6.22) можно не учитывать, поскольку $f(\bar{x}) \rightarrow 1$ ($\bar{x} \rightarrow \infty$), а следовательно, $\delta \rightarrow 0$. Поэтому для течений, имеющих перед точкой отрыва малую толщину пограничного слоя, справедливо равенство

$$\varphi = (1 + \operatorname{erf} \eta)/2. \quad (6.23)$$

Учитывая принятые допущения, получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\bar{y} \eta_p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{y}{\delta} \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{\bar{x}} \bar{x} f(\bar{x}) d\bar{x}}} = \sigma \frac{y}{x},$$

т. е. при $\delta \rightarrow 0$

$$\eta = \sigma y / x. \quad (6.24)$$

При $\eta = 0$ и $y = 0$ безразмерная скорость $\varphi = 0,5$, т. е. ось Ox условно совпадает с линией тока, на которой $V_x = V'_\delta/2$.

Для нахождения положения оси Ox вводят вспомогательную систему координат OXY , ось OX которой направлена вдоль границы невязкой струи (см. рис. 6.62), определяемой как некоторая гипотетическая струя, движущаяся со скоростью $V_\delta = V_p$ и расширяющаяся при том же давлении p_p , что и действительная (вязкая) струя. Координаты x, y и X, Y связаны между собой соотношениями

$$x = X; \quad Y = y - y_m(x).$$

Для определения $y_m(x)$ составим уравнение количества движения вдоль оси Ox ($y_m(0) = 0$):

$$\int_0^\delta \rho_p V_p^2 dy - \int_0^\delta \rho_p V_x'^2 dy = \rho_p V_p^2 y_{\varphi=1} - \left(\int_{-\infty}^{y_{\varphi=1}} \rho V_x^2 dy + y_m \rho_p V_p^2 \right). \quad (6.25)$$

В левой части уравнения (6.25) записано количество движения, теряемое в связи с наличием пограничного слоя, в правой — вследствие процесса смешения. Приведем уравнение (6.25) к виду, удобному для вычислений:

$$\rho_p V_p^2 y_m = \rho_p V_p^2 y_{\varphi=1} - \int_{-\infty}^{y_{\varphi=1}} \rho V_x^2 dy + \int_0^\delta \rho V_x'^2 dy - \int_0^\delta \rho_p V_p^2 dy.$$

К правой части этого уравнения прибавим и вычтем $\int_0^\delta \rho V_x' V_p dy$:

$$\begin{aligned} \rho_p V_p^2 y_m = & \rho_p V_p^2 y_{\varphi=1} - \int_{-\infty}^{y_{\varphi=1}} \rho V_x^2 dy + \int_0^\delta \rho V_x'^2 dy - \\ & - \int_0^\delta \rho_p V_p^2 dy + \int_{-\infty}^\delta \rho V_x' V_p dy - \int_0^\delta \rho V_x' V_p dy, \end{aligned}$$

или

$$\rho_p V_p^2 y_m = \rho_p V_p^2 y_{\varphi=1} - \int_{-\infty}^{y_{\varphi=1}} \rho V_x^2 dy -$$

$$-\left[\int_0^{\delta} \rho V'_x (V_p - V'_x) dy + \int_0^{\delta} \rho_p V_p^2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \frac{V'_x}{V_p} \right) dy \right].$$

Отсюда

$$y_m = y_{\varphi=1} - \int_{-\infty}^{y_{\varphi=1}} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{V_x^2}{V_p^2} dy - \left[\int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{V'_x}{V_p} \left(1 - \frac{V'_x}{V_p} \right) dy + \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \frac{V'_x}{V_p} \right) dy \right],$$

или

$$y_m = y_{\varphi=1} - \int_{-\infty}^{y_{\varphi=1}} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{V_x^2}{V_p^2} dy - (\delta^* + \delta^{**}).$$

Принимая $\eta = \sigma y / x$ и $\delta \rightarrow 0$, получаем

$$\eta_m = \eta_{\varphi=1} - \int_{-\infty}^{\eta_{\varphi=1}} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{V_x^2}{V_p^2} d\eta.$$

Умножим числитель и знаменатель подынтегрального выражения на плотность заторможенного потока ρ_0 :

$$\eta_m = \eta_{\varphi=1} - \frac{\rho_0}{\rho_p} \int_{-\infty}^{\eta_{\varphi=1}} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V_x^2}{V_p^2} d\eta, \quad (6.26)$$

и определим отношение плотностей (при условии $p_p = p(\eta) = \text{const}$):

$$\frac{\rho_0}{\rho_p} = \frac{p_0}{p_p} \frac{T_p}{T_0} = \frac{p_0}{p_p} \left(1 - \frac{V_p^2}{V_{\max}^2} \right) = \frac{p_0}{p_p} (1 - \text{Cr}_p^2);$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{p_0}{p} \left(1 - \frac{V_x^2}{V_{\max}^2} \right) = \frac{p_0}{p_p} (1 - \text{Cr}_p^2 \varphi^2),$$

где Cr_p — число Крокко, $\text{Cr}_p = V/V_{\max}$.

С учетом проведенных преобразований выражение (6.26) примет вид

$$\eta_m = \eta_{\varphi=1} - (1 - \text{Cr}_p^2) \int_{-\infty}^{\eta_{\varphi=1}} \frac{\varphi^2}{1 - \text{Cr}_p^2 \varphi^2} d\eta.$$

Угол β_m между осями Ox и OX определяется соотношением

$$\beta_m = \operatorname{arctg} \frac{y_m}{x_m} = \operatorname{arctg} \frac{\eta_m}{\sigma} \approx \frac{\eta_m}{\sigma}.$$

Значение параметра σ , характеризующего скорость нарастания толщины вихревого слоя и определяемого по профилю скорости на оси смешения, для несжимаемого газа равно 12. Для учета сжимаемости используют поправку, зависящую от числа M на свободной границе струи, например $\sigma = 12 + 2,758M$.

Как показали исследования, профиль скорости вида (6.22) описывает не только турбулентное, но и ламинарное смешение. Различие заключается лишь в определении коэффициента σ , входящего в формулу (6.24).

Ширину области смешения, как правило, вычисляют по формуле

$$b = 2\eta_R x / \sigma,$$

в которой принимают $\eta_R = \pm 1,530$ (вместо $\pm \infty$), что отвечает значениям безразмерной скорости на верхней и нижней границах области смешения $\varphi = 0,9845$ и $0,0154$ соответственно.

К числу основных характеристик зоны смешения следует отнести скорость на разделяющей линии тока $V_{рлт}$ и положение этой линии относительно рассматриваемой системы координат. В силу предположения об автомодельности задачи относительная скорость $\Phi_{рлт}$ не зависит от расстояния до начального сечения. Положение разделяющей линии тока определяют из следующего условия: для установившегося процесса масса газа, циркулирующего в зоне отрывного течения, постоянна. Это означает, что масса газа, попадающего из невозмущенного потока в зону смешения, должна быть равна массе газа, проходящего выше разделяющей линии тока, т. е. покидающего застойную зону (рис. 6.63).

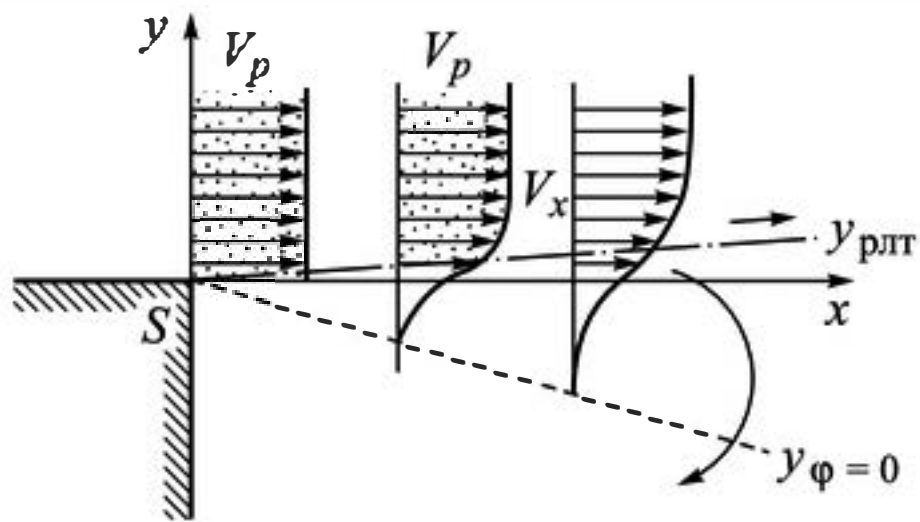


Рис. 6.63. Схема течения в области смешения

Считая, что перед точкой отрыва пограничный слой имеет бесконечно малую толщину, и пренебрегая силой трения на внешней границе зоны смешения, получаем для безградиентного течения ($p_p = \text{const}$) изменение количества движения газа в единицу времени равно нулю:

$$\dot{m}_{r1} V_p - \int_{y_{\varphi=0}}^{y_{\varphi=1}} \rho V_x^2 dy = 0, \quad (6.27)$$

где $\dot{m}_{r1}$ — масса газа, поступающего в зону смешения в единицу времени.

Из уравнения (6.27) находим

$$\dot{m}_{r1} = \frac{1}{V_p} \int_{y_{\varphi=0}}^{y_{\varphi=1}} \rho V_x^2 dy.$$

Масса газа, проходящего в единицу времени выше разделяющей линии тока,

$$\dot{m}_{r2} = \int_{y_{рлт}}^{y_{\varphi=1}} \rho V_x dy.$$

Согласно условию $\dot{m}_{r1} = \dot{m}_{r2}$,

$$\int_{y_{\varphi=0}}^{y_{\varphi=1}} \rho V_x^2 dy = V_p \int_{y_{рлт}}^{y_{\varphi=1}} \rho V_x dy. \quad (6.28)$$

После приведения (6.28) к безразмерному виду имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^2 d\eta}{1 - Cr_p^2 \varphi^2} = \int_{\eta_{рлт}}^{+\infty} \frac{\varphi d\eta}{1 - Cr_p^2 \varphi^2}. \quad (6.29)$$

Выражение (6.29) содержит одну неизвестную величину $\eta_{рлт}$, которую можно легко определить численным интегрированием. Безразмерную скорость вдоль разделяющей линии тока можно рассчитать по формуле (6.23) или представить в виде аппроксимирующих полиномов ($k = c_p/c_v = 1,4$) от числа M_p на внешней границе зоны смешения:

$$\varphi_{рлт} = \begin{cases} 0,0215 M_p^2 + 0,605, & 1 \leq M_p \leq 3,5; \\ -1,36 \cdot 10^{-4} M_p^3 + 1,08 \cdot 10^{-3} M_p^2 + 0,014 M_p + 0,623, & 3,5 \leq M_p \leq 8. \end{cases}$$

Течение в области присоединения оторвавшегося потока

Для определения параметров течения в отрывных зонах необходимо знать давление и другие характеристики в области присоединения.

В первых попытках расчета донного давления за уступами при сверхзвуковых скоростях использовали предположение, что давление торможения $p_{0\text{рлт}}$ на разделяющей линии тока равно статическому давлению $p_{\text{ск}}$ за скачком уплотнения.

Около точки присоединения ($I'_{\text{рлт}} = 0$), куда попадает разделяющая линия тока, происходит разветвление потока: одна его часть движется вниз по течению вдоль обтекаемой поверхности, а другая — поступает в циркуляционную зону, образуя возвратное течение.

Если полагать, что при торможении потока в области присоединения образуется скачок уплотнения, то именно на разделяющей

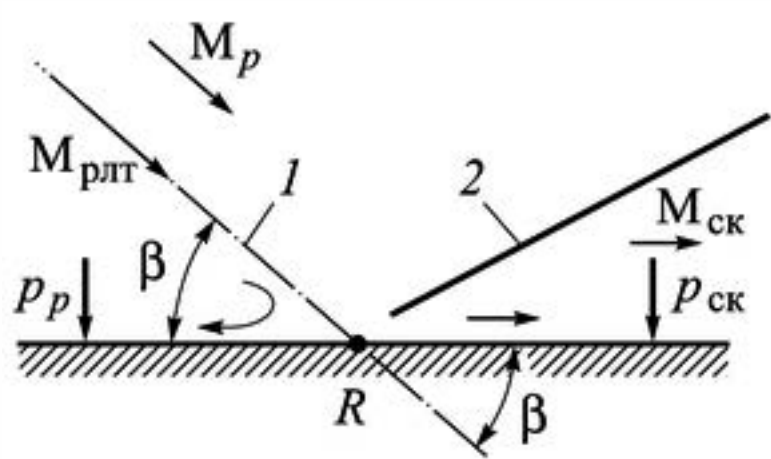


Рис. 6.64. Схема течения в области присоединения оторвавшегося сверхзвукового потока

линии тока давление торможения окажется равным противодавлению в присоединившейся части потока. Действительно, тогда в область за точку присоединения сумеет попасть лишь газ, находящийся выше разделяющей линии тока, обладающей бóльшим, чем за скачком уплотнения, давлением торможения.

Это условие присоединения известно как гипотеза Корста — Чемпена, в соответствии с которой полное давление на разделяющей линии тока I в точке присоединения R (рис. 6.64) равно давлению за скачком уплотнения:

$$p_{0\text{рлт}} = p_p \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{\text{рлт}}^2 \right)^{k/(k-1)} = p_{\text{ск}}. \quad (6.30)$$

Давление $p_{\text{ск}}$ за скачком уплотнения 2 вычисляют по формулам, известным из теории скачков уплотнения (см. § 4.2), в которых должны быть определены число M_p во внешней части оторвавшегося потока (вне области смешения) и угол β встречи его с обтекаемой поверхностью.

Условие присоединения (6.30) можно использовать не только при турбулентном, но и при ламинарном течении в области смешения. Рассчитанные по этому критерию значения давления в зоне отрыва согласуются с экспериментальными данными при $Re_x > 10^6$. При меньших значениях Re_x , когда пограничный слой перед областью отрыва значителен, расхождение теоретических значений с экспериментальными данными получается большим. То же самое наблюдается и при малых углах β , когда протяженность области присоединения велика.

Известны и другие условия присоединения. Так, на основе анализа экспериментальных данных, полученных в основном для турбулентного течения в зоне смешения, был определен некоторый критерий N (параметр Нэша), представляющий собой отношение разницы между давлением в точке присоединения p_R и в области отрыва p_p к полному перепаду давления в области присоединения:

$$N = (p_R - p_p) / (p_{ск} - p_p).$$

Зависимость величины N от числа M показана на рис. 6.65. При расчете сверхзвуковых течений принимают $N = 0,35$, поэтому давление в области присоединения определяется соотношением

$$p_R = 0,65p_p + 0,35p_{ск}.$$

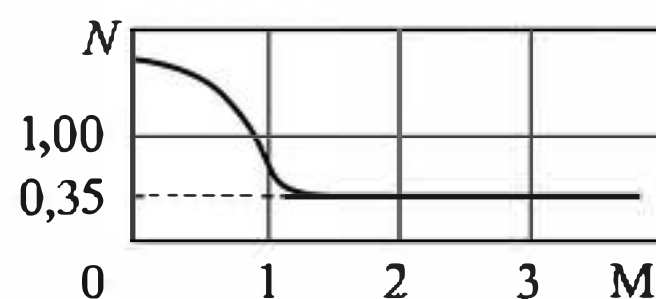


Рис. 6.65. Зависимость параметра N от числа M

6.5. Методы расчета отрывных течений

К настоящему времени сформировалось несколько направлений в расчетах отрывных течений: создание струйных и вихревых моделей невязкой жидкости; численные исследования путем решения уравнений Навье – Стокса или Рейнольдса; интегральные, асимптотические и вариационные методы расчета ламинарных и турбулентных течений, а также приближенные методы, использующие эмпирические и полуэмпирические зависимости.

Расчеты с использованием вихревой модели невязкой жидкости в основном применимы при изучении дозвуковых фиксированных отрывных течений и дают приемлемые результаты по структурам течений, а также по стационарным и нестационарным характеристикам.

Численные исследования базируются на решении уравнений Навье – Стокса и достаточно надежно описывают течения при ламинарном отрыве потока.

В аэродинамике отрывных течений получили развитие асимптотические методы, позволяющие определить параметры газа при ламинарном отрыве в случае больших чисел Рейнольдса. В уравнениях Навье – Стокса вводят малый параметр, по которому ищутся решения разлагаются в ряд с последующим «сращиванием» их в соответствующих областях потока.

К наиболее распространенным относятся интегральные методы расчета параметров отрывных течений, которые учитывают взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком, проявляющееся в смешении двух течений.

Метод разделяющей линии тока

Давление в отрывной зоне определяют методом последовательных приближений. Задавая ряд значений донного давления $p_{\text{дон}}$ при помощи газодинамической функции $\pi(M_{\text{дон}}) = p_{\text{дон}}/p_{0\infty}$ ($p_{0\infty}$ — полное давление в невозмущенном потоке), вычисляют число Маха в донной области $M_{\text{дон}}$ и число Крокко $C_{\Gamma_{\text{дон}}} = \sqrt{1 + 2/[M_{\text{дон}}^2(k-1)]^{0,5}}$. По значениям M_{∞} и $M_{\text{дон}}$ находят функцию

$$\omega(M_i) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \arctg \sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M_i^2 - 1)} - \arctg \sqrt{(M_i^2 - 1)},$$

где i соответственно равно « ∞ » и «дон», а также угол разворота потока

$$\beta = \beta_{\text{дон}} = \omega(M_{\text{дон}}) - \omega(M_{\infty}).$$

При помощи интегрального уравнения (6.29) определяют безразмерную координату $\eta_{\text{рлт}}$, безразмерную скорость

$$\Phi_{\text{рлт}} = 0,5(1 + \operatorname{erf} \eta_{\text{рлт}})$$

и числа Крокко и Маха:

$$C_{\Gamma_{\text{рлт}}} = \Phi_{\text{рлт}} C_{\Gamma_{\text{дон}}}, \quad M_{\text{рлт}}^2 = \frac{2}{k-1} \frac{C_{\Gamma_{\text{рлт}}}^2}{1 - C_{\Gamma_{\text{рлт}}}^2}.$$

Одновременно вычисляют давление торможения на разделяющей линии тока

$$p_{\bullet \text{рлт}} = p_{\text{дон}} / \pi(M_{\text{рлт}}).$$

Затем по соотношениям, известным из теории скачков уплотнения (см. § 4.2), зная $\beta_{\text{дон}}$ и $M_{\text{дон}}$, находят угол $\theta_{\text{ск}}$ и отношение давлений

$$\frac{p_{\text{ск}}}{p_{\text{дон}}} = \left(\frac{2k}{k+1} M_{\text{дон}}^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}} - \frac{k-1}{k+1} \right).$$

Сравнивая полученные значения $p_{\bullet \text{рлт}}$ и $p_{\text{ск}}$, методом последовательных приближений находят такое значение $p_{\text{дон}}$, при котором $p_{0\text{рлт}} = p_{\text{ск}}$.

Энтропийный метод

Рассмотрим двухмерные установившиеся отрывные течения, возникающие в потоке газа при внешнем обтекании органов управления или при внутренних течениях в каналах. Поскольку значения Re при этом большие, в пограничном слое перед органом управления и в области отрыва имеет место турбулентное течение. Несмотря на значительные достижения в области экспериментальных и теоретических исследований моделей пристеночной турбулентности, практические результаты их применения к отрывным течениям пока немногочисленны. Вполне приемлемой для указанных целей моделью турбулентности оказывается широко известная обычная формула Прандтля для турбулентной вязкости, содержащая одну эмпирическую константу.

Представляя всю область определения отрывного течения совокупностью подобластей при сопряженных краевых условиях, можно описать внешний невязкий поток известными аналитическими интегральными или численными методами. Благодаря исследованию отрывного течения по отдельным подобластям и применению интегрального метода удастся достаточно просто объяснить и предсказать главные свойства рассматриваемых отрывных течений и дать наглядную физическую интерпретацию получаемых результатов.

В основу расчетов параметров отрывных течений положен принцип наименьшего действия, согласно которому процессы, изменяющие состояние системы, протекают так, что функционал, называемый действием, имеет наименьшее возможное значение. Физический смысл *принципа наименьшего действия* состоит в том, что процесс осуществляется всегда таким образом, чтобы изменение действия было минимальным. Частными случаями этого принципа являются *принципы Онзагера и Пригожина*.

Согласно принципу Онзагера, при стационарных процессах в открытых системах диссипация энергии минимальна:

$$\varphi_d = \int \bar{\varphi} dW = \min,$$

где $\bar{\varphi}$ — диссипативная функция; W — объем системы.

Аналогичный вывод был сформулирован И. Пригожиным в виде *принципа минимума производства энтропии*: стационарное слабо неравновесное состояние системы, в которой происходит необратимый процесс, характеризуется тем, что скорость возрастания энтропии имеет минимальное значение при данных внешних

условиях, препятствующих достижению системой равновесного состояния:

$$\tilde{\Pi}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \tilde{\Pi}_i = \min, \quad (6.31)$$

где $\tilde{\Pi}_i$ — удельное производство энтропии.

Известно, что при движении вязкого газа вследствие трения в потоке имеет место диссипация энергии. Ввиду этого часть механической энергии необратимо переходит во внутреннюю, т. е. энтропия возрастает. Такой же процесс происходит и при торможении потока в областях отрыва и присоединения, где образуются скачки уплотнения.

Рассматривая выделенный элемент потока (например, отрывное течение), можно записать, что полное удельное производство энтропии

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\Sigma} &= \sum_{i=1}^n \tilde{\Pi}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta \tilde{D}_i}{T_i} + \sum_{k=1}^n \Delta \tilde{S}_i = \\ &= \frac{\Delta \tilde{D}_1}{T_1} + \frac{\Delta \tilde{D}_2}{T_2} + \dots + \frac{\Delta \tilde{D}_m}{T_i} + \Delta \tilde{S}_1 + \Delta \tilde{S}_2 + \dots + \Delta \tilde{S}_k, \end{aligned} \quad (6.32)$$

где $\Delta \tilde{D}_i$ — удельная диссипация энергии; $\Delta \tilde{S}_i$ — приращение удельной энтропии в единицу времени.

Каждое слагаемое в уравнении (6.32) представляет собой производство энтропии в соответствующей области течения.

Условие (6.31) может быть использовано при расчете отрывных течений.

Как было отмечено ранее, диссипация энергии обусловлена наличием трения в газе, которое главным образом проявляется в области пограничного слоя перед отрывом потока и смешения. Потери механической энергии вследствие трения можно определить в соответствии с интегральным соотношением, полученным В.В. Голубевым. В основе вывода этого соотношения лежат уравнения неразрывности и движения, записанные в дифференциальной форме для плоских и осесимметричных адиабатических стационарных слоев:

$$\frac{\partial(\rho V_x y^j)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y y^j)}{\partial y} = 0; \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 y^j) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_x V_y y^j) = -\frac{\partial}{\partial x}(p y^j) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau y^j), \quad (6.34)$$

где $j = 0$ и 1 для плоского и осесимметричного случаев течения соответственно.

Воспользовавшись произвольными весовыми функциями $f(x, y)$ и $g(x, y)$, запишем уравнения (6.33), (6.34) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V_x g y^j)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y g y^j)}{\partial y} - \rho V_x \frac{\partial g}{\partial x} y^j - \rho V_y \frac{\partial g}{\partial y} y^j &= 0; \\ \frac{\partial(\rho V_x^2 f y^j)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_x V_y f y^j)}{\partial y} - \rho V_x^2 \frac{\partial f}{\partial x} y^j - \rho V_x V_y \frac{\partial f}{\partial y} y^j &= \\ &= -\frac{dp}{dx} f y^j + \frac{\partial(\tau y^j)}{\partial y} f. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения и используя правило дифференцирования интеграла по параметру δ , находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho V_x g y^j dy - (\rho V_x g y^j)_\delta \frac{d\delta}{dx} + (\rho V_y g y^j)_0^\delta - \\ - \int_0^\delta \rho V_x \frac{\partial g}{\partial x} y^j dy - \int_0^\delta \rho V_y \frac{\partial g}{\partial y} y^j dy &= 0; \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho V_x^2 f y^j dy - (\rho V_x^2 f y^j)_\delta \frac{d\delta}{dx} + (\rho V_x V_y f y^j)_0^\delta - \int_0^\delta \rho V_x^2 \frac{\partial f}{\partial x} y^j dy - \\ - \int_0^\delta \rho V_x V_y \frac{\partial f}{\partial y} y^j dy = -\frac{dp}{dx} \int_0^\delta f y^j dy + \int_0^\delta f \frac{\partial(\tau y^j)}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Из системы уравнений (6.35), (6.36) исключаем $d\delta/dx$. Для этого в (6.35) принимаем $g = V_\delta f_\delta$, а затем вычитаем полученное уравнение из (6.36). После преобразований имеем

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho V_x (V_x f - V_\delta f_\delta) y^j dy - \int_0^\delta \rho V_x \left(V_x \frac{\partial f}{\partial x} - V_\delta \frac{\partial f_\delta}{\partial x} \right) y^j dy +$$

$$\begin{aligned}
& + f_{\delta} \frac{dV_{\delta}}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x y^j dy - \int_0^{\delta} \rho V_x V_y \frac{\partial f}{\partial y} y^j dy = \\
& = -\frac{dp}{dx} \int_0^{\delta} f y^j dy + \int_0^{\delta} f \frac{\partial(\tau y^j)}{\partial y} dy.
\end{aligned} \quad (6.37)$$

Обозначив в уравнении (6.35) $g = g_{\delta}$ и вычтя полученное выражение из аналогичного уравнения с произвольной функцией $g = g(x, y)$, получаем

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x (g - g_{\delta}) y^j dy - \int_0^{\delta} \rho V_x \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g_{\delta}}{\partial x} \right) y^j dy - \int_0^{\delta} \rho V_y \frac{\partial g}{\partial y} y^j dy = 0. \quad (6.38)$$

Если принять $f = V_x^r$, $g = V_x^{r+1}$, то уравнения (6.37) и (6.38) принимают вид интегрального соотношения Голубева:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x (V_x^{r+1} - V_{\delta}^{r+1}) y^j dy = -(r+1) \frac{dp}{dx} \int_0^{\delta} V_x^r y^j dy + \\
& + (r+1) \left[\int_0^{\delta} V_x^r \frac{\partial(\tau y^j)}{\partial y} dy - V_{\delta}^r \frac{dV_{\delta}}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x y^j dy \right],
\end{aligned} \quad (6.39)$$

где $r = 0$ для уравнения движения и 1 — для уравнения энергии.

При $r = 1$ соотношение (6.39) представляет собой уравнение энергии Лейбензона, т. е.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} 0,5 \rho V_x (V_{\delta}^2 - V_x^2) y^j dy = \frac{dp}{dx} \int_0^{\delta} V_x y^j dy - \\
& - \left[\int_0^{\delta} V_x \frac{\partial(\tau y^j)}{\partial y} dy - V_{\delta} \frac{dV_{\delta}}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x y^j dy \right].
\end{aligned} \quad (6.40)$$

Введем обозначение $D = \int_0^{\delta} 0,5 \rho V_x (V_{\delta}^2 - V_x^2) y^j dy$. Тогда уравнение (6.40) может быть представлено в виде

$$\frac{dD}{dx} = \frac{dp}{dx} \int_0^{\delta} V_x y^j dy - \left[\int_0^{\delta} V_x \frac{\partial(\tau y^j)}{\partial y} dy - V_{\delta} \frac{dV_{\delta}}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x y^j dy \right].$$

При внешнем потенциальном потоке из уравнения Бернулли получаем $dp/dx = -\rho_\delta V_\delta dV_\delta/dx$. Следовательно,

$$\frac{dD}{dx} = V_\delta \frac{dV_\delta}{dx} \int_0^\delta \rho V_x y^j dy - \rho_\delta V_\delta \frac{dV_\delta}{dx} \int_0^\delta V_x y^j dy - \int_0^\delta V_x \frac{\partial(\tau y^j)}{\partial y} dy. \quad (6.41)$$

Уравнение (6.41) упрощается, если рассматривать безградиентное течение (например, область смешения, для которой $dV_\delta/dx \approx 0$):

$$\frac{dD}{dx} = - \int_0^\delta V_x \frac{\partial(\tau y^j)}{\partial y} dy. \quad (6.42)$$

Величина D в равенстве (6.42) означает часть механической энергии, теряемой в вязком потоке вследствие понижения скорости течения в нем по сравнению со скоростью потенциального течения.

Для струйных течений можно принять, что при $y = 0$ и $y = \delta$ напряжение трения $\tau \approx 0$. Это позволяет упростить правую часть уравнения (6.42), т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dx} &= - \int_0^\delta V_x \tau y^j dy = - \int_0^\delta d(V_x \tau y^j) + \int_0^\delta \tau y^j dy = \\ &= -V_x \tau y^j \Big|_0^\delta + \int_0^\delta \tau y^j dV_x = \int_0^\delta \tau y^j \frac{\partial V_x}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Интегрируя уравнения (6.42) и (6.43), получаем

$$\Delta D = \int_0^x dD = \int_0^x \left[- \int_0^\delta V_x \frac{\partial(\tau y^j)}{\partial y} dy \right] dx; \quad (6.44)$$

$$\Delta D = \int_0^x \int_0^\delta \tau y^j \frac{\partial V_x}{\partial y} dy dx. \quad (6.45)$$

С помощью уравнений (6.44) и (6.45) можно вычислить диссипативные составляющие в формуле (6.32).

Процессы за ударными волнами (скачками уплотнения), которые существуют при отрыве и присоединении потока, характеризуются тем, что часть кинетической энергии движущегося газа практически мгновенно переходит во внутреннюю энергию газа. В этом случае для элементарного процесса (без теплообмена с окружаю-

щей средой), происходящего в совершенном газе, изменение энтропии определяется выражением

$$d\tilde{S} = c_p dT/T - R dp/p.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\Delta\tilde{S} = \tilde{\Pi} = \frac{R}{k-1} \ln \frac{p_k}{p_n} - k \ln \frac{\rho_k}{\rho_n}, \quad (6.46)$$

где $k = c_p/c_v$; индексы «н» и «к» соответствуют начальному и конечному состояниям системы.

Для скачка уплотнения $p_k/p_n > (\rho_k/\rho_n)^k$ и, следовательно, согласно (6.46), при переходе через него энтропия газа возрастает. Увеличение энтропии объясняется необратимым характером изменения состояния газа в скачке уплотнения. В результате такого процесса часть кинетической энергии газа необратимо переходит в теплоту; при отсутствии энергетического обмена с внешней средой внутренняя энергия потока возрастает.

Рассмотрим применение энтропийного метода для расчета давления в области отрыва за обратным уступом (рис. 6.66).

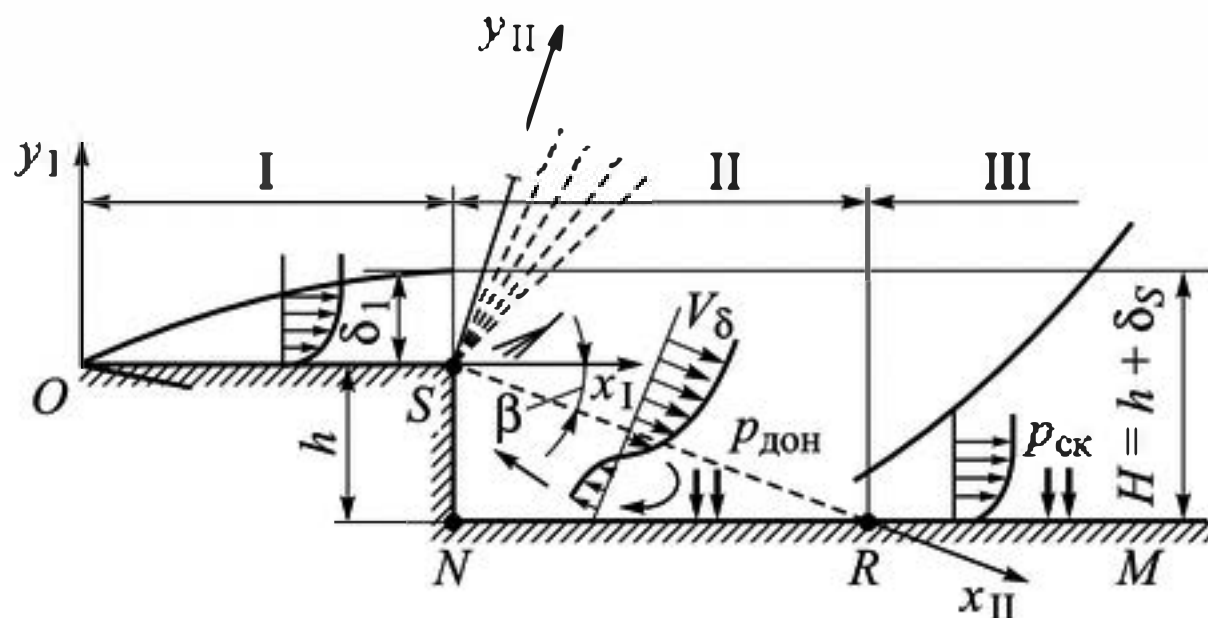


Рис. 6.66. Модель течения с фиксированной точкой отрыва

Все поле течения разбито на отдельные области I–III. В областях I и II диссипация энергии происходит за счет вязкого трения в пограничном слое и зоне смешения, в области III — в скачке уплотнения. Общее выражение для производства энтропии $\tilde{\Pi}_\Sigma$ находят с применением принципа суперпозиции.

Рассмотрим сначала составляющие диссипации энергии в областях отрыва и присоединения потока. Известно, что в достаточно широком диапазоне скоростей течения газа профили скорости в турбулентных свободных слоях смешения и следах удовлетвори-

тельно описываются некоторыми универсальными функциями. Например, избыточный профиль скорости можно представить так:

$$(V_\delta - V_x)/(V_\delta - V_0) = f(\eta), \text{ или } V/V_\delta = 1 - mf(\eta), \quad (6.47)$$

где $m = (V_\delta - V_0)/V_\delta$; V_0 — скорость возвратного потока; $f(\eta)$ — некоторая универсальная функция; $\eta = y/\delta$ — безразмерная координата; δ — толщина струйного слоя смешения. Значения $0 \leq m < 1$ относятся к прямому течению в зоне смешения, а $m > 1$ — к возвратному; в равномерном потоке $m = 0$, а в точках отрыва и присоединения $m = 1$.

Как показали эксперименты, приемлемое согласование дает функция $f(\eta)$, удовлетворяющая уравнению

$$f(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3.$$

Если принимается модель течения, когда возвратный поток отсутствует, то можно воспользоваться универсальной зависимостью для профиля скорости в виде

$$V/V_\delta = \varphi(\eta) = 0,5(1 + \operatorname{erf} \eta),$$

где $\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta$; $\eta = \sigma(y/x)$; $\sigma = 12 + 2,758M_\delta$.

Уравнение (6.42) для диссипации энергии в зоне отрывного течения содержит касательное напряжение τ , определяемое выражением (2.48).

Эксперименты показывают, что для струйных и отрывных течений приемлема самая простая модель пути смешения Прандтля, согласно которой

$$\mu_T = k_3 \delta \rho (V_\delta - V_0), \quad (6.48)$$

где k_3 — константа турбулентности.

С учетом соотношений (6.47) и (6.48)

$$\tau = -k_3 \rho_\delta V_\delta m^2 \frac{df(\eta)}{d\eta} \frac{\rho}{\rho_\delta}.$$

Принимая

$$\frac{\rho}{\rho_\delta} = \frac{1 - \operatorname{Cr}_\delta^2}{1 - \operatorname{Cr}_\delta^2 [1 - mf(\eta)]^2},$$

получаем выражение для напряжения трения:

$$\tau = 6k_3\rho_\delta V_\delta^2 m^2 \eta(1-\eta) \frac{1 - \text{Cr}_\delta^2}{1 - \text{Cr}_\delta^2 [1 - m f(\eta)]^2}.$$

Рассмотрим вычисление диссипации энергии для области отрыва, принимая различные модели течения в отрывных зонах.

В простейшем случае будем считать, что профиль скорости при смешении потоков подчиняется закономерностям струйного течения без обратных токов, а значит, в формуле (6.47) значение $m = 1$. Тогда для плоского течения ($j = 0$) при условии, что ось Ox_2 направлена по свободной границе невязкого потока (см. рис. 6.66), диссипация энергии

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dx_\Pi} &= \int_{y_{\Pi n}}^{y_{\Pi b}} \tau \frac{\partial V_x}{\partial y_\Pi} dy_\Pi = \int_0^1 6k_3\rho_\delta V_\delta^2 \eta(1-\eta) \frac{1 - \text{Cr}_\delta^2}{1 - \text{Cr}_\delta^2 [1 - f(\eta)]^2} \times \\ &\times V_\delta \frac{\partial}{\partial \eta} [1 - f(\eta)] d\eta = 36\rho_\delta V_\delta^3 k_3 (1 - \text{Cr}_\delta^2) \int_0^1 \frac{\eta^2 (1-\eta)^2}{1 - \text{Cr}_\delta^2 [1 - f(\eta)]^2} d\eta, \end{aligned} \quad (6.49)$$

где $y_{\Pi n}$, $y_{\Pi b}$ — соответственно координаты нижней и верхней границ зоны смешения.

Отсюда

$$\Delta D_{\Pi \Pi \Pi} = 36\rho_\delta V_\delta^3 k_3 (1 - \text{Cr}_\delta^2) \Delta x_\Pi \int_0^1 \frac{\eta^2 (1-\eta)^2}{1 - \text{Cr}_\delta^2 [1 - f(\eta)]^2} d\eta. \quad (6.50)$$

Если для зоны отрыва рассматривать модель с учетом возвратного течения ($m = \text{var}$), то вычисление диссипации энергии усложняется. В этом случае следует использовать зависимость (6.42). Тогда

$$\frac{dD}{dx} = - \int_{y_{\Pi n}}^{y_{\Pi b}} V_x \frac{\partial \tau}{\partial y_\Pi} dy_\Pi = - \int_0^1 V_x \frac{\partial \tau}{\partial \eta} d\eta = - \int_0^1 V_\delta [1 - m f(\eta)] \frac{\partial \tau}{\partial \eta} d\eta.$$

Здесь

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = 6\rho_\delta V_\delta^2 k_3 m^2 (1 - \text{Cr}_\delta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\eta - \eta^2}{1 - \text{Cr}_\delta^2 [1 - 2m f(\eta) + m^2 f^2(\eta)]} \right\}.$$

Вводя обозначение $A_1 = 6\rho_\delta V_\delta^2 k_3 m^2 (1 - Cr_\delta^2)$, получаем

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = A_1 \left\{ \frac{(1 - 2\eta)[1 - Cr_\delta^2(1 - 2mf + m^2 f^2)]}{[1 - Cr_\delta^2(1 - 2mf + m^2 f^2)]^2} - \frac{(\eta - \eta^2)[-Cr_\delta^2(-2mf' + 2m^2 ff')]}{[1 - Cr_\delta^2(1 - 2mf + m^2 f^2)]^2} \right\},$$

где $f' = \partial f(\eta) / \partial \eta$.

Тогда

$$\frac{dD}{dx} = \int_0^1 V_\delta (1 - mf) A_1 \left\{ \frac{(1 - 2\eta)[1 - Cr_\delta^2(1 - 2mf + m^2 f^2)]}{[1 - Cr_\delta^2(1 - 2mf + m^2 f^2)]^2} - \frac{(\eta - \eta^2)[Cr_\delta^2(2m^2 ff' - 2mf')]}{[1 - Cr_\delta^2(1 - 2mf + m^2 f^2)]^2} \right\} d\eta$$

и диссипация энергии определится соотношением

$$\begin{aligned} \Delta D_{\text{IIпл}} &= \int_{x_{\text{IIС}}}^{x_{\text{IIР}}} 6\rho_\delta V_\delta^3 k_3 m^2 (1 - Cr_\delta^2) \times \\ &\times \int_0^1 (1 - mf) \left\{ \frac{(1 - 2\eta)[1 - Cr_\delta^2(1 - 2mf + m^2 f^2)]}{[1 - Cr_\delta^2(1 - 2mf + m^2 f^2)]^2} - \right. \\ &\left. - \frac{(\eta - \eta^2)[Cr_\delta^2(2m^2 ff' - 2mf')]}{[1 - Cr_\delta^2(1 - 2mf + m^2 f^2)]^2} \right\} d\eta dx. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Уравнения (6.50) и (6.51) позволяют вычислить производство энтропии для области отрывного течения. Например, при $m = 1$ из (6.50) имеем

$$\Pi_{\text{IIпл}} = \frac{\Delta D_{\text{IIпл}}}{T_{\text{II}}} = \frac{\Delta D_{\text{IIпл}}}{T_\delta} = 36 \frac{\rho_\delta V_\delta^3}{T_\delta} k_3 (1 - Cr_\delta^2) \Delta x_{\text{II}} \int_0^1 \frac{\eta^2 (1 - \eta)^2}{1 - Cr_\delta^2 (1 - f)^2} d\eta,$$

или

$$\Pi_{\text{IIпл}} = 72 \rho_\delta V_\delta k_3 k_{cV} Cr_\delta^2 \Delta x_{\text{II}} \int_0^1 \frac{\eta^2 (1 - \eta)^2}{1 - Cr_\delta^2 (1 - f)^2} d\eta. \quad (6.52)$$

В принятой модели сверхзвукового отрывного течения (см. рис. 6.66) присоединение потока происходит через скачок уплотнения. Схематически это показано на рис. 6.67. Перед областью присоединения профиль скорости неравномерен, что приводит к неодинаковой интенсивности скачка уплотнения PF (см. рис. 6.67, *а*). Этот скачок расположен выше некоторой звуковой линии тока AB .

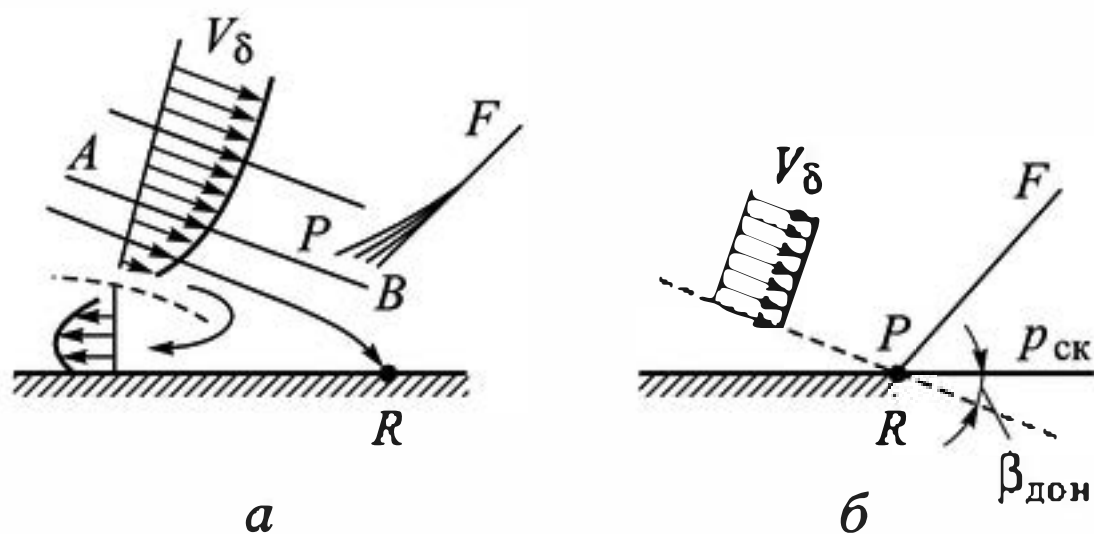


Рис. 6.67. Схемы течения в области присоединения вязкого (*а*) и невязкого (*б*) потоков

Параметры потока для плоского течения в невязкой части определяют с применением теории скачков уплотнения или численным методом сквозного счета. За точкой присоединения расчет ведут по их значениям на внешней границе области смещения (неравномерностью профиля скорости пренебрегают) и осредненному углу разворота потока $\beta_{дон}$ (см. рис. 6.67, *б*). Решают следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{p_{ск}}{p_{дон}} &= \frac{2k}{k+1} M_\delta^2 \sin^2 \theta_{ск} - \frac{k-1}{k+1}; \\ \frac{p_{ск}}{p_{дон}} &= \frac{(k+1) M_\delta^2 \sin^2 \theta_{ск}}{2 + (k-1) M_\delta^2 \sin^2 \theta_{ск}}; \\ \operatorname{tg} \beta_{дон} &= \frac{\operatorname{ctg} \theta_{ск} (M_\delta^2 \sin^2 \theta_{ск} - 1)}{[1 + (k+1)/2 - \sin^2 \theta_{ск}] M_\delta^2}; \\ \tilde{\Pi}_{III}^I &= c_V \left(\ln \frac{p_{ск}}{p_{дон}} - k \ln \frac{\rho_{ск}}{\rho_{дон}} \right). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Для расчета диссипации энергии перед точкой отрыва используют результаты, известные из теории пограничного слоя. Ско-

рость поперек пограничного слоя вычисляют по степенной зависимости

$$V/V_\infty = (y/\delta)^{1/n}. \quad (6.54)$$

Значение показателя n слабо зависит от числа Рейнольдса. При $Re_x = 10^6 \dots 10^8$ можно принять $n = 7$. Результаты экспериментальных исследований профиля скорости показали, что число M и температурный фактор $\bar{T}_{ст} = T_{ст}/T_0$ (где T_0 , $T_{ст}$ — температуры торможения и стенки) мало влияют на форму распределения скоростей.

Изменение напряжения трения поперек пограничного слоя характеризует зависимость

$$\tau/\tau_{ст} = 1 - 3(y/\delta)^2 + 2(y/\delta)^3. \quad (6.55)$$

Согласно данным Г.Н. Абрамовича, для течения вблизи стенки

$$\tau_{ст} = \frac{0,0226 \rho_\infty V_\infty^2 [1 + 0,5(k-1)M_\infty^2]^{0,75}}{Re_\delta^{0,25} [1 + 0,375(k-1)M_\infty^2]^{1,31}} \bar{T}_{ст}^{0,75} \left(\frac{2}{1 + \bar{T}_{ст}} \right)^{1,31}. \quad (6.56)$$

Используя зависимости (6.54)–(6.56), можно вычислить диссипацию энергии в пограничном слое перед точкой отрыва:

$$\begin{aligned} \Delta D_I &= - \int_0^{x_{IS}} \int_0^{\delta_I} V_x \frac{\partial \tau}{\partial y_I} dy_I dx_I = \\ &= - \int_0^{x_{IS}} \int_0^{\delta_I} V_\infty \left(\frac{y_I}{\delta} \right)^{1/7} \frac{\partial}{\partial y_I} \left\{ \tau_{ст} \left[1 - 3 \left(\frac{y_I}{\delta} \right)^2 + 2 \left(\frac{y_I}{\delta} \right)^3 \right] \right\} dy_I dx_I = \\ &= - \int_0^{x_{IS}} \int_0^1 V_\infty \eta^{1/7} \frac{\partial}{\partial \eta} [\tau_{ст} (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3)] d\eta dx_I = \\ &= \int_0^{x_{IS}} \frac{63}{88} \rho_\infty V_\infty^3 \frac{0,0226}{Re_\delta^{0,25}} \frac{[1 + 0,5(k-1)M_\infty^2]^{0,75}}{[1 + 0,375(k-1)M_\infty^2]^{1,31}} \bar{T}_{ст}^{0,75} \left(\frac{2}{1 + \bar{T}_{ст}} \right)^{1,31} dx = \\ &= \int_0^{x_{IS}} A_2 \frac{dx_I}{Re_\delta^{0,25}}, \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\text{где } A_2 = \frac{0,01618 \rho_\infty V_\infty^3}{\text{Re}_\delta^{0,25}} \frac{[1 + 0,5(k-1)M_\infty^2]^{0,5}}{[1 + 0,375(k-1)M_\infty^2]^{1,31}} \bar{T}_{\text{ст}}^{0,75} \left(\frac{2}{1 + \bar{T}_{\text{ст}}} \right)^{1,31}.$$

С учетом поправки на сжимаемость в пограничном слое $\delta_1/\delta_{\text{ис}} = (1 + 0,12 M_\infty^2)^{0,35}$ соотношение (6.57) преобразуется к виду

$$\Delta D_I = 1,25 \frac{A_2}{B^{1,25}} \delta_1,$$

где $B = 0,37(1 + 0,12 M_\infty^2)^{0,35}$.

Тогда производство энтропии будет определяться зависимостью

$$\begin{aligned} \Pi_I = \frac{\Delta D_I}{T_\infty} = 0,0202 \frac{\delta_1}{B^{1,25}} \rho_\infty V_\infty^3 M_\infty^2 k(k-1) c_V \times \\ \times \frac{[1 + 0,5(k-1)M_\infty^2]^{0,75}}{[1 + 0,375(k-1)M_\infty^2]^{1,31}} \bar{T}_{\text{ст}}^{0,75} \left(\frac{2}{1 + \bar{T}_{\text{ст}}} \right)^{1,31}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Следует отметить, что в расчетах параметров отрывных течений удобнее использовать удельное производство энтропии. Например, для плоского течения характерный массовый расход

$$\dot{m} = \rho_{\text{ск}} V_{\text{ск}} H,$$

$$\text{где } \rho_{\text{ск}} = \rho_{\text{дон}} \frac{(k+1)M_\delta^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}{2 + (k-1)M_\delta^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}; \quad V_{\text{ск}} = V_{\text{дон}} \frac{\cos \theta_{\text{ск}}}{\cos(\theta_{\text{ск}} - \beta_{\text{дон}})}; \quad H =$$

$= h + \delta_1$; h — высота обратного уступа. Тогда для соотношений (6.58), (6.52), (6.53) можно записать

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_I = \frac{\Pi_I}{\dot{m}} = \frac{0,0202(\delta_1/h)}{B^{1,25}[1 + (\delta_1/h)]} \frac{(1 - \text{Cr}_\infty^2)^{1/(k-1)} \text{Cr}_\infty}{(1 - \text{Cr}_\delta^2)^{1/(k-1)} \text{Cr}_\delta} M_\infty^2 \times \\ \times \frac{[1 + 0,5(k-1)M_\infty^2]^{0,75} \bar{T}_{\text{ст}}^{0,75} [2/(1 + \bar{T}_{\text{ст}})]^{1,31}}{[1 + 0,375(k-1)M_\infty^2]^{1,31}} k(k-1) c_V \times \\ \times \frac{\cos(\theta_{\text{ск}} - \beta_{\text{дон}})}{\cos \theta_{\text{ск}}} \frac{[1 + 0,5(k+1)M_\infty^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}]}{2(k-1)M_\delta^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\text{IIпл}} = & 72k_3kc_V\text{Cr}_\delta^2 \frac{1}{\sin\beta_{\text{дон}}[1+(\delta_1/h)]} \frac{[2+(k-1)\text{M}_\delta^2\sin^2\theta_{\text{ск}}]}{[(k+1)\text{M}_\delta^2\sin^2\theta_{\text{ск}}]} \times \\ & \times \frac{\cos(\theta_{\text{ск}}-\beta_{\text{дон}})}{\cos\theta_{\text{ск}}} \int_0^1 \frac{\eta^2(1-\eta)^2}{1-\text{Cr}_\delta^2[1-f(\eta)]^2} d\eta; \\ \tilde{\Pi}_{\text{III}} = & c_V \left(\ln \frac{p_{\text{ск}}}{p_{\text{дон}}} - k \ln \frac{\rho_{\text{ск}}}{\rho_{\text{дон}}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи об определении давления в отрывной зоне сводится к расчету параметров течения невязкого потока при условии минимума полной диссипации энергии в вязком течении и скачках уплотнения.

Параметры течения невязкого потока можно рассчитывать методом характеристик или с использованием численного метода сквозного счета. Система уравнений, описывающих отрывное плоское течение за обратным уступом, имеет следующий вид (в качестве исходных данных принимают параметры невозмущенного потока):

$$\beta_{\text{дон}} = \omega(\text{M}_\delta, k) - \omega(\text{M}_\infty, k); \quad \frac{p_\infty}{p_{\text{дон}}} = \frac{[1+0,5(k-1)\text{M}_\delta^2]^{k/(k-1)}}{[1+0,5(k-1)\text{M}_\infty^2]^{k/(k-1)}};$$

$$\frac{\text{tg } \theta_{\text{ск}}}{\text{tg } (\theta_{\text{ск}} - \beta_{\text{дон}})} = \frac{0,5(k+1)\text{M}_\delta^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}{1+0,5(k-1)\text{M}_\delta^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}};$$

$$\frac{p_{\text{ск}}}{p_{\text{дон}}} = \frac{2k}{k+1} \text{M}_\delta^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}} - \frac{k-1}{k+1}; \quad \frac{\rho_{\text{ск}}}{\rho_{\text{дон}}} = \frac{(k+1)\text{M}_\delta^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}{2+(k-1)\text{M}_\delta^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \text{arctg} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}(\text{M}_i^2 - 1)} - \text{arctg} \sqrt{\text{M}_i^2 - 1} \quad (i = \delta, \infty);$$

$$\tilde{\Pi}_I + \tilde{\Pi}_{\text{II}} + \tilde{\Pi}_{\text{III}} = \min.$$

Для ее решения должна быть задана константа турбулентности k_3 , которую можно определить на основе единичного эксперимента.

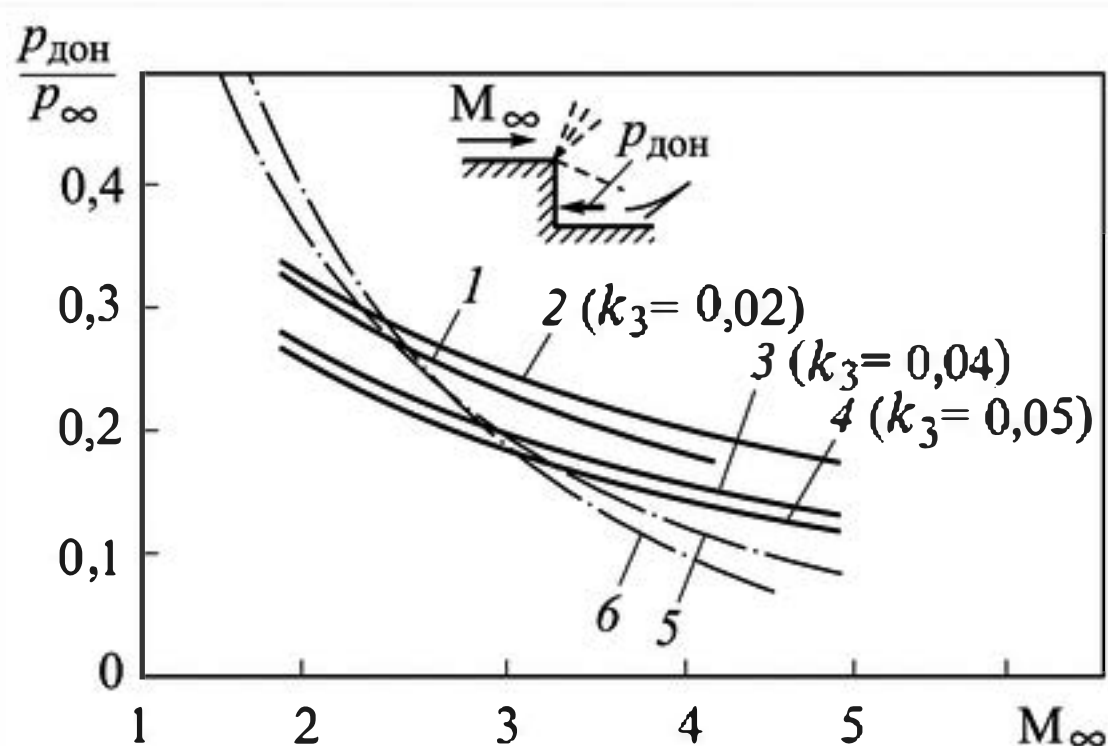


Рис. 6.68. Зависимости относительного донного давления за плоским уступом от числа M_∞

В качестве иллюстрации на рис. 6.68 представлены расчетные зависимости относительного донного давления $p_{\text{дон}}/p_\infty$ за плоским уступом от числа M_∞ внешнего потока ($\delta_1 = 0$, $k_3 = 0,02 \dots 0,05$), полученные энтропийным методом при $m = \text{var}$ (кривая 1) и $m = 1$ (кривые 2–4). Здесь же приведены систематизированные результаты других расчетных методов: интегрального метода, разработанного Л.В. Гогишем и Г.Ю. Степановым (кривая 5), и метода разделяющей линии тока (кривая 6).

Развитый способ определения давления в зоне отрыва (точка отрыва S фиксирована) обеспечивает достаточную точность результатов при $M_\infty \geq 2$. Его работоспособность подтверждена при исследовании влияния толщины пограничного слоя на донное давление.

7. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Существует большое количество разнообразных методов решения задач аэродинамики – с использованием уравнений математической физики, а также интегральных аналитических, полуэмпирических и чисто эмпирических соотношений. Современные инженерные методики могут сочетать в себе преимущества полноты описания течений и гибкости численного моделирования с простотой и удобством интегральных подходов. Численные методы предполагают получение конечных результатов только с помощью решения на ЭВМ. Однако некоторые из них (метод характеристик, метод линеаризации) позволяют также установить конечные интегральные расчетные соотношения.

В главе изложены как достаточно простые (метод Ньютона), так и сложные в практической реализации численные методы (Годунова, конечных объемов, дискретных вихрей), которые являются, по сути, различными способами решения дифференциальных уравнений (или систем уравнений) в частных производных, характеризующих математические модели процессов обтекания.

7.1. Метод характеристик

Метод характеристик используют для расчета возмущенного течения идеального (невязкого) газа: определения параметров сверхзвукового обтекания крыловых профилей и корпусов ЛА, расчета контуров сопел для сверхзвуковых аэродинамических труб и т. д. Рассмотрим применение этого метода для расчета сверхзвуковых двумерных (плоских или осесимметричных) течений.

Как было указано в гл. 2, уравнение (2.46) является основным дифференциальным уравнением для расчета двухмерного потенциального установившегося безвихревого газового течения. Например, для двухмерного осесимметричного потока оно имеет вид

$$(V_x^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2V_x V_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r} + (V_r^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{a^2 V_r}{r} = 0. \quad (7.1)$$

При описании движения вихревых газовых потоков используют функцию тока ψ . В этом случае уравнение (2.45) записывается так:

$$\begin{aligned} (V_x^2 - a^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2V_x V_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + (V_y^2 - a^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \\ = \frac{k-1}{2k} \frac{V_{\max}^2}{RV} (1 - \bar{V}^2)^{\frac{k}{k-1}} (a^2 - V^2) \frac{dS}{dn}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $\bar{V} = V/V_{\max}$; n — нормаль к линии тока.

Уравнения (2.46) для потенциала скоростей и (7.2) для функции тока являются нелинейными уравнениями в частных производных второго порядка. Поскольку в них имеются свободные члены, уравнения будут неоднородными.

Решения $\varphi = \varphi(x, y)$ и $\psi = \psi(x, y)$ или $\varphi = \varphi(x, r)$ геометрически изображаются в пространстве интегральными поверхностями, причем плоскость Oxy (или Oxr) рассматривается как основная и называется *физической плоскостью независимых переменных*.

Нахождение этих решений в окрестности некоторой начальной кривой $y = y(x)$, удовлетворяющей заданным дополнительным условиям, составляет содержание *задачи Коши*. Дополнительными условиями являются значения искомой функции $\varphi(x, y)$ или $\psi(x, y)$ и ее первой производной $\varphi_x = \partial\varphi/\partial x$ ($\psi_x = \partial\psi/\partial x$) или $\varphi_y = \partial\varphi/\partial y$ ($\psi_y = \partial\psi/\partial y$). Следует иметь в виду, что задание на начальной кривой $y(x)$ самой функции и ее первой производной, например $\varphi[x, y(x)]$ и φ_y , автоматически определяет ее другую производную φ_x . Это следует из соотношения

$$\frac{d\varphi[x, y(x)]}{dx} = \frac{\partial\varphi[x, y(x)]}{\partial x} + \frac{\partial\varphi[x, y(x)]}{\partial y} \frac{dy}{dx},$$

т. е. из формулы для полной производной от сложной функции двух переменных x и y в предположении, что начальная кривая $y(x)$ задана.

Решение задачи Коши применительно к исследованию сверхзвуковых течений газа и разработка соответствующего метода характеристик принадлежит советскому ученому проф. Ф. Франклю. Представим уравнения (2.46), (7.1) и (7.2) в общем виде:

$$AU + 2BS + CT + H = 0, \quad (7.3)$$

где A, B, C — коэффициенты при соответствующих вторых частных производных U, S и T ; H — свободный член.

Будем искать решение уравнения (7.3) в окрестности начальной кривой AB (рис. 7.1) в виде ряда. В окрестности точки $M(x_0, y_0)$ искомая функция

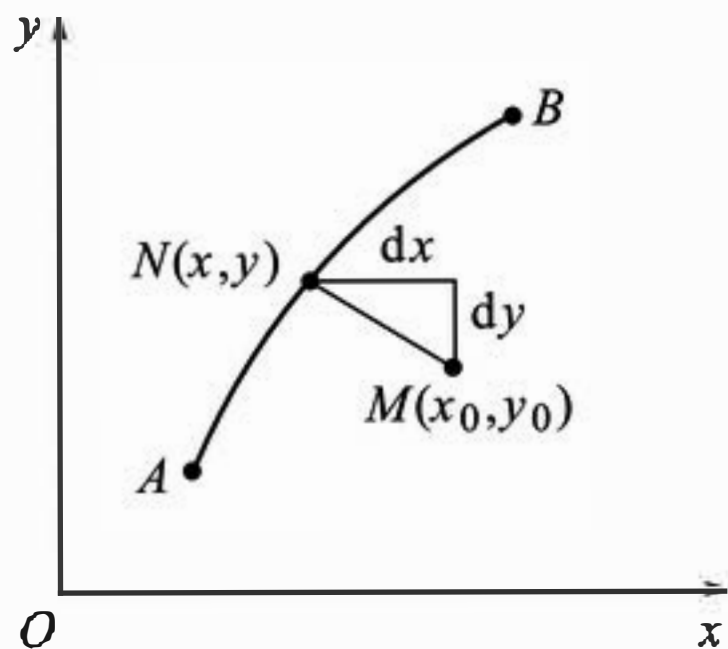


Рис. 7.1. Начальная кривая AB для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, y_0) = \varphi(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(\Delta x)^n \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} + \frac{n}{1} (\Delta x)^{n-1} \Delta y \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x^{n-1} \partial y} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (\Delta x)^{n-2} (\Delta y)^2 \frac{\partial^{n-2} \varphi}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \dots + (\Delta y)^n \frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} \right], \quad (7.4) \end{aligned}$$

где $\varphi(x, y)$ — функция φ в заданной точке $N(x, y)$ на начальной кривой; $\Delta x = x_0 - x$; $\Delta y = y_0 - y$. Отметим, что уравнение (7.4) можно записать и для функции $\psi(x, y)$.

С использованием зависимости (7.4) решение можно найти, если на заданной кривой существуют и известны функция φ (или ψ) и ее производные любого порядка: $\partial^n \varphi / \partial x^n$, $\partial^{n-1} \varphi / \partial x^{n-1}$, ... Поскольку на кривой AB заданы первые производные φ_x (или ψ_x) и φ_y (или ψ_y), необходимо дополнительно найти вторые производные, а также производные более высокого уровня. Следовательно, решение задачи Коши связано с отысканием условий, при которых возможно определение старших производных на заданной кривой.

Ограничимся определением вторых производных. В нашем случае их три (U, S, T), поэтому для их определения необходимы три независимых уравнения. Первым будет уравнение (7.1), которому соответствует начальная кривая AB . Два других можно получить из соотношений для полных дифференциалов функций двух независимых переменных:

$$\begin{aligned}d\varphi_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} dy = U dx + S dy; \\d\varphi_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} dy = S dx + T dy.\end{aligned}$$

В результате имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}AU + 2BS + CT &= -H; \\dx \cdot U + dy \cdot S + 0 \cdot T &= dp; \\0 \cdot U + dx \cdot S + dy \cdot T &= dq,\end{aligned}\tag{7.5}$$

в которой неизвестные U, S, T находят с помощью определителей. Введем для главного и частных определителей соответственно обозначения Δ и $\Delta_U, \Delta_S, \Delta_T$. Тогда

$$U = \Delta_U / \Delta; \quad S = \Delta_S / \Delta; \quad T = \Delta_T / \Delta.$$

Из уравнений (7.5) следует, что вторые производные U, S и T вычисляются однозначно, если главный определитель $\Delta \neq 0$ на начальной кривой AB .

Рассмотрим случай, когда кривая AB выбрана таким образом, что главный определитель на ней равен нулю, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0.\tag{7.6}$$

Из курса математики известно, что при условии равенства нулю главного определителя системы уравнений (7.5), т. е. на кривой, выраженной уравнением (7.6), вторые производные U, S, T либо определены неоднозначно, либо вообще не могут быть найдены через φ, φ_x и φ_y .

Решения квадратного уравнения (7.6) имеют вид

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{I, II} = y'_{I, II} = \frac{1}{A} \left(B \pm \sqrt{B^2 - AC} \right)\tag{7.7}$$

и определяют наклон касательных в каждой точке начальной кривой, где $\Delta = 0$. Выражения (7.7) являются дифференциальными уравнениями двух семейств вещественных кривых, если $B^2 - AC > 0$. Эти кривые называются *характеристиками*, а уравнение (7.7) — *характеристическим*. Геометрически это означает, что однозначное определение вторых производных на начальной кривой возможно, если никакой элемент дуги этой кривой не совпадает с характеристиками. Следовательно, условие $\Delta \neq 0$ является необходимым и достаточным для решения задачи Коши.

Однако для расчета сверхзвуковых газовых течений представляет интерес задача определения решений на характеристиках, т. е. *метод характеристик*. Он вытекает из анализа задачи Коши и состоит в следующем. Предположим, что начальная кривая AB совпадает с одной из характеристик и вдоль нее равен нулю не только главный, но и частные определители системы (7.5): $\Delta_U = \Delta_S = \Delta_T = 0$. Следует учесть, что если, например, определители Δ и Δ_T равны нулю, то остальные определители равны нулю автоматически.

Равенство нулю главного и всех частных определителей означает, что решения системы (7.5) хотя и неоднозначны, но могут существовать. Причем, если одно из решений является конечным (например, для U), то конечными будут решения для S и T .

Рассмотрим выражения для частных определителей:

$$\Delta_U = \begin{vmatrix} -H & 2B & C \\ d\varphi_x & dy & 0 \\ d\varphi_y & dx & dy \end{vmatrix} = dx^2 \left[-Hy'^2 - 2By'\varphi'_x + C(\varphi'_x - y'\varphi'_y) \right];$$

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} A & -H & C \\ dx & d\varphi_x & 0 \\ 0 & d\varphi_y & dy \end{vmatrix} = dx^2 \left[Ay'\varphi'_x + Hy' + C\varphi'_y \right];$$

$$\Delta_T = \begin{vmatrix} A & 2B & -H \\ dx & dy & d\varphi_x \\ 0 & dx & d\varphi_y \end{vmatrix} = dx^2 \left[A(y'\varphi'_y - \varphi'_x) - 2B\varphi'_y - H \right],$$

где $\varphi'_x = d\varphi_x/dx$; $\varphi'_y = d\varphi_y/dx$.

Учитывая, что $dx \neq 0$, из условия $\Delta_T = 0$ получаем

$$A(y'\varphi'_y - \varphi'_x) - 2B\varphi'_y - H = 0. \quad (7.8)$$

Для плоского случая, когда $H = 0$, имеем

$$A(y'\varphi'_y - \varphi'_x) - 2B\varphi'_y = 0. \quad (7.9)$$

Уравнения (7.6) и (7.8) или (7.9), определяющие условия, при которых существуют неоднозначные решения для U , S и T , называются *условиями совместности*. Первое из них геометрически представляет собой два семейства кривых (характеристик) в плоскости Oxy , второе — два семейства кривых (характеристик) в плоскости $O\varphi_x\varphi_y$, фазового графа вектора скорости, т. е. V_x , V_y или V_x , V_r .

Из условия совместности следует, что каждой точке характеристики в плоскости Oxy соответствует определенная точка характеристики в плоскости $O\varphi_x\varphi_y$, а значит, эти кривые можно использовать для расчета газовых течений.

Согласно уравнению (7.7), корни квадратного характеристического уравнения в физической плоскости могут быть как вещественными, так и комплексно-сопряженными, что определяется подкоренным выражением $B^2 - AC = \delta$. При $\delta > 0$ уравнение (7.6) будет гиперболического типа, при $\delta = 0$ — параболического, а в случае $\delta < 0$ — эллиптического типа. Коэффициенты A , B , C в уравнении (7.6) определяют по формулам

$$A = V_x^2 - a^2; \quad B = V_x V_y; \quad C = V_y^2 - a^2, \quad (7.10)$$

причем эти выражения будут справедливы и в случае записи уравнения для функции тока ψ .

С учетом того, что $V^2 = V_x^2 + V_y^2$, после подстановки и преобразований получаем

$$\delta = B^2 - AC = a^2(V^2 - a^2). \quad (7.11)$$

Отсюда следует, что при сверхзвуковых скоростях ($V > a$) уравнение будет гиперболического, а при звуковых ($V = a$) — параболического типа.

Характеристики в физической плоскости Oxy определяют уравнением (7.7), в котором знак «+» соответствует первому семейству (корень λ_I), а знак «−» — второму (корень λ_{II}). С учетом соотношений (7.10) и (7.11) выражение (7.7) для характеристик примет вид

$$\lambda_{I,II} = \frac{dy}{dx} = \frac{V_x V_y \pm a \sqrt{V^2 - a^2}}{V_x^2 - a^2}. \quad (7.12)$$

В частном случае, когда $V_x = V$, $V_y = 0$, уравнение (7.12) имеет вид

$$\lambda_{I,II} = \frac{\pm 1}{\sqrt{V^2 - a^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{M^2 - 1}} = \operatorname{tg} \mu_{I,II}.$$

Из этого выражения следует важное свойство характеристик в физической плоскости: в каждой точке, расположенной на характеристике, угол между направлением касательной к ней и вектором скорости в этой точке равен углу Маха. Следовательно, сама характеристика представляет собой линию слабых возмущений (или линию Маха), имеющую в общем случае форму кривой.

Если сверхзвуковое движение газа сопровождается понижением давления, то, следовательно, течение будет происходить с расширением, а линии Маха будут определять волны разрежения, с которыми совпадают соответствующие характеристики, являющиеся в общем виде кривыми линиями (для плоского потока) или поверхностями, образованными вращениями этих линий (для пространственного осесимметричного потока). Следует учесть, что в сверхзвуковом расширяющемся потоке никаких других волн разрежения, кроме «слабых», не возникает, иначе следует допустить возможность образования «сильных» волн (скачков) разрежения, которые в реальных течениях газа существовать не могут.

Проведенный анализ показывает, что для характеристик в плоскости Oxy можно записать

$$\lambda_{I,II} = dy/dx = \operatorname{tg} (\beta \pm \mu), \quad (7.13)$$

где β — угол наклона вектора скорости к оси Ox (знак «+» относится к характеристикам первого семейства, а знак «−» — к характеристикам второго семейства).

Если в уравнении (7.9) величину y' заменить корнями дифференциального уравнения, то получим уравнения характеристик в плоскости годографа вектора скорости для плоского потока:

$$A(\lambda_I \varphi'_y - \varphi'_x) - 2B\varphi'_y = 0; \quad (7.14)$$

$$A(\lambda_{II} \varphi'_y - \varphi'_x) - 2B\varphi'_y = 0. \quad (7.15)$$

Используя свойство

$$\lambda_I + \lambda_{II} = 2B/A,$$

для уравнений (7.14) и (7.15) соответственно имеем

$$A(\lambda_{II} \varphi'_y + \varphi'_x) = 0; \quad (7.16)$$

$$A(\lambda_I \varphi'_y + \varphi'_x) = 0. \quad (7.17)$$

С учетом (7.13) уравнения (7.16) и (7.17) можно привести к виду

$$\frac{d\varphi_x}{dx} + \operatorname{tg}(\beta \mp \mu) \frac{d\varphi_y}{dx} = 0 \quad (7.18)$$

или, поскольку $\varphi_x = \partial l / \partial x = V_x$, $\varphi_y = \partial l / \partial y = V_y$,

$$\frac{dV_x}{dx} + \operatorname{tg}(\beta \mp \mu) \frac{dV_y}{dx} = 0, \quad (7.19)$$

где знак « $\rightarrow$ » относится к характеристикам первого семейства, а знак « $+$ » — к характеристикам второго семейства.

Для осесимметричного потока уравнение для характеристик в плоскости годографа скорости имеет вид

$$\frac{d\varphi_x}{dx} + \operatorname{tg}(\beta \mp \mu) \frac{d\varphi_y}{dx} + \frac{H}{A} = 0,$$

или

$$\frac{dV_x}{dx} + \operatorname{tg}(\beta \mp \mu) \frac{dV_r}{dx} + \frac{a^2 V_r}{(V_x^2 - a^2)r} = 0.$$

Под сопряженными характеристиками будем понимать соответствующие характеристики в физической плоскости и плоскости годографа вектора скорости, в уравнение которых входит один и тот же угловой коэффициент λ . Из этого определения следует, что сопряженными будут, например, характеристика первого семейства в физической плоскости (корень λ_1) и характеристика второго семейства в плоскости годографа вектора скорости (тоже корень λ_1).

Уравнение для элемента характеристики, например, первого семейства (7.13) можно записать в следующем виде:

$$y - y_0 = (x - x_0) \lambda_1, \quad (7.20)$$

а для элемента соответствующей сопряженной характеристики второго семейства (7.18) в виде

$$\lambda_1(\varphi_y - \varphi_{y0}) + (\varphi_x - \varphi_{x0}) = 0,$$

или

$$\lambda_1(V_y - V_{y0}) + (V_x - V_{x0}) = 0, \quad (7.21)$$

где φ_{x0} , φ_{y0} , V_{x0} , V_{y0} — функции φ_x и φ_y или скорости V_x , V_y в точке физической плоскости с координатами x_0 , y_0 .

Из уравнений (7.20) и (7.21) следует, что наклон элемента характеристики в физической плоскости определяется угловым коэффициентом λ_I , а в плоскости годографа скоростей — угловым коэффициентом $-1/\lambda_I$.

Подобным образом можно доказать, что у элементов характеристик второго семейства угловые коэффициенты будут соответственно λ_{II} и $-1/\lambda_{II}$ (рис. 7.2).

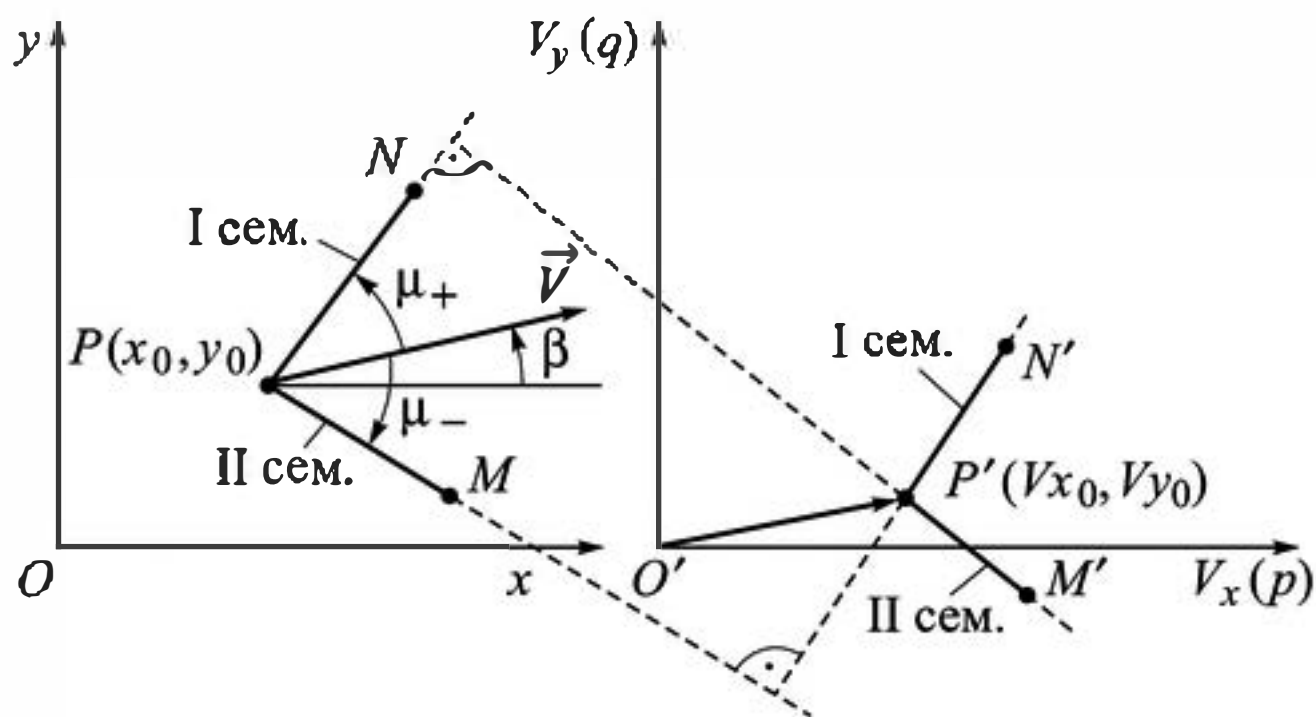


Рис. 7.2. Свойство ортогональности сопряженных характеристик

Из аналитической геометрии известно, что если произведение угловых коэффициентов у двух прямых равно -1 , то эти прямые взаимно перпендикулярны. Следовательно, сопряженные характеристики в обеих плоскостях также взаимно перпендикулярны. Рассмотренное свойство позволяет определить направление каждой сопряженной характеристики, если оно известно в одной из плоскостей.

Свойство ортогональности сопряженных характеристик выполняется для осесимметричного и вихревого потоков. Преобразуем уравнение (7.19) для характеристик в плоскости годографа вектора скорости для плоского потенциального потока. Его легко привести к виду

$$dV_x + \lambda_{II,I} dV_y = 0,$$

или

$$dV_y/dV_x = -1/\lambda_{II,I},$$

где $\lambda_{II,I} = \tan(\beta \mp \mu)$.

С учетом выражения (7.12) для $\lambda_{II,I}$ имеем

$$\frac{dV_y}{dV_x} = \frac{a^2 - V_x^2}{V_x V_y \mp a \sqrt{V^2 - a^2}}. \quad (7.22)$$

Умножив числитель и знаменатель выражения (7.22) на множитель $(V_x V_y \pm a\sqrt{V^2 - a^2})$, после преобразований получим

$$\frac{dV_y}{dV_x} = \frac{V_x V_y \pm a\sqrt{V^2 - a^2}}{a^2 - V_y^2}. \quad (7.23)$$

Для полярной системы координат

$$V_x = V \cos \beta; \quad V_y = V \sin \beta, \quad (7.24)$$

и тогда

$$\begin{aligned} dV_y &= d(V \sin \beta) = \sin \beta dV + V \cos \beta d\beta; \\ dV_x &= d(V \cos \beta) = \cos \beta dV + V \sin \beta d\beta. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Подставляя (7.24) и (7.25) в уравнение (7.23), получаем

$$\frac{\sin \beta dV + V \cos \beta d\beta}{\cos \beta dV + V \sin \beta d\beta} = \frac{V^2 \sin \beta \cos \beta \pm a\sqrt{V^2 - a^2}}{a^2 - V^2 \sin^2 \beta}.$$

С учетом того, что $M = V/a$, после преобразований имеем

$$d\beta = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V},$$

откуда

$$\beta = \pm \int_{a^*}^V \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} + \beta_{I, II},$$

где $\beta_{I, II}$ — постоянная интегрирования для характеристик соответственно первого и второго семейства.

Введем новую переменную

$$\omega = \int_{a^*}^V \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}. \quad (7.26)$$

Тогда уравнение для характеристик в плоскости годографа скорости можно записать в виде

$$\beta = \pm \omega + \beta_{I, II}, \quad (7.27)$$

где знак «+» относится к характеристикам первого семейства, а знак «−» — к характеристикам второго семейства.

Рассмотрим выражение (7.26). С учетом того, что

$$\sqrt{M^2 - 1} = \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - (k - 1)\lambda^2 / (k + 1)}},$$

а $V = \lambda a^*$ и $dV = a^* d\lambda$, получаем

$$\omega = \int_1^\lambda \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - (k - 1)\lambda^2 / (k + 1)}} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

или после интегрирования

$$\omega = \sqrt{\frac{k + 1}{k - 1}} \cdot \arctg \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda_{\max}^2 - \lambda^2}} - \arctg \sqrt{\frac{k - 1}{k + 1} \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda_{\max}^2 - \lambda^2}}, \tag{7.28}$$

где $\lambda_{\max} = V_{\max} / a^* = \sqrt{(k + 1) / (k - 1)}$.

Воспользовавшись зависимостью между λ и M , получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{k + 1}{k - 1}} \cdot \arctg \sqrt{\frac{k - 1}{k + 1} (M^2 - 1)} - \arctg \sqrt{M^2 - 1}. \tag{7.29}$$

Из уравнений (7.28) и (7.29) следует, что угол ω является функцией только чисел λ или M , а следовательно, его заранее можно вычислить (табл. 7.1), что облегчает расчеты сверхзвуковых потоков с использованием метода характеристик.

Следовательно, характеристики плоского потока в плоскости годографа имеют явную форму. Геометрически уравнение (7.28) определяет два семейства кривых (эпициклоид) — характеристик, располагающихся в кольце, внутренний радиус которого $\lambda = 1$, а наружный — $\lambda = \sqrt{(k + 1) / (k - 1)}$ (рис. 7.3). Постоянная интегрирования β_1 и знак «+» перед функцией $\omega(\lambda)$ соответствуют характеристике пер-

Таблица 7.1. Значения угла ω при различных числах M и $k = 1,4$

M	ω , град	μ , град	M	ω , град	μ , град
1,0	0,0	90,0	8,0	95,625	7,181
2,0	26,38	30,0	9,0	99,318	6,379
3,0	49,757	19,471	10,0	102,316	5,739
4,0	65,785	14,478	11,0	104,796	5,216
5,0	76,920	11,537	12,0	106,879	4,780
6,0	84,955	9,594	∞	130,46	0
7,0	90,973	8,213			

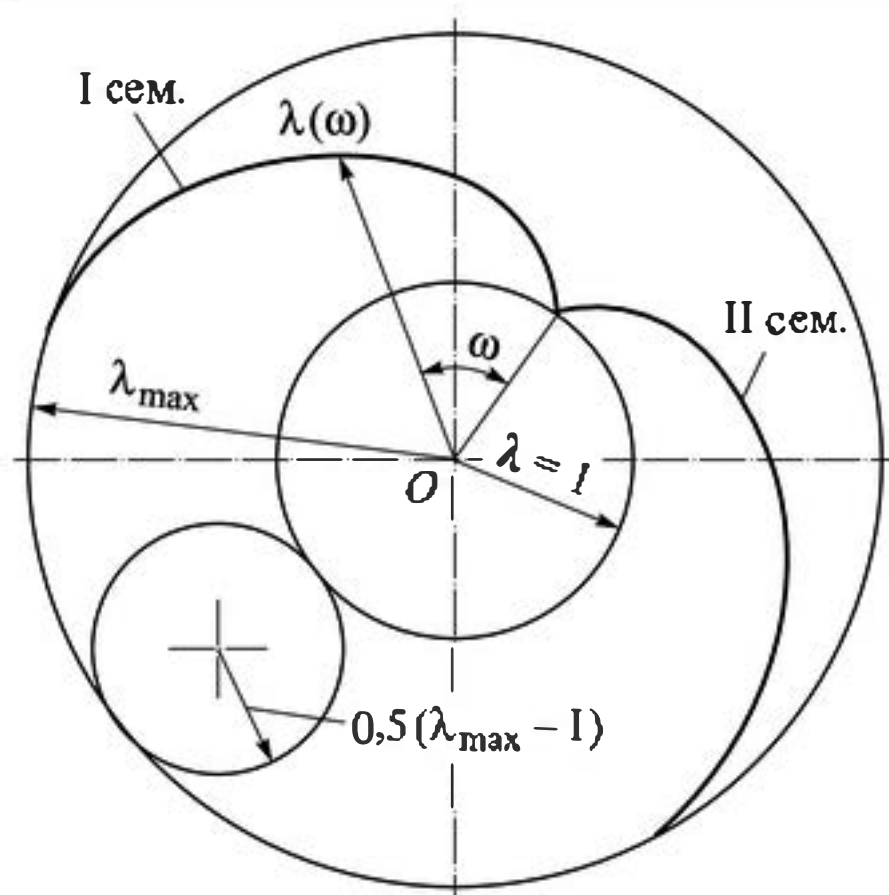


Рис. 7.3. Эпициклоиды в случае плоского сверхзвукового потока

потока при его изоэнтропическом расширении от точки, где $M = 1$, до состояния, характеризуемого некоторым произвольным числом $M > 1$, равным верхнему пределу интегрирования.

Предельный угол отклонения потока $\omega_{\max}$ определим из соотношения (7.29), в котором примем $M \rightarrow \infty$. В этом случае

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right) \quad (7.30)$$

и при $k = 1,4$

$$\omega_{\max} = 0,726\pi = 130,46^\circ.$$

Из этого равенства следует, что сверхзвуковой поток не может повернуться на угол, больший $\omega_{\max}$. Если отклонение сверхзвукового потока начинается при скорости $M > 1$, то предельный угол поворота такого потока $\beta_{\max}$ определится как разность между углом $\omega_{\max}$ и первоначальным углом поворота ω до начального числа M , т. е.

$$\beta_{\max} = \omega_{\max} - \omega(M).$$

С учетом выражения (7.30)

$$\beta_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right) - \omega(M)$$

и при $k = 1,4$

$$\beta_{\max} = 130,46^\circ - \omega(M).$$

вого семейства, а постоянная β_{Π} и знак « $\rightarrow$ » — характеристике второго семейства. Эти кривые являются эпициклоидами, которые можно получить, рассматривая перемещение точек окружности радиусом $0,5(\lambda_{\max} - 1)$, которая перекатывается по внутренней окружности радиусом $\lambda = 1$.

Физический смысл угла ω можно установить из уравнения (7.27). Пусть постоянные интегрирования $\beta_{I, II} = 0$, т. е. расширение от условий $\beta = 0$, $M = 1$. В этом случае $\beta = \pm\omega(M)$ представляет собой угол отклонения

В случае осесимметричного течения сверхзвукового потока уравнение характеристик в плоскости годографа имеет вид

$$d(\omega \mp \beta) - \frac{dx}{r} \frac{\sin \beta \sin \mu}{\cos(\beta \pm \mu)} = 0,$$

а для плоского неизоэнтропического потока

$$d(\omega \mp \beta) \pm \frac{dx}{kR} \frac{\sin^2 \mu \cos \beta}{\cos(\beta \pm \mu)} \frac{dS}{dn} = 0$$

или с учетом градиента давления торможения

$$d(\omega \mp \beta) \pm \frac{dx}{kp'_\theta} \frac{\sin^2 \mu \cos \mu}{\cos(\beta \pm \mu)} \frac{d\varphi'_{x0}}{dn} = 0. \quad (7.31)$$

Рассмотрим способы определения направления характеристик. Во-первых, это использование корней характеристического уравнения (7.12), которые определяют тангенсы углов наклона касательных к характеристикам первого $\lambda_I = \tan \varphi_I$ и второго $\lambda_{II} = \tan \varphi_{II}$ семейств в плоскости Oxy (рис. 7.4, а).

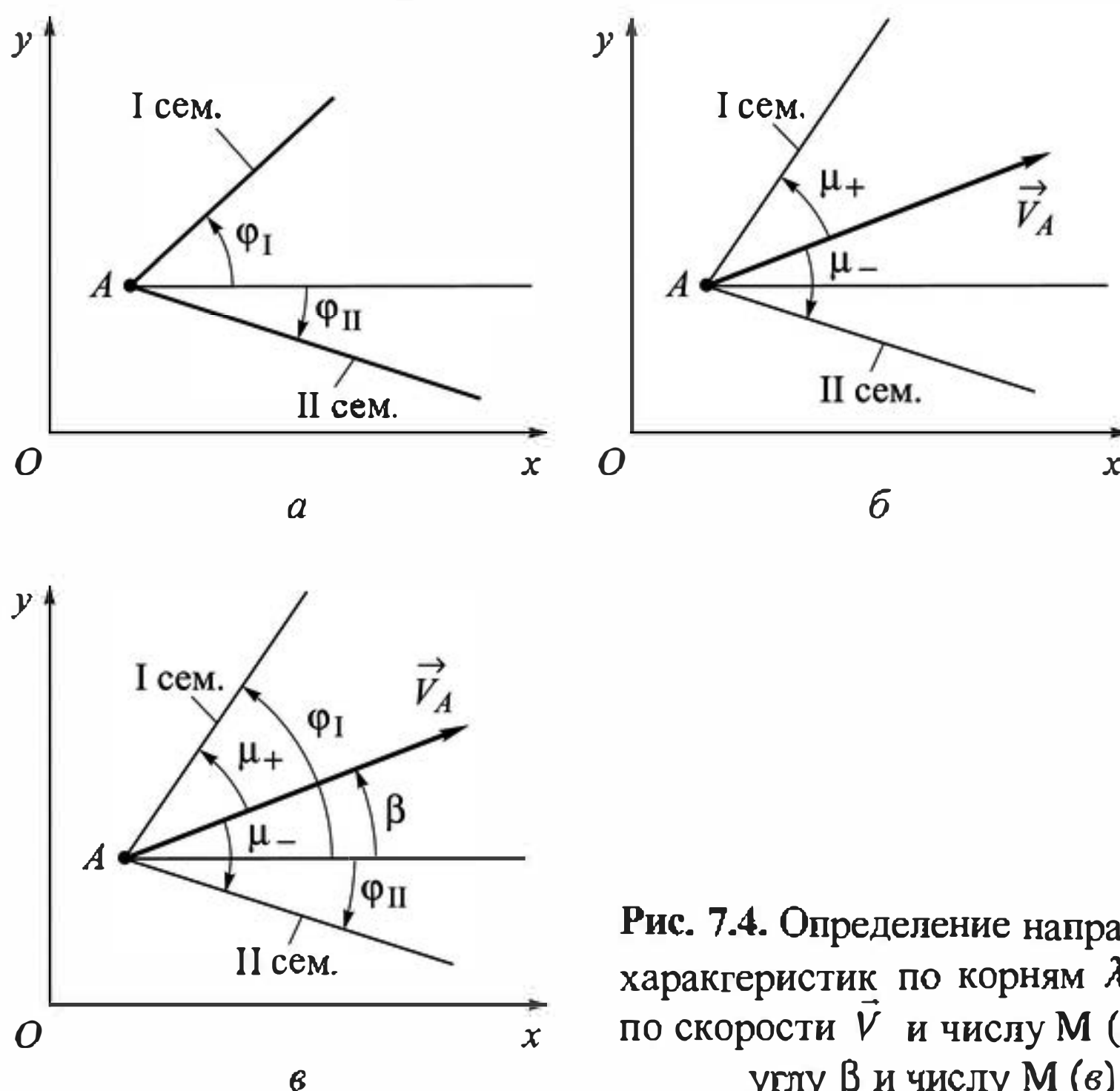


Рис. 7.4. Определение направления характеристик по корням $\lambda_{I,II}$ (а); по скорости $\vec{V}$ и числу М (б) и по углу β и числу М (в)

Если известна в данной точке скорость $\vec{V}$, а также задано число M в этой точке, то, откладывая от вектора скорости углы $\mu = \pm \arcsin(1/M)$, получим направление касательных к характеристикам первого («+») и второго («-») семейств (рис. 7.4, б).

Пусть известны угол наклона вектора скорости, а также число M потока в данной точке. В этом случае углы наклона характеристик первого и второго семейств определяются соответственно из условий $\varphi_I = \beta + \mu$ и $\varphi_{II} = \beta - \mu$ (рис. 7.4, в).

Если известны направления характеристик в физической плоскости, то их направление в плоскости годографа скорости легко определить, используя свойство нормальности сопряженных характеристик (см. рис. 7.2).

Как отмечалось выше, для плоского неизоэнтропического потока характеристики в плоскости годографа скорости можно построить заранее, т. е. они представляют собой сетку эпициклоид. Если известна скорость V_A в точке $A(x_A, y_A)$, то определяют соответствующую точку A' на плоскости годографа скорости (рис. 7.5). Затем выстраивают касательные к характеристикам, проходящим через эту точку и, используя свойство ортогональности сопряженных характеристик, определяют направление характеристик в плоскости Oxy , проходящих через точку $A(x_A, y_A)$.

Если перемещаться по характеристикам до их пересечения с окружностью радиусом $\lambda = 1$ ($M = 1$ или $V = a^*$) в точках K, M (см. рис. 7.5), то угол между лучами $O'A'$ и $O'K, O'M$ будет углом $\omega(M)$.

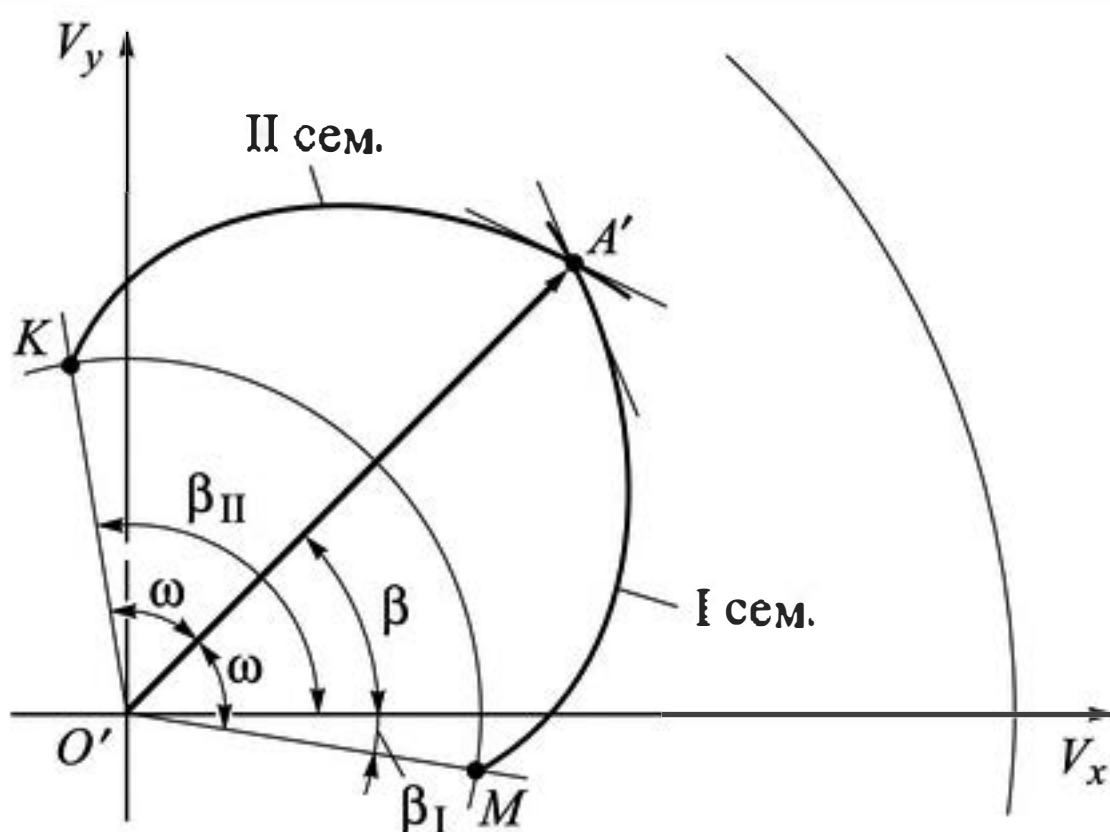


Рис. 7.5. Определение направления характеристик в плоскости годографа скорости

Расчет обтекания сверхзвуковым потоком тел представляет собой решение трех частных задач.

1. Определение скорости и других параметров потока в точке пересечения характеристик различных семейств, выходящих из двух близко расположенных точек.

Пусть в двух близко расположенных точках A и B (рис. 7.6, a) известны скорости V_A , V_B и другие параметры потока. Требуется определить координаты и параметры потока в точке C , лежащей на пересечении характеристик первого и второго семейств, проходящих через точки $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$.

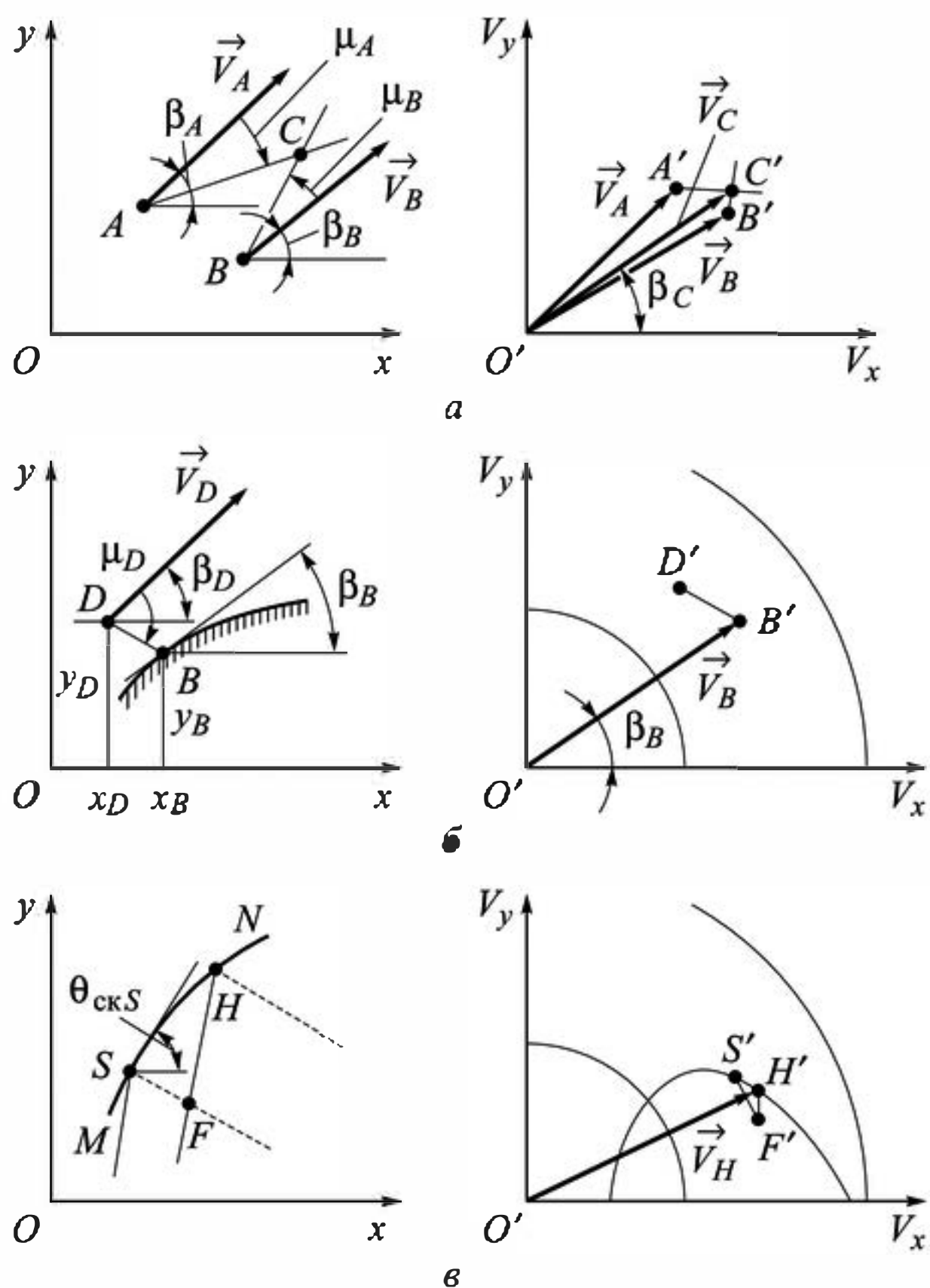


Рис. 7.6. Схемы расчета скорости в точке пересечения характеристик различных семейств (a), а также в точках пересечения характеристики со стенкой (b) и со скачком уплотнения ($в$):

слева – физическая плоскость; справа – плоскость годографа

Все расчеты для плоского потенциального потока основаны на использовании уравнений (7.13) и (7.27), записанных в конечных разностях:

для характеристики первого семейства, проходящей через точку B :

$$\Delta y_B = \operatorname{tg}(\beta_B + \mu_B) \Delta x_B, \quad (7.32)$$

$$\Delta \omega_B - \Delta \beta_B = 0; \quad (7.33)$$

для характеристики второго семейства, проходящей через точку A :

$$\begin{aligned} \Delta y_A &= \operatorname{tg}(\beta_A + \mu_A) \Delta x_A, \\ \Delta \omega_A + \Delta \beta_A &= 0. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta y_B &= y_C - y_B; \quad \Delta x_B = x_C - x_B; \\ \Delta \omega_B &= \omega_C - \omega_B; \quad \Delta \beta_B = \beta_C - \beta_B; \\ \Delta y_A &= y_C - y_A; \quad \Delta x_A = x_C - x_A; \\ \Delta \omega_A &= \omega_C - \omega_A; \quad \Delta \beta_A = \beta_C - \beta_A. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Для определения координат точки C необходимо решить систему уравнений

$$y_C - y_B = (x_C - x_B) \operatorname{tg}(\beta_B + \mu_B); \quad (7.36)$$

$$y_C - y_A = (x_C - x_A) \operatorname{tg}(\beta_A - \mu_A). \quad (7.37)$$

Графическое решение в физической плоскости приведено на рис. 7.6, а, слева.

Вычисление неизвестных x_C и y_C численным методом не представляет трудностей. Например, из уравнения (7.36) записываем выражение для y_C :

$$y_C = y_B + (x_C - x_B) \operatorname{tg}(\beta_B + \mu_B),$$

подставив которое в (7.37):

$$y_B + (x_C - x_B) \operatorname{tg}(\beta_B + \mu_B) - y_A = (x_C - x_A) \operatorname{tg}(\beta_A - \mu_A),$$

получаем одно уравнение с одной неизвестной величиной x_C :

$$x_C = \frac{y_A - y_B + x_B \operatorname{tg}(\beta_B + \mu_B) - x_A \operatorname{tg}(\beta_A - \mu_A)}{\operatorname{tg}(\beta_B + \mu_B) - \operatorname{tg}(\beta_A - \mu_A)}.$$

Вычислив значение x_C , по формуле (7.36) или (7.37) находим y_C .

Для решения в плоскости годографа воспользуемся уравнениями (7.33) и (7.34), которые запишем с учетом условий (7.35):

$$(\omega_C - \omega_B) - (\beta_C - \beta_B) = 0;$$

$$(\omega_C - \omega_A) - (\beta_C - \beta_A) = 0.$$

Из этой системы с двумя неизвестными достаточно легко найти ω_C и β_C :

$$\omega_C = 0,5(\omega_B + \omega_A + \beta_A - \beta_B),$$

$$\beta_C = 0,5(\beta_B + \beta_A + \omega_A - \omega_B).$$

По вычисленному значению ω_C , используя данные табл. 7.1 или зависимость (7.29), находим соответствующие значения $M_C(\lambda_C)$ и угла μ_C , по которым с помощью соотношений для изэнтропического течения определяем давление p_C , плотность ρ_C , температуру T_C и другие параметры газа в точке C .

Графическое решение в плоскости годографа скорости показано на рис. 7.6, а, справа. Через точки A' и B' (концы векторов скорости в точках A и B) проведем элементы разноименных характеристик, проходящих соответственно через точки A' и B' . Для определения их направления можно использовать свойство нормальности сопряженных характеристик. Как отмечалось ранее, для плоского изэнтропического потока характеристики в плоскости годографа можно построить заранее (сетка эциклоид), а следовательно, при графическом решении выбираем эциклоиды, проходящие через точки A' и B' . Графически по положению точки C' определяем скорость V_C (M_C или λ_C) и угол β_C .

Если расстояние между точками A и B значительное, то полученные результаты можно уточнить. В первом приближении углы $\bar{\mu}_A, \bar{\mu}_B, \tilde{\beta}_A, \tilde{\beta}_B$ вычислим как средние между исходным углом μ_A и рассчитываемым μ_C :

$$\bar{\mu}_A = 0,5(\mu_A + \mu_C); \quad \bar{\mu}_B = 0,5(\mu_B + \mu_C);$$

$$\tilde{\beta}_A = 0,5(\beta_A + \beta_B); \quad \tilde{\beta}_B = 0,5(\beta_B + \beta_C). \quad (7.38)$$

Подставив соотношения (7.38) в уравнения (7.36) и (7.37), находим уточненные значения y_C и x_C .

2. Расчет скорости потока в точке пересечения характеристики с линией на поверхности твердой стенки.

Пусть точка B расположена на пересечении прямолинейного элемента DB характеристики второго семейства, проведенной из точ-

ки D , с контуром стенки (рис. 7.6, б). Скорость по модулю и направлению, а также координаты точки D известны.

Координаты точки $B(x_B, y_B)$ определяем из совместного решения уравнения характеристики второго семейства, проходящей через точку D , и уравнения контура стенки:

$$y_B - y_D = (x_B - x_D) \operatorname{tg}(\beta_D + \mu_B);$$

$$y_B = f(x_B).$$

По вычисленным координатам x_B и y_B , используя уравнения контура стенки, находим угол β_B наклона касательной к контуру:

$$\operatorname{tg} \beta_B = \left(\frac{dy}{dx} \right)_B.$$

Для определения скорости в точке B воспользуемся уравнением (7.34) для характеристик второго семейства в плоскости годографа:

$$\Delta \omega_B + \Delta \beta_B = 0,$$

в котором $\Delta \omega_B = \omega_B - \omega_D$, $\Delta \beta_B = \beta_B - \beta_D$. Поскольку угол β_B уже известен, то

$$\omega_B = \omega_D - \beta_B + \beta_D.$$

Используя данные табл. 7.1 или зависимость (7.29), по вычисленному углу ω_B находим $M_B(\lambda_B)$ и μ_B . Как и в первой задаче, с помощью соотношений для изэнтропического течения определяем остальные параметры газового потока в точке B (p_B, ρ_B, T_B и др.).

При графическом решении этой задачи (см. рис. 7.6, б, слева) в физической плоскости через точку D проводим линию под углом $\beta_B - \mu_D$ до пересечения со стенкой в точке B и определяем угол наклона касательной к стенке в найденной точке. Для вычисления скорости в точке B в плоскости годографа (см. рис. 7.6, б, справа) из начала координат O' проводим луч под углом β_B , а из точки D' — характеристику второго семейства до пересечения с упомянутым лучом в точке B' . Длина отрезка $O'B'$ определяет скорость $V_C(\lambda_C)$.

3. Вычисление скорости в точке пересечения характеристики с линией фронта скачка уплотнения и определение изменения угла наклона скачка в этой точке. (Поскольку по своей природе характеристика является линией слабых возмущений, такое пересечение физически соответствует взаимодействию слабой волны со скачком уплотнения.)

Пусть на скачок уплотнения MN заданной формы $y = f(x)$ (рис. 7.6, в) падают в точках S и H близко расположенные волны разрежения, которым соответствуют характеристики первого семейства. Поскольку точки S и H являются источниками возмущений, возникнут отраженные волны разрежения и через эти точки можно провести характеристики второго семейства. Исходящая из точки S характеристика второго семейства пересечет падающую характеристику первого семейства, попадающую в точку H , в точке F , называемой *узлом характеристик*.

Для определения изменения наклона скачка и скорости за ним воспользуемся свойством характеристик SF и FH (см. рис. 7.6, в, слева). В первом приближении скачок за точкой S можно принять прямолинейным с углом наклона $\theta_{скS}$ в этой точке, а параметры газа в точке H пересечения элемента FH характеристики первого семейства со скачком — равными их значениям в точке S .

Неизвестный угол наклона β_H вектора скорости в точке H можно определить, используя соотношение для элемента характеристики FH :

$$\Delta\beta_F = \beta_H - \beta_F,$$

откуда

$$\beta_H = \beta_F + \Delta\beta_F,$$

где $\Delta\beta_F$ — угол наклона вектора скорости в точке F . Число M_H в точке H найдем по формуле

$$M_H = M_S + \left(\frac{dM}{d\beta} \right)_S \Delta\beta_{SH}, \quad (7.39)$$

в которой $\left(\frac{dM}{d\beta} \right)_S$ — производная, вычисляемая по зависимостям теории скачка уплотнения для условий в точке S ; $\Delta\beta_{SH} = \beta_H - \beta_S$ — изменение угла β вдоль элемента SH скачка, в первом приближении можно принять $\Delta\beta_{SH} = \Delta\beta_{FH}$.

Для косо́го скачка

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\beta} = \frac{dM_2}{d\beta_S} = & -M_2 \left[\operatorname{ctg}(\theta_{ск} - \beta_S) \left(\frac{d\theta_{ск}}{d\beta_S} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{M_2^2}{2(1-\delta)} \sin^2(\theta_{ск} - \beta_S) \frac{d}{d\beta_S} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\frac{d}{d\beta_S} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = 2 \operatorname{ctg} \theta_{\text{ск}} \left(1 - \delta \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{d\theta_{\text{ск}}}{d\beta_S};$$

$$\frac{d\theta_{\text{ск}}}{d\beta_S} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[2 \cos^2 (\theta_{\text{ск}} - \beta_S) \left(1 - \delta \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - \frac{\cos^2 (\theta_{\text{ск}} - \beta_S)}{\cos^2 \theta_{\text{ск}}} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right]^{-1}.$$

Для элемента FH первого семейства справедливо соотношение $\Delta M_F = M_H - M_F$, которое с учетом выражения (7.39) имеет вид

$$\Delta M_F = M_S + \left(\frac{dM}{d\beta} \right)_S \Delta \beta_F - M_F.$$

От числа M можно перейти к функции ω :

$$\Delta \omega_F = \omega_S \left(\frac{d\omega}{d\beta} \right)_S \Delta \beta_F - \omega_F. \quad (7.40)$$

Здесь

$$\left(\frac{d\omega}{d\beta} \right)_S = \left(\frac{dM}{d\beta} \right)_S \left(\frac{d\omega}{dM} \right)_S,$$

а производную $\left(\frac{d\omega}{dM} \right)_S$ находим путем дифференцирования (7.29):

$$\frac{d\omega}{dM} = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M [1 + (k - 1) M^2 / 2]}.$$

Используя уравнение (7.33) для элемента FH характеристики первого семейства в плоскости годографа, получаем

$$\Delta \omega_F - \Delta \beta_F = 0, \quad (7.41)$$

где $\Delta \omega_F = \omega_H - \omega_F$; $\Delta \beta_F = \beta_H - \beta_F$.

Решая уравнения (7.40) и (7.41) относительно $\Delta \beta$, находим

$$\Delta \beta_F = \frac{\omega_F - \omega_S}{\left(\frac{d\omega}{d\beta} \right)_S - 1}.$$

Проведя вычисления и подставив значение $\Delta \beta_F$ в формулу (7.40), определяем $\Delta \omega_F$, углы $\beta_H = \beta_F + \Delta \beta_F$ и $\omega_H = \omega_F + \Delta \omega_H$, а также

уточняем число M_H . По известным значениям M_∞ и β_H , используя теорию скачка уплотнения, находим новый угол $\theta_{скH}$ наклона скачка уплотнения в точке H , т. е. уточняем его форму на участке SH . При необходимости расчеты можно выполнить во втором приближении, принимая вместо параметров в точке S их среднее значение между точками S и H . Например, вместо углов ω_S и β_S использовать соответственно $0,5(\omega_S + \omega_H)$ и $0,5(\beta_S + \beta_H)$.

На рис. 7.6, в, справа приведена схема графического решения в плоскости годографа. Точка H' получена в результате пересечения характеристики первого семейства, проходящей через точку F' , с ударной полярой, построенной для заданного числа $M_\infty(\lambda_\infty)$. Вектор $O'H'$ определяет скорость в точке $H(\lambda_H)$, а дополнительные построения позволяют найти и угол скачка $\theta_{скH}$.

Проведенные расчеты и построения показывают, что в результате взаимодействия слабой волны со скачком происходит уменьшение его интенсивности, а следовательно, и угла наклона. Для повышения точности расчетов целесообразно учитывать изменение энтропии (или давления торможения) при перемещении вдоль криволинейного скачка уплотнения, используя зависимость (7.31) или (7.32).

Метод характеристик позволяет решить одну из важнейших задач газодинамики, связанную с определением формы сопла аэродинамической трубы, которая обеспечивает движение плоского параллельного потока с заданной скоростью. Такое сопло представляет собой насадок, у которого боковые стенки плоские, а верхняя и нижняя имеют спрофилированный контур (рис. 7.7).

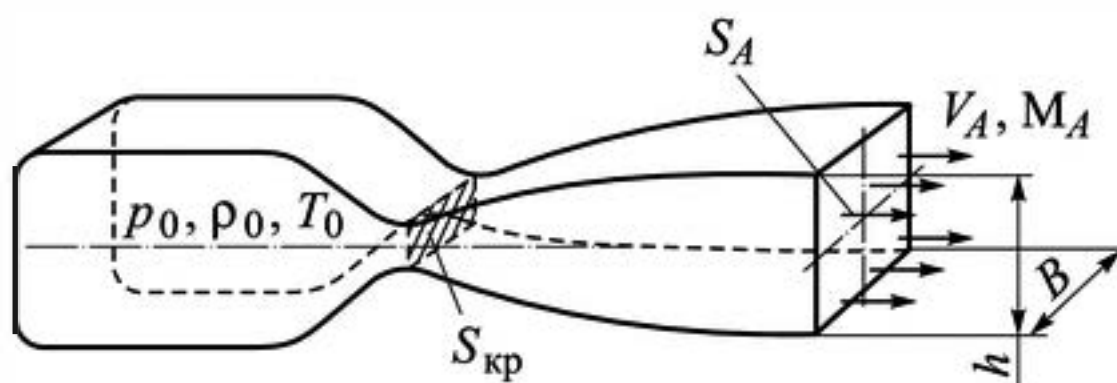


Рис. 7.7. Сопло сверхзвуковой трубы

Обычно заданными являются параметры газа на выходе из сопла — числа M_∞ и M_A , площадь выходного сечения S_A . По известной газодинамической функции q рассчитываем площадь критического сечения сопла

$$S_{кр} = q_A S_A.$$

Затем задаем угол 2γ раскрытия непрофилированного сопла, который обычно равен $30...35^\circ$. При малых углах раскрытия увеличивается длина сопла. Это приводит к тому, что вследствие образования плоского пограничного слоя уменьшается полезное сечение сопла. При больших углах раскрытия может произойти срыв потока, что исключает возможность применения сопла в экспериментальных целях.

Сначала строим непрофилированное плоское сверхзвуковое сопло с радиальным потоком из источника, расположенного в точке O (рис. 7.8, а). Длину дозвукового участка единичной ширины определяем из условия

$$r_{кр} = \frac{S_{кр}}{b} \frac{360^\circ}{2\pi \cdot 2\gamma},$$

а расстояние до выходного сечения

$$r_A = \frac{S_A}{b} \frac{360^\circ}{2\pi \cdot 2\gamma},$$

где b — ширина сопла.

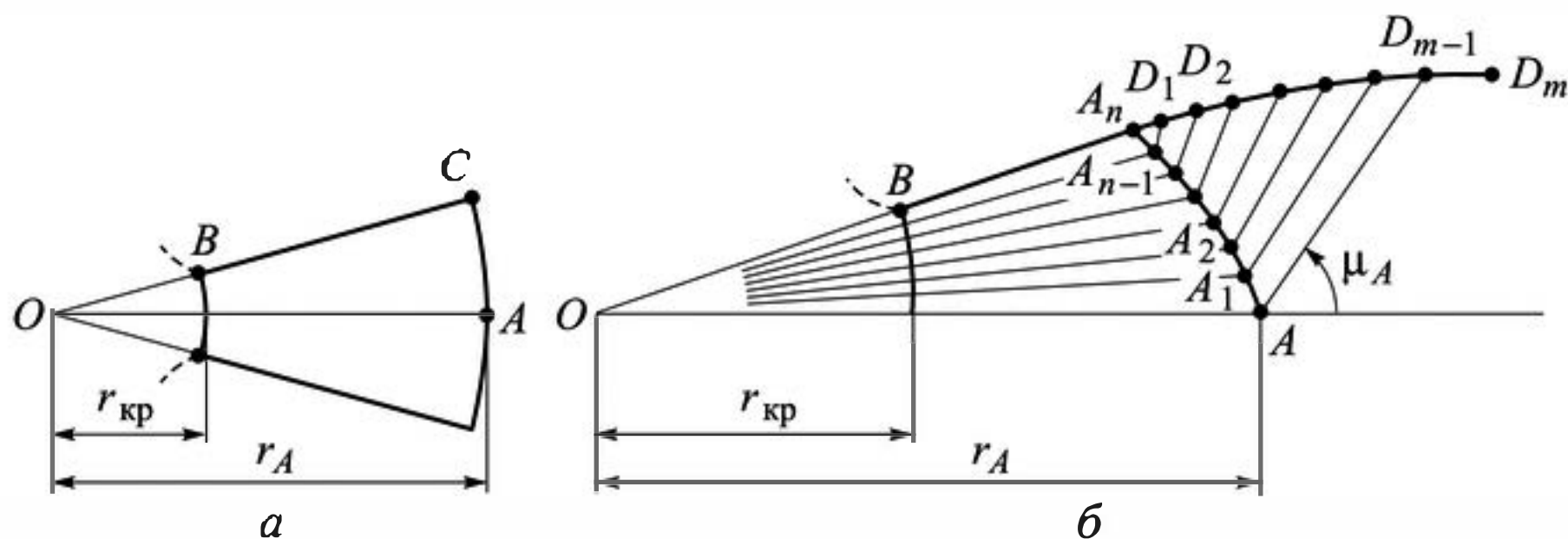


Рис. 7.8. Построение профилированного сверхзвукового плоского сопла:
а — разгонный участок; б — профилированная часть сопла

На участке сопла, ограниченном дугами окружностей радиусами $r_{кр}$ и r_A , поток будет сверхзвуковым. Профилирование сопла состоит в том, чтобы прямолинейную стенку BC заменить криволинейным контуром, обеспечивающим постепенный перевод потока в плоскопараллельное течение на выходе с заданной скоростью. Для этого из точки O проводим лучи, разбивающие угол γ . Из точки A под углом $\mu_A = \arcsin(1/M_A)$ строим характеристики первого и второго семейств до пересечения с ближайшим лучом в точке A_1 (рис. 7.8, б).

По радиусу $r_1 = OA_1$ рассчитываем площадь сопла с радиальным потоком $S_1 = b2\pi r_1 \cdot 2\gamma/360^\circ$ и значение функции $\varphi_1 = S_{кр}/S_1$. Используя зависимости для одномерного изэнтропического течения определяем M_1 , λ_1 и угол $\mu_1 = \arcsin(1/M_1)$. Из точки A_1 под углом μ_1 к лучу OA_1 проводим характеристики первого и второго семейств до пересечения со следующим ближайшим лучом в точке A_2 . Выполняя вычисления и построения, аналогичные описанным для точки A_1 , переходим к следующим лучам и находим точки $A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$. Если теперь провести линию тока, проходящую через точку A_n , то она и будет определять профилированный контур сопла. Начальный участок этой линии совпадает с направлением скорости в точке A_n , т. е. является продолжением контура BA_n до точки D_1 пересечения с характеристикой первого семейства, проходящей через точку A_{n-1} . Поскольку характеристика $A_{n-1}D_1$ является прямолинейной, вектор скорости в точке D_1 должен быть параллелен вектору скорости в точке A_{n-1} , т. е. лучу OA_{n-1} . В соответствии с этим продолжаем за точкой D_1 линию тока до пересечения со следующей характеристикой в точке D_2 .

Аналогично строим следующие отрезки линии тока до точки D_m пересечения с характеристикой первого семейства, проходящей через точку A . Отрезок $D_{m-1}D_m$ будет параллелен лучу OA_1 . За точкой D_m участок линии тока параллелен оси сопла. Для этого контур сопла продолжаем до точки D_{m+1} , расположенной на линии, параллельной оси сопла на незначительном расстоянии от точки D_m (см. рис. 7.8, б).

Рассмотренный метод профилирования не учитывает влияние на форму контура сопла пограничного слоя. Приблизительно это можно учесть, если контур сопла увеличить на толщину вытеснения и на выходе отклонить от оси сопла на угол $10...20'$.

Используя уравнения для характеристик пространственного осесимметричного потока, по аналогии можно спрофилировать контур (образующую) круглого сопла, обеспечивающий получение на выходе равномерного осесимметричного сверхзвукового потока с заданной скоростью.

Особое место занимает расчет обтекания сверхзвуковым потоком угла более 180° (рис. 7.9). Стенка 2 отклонена на некоторый угол β относительно стенки 1.

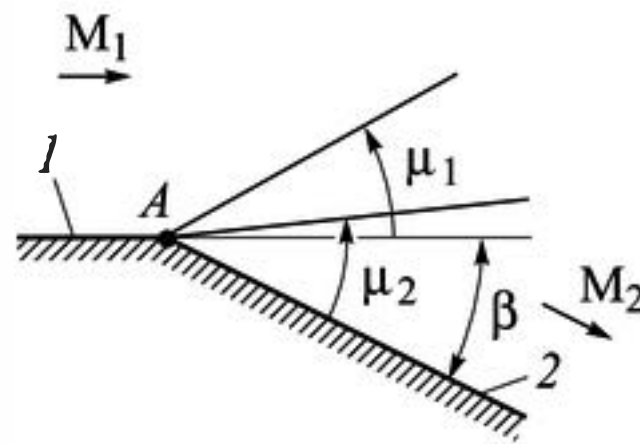


Рис. 7.9. Схема обтекания тупого угла

Поскольку газовый поток является равномерным, характеристика первого семейства, выходящая из угловой точки A под углом $\mu_1 = \arcsin(1/M_1)$, будет прямой линией. Для определения параметров газа на поверхности 2 следует решить вторую задачу: выбрать точку на характеристике первого семейства в непосредственной близости от точки A и через нее провести характеристику второго семейства до пересечения со стенкой 2. При этом следует учесть, что известен угол $\Delta\beta_1$ поворота вектора скорости, равный углу β отклонения поверхности 2 относительно поверхности 1, т. е. $\Delta\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 = \beta$. Используя уравнение для характеристик в плоскости годографа, получаем $\Delta\omega_1 = \Delta\beta_1 = \beta$, а поскольку $\Delta\omega_1 = \omega_2 - \omega_1$, угол $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega = \omega_1 + \beta$.

По найденному значению угла ω_2 с помощью табл. 7.1 или зависимости (7.29) вычисляем соответствующие значения M_2 , λ_2 и μ_2 . Применяя теорию изэнтропического течения и учитывая, что параметры торможения не меняются, легко рассчитать параметры газа на поверхности 2 (см. рис. 7.9).

Метод расчета такого течения получил в аэродинамике название метода Прандтля – Майера. Его применяют для расчета параметров потока на криволинейной стенке, обтекаемой плоским равномерным потоком. В этом случае определяют угол $\Delta\beta_i$ отклонения потока в i -й точке относительно начальной: $\Delta\beta_i = \beta_i - \beta_0$, где β_i — угол наклона касательной в i -й точке; β_0 — начальный угол направления вектора скорости. Далее по формуле $\omega_i = \omega_0 + \Delta\beta_i$ вычисляют соответствующий угол ω_i , по которому находят M_i , λ_i и другие параметры потока.

7.2. Метод линеаризации

Для случая движения несжимаемой среды уравнение (2.46) потенциала скорости представляет собой одно из наиболее простых уравнений в частных производных второго порядка. Однако для изэнтропического течения идеального газа оно весьма сложное и точное его интегрирование при заданных граничных условиях часто представляет непреодолимые математические трудности. При таком положении вещей определить потенциал скорости (поле скоростей) для интересующих течений идеального газа можно двумя путями: 1) решить уравнение (2.46) приближенно, т. е. найти такие функции ϕ , которые удовлетворяли бы этому уравнению с большей

или меньшей ошибкой; 2) заменить точное (в рамках принятой модели) уравнение потенциала скорости более простым приближенным, которое можно решить точно. В первом случае примером является решение уравнения (2.46) методом характеристик. Для второго случая получим приближенную форму уравнения потенциала скорости, которую используют для исследования широкого класса задач.

Предположим, что изучаемое движение мало отличается от основного, т. е. оно получено в результате малых возмущений основного потока. В этом случае уравнения, описывающие движение газа, можно записать в линейном виде. Такой прием упрощения называется *линеаризацией*, а метод исследования движения, основанный на линеаризованных уравнениях, — *методом малых возмущений*.

В аэродинамике часто изучают обтекание так называемых тонких тел, у которых один или два размера значительно меньше третьего (крыло самолета, ракета и т. п.). Если такие тела размещены под небольшими углами по отношению к невозмущенному течению, то можно допустить, что вблизи обтекаемой поверхности скорость потока мало отличается от его скорости на бесконечности. Очевидно, что в этом случае давление, плотность, скорость звука и другие параметры также будут слабо отличаться от параметров невозмущенного течения.

Допущение о малости искомых функций позволяет провести линеаризацию задачи, которая сводится к следующему. Принимают, что искомые функции имеют первый порядок малости. Во всех уравнениях, описывающих движение газа, и соотношениях, выражающих начальные и граничные условия, отбрасывают величины, у которых порядок малости больше первого. В результате все уравнения становятся линейными.

В некоторых частных случаях можно без каких-либо приближений преобразовать нелинейные уравнения к линейным путем перехода к новым специально выбранным независимым переменным.

Линеаризуем уравнение (2.46) для случая обтекания тонкого тела, размещенного под небольшим углом атаки. Согласно методу линеаризации, составляющие скорости вблизи поверхности тела можно записать так:

$$V_x = V_\infty + V'_x; \quad V_y = V'_y,$$

где V'_x, V'_y — составляющие скорости возмущенного течения (малые величины).

Возведя в квадрат V_x , V_y и ограничившись величинами первого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} V_x^2 &= (V_\infty + V'_x)^2 = V_\infty^2 + 2V_\infty V'_x + V'^2_x \approx V_\infty^2 + 2V_\infty V'_x; \\ V_y^2 &= V'^2_y \approx 0; \\ V^2 &= V_x^2 + V_y^2 = V_\infty^2 + 2V_\infty V'_x. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Найдем выражение для скорости звука, входящей в уравнение (2.46). Поскольку

$$a_\infty^2 = \frac{k-1}{2}(V_{\max}^2 - V_\infty^2); \quad a^2 = \frac{k-1}{2}(V_{\max}^2 - V^2),$$

то

$$a^2 - a_\infty^2 = \frac{k-1}{2}(V_\infty^2 - V^2). \quad (7.43)$$

Подставляя в уравнение (7.43) выражения (7.42), получаем

$$a^2 - a_\infty^2 = \frac{k-1}{2}(V_\infty^2 - V_\infty^2 - 2V_\infty V'_x).$$

Откуда скорость звука

$$a^2 = a_\infty^2 - (k-1)V_\infty V'_x.$$

С учетом полученных соотношений уравнение (2.46) принимает вид

$$\begin{aligned} &\left[V_\infty^2 + 2V_\infty V'_x - a_\infty^2 + (k-1)V_\infty V'_x \right] \frac{\partial V'_x}{\partial x} + \left[V_y^2 - a_\infty^2 + (k-1)V_\infty V'_x \right] \frac{\partial V'_y}{\partial y} + \\ &+ (V_\infty + V'_x)V'_y \left(\frac{\partial V'_x}{\partial y} + \frac{\partial V'_y}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned}$$

При обтекании тонких прямых или слабоизогнутых тел под малым углом атаки можно считать, что производные $\partial V'_x/\partial x$, $\partial V'_y/\partial y$, $\partial V'_x/\partial y$, $\partial V'_y/\partial x$ имеют первый порядок малости. Тогда, пренебрегая величинами большего порядка малости, получаем

$$(V_\infty^2 - a_\infty^2) \frac{\partial V'_x}{\partial x} - a_\infty^2 \frac{\partial V'_y}{\partial y} = 0$$

или после деления на a_∞^2 и перехода к числу Маха ($M_\infty = V_\infty/a_\infty$)

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial V'_x}{\partial x} - \frac{\partial V'_y}{\partial y} = 0. \quad (7.44)$$

Уравнение (7.44) представляет собой *линеаризованное кинематическое уравнение аэрогазодинамики*.

Для потенциального течения выразим составляющие скоростей V'_x , V'_y и их производные через потенциал ϕ' :

$$V'_x = \frac{\partial \phi'}{\partial x}; \quad V'_y = \frac{\partial \phi'}{\partial y}; \quad \frac{\partial V'_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial V'_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2}.$$

Тогда выражение (7.44) примет вид линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = 0. \quad (7.45)$$

В случае дозвукового потока ($M_\infty < 1$) это уравнение является эллиптическим, а в случае сверхзвукового потока ($M_\infty > 1$) — гиперболическим.

Перейдя к независимым переменным

$$x = x_1 \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad y = y_1,$$

при $M_\infty < 1$ получаем уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y_1^2} = 0,$$

для которого применимы известные методы решения.

При $M_\infty > 1$ никакой вещественной заменой независимых переменных уравнение (7.46) не может быть приведено к уравнению Лапласа. Однако для плоского сверхзвукового течения введением переменных $\xi = y - x \operatorname{tg} \mu$, $\eta = y + x \operatorname{tg} \mu$ можно уравнение (7.46) преобразовать к виду

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (7.46)$$

В этом случае решение

$$\phi' = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (7.47)$$

где $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ — некоторые функции.

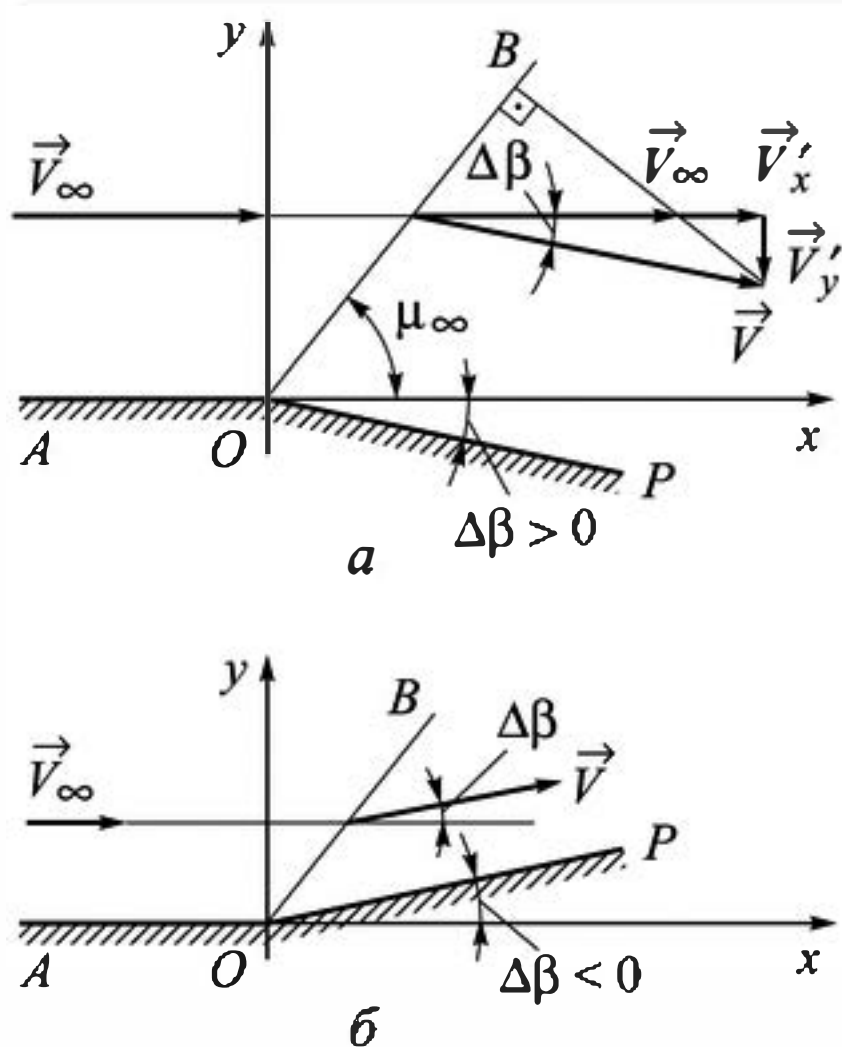


Рис. 7.10. Поворот сверхзвукового потока на малый угол

Рассмотрим теперь безотрывное обтекание сверхзвуковым потоком угла, близкого к 180° . Будем в дальнейшем называть угол AOP (рис. 7.10, а) *внешним*, если он больше 180° , и *внутренним* (рис. 7.10, б), если он меньше 180° .

Пусть поток первоначально движется параллельно стенке OA вдоль оси Ox . Отклонение стенки OP относительно OA на угол $\Delta\beta$ вызовет разворот всего потока в точке O на тот же угол $\Delta\beta$. При этом при обтекании внешнего угла образуется волна разрежения, а при обтекании внутреннего угла — волна сжатия. Угол наклона слабых волн в сверхзвуковом потоке

для обеих структур течения равен μ_∞ . Примем для внешнего угла значение $\Delta\beta > 0$, а для внутреннего — $\Delta\beta < 0$.

Поскольку угол $\Delta\beta$ мал, к рассматриваемому слабовозмущенному течению можно применить линеаризованное уравнение (7.46). В соответствии с особенностью распространения возмущений в сверхзвуковом потоке в рассматриваемом случае возмущения от точек плоскости OP могут распространяться только вдоль линий возмущения $\xi = \text{const}$, т. е. вниз по течению. Поэтому решение $f_2(\eta)$ в данном случае физически невозможно и, согласно (7.47), потенциал скорости возмущенного движения примет вид

$$\phi' = f_1(\xi).$$

Определим вид функции $f_1(\xi)$. Для этого разложим вектор скорости в возмущенной области на касательную и нормальную к волне OB составляющие (см. рис. 7.10) и запишем граничное условие на поверхности стенки OP :

$$\frac{V'_y}{V_\infty + V'_x} = -\text{tg } \Delta\beta.$$

Отбрасывая величины второго порядка малости, получаем

$$V'_y = -V_\infty \text{tg } \Delta\beta. \quad (7.48)$$

При $f_2(\eta)=0$ скорость $V'_y = f'_1(\xi) = \frac{df_1(\xi)}{d\xi}$ или с учетом зависимости (7.48)

$$\frac{df_1(\xi)}{d\xi} = -V_\infty \operatorname{tg} \Delta\beta.$$

Отсюда с точностью до постоянной

$$f_1(\xi) = -V_\infty \Delta\beta \xi = -V_\infty \Delta\beta (y - x \operatorname{tg} \mu_\infty),$$

где $\operatorname{tg} \mu_\infty = 1/\sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

Окончательное выражение для потенциала скорости возмущенного движения имеет вид

$$\phi' = -V_\infty \Delta\beta (y - x \operatorname{tg} \mu_\infty).$$

Поскольку

$$V'_x = \frac{\partial \phi'}{\partial x} = V_\infty \operatorname{tg} \mu_\infty \Delta\beta; \quad V'_y = \frac{\partial \phi'}{\partial y} = -V_\infty \Delta\beta, \quad (7.49)$$

можно определить скорости в возмущенной области:

$$V_x = V_\infty + V'_x = V_\infty (1 + \operatorname{tg} \mu_\infty \Delta\beta) = \operatorname{const};$$

$$V_y = V'_y = -V_\infty \Delta\beta = \operatorname{const}.$$

Таким образом, поток правее линии OB является прямолинейным и равномерным со скоростью, параллельной плоскости OP .

Получим выражение для коэффициента давления в области возмущенного течения. Для этого воспользуемся уравнением Бернулли в дифференциальной форме:

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0.$$

С точностью до величин второго порядка малости дифференциалы равны приращениям:

$$dp = p - p_\infty; \quad d\left(\frac{V^2}{2}\right) = \frac{V^2 - V_\infty^2}{2}.$$

Тогда уравнение Бернулли можно записать так:

$$\frac{p - p_\infty}{\rho} + \frac{V^2 - V_\infty^2}{2} = 0.$$

Поскольку в возмущенной области значения всех параметров мало отличаются от их значений в невозмущенной области:

$$V_x = V_\infty + V'_x; \quad V_y = V'_y;$$

$$p = p_\infty + p'; \quad \rho = \rho_\infty + \rho',$$

то

$$\frac{p - p_\infty}{\rho} = \frac{p'}{\rho_\infty + \rho'} = \frac{p'}{\rho_\infty} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_\infty} \right)^{-1} = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty}$$

и в соответствии с выражением (7.42)

$$V^2 - V_\infty^2 = V_\infty^2 - (V_\infty^2 + 2V_\infty V'_x) = -2V_\infty V'_x.$$

Давление в возмущенной области

$$p = p_\infty - \rho_\infty V_\infty V'_x.$$

Вводя коэффициент давления $\bar{p} = 2(p - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2)$, можно записать линеаризованное уравнение

$$\bar{p} = -2V'_x/V_\infty.$$

Таким образом, зная скорость возмущенного течения, можно приближенно оценить изменение давления потока.

Согласно (7.49), для $\Delta\beta > 0$ составляющая $V'_x > 0$, а $V'_y < 0$, и, следовательно, скорость потока в возмущенной области при обтекании внешнего угла больше, чем в невозмущенном потоке. При $\Delta\beta < 0$ составляющая скорости $V'_x < 0$, а $V'_y > 0$, что свидетельствует о торможении потока при обтекании внутреннего угла.

Если угол AOP обтекается в нижней полуплоскости, то линиями распространения возмущений были бы линии $\eta = \text{const}$. В этом случае составляющие скорости возмущенного потока можно вычислить по соотношениям

$$V'_x = -V_\infty \operatorname{tg} \mu_\infty \Delta\beta; \quad V'_y = -V_\infty \Delta\beta,$$

а потенциал скорости

$$\varphi' = -V_\infty \Delta\beta (y + x \operatorname{tg} \mu_\infty).$$

Согласно полученным формулам, изменение скорости и давления при переходе через волну OB для обоих случаев происходит скачкообразно. В действительности скачкообразное изменение параметров потока может происходить только при его торможении. Такое расхождение полученных результатов с физической структу-

рой течения связано с приближенным характером теории, которая дает удовлетворительные результаты при рассмотрении малых возмущений. В общем случае, когда сверхзвуковой поток разворачивается на угол, который нельзя считать малым, линейная теория является неприемлемой.

7.3. Метод конечных разностей (метод сеток)

Различные формы записи дифференциальных уравнений газовой динамики

Введем широко принятые в численных методах обозначения для компонент вектора скорости $\vec{V}$: $V_x = u$, $V_y = v$, $V_z = w$. Тогда модуль скорости $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$.

Рассмотрим систему уравнений движения невязкого нетеплопроводного газа без учета массовых сил (см. гл. 2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) &= 0; \\ \rho \frac{d\vec{V}}{dt} &= -\operatorname{grad} p; \\ \rho \frac{d(e + V^2/2)}{dt} &= -\operatorname{div}(p\vec{V}).\end{aligned}\tag{7.50}$$

Приведем эту систему уравнений к *дивергентной консервативной форме записи*, внешняя отличительная особенность которой — отсутствие функциональных коэффициентов при производных. Такую форму уравнений газовой динамики используют обычно при расчете течений, содержащих поверхности сильных разрывов (ударные волны, контактные разрывы). Как будет показано ниже, она удобна для преобразований интегралов по площади контрольной ячейки к интегралам по контуру этой ячейки.

Из первого уравнения системы (7.50) следует, что уравнение неразрывности уже имеет дивергентную форму. Преобразуем уравнение сохранения импульса в проекции на ось Ox декартовой системы координат:

$$\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Добавим и вычтем отдельные слагаемые, чтобы плотность ρ и компонента u скорости находились под знаком частной производной:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \\ & + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - u \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} - u \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ & = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \\ & - u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] = 0. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в скобках представляет собой уравнение неразрывности, поэтому в проекции на ось Ox в дивергентной форме уравнение движения будет выглядеть так:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} = 0.$$

Аналогично можно преобразовать уравнения движения в проекциях на оси Oy и Oz и уравнение энергии. Таким образом, окончательно система дифференциальных уравнений газовой динамики в дивергентной форме имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0; \\ & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} = 0; \\ & \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial z} = 0; \\ & \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial z} = 0; \\ & \frac{\partial(E)}{\partial t} + \frac{\partial[(E + p)u]}{\partial x} + \frac{\partial[(E + p)v]}{\partial y} + \frac{\partial[(E + p)w]}{\partial z}, \end{aligned} \tag{7.51}$$

где E — полная энергия единицы объема газа, $E = \rho(e + V^2/2)$.

Наряду с дивергентной формой часто применяют квазилинейную форму записи уравнений сохранения, когда под знаком частной производной величины u , v , w , ρ и p стоят только в первой степени, а коэффициенты перед производными могут зависеть от неизвестных функций. Эту запись можно получить путем комбинирования уравнений системы (7.51). Результат представим, используя матричную форму записи:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = 0, \quad (7.52)$$

где $\mathbf{f}$ — вектор-столбец неизвестных; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — квадратные матрицы:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ \rho \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ \rho a^2 & 0 & 0 & u & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & \rho a^2 & 0 & v & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & v \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \rho a^2 & w & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & w \end{bmatrix};$$

a — скорость звука.

Первые три уравнения системы (7.52) представляют собой проекции уравнения движения на оси декартовой системы координат, четвертое — уравнение энергии, пятое — уравнение неразрывности. Уравнение энергии в данной записи имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho a^2 \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

После перегруппировки получаем

$$\frac{dp}{dt} + \rho a^2 \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (7.53)$$

Приведем это уравнение к более привычному виду, представленному, например, в системе (7.50). Согласно первому закону термодинамики, записанному для единицы массы газа при изоэнтропическом процессе,

$$de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

Представляя дифференциал удельного объема в виде

$$d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2} d\rho$$

и используя соотношение $a^2 = dp/d\rho$, получаем вспомогательное выражение $\rho a^2 = \frac{p}{\rho de/d\rho}$, подставив которое в уравнение (7.53), окончательно находим

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (7.54)$$

Преобразуем второе слагаемое, воспользовавшись известной формулой векторного анализа,

$$p \operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{div}(p \vec{V}) - \vec{V} \operatorname{grad} p.$$

Заменим градиент давления согласно второму уравнению системы (7.50):

$$-\vec{V} \operatorname{grad} p = \vec{V} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right).$$

Объединив две последние формулы и подставив их в выражение (7.54), получим

$$\rho \frac{de}{dt} + \operatorname{div}(p \vec{V}) + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = 0,$$

или

$$\rho \frac{d(e + V^2/2)}{dt} = -\operatorname{div}(p\vec{V}),$$

что совпадает с обычным вариантом записи уравнения энергии.

Основные понятия метода сеток

Как показано выше, типичную задачу газовой динамики формулируют в виде системы нелинейных (в лучшем случае квазилинейных) уравнений, краевые условия нередко записывают на заранее неизвестных границах, а при решении могут встречаться особые точки и уравнения могут изменять свой тип в расчетной области.

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений принципиально различных постановок задач относительно немного; имеются теоретически исследованные и практически отработанные алгоритмы, позволяющие эффективно решать большинство таких задач. Некоторые численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений были разработаны еще в XIX в. (например, методы Эйлера и Адамса).

Для уравнений в частных производных число принципиально различных постановок задач существенно больше, при этом существует очень малое количество задач, решаемых в явном виде. Поэтому теория численных методов для уравнений в частных производных содержит много направлений.

Раньше для практического решения задач в частных производных применяли в основном вариационные и другие методы, в которых приближенное решение получали в виде некоторой аналитической формулы. Их развитием на современном этапе являются вариационно- и проекционно-разностные методы, например *метод конечных элементов*.

К настоящему времени наибольшее распространение для решения задач газовой динамики получил *метод сеток* — собирательное название группы приближенных методов решения дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений. Применительно к дифференциальным уравнениям в частных производных термин «метод сеток» используют в качестве синонима терминов «метод конечных разностей» и «разностный метод». Широкое применение метода сеток объясняется его универсальностью и сравнительной простотой реализации на ЭВМ.

Разностный метод сводит решение системы уравнений в частных производных к решению системы алгебраических (линейных) уравнений. В этом его отличие, например, от метода прямых и метода характеристик, которые сводят решение системы дифференциальных уравнений в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение осуществляют в три этапа.

1. Область непрерывного изменения аргумента (или аргументов) заменяют конечным дискретным множеством точек, называемых *разностной сеткой*. В разностной сетке выделяют внутренние и граничные узлы. Решение ищут во внутренних узлах, а в граничных узлах значение искомой функции задают при аппроксимации граничных условий исходной дифференциальной задачи. Функция дискретного аргумента, определенная на разностной сетке, называется *сеточной функцией*.

2. Дифференциальное уравнение и граничные условия заменяют по определенным правилам разностными аналогами. Разностные операторы, соответствующие дифференциальному уравнению, записывают во внутренних узлах сетки, а граничным условиям — в ее граничных узлах. В результате получают систему алгебраических уравнений, число которых пропорционально числу внутренних узлов разностной сетки.

3. Решают систему алгебраических уравнений каким-либо из известных методов. В большинстве случаев получаемая система уравнений есть система линейных алгебраических уравнений достаточно большого порядка, но с весьма разреженной матрицей. В случае нелинейных систем итерационные процедуры, как правило, сводят их к линейным системам.

Начальные элементы метода сеток рассмотрим на примере простейшего эволюционного (содержащего время в качестве независимого переменного) уравнения переноса, которое является модельным для многих уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (7.55)$$

Требуется определить решение в некоторой области G по условиям, заданным на определенных частях ее границы Γ . Это могут быть начальные условия (задача Коши) или начальные и граничные условия (краевая задача).

Как было отмечено выше, исходным пунктом при построении разностной схемы является построение разностной сетки. Важным частным случаем является равномерная прямоугольная сетка (t^n, x_m) , где $t^n = t^0 + n\Delta t$; $x_m = x_0 + m\Delta x$; $\Delta t, \Delta x$ — положительные числа, называемые *шагами* сетки по t и по x ; n, m — целые числа (рис. 7.11).

Для краткости обозначим $\Delta t = \tau$, $\Delta x = h$. Тогда совокупность рассматриваемых узлов сетки будет $G_{\tau, h}$ (сечочная область). Во многих случаях полагают $\tau = \tau(h)$ (т. е. шаг по времени зависит от шага по вещественной координате). В этом случае сетка определяется одним параметром h : $G_{\tau, h} = G_h$. При использовании равномерной прямоугольной сетки оказывается удобным следующее обозначение: $u(n\tau, mh) = u_m^n$. Совокупность узлов, соответствующих какому-либо фиксированному значению n , называют *слоем*.

Вопрос о построении оптимальной сетки является очень важным. С одной стороны, число узлов сетки желательно брать как можно большим, точнее аппроксимируя непрерывное решение сеточными функциями. С другой стороны, необходимость получения решения за разумный промежуток времени на ЭВМ с ограниченным быстродействием заставляет укрупнять сетку. Одним из путей разрешения данного противоречия является использование неравномерной сетки, количество узлов которой в области резкого изменения определяемых параметров увеличивается, а в областях гладкого решения, наоборот, уменьшается (рис. 7.12). Данный подход удобен, когда заранее известно, где в пространстве решения задачи имеются такие особенности. Если же сама структура физического процесса выстраивается при решении задачи, то такой подход

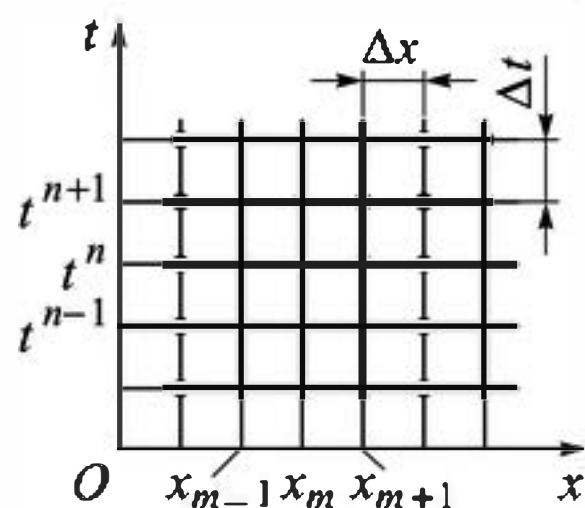


Рис. 7.11. Дискретизация области решения

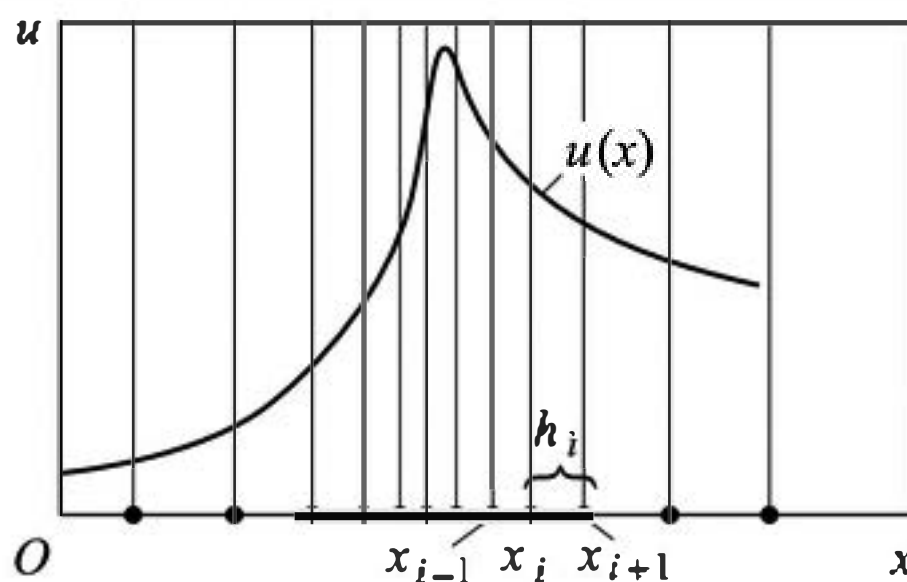


Рис. 7.12. Пример неравномерной сетки

не применим. В этом случае возможно использование так называемых *адаптивных сеток*, которые строят и изменяют непосредственно в процессе решения задачи.

Основная идея метода сеток заключается в том, что дифференциальное уравнение, начальные и краевые условия заменяют (аппроксимируют) сеточными уравнениями, связывающими значения искомой функции в узлах сетки. Сеточные уравнения, как и сама сетка, зависят от параметра h . Эту совокупность сеточных задач называют *разностной схемой*.

Центральным моментом в построении разностной схемы является переход от дифференциальных уравнений, описывающих движение сплошной среды, к соответствующим соотношениям для сеточных функций.

Частная производная по x от функции $u(x, t)$ непрерывных аргументов определяется как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}. \quad (7.56)$$

При определении разностной производной вместо отношения бесконечно малых берут отношения конечных разностей. Пусть x_{m-1}, x_m, x_{m+1} — три последовательных узла равномерной разностной сетки на одном временном слое n . Для аппроксимации производной (7.56) в узле x_m на n -м временном слое возможно использование различных соотношений:

односторонней правой (производная вперед) разностной производной

$$u_x = \frac{u(x_{m+1}, t^n) - u(x_m, t^n)}{x_{m+1} - x_m} = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}, \quad (7.57)$$

односторонней левой (производная назад) разностной производной

$$u_x = \frac{u(x_m, t^n) - u(x_{m-1}, t^n)}{x_m - x_{m-1}} = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}, \quad (7.58)$$

двусторонней (центральной) разностной производной

$$u_x = \frac{u(x_{m+1}, t^n) - u(x_{m-1}, t^n)}{x_{m+1} - x_{m-1}} = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h}.$$

Вторая разностная производная может быть получена как производная от первой разностной производной:

$$u_{xx} = \frac{1}{h} \left(\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} \right) = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}.$$

Рассмотрим для уравнения (7.55) задачу Коши: найти решение уравнения в области $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$, удовлетворяющее начальному условию $u(0, x) = \phi(x)$. Здесь область G_h — верхняя полуплоскость ($t > 0$), а Γ — ось Ox .

Построим разностную схему для этой задачи. Введем прямоугольную сетку $t^n = n\tau$; $x_m = mh$, где $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Заменяв производную du/dt в точке $(n\tau, mh)$ разностным отношением (7.57), а производную du/dx в той же точке — разностным отношением (7.58), получим сеточное уравнение:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0. \quad (7.59)$$

Совокупность узлов, используемых в сеточном уравнении, называют *шаблоном*. Шаблон для уравнения (7.59) получил название «уголок назад» (рис. 7.13, а).

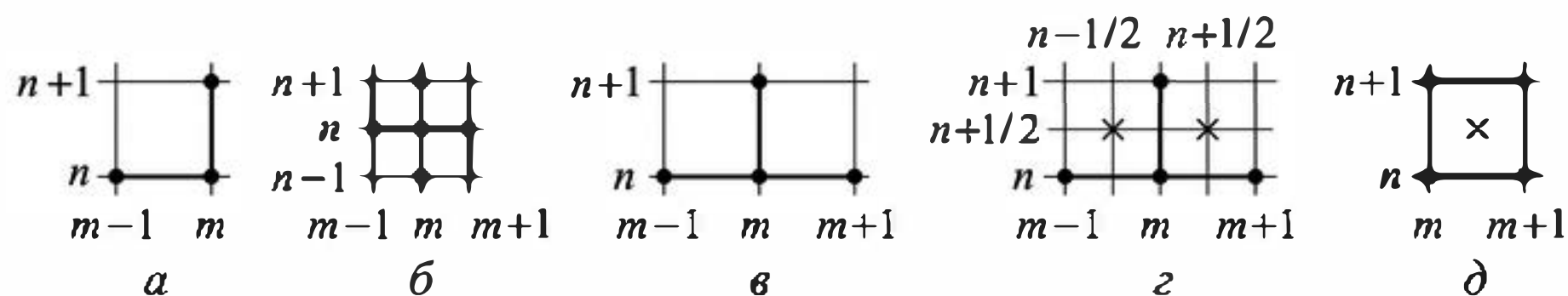


Рис. 7.13. Варианты сеточных шаблонов

Начальное условие $u(0, x) = \phi(x)$, входящее в постановку задачи Коши, заменяем сеточным начальным условием

$$u_m^0 = \phi(mh). \quad (7.60)$$

Выражения (7.59) и (7.60) вместе представляют разностную схему решения задачи Коши.

Если разностные уравнения связывают значения искомой функции в узлах двух слоев n и $n+1$, то схема называется *двухслойной*, а если в узлах трех слоев, то *трехслойной*. В случае, когда разностные уравнения содержат при любом m значения функции лишь в одном узле верхнего слоя, схему называют *явной*, иначе — *неявной*.

При использовании явных схем значения u_m^{n+1} на верхнем слое можно определить для любого m независимо от их значений в других узлах этого слоя. Выражение (7.59) можно переписать в виде

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\tau}{h} (u_m^n - u_{m-1}^n). \quad (7.61)$$

Поскольку u_m^0 определено соотношением (7.60), формула (7.61) позволяет непосредственно вычислить u_m^1 для всех m , затем u_m^2 и т. д. Неявные схемы приводят к системам линейных алгебраических уравнений относительно значений u_m^{n+1} на верхнем слое. Таким образом, рассматриваемая разностная схема (7.59), (7.60) является явной двухслойной.

Замена непрерывного дифференциального оператора

$$L = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

разностным оператором

$$L_h = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}$$

приводит к ошибке (погрешность аппроксимации), от значения которой будет зависеть точность решения разностной задачи. *Погрешностью аппроксимации* схемы на точном решении называется сеточная функция φ_h , возникающая при подстановке точного решения непрерывной задачи в уравнение схемы:

$$\begin{aligned} \varphi_h = & \left[\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \right] - \\ & - \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Разностная схема называется аппроксимирующей по отношению к точному решению u непрерывной задачи, если $\|\varphi_h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Если справедлива оценка $\|\varphi_h\| = O(h^k)$, то порядок аппроксимации равен k .

Определим порядок аппроксимации схемы (7.59) и (7.60). Будем использовать разложение функции в окрестности некоторой точки в ряд Тейлора. Известно, что если в этом разложении отбросить остаточный член порядка $p + 1$, то оставшаяся часть аппроксимирует точное значение функции порядка p .

Предположим, что точное решение имеет непрерывные равномерно ограниченные вторые производные по t и x и между шагами сетки установлена связь $\tau = rh$, $r = \text{const}$. Начальное условие $u(0, x) = \phi(x)$ аппроксимируется с помощью (7.60) точно. Следовательно,

погрешность аппроксимации схемы определяется только невязкой в уравнении (7.59).

Согласно формуле Тейлора,

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= u_m^n + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_m^n + O(\tau^3); \\ u_{m-1}^n &= u_m^n - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n + O(h^3). \end{aligned} \quad (7.63)$$

Подставляя (7.63) в уравнение (7.59) и учитывая (7.62), получаем

$$\begin{aligned} (\varphi_h)_m^n &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^n + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_m^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n + O(h^2) + O(\tau^2) - \\ &\quad - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_m^n - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n + O(h^2) + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Используя связь между шагами, можно утверждать, что $\|\varphi_h\| = O(h^1)$, т. е. рассмотренная разностная схема имеет первый порядок аппроксимации.

Рассмотрим для исходного уравнения (7.55) трехслойную схему «крест» (рис. 7.13, б) с сеточным уравнением

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (7.64)$$

и начальным условием

$$u_m^0 = \varphi(mh).$$

Однако для вычисления искомой сеточной функции недостаточно начального условия u_m^0 , нужно еще каким-либо образом определить значение функции u_m^1 на первом временном слое. Для этого, согласно формуле Тейлора, запишем $u(\tau, x)$ с учетом второй производной:

$$u(\tau, x) = u(0, x) + \tau \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial t^2} + \dots$$

Используя исходное уравнение и вытекающее из него соотношение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, получаем

$$u(\tau, x) = u(0, x) - \tau \frac{\partial u(0, x)}{\partial x} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial x^2} + \dots$$

Заменяя $u(0, x)$ на $\phi(x)$ и аппроксимируя $d\phi/dx$ и $d^2\phi/dx^2$, имеем

$$\begin{aligned} u_m^1 &= \phi(mh) - \frac{\tau}{2h} \{ \phi[(m+1)h] - \phi[(m-1)h] \} + \\ &+ \frac{\tau^2}{2h^2} \{ \phi[(m+1)h] - 2\phi(mh) + \phi[(m-1)h] \}. \end{aligned} \quad (7.65)$$

В результате получаем разностную схему (7.64), (7.65) второго порядка точности.

На рис. 7.13, в приведен шаблон разностной схемы Лакса:

$$\frac{u_m^{n+1} - 0,5(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n)}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0, \quad (7.66)$$

которая имеет первый порядок точности по h , а при $\tau = rh$ и первый порядок точности по t .

Схема Лакса является основой для построения двухслойной явной схемы второго порядка точности. Ее шаблон (рис. 7.13, г) помимо основных узлов содержит два вспомогательных, или полуцелых, узла: $(m - 1/2, n + 1/2)$, $(m + 1/2, n + 1/2)$. Значение u_m^{n+1} определяют в два этапа. Сначала вычисляют значения искомой функции в полуцелых узлах по схеме Лакса:

$$\begin{aligned} \frac{u_{m-1/2}^{n+1/2} - (u_{m-1}^n + u_m^n)/2}{\tau/2} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} &= 0; \\ \frac{u_{m+1/2}^{n+1/2} - (u_m^n + u_{m+1}^n)/2}{\tau/2} + \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} &= 0, \end{aligned} \quad (7.67)$$

а затем по найденным значениям $u_{m-1/2}^{n+1/2}$, $u_{m+1/2}^{n+1/2}$ определяют u_m^{n+1} по схеме «крест»:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1/2}^{n+1/2} - u_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0. \quad (7.68)$$

Эта разностная схема получила название «чехарда», или схема Лакса – Вендрова. Несмотря на первый порядок точности схемы Лакса, схема, определяемая уравнениями (7.67), (7.68), имеет второй порядок точности, поскольку в силу симметричности расположения полуцелых узлов в шаблоне схемы «крест» главные члены

погрешности компенсируются. Она является схемой предиктор — корректор, когда на первом этапе находят предварительные значения решения (этап «предсказания»), а на втором — окончательные (этап корректировки).

К этому же типу можно отнести явную схему Мак-Кормака второго порядка точности. На первом этапе «предсказывают» значения функции $(u_m^{n+1})^{(1)}$ и $(u_{m-1}^{n+1})^{(1)}$ на новом временном слое в двух соседних точках m и $m-1$ с использованием простой схемы «уголок вперед»:

$$\frac{(u_m^{n+1})^{(1)} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0; \quad (7.69)$$

$$\frac{(u_{m-1}^{n+1})^{(1)} - u_{m-1}^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0, \quad (7.70)$$

а на втором находят окончательное значение u_m^{n+1} по формуле

$$\frac{u_m^{n+1} - [(u_m^{n+1})^{(1)} + u_m^n]/2}{\tau/2} + \frac{(u_m^{n+1})^{(1)} - (u_{m-1}^{n+1})^{(1)}}{h} = 0. \quad (7.71)$$

В заключение для уравнения (7.55) приведем неявную двухслойную схему «прямоугольник», шаблон которой изображен на рис. 7.13, д. Она основана на линейной интерполяции разностных аппроксимаций производных на центр шаблона:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} \right) = 0. \quad (7.72)$$

Данная разностная схема имеет второй порядок точности. Ее удобно использовать для решения краевой задачи в области $x \geq 0$, $t \geq 0$ с условиями на границе $u(0, x) = \phi_1(x)$, $u(t, 0) = \phi_2(t)$. Начальные и граничные условия аппроксимируют следующим образом:

$$u_m^0 = \phi_1(mh), \quad u_{\bullet}^h = \phi_2(nh),$$

где $m = 0, 1, \dots$; $n = 0, 1, \dots$

Перепишем (7.72) в виде

$$u_{m+1}^{n+1} = -\chi u_m^{n+1} + u_m^n + \chi u_{m+1}^n, \quad (7.73)$$

где $\chi = (1-r)/(1+r)$, $r = \tau/h$.

Значения u_m^0 заданы, $u_m^1 = \phi(\tau)$, поэтому по формуле (7.73) можно последовательно вычислить при всех m значения u_m^1 и т. д.

Сходимость и устойчивость разностных схем

Разностная схема называется *сходящейся*, если при $h \rightarrow 0$ сеточное решение стремится к точному: $u_h \rightarrow u$. Если $\|u - u_h\| = O(h^p)$, то порядок сходимости (порядок точности схемы) равен p . Сходимость является одним из основных критериев качества разностной схемы, обеспечивающим правильное воспроизведение искомого решения на сетке. Данное свойство трудно проверить теоретически. Обычно для доказательства сходимости проверяют другое свойство схемы, называемое устойчивостью. Под *устойчивостью* понимают непрерывную зависимость решения разностной задачи от входных данных. Иначе можно сформулировать так: если малое изменение входных данных приводит к малому же изменению решения, то схема устойчива. Из устойчивости и аппроксимации схемы вытекает ее сходимость.

Для общего случая теоретические доказательства устойчивости разностных схем газовой динамики в настоящее время отсутствуют. Явные схемы обладают устойчивостью лишь при достаточно малом шаге сетки по времени τ , удовлетворяющем неравенству типа $\tau \leq \tau_{кр}$, где $\tau_{кр}$ — некоторая критическая величина временного шага.

Неявные схемы формально обладают большей устойчивостью, однако их реализация с помощью итерационных процессов приводит к дополнительным ограничениям на шаг τ того же порядка, что и для явных схем.

Покажем, что схемы, обладающие свойством аппроксимации, могут быть несходящимися, а следовательно, неустойчивыми. Рассмотрим задачу Коши вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0; \\ u(x, 0) &= \phi(x) \end{aligned} \quad (7.74)$$

при $-\infty \leq x \leq +\infty$ и $0 \leq t \leq 1$. При построении разностной схемы, как и ранее, используем связь между шагами по координатам: $\tau = rh$, $r = \text{const}$. Простейшая явная схема «уголок вперед» имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} &= 0; \\ u_m^0 &= \phi(mh), \end{aligned} \quad (7.75)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$. Можно доказать, что данная разностная схема аппроксимирует непрерывную задачу вида (7.74).

Покажем, что при $r > 1$ сходимости решения u^h к точному решению $u(x, t)$ нет, а значит, нет и устойчивости, поскольку для линейных задач она влечет за собой сходимость.

Шаг выберем таким, чтобы число $N = T/\tau = 1/(rh)$ было целым (рис. 7.14). Согласно уравнению (7.75),

$$u_m^{n+1} = (1-r)u_m^n + ru_{m+1}^n.$$

В конечном счете значения $u_{\bullet}^{n+1}$ выражаются через значения u_m^0 , лежащие на отрезке $0 \leq x \leq h/t = 1/r$, где задано начальное условие $u(x, 0) = \phi(x)$. Таким образом, решение разностного уравнения в точке $(0, 1)$ сетки не зависит от точек, лежащих вне треугольника OAB . Область, ограниченная этим треугольником, называется *областью зависимости решения*.

Рассмотрим точное решение исходной задачи. Легко заметить, что им является любая функция вида $u(x, t) = f(x + t)$. Как известно, влияние начальных данных на решение распространяется в плоскости задачи по характеристическим направлениям. Для характеристик исходного уравнения должно выполняться дифференциальное уравнение $dx/dt = -1$. Следовательно, уравнение характеристики будет иметь вид

$$x = -t + \text{const}, \text{ или } x + t = \text{const}.$$

Такая прямая, проходя через точку $A(0, 1)$, пересечет ось Ox в точке $B(1, 0)$. Но отрезок $0 \leq x \leq 1/r$ «влияния» начальных данных не содержит точки $B(1, 0)$. Значит, если изменить начальные данные в окрестности этой точки, то это вызовет изменение решения непрерывной задачи в точке A , но никак не повлияет на решение разностной задачи u^h . Таким образом, сходимости разностной задачи к исходной непрерывной в этом случае не будет.

Изложенные выше соображения принадлежат Р. Куранту, К. Фридрихсу и Г. Леви. Их именами названо следующее условие: для устойчивости явной разностной схемы необходимо, чтобы область зависимости решения дифференциальной задачи находилась внутри области зависимости решения разностной задачи. Это условие можно сформулировать по-другому: скорость распростране-

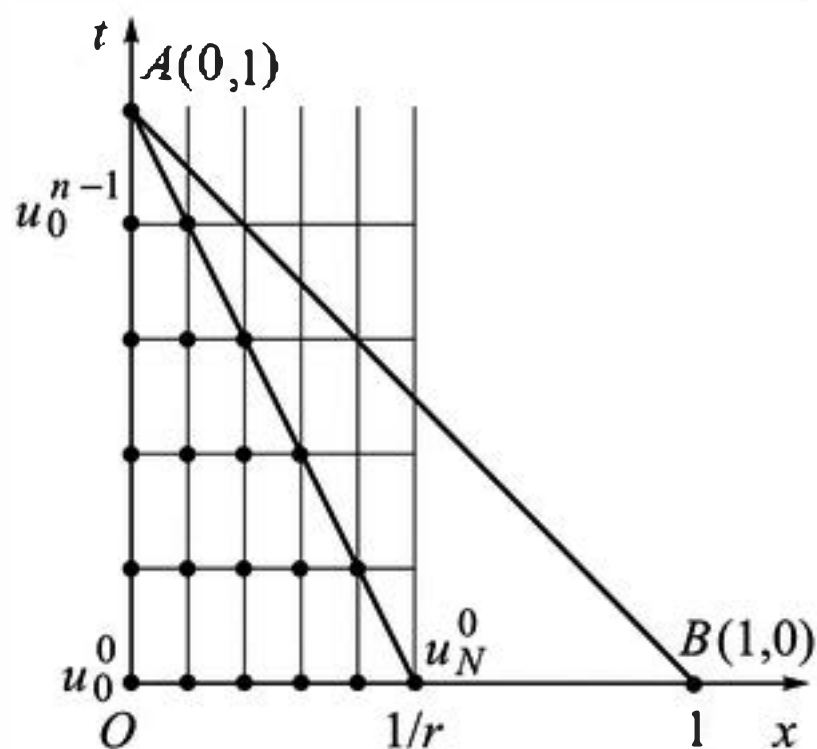


Рис. 7.14. К определению критерия устойчивости разностной схемы

ния физических возмущений не должна превышать скорости распространения численных возмущений.

Условие Куранта – Фридрихса – Леви является лишь необходимым и может применяться только для установления непригодности той или иной схемы.

Разностные схемы для уравнений газовой динамики

Система квазилинейных уравнений, описывающих одномерное неустановившееся движение невязкой нетеплопроводной среды, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (7.76)$$

$$\text{где } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} u \\ p \\ \rho \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & \rho^{-1} & 0 \\ \rho a^2 & u & 0 \\ \rho & 0 & u \end{bmatrix}.$$

Характеристические направления этой системы гиперболического типа в плоскости Oxt определяются собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$. Следовательно, дифференциальное уравнение характеристик и условие Куранта – Фридрихса – Леви в данном случае будут соответственно выглядеть так:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_{1,2,3};$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq |u| + a \quad \text{или} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u| + a},$$

где $\lambda_1 = u$; $\lambda_{2,3} = u \pm a$.

Перепишем уравнения (7.76) в дивергентной форме. Для этого достаточно упростить систему (7.51), приняв в ней для одномерного случая $V = u$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial[\rho(e + u^2/2)]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u(e + p/\rho + u^2/2)]}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Преобразуем уравнения системы (7.77) к соответствующим интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \rho dx - \rho u dt &= 0; \\ \oint_{\Gamma} \rho u dx - (p + \rho u^2) dt &= 0; \\ \oint_{\Gamma} \rho (e + u^2/2) dx - \rho u (e + p/\rho + u^2/2) dt &= 0, \end{aligned} \quad (7.78)$$

где Γ — граница расчетной области, для которой выполняются законы сохранения.

Для дискретизации пространства решения воспользуемся равномерной сеткой (рис. 7.15), а в качестве контура Γ возьмем четырехугольник, выделенный на рис. 7.15 полужирной линией. Его вертикальные стороны имеют абсциссы $(m \pm 1/2)h$. Параметры газа на этих сторонах обозначим заглавными буквами с соответствующими индексами: $R_{m\pm 1/2}$, $P_{m\pm 1/2}$, $E_{m\pm 1/2}$, $U_{m\pm 1/2}$.

Интегрируя по контуру и используя теорему о среднем, получаем следующие конечно-разностные соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_m^{n+1} &= \rho_m^n - \frac{\tau}{h} [(RU)_{m+1/2} - (RU)_{m-1/2}]; \\ (\rho u)_m^{n+1} &= (\rho u)_m^n - \frac{\tau}{h} [(P + RU^2)_{m+1/2} - (P + RU^2)_{m-1/2}]; \\ [\rho(e + u^2/2)]_m^{n+1} &= [\rho(e + u^2/2)]_m^n - \\ &- \frac{\tau}{h} [RU(E + P/R + U^2/2)_{m+1/2} - RU(E + P/R + U^2/2)_{m-1/2}]. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Полученные соотношения являются основой различных разностных схем (схем сквозного счета), отличающихся между собой способами определения параметров R , P , E и U в правых частях уравнений. Так, в схеме Лакса (см. выражение (7.66)) все искомые величины находят как полусуммы их значений в ближайших точках, например: $R_{m+1/2} = (\rho_{m+1} + \rho_m)/2$ и т. д. Для обеспечения устойчи-

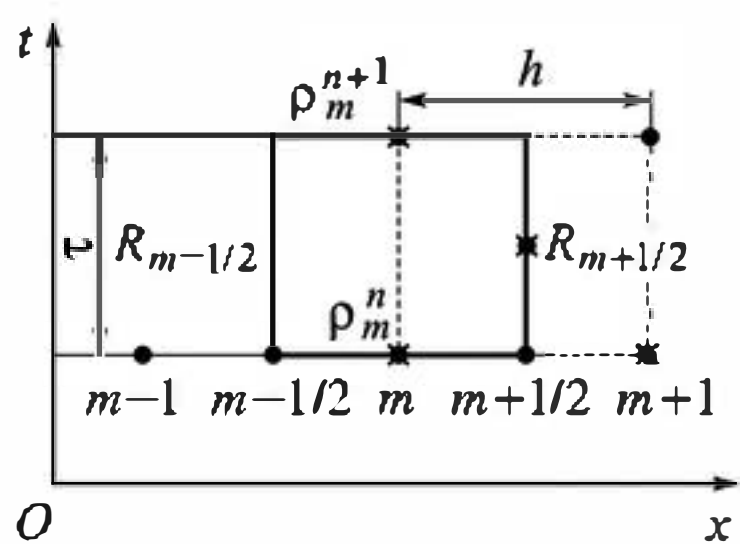


Рис. 7.15. Расчетная сетка для одномерных нестационарных уравнений газовой динамики

ности разностной схемы вместо первых слагаемых в правой части уравнений (7.79) также берут их осредненные значения. В схеме Годунова предложено использовать способ, основанный на расчете автомодельной газодинамической задачи о распаде произвольного разрыва. В схеме Лакса – Вендрова (см. выражения (7.67) и (7.68)) искомые параметры на первом шаге определяют по схеме Лакса (см. трехточечный шаблон, обозначенный на рис. 7.15 крестиками), а на втором используют формулы (7.79). Наконец, в схеме Мак-Кормака (см. выражения (7.69)–(7.71)) на первом шаге используют правосторонние пространственные разности (условно это можно интерпретировать как определение параметров R , P , E и U), а на втором — левосторонние, причем в последнем случае разностные соотношения могут быть записаны в виде, аналогичном (7.79) для верхней половины ячейки с шагом по времени $\tau/2$.

7.4. Метод Годунова

Основные положения метода

В настоящее время одним из наиболее широко применяемых для моделирования смешанных (до- и сверхзвуковых) стационарных течений методов является метод установления параметров по времени. В этом случае исходную систему уравнений сохранения газовой динамики записывают для модели нестационарного течения газа, а в результате решения получают параметры потока, не зависящие от времени.

При составлении разностной формы записи уравнений сохранения для модели пространственного течения вязкого газа существует ряд сложностей, связанных с выбором модели турбулентности, громоздкостью вычислительного процесса, ограниченной памятью вычислительной машины и т. д. Однако в случае обтекания тел простой формы (тел вращения) в условиях отсутствия отрыва потока на боковой поверхности для расчета параметров течения и аэродинамических характеристик вязкими эффектами можно пренебречь, поскольку они не оказывают существенного влияния на давление у обтекаемой поверхности. Такое допущение позволяет упростить исходную систему уравнений и рассматривать уравнения движения в форме Эйлера. Тогда уравнения нестационарного трехмерного течения идеального газа в декартовой системе координат будут иметь вид

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0, \quad (7.80)$$

$$\text{где } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho i_0 - p \end{bmatrix}; \mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ \rho v_x i_0 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ \rho v_y v_z \\ \rho v_y i_0 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_z \\ \rho v_z^2 + p \\ \rho v_z i_0 \end{bmatrix}.$$

Удельную полную энтальпию газа в данном случае можно вычислить по формуле

$$i_0 = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho},$$

где k — показатель адиабаты. Для вычисления полей температур систему (7.80) необходимо дополнить уравнением состояния.

В основе вывода формул, используемых в численном расчете, лежат уравнения сохранения в интегральной форме, записанные для выделенного в потоке газа произвольного объема W :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_W G dW = - \left(\iint_S F_x dy dz + \iint_S F_y dx dz + \iint_S F_z dy dx \right). \quad (7.81)$$

При составлении разностной формы записи необходимо провести разбиение расчетной области, выделенной вокруг исследуемого тела, на элементарные ячейки объемом W , которые могут быть как подвижные, так и неподвижные.

В качестве примера на рис. 7.16, а приведена неподвижная расчетная сетка в продольной плоскости симметрии конического тела. При ее построении необходимо учитывать особенности распространения возмущений в потоке. В частности, желательно, чтобы внешние границы расчетной области заведомо охватывали выстраиваемый в процессе расчета головной скачок уплотнения.

Для отдельно взятой ячейки (рис. 7.16, б), переходя в уравнениях (7.81) от производной по времени к конечной разности и считая, что все параметры остаются постоянными в течение одного шага расчета по времени, обобщенную форму записи уравнений сохранения можно представить так:

$$G^{i,j,k} = G_{i,j,k} + \frac{\tau_n}{W} \sum_{m=i,j,k} \left[(F_x)_m S_{mx} + (F_y)_m S_{my} + (F_z)_m S_{mz} - \right. \\ \left. - (F_x)_{m+1} S_{(m+1)x} - (F_y)_{m+1} S_{(m+1)y} - (F_z)_{m+1} S_{(m+1)z} \right], \quad (7.82)$$

где $G_{i,j,k}$, $G^{i,j,k}$ — средние значения величин, стоящих в столбце G на текущем (нижние индексы) и последующем (верхние индексы)

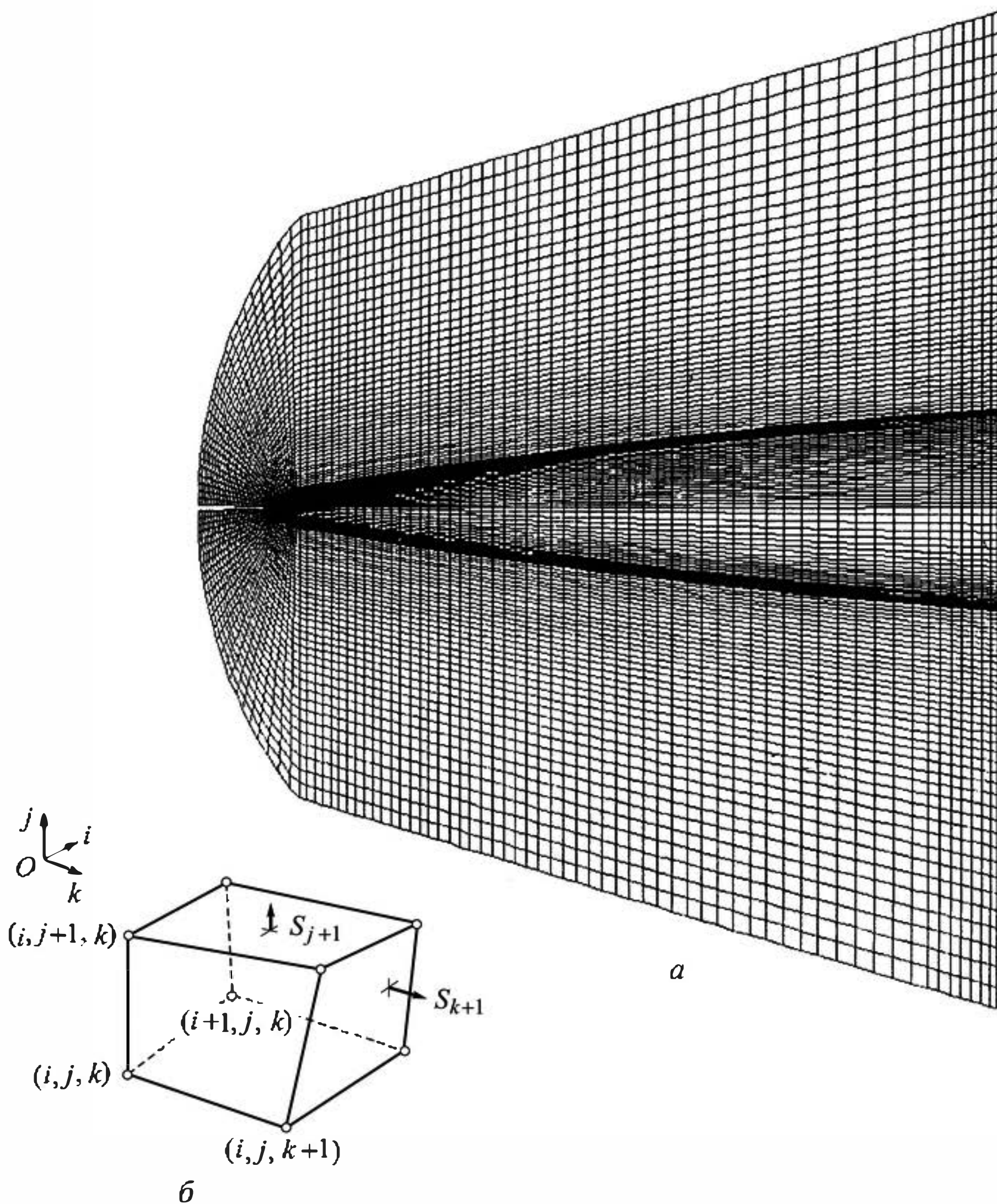


Рис. 7.16. Фрагмент расчетной сетки (а) и элементарная ячейка (б)

временных слоях; τ_n — некоторый переменный шаг по времени; $S_{mx}, S_{my}, S_{mz}, S_{(m+1)x}, S_{(m+1)y}, S_{(m+1)z}$ — проекции площадок S_m и S_{m+1} на плоскости, перпендикулярные соответственно осям Ox, Oy, Oz .

Уравнения (7.82) записаны с учетом того, что векторы $\vec{S}_m$ направлены по внутренней, а $\vec{S}_{m+1}$ — по внешней нормали, а ячейка имеет плоские грани площадью $S_i, S_{i+1}, S_j, S_{j+1}, S_k, S_{k+1}$, на каждой из которых параметры F_x, F_y, F_z распределены равномерно.

Решают уравнения (7.82) последовательными шагами по времени. Отдельный шаг заключается в том, что по известным газодинамическим параметрам $G_{i,j,k}$ в каждой ячейке области W в момент времени $t = t_0$ определяют эти же параметры в момент времени $t_1 = t_0 + \tau_1$, т. е. $G^{i,j,k}$. Если полученные значения $G^{i,j,k}$ принять за начальные (т. е. $G_{i,j,k}$), подставив в правую часть уравнения (7.82), и опять провести расчет по описанной схеме, то новые значения $G^{i,j,k}$ будут описывать состояние газа в следующий момент времени $t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и т. д.

Помимо параметров течения, стоящих в левой части уравнения (7.82), неизвестным является второе слагаемое в правой части уравнения, куда входят проекции S_m и S_{m+1} граней ячеек и объем W ячейки, которые можно рассчитать по известным соотношениям, а также параметры F_x, F_y, F_z . Для их вычисления наиболее широко применяют метод Годунова, основанный на решении задачи о распаде произвольного разрыва.

Вычисление параметров потока при распаде произвольного разрыва представляет собой автомодельную задачу для одномерного течения газа. Ее решение может быть использовано как для анализа различных нестационарных течений газа, так и в качестве элемента численного метода расчета. Однако независимо от того, в какой области исследования применяется эта задача, общая структура ее решения имеет законченный вид и может быть рассмотрена отдельно.

Пусть имеется плоский канал, разделенный перегородкой (аналог граням двух соседних ячеек), которая перпендикулярна оси Ox и совпадает с началом координат. В начальный момент времени $t = 0$ в левой части канала находится газ, который характеризуется давлением p_1 , плотностью ρ_1 , скоростью u_1 и т. д., а в правой — газ с соответствующими параметрами $p_{II}, \rho_{II}, u_{II}$ и т. д. (рис. 7.17, а). При внезапном удалении перегородки между двумя массами газа образуется поверхность контактного разрыва (рис. 7.17, б). В сле-

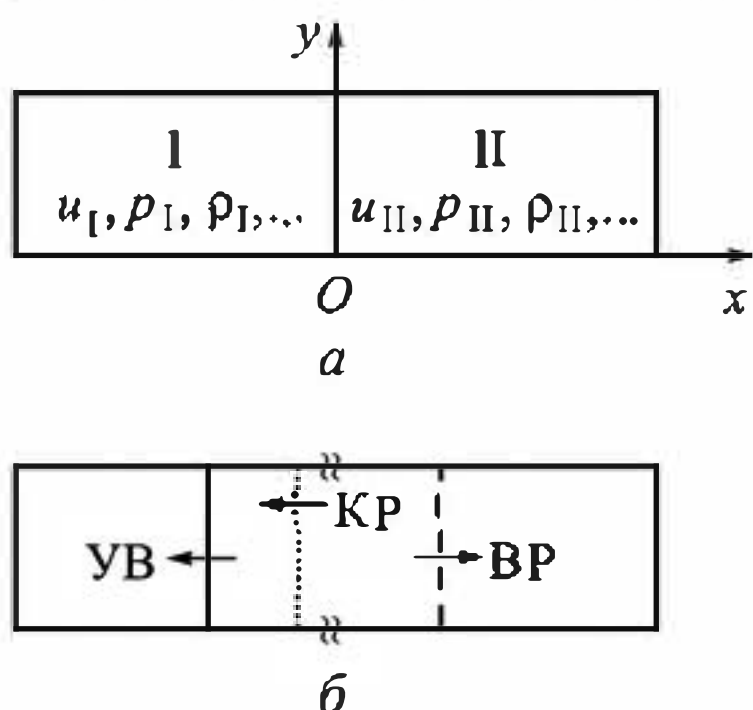


Рис. 7.17. Схема распространения возмущений в плоском канале при $t = 0$ (а) и $t > 0$ (б) (ВР – волна разрежения; КР – контактный разрыв; UV – ударная волна)

дующий момент времени разрыв распадется на устойчивые схемы течения, которые могут существовать в газе: ударные волны или волны разрежения, причем в каждую сторону начнет двигаться только одна из волн. Формирование тех ли иных элементов течения будет зависеть от первоначального соотношения параметров газа.

На рис. 7.18, а показан характер изменения давления при движении двух потоков один навстречу другому со скоростями u_I и u_{II} . В этом случае возникают две разбегающиеся ударные волны, скорости которых соответственно равны D_I и D_{II} . При первоначальном соприкосновении двух

неподвижных или движущихся в одну сторону с одинаковыми скоростями масс газа, сжатых до различных давлений, в одну сторону будет распространяться ударная волна, а в другую – волна разрежения (рис. 7.18, б).

На рис. 7.18, в изображен случай, когда в обе стороны распространяются волны разрежения. Такой вариант возникает, если в начальный момент времени соприкасающиеся массы газа имеют скорости, направленные в разные стороны от поверхности контактного разрыва. Предельным для последней структуры течения будет случай, когда скорость разлета превышает некоторое критическое значение и в области между двумя волнами разрежения образуется вакуум. Позади каждой из движущихся волн, т. е. вблизи начала координат, статическое давление газа выравнивается и его скорость одинаковая. Однако плотность и внутренняя энергия при этом мо-

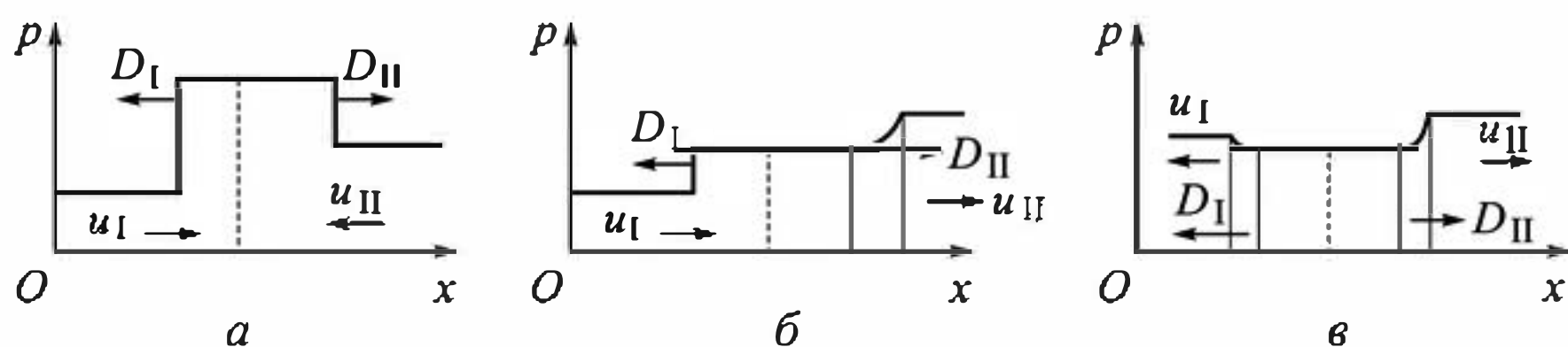


Рис. 7.18. Варианты распада разрыва

гут изменяться. Такое скачкообразное изменение параметров называется контактным разрывом.

Поскольку скорости движения волн D_I и D_{II} постоянны, на плоскости Oxt автомодельную картину возникающего течения можно изобразить одной из возможных схем, представленных на рис. 7.19. Поверхность контактного разрыва размещена в пространстве между двумя волнами и движется в направлении одной из них с меньшей скоростью, поэтому на плоскости Oxt она разбивает область между волнами на две подобласти (слева и справа от разрыва). В свою очередь, эти подобласти отделены от невозмущенных областей либо ударной волной, либо волной разрежения. Поскольку при переходе через поверхность контактного разрыва плотность испытывает скачок, а давление и скорость в направлении оси Ox остаются постоянными, их одинаковые значения слева и справа от плоскости разрыва обозначим $P_{III} = P_{IV} = P_{KP}$ и $U_{III} = U_{IV} = U_{KP}$, а различные значения плотности и, следовательно, внутренней энергии для левой и для правой областей соответственно R_{III}, E_{III} и R_{IV}, E_{IV} (рис. 7.20).

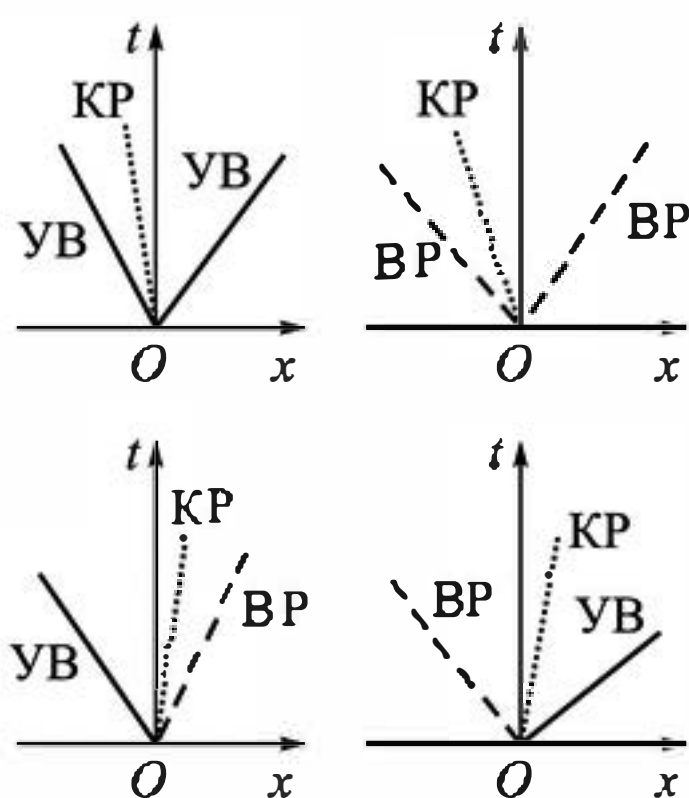


Рис. 7.19. Схемы распада разрыва

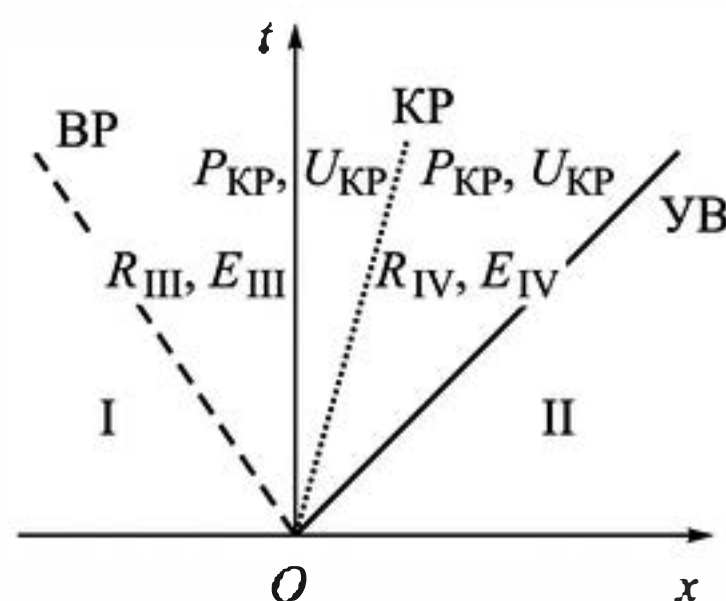


Рис. 7.20. Параметры для различных областей возмущенного течения

Таким образом, решение задачи о распаде разрыва сводится к установлению истинной формирующейся структуры и определению соотношений, связывающих параметры газа в невозмущенных областях и за образующимися волнами.

В основе расчета параметров потока в возмущенных областях лежат уравнения неразрывности, движения и энергии, которые для одномерного течения газа имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0; \\
\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} &= 0; \\
\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(i + \frac{u^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(i + \frac{u^2}{2} \right) \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{7.83}$$

Чтобы уравнения (7.83) можно было применить на разрывных решениях, содержащих ударные волны, от дифференциальных уравнений после соответствующих преобразований переходят к уравнениям в интегральной форме:

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} \rho dx - \rho u dt &= 0; \\
\oint_{\Gamma} \rho u dx - (p + \rho u^2) dt &= 0; \\
\oint_{\Gamma} \rho \left(i + \frac{u^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) dx - \rho \left(ui + \frac{u^2}{2} \right) dt &= 0.
\end{aligned} \tag{7.84}$$

Поскольку структура формирующегося течения неоднозначна (возможно образование одной из четырех структур, содержащих как ударные волны, так и волны разрежения), необходимо получить обобщенные зависимости для расчета скорости движения $U_{кр}$ поверхности контактного разрыва. Для упрощения будем считать, что в результате распада разрыва формируются слабые волны разрежения, которые можно рассматривать как одну характеристику.

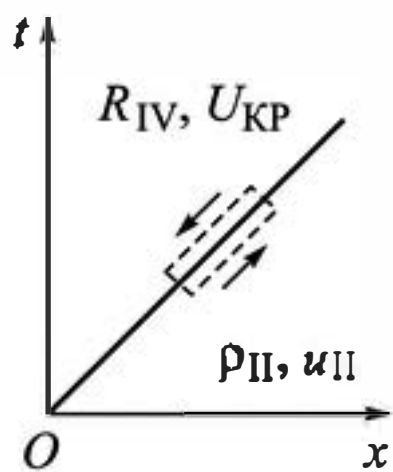


Рис. 7.21. Траектория ударной волны

Предположим, что при распаде произвольного разрыва образуются одна или две ударные волны. В этом случае соотношения между параметрами газа при переходе через ударную волну определяем, используя уравнения сохранения (7.84).

Пусть $D = dx/dt$ — скорость движения ударной волны, которую можно рассматривать как движущийся разрыв параметров. Изобразим траекторию ее движения на плоскости Oxt (рис. 7.21) и выделим контур, который прилегает к поверхности разрыва, охватывая некоторый ее участок.

Из уравнений сохранения, записанных для этого участка, следует, что вдоль поверхности разрыва (ударной волны) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \int [\rho] dx - [\rho u] dt &= \int ([\rho] D - [\rho u]) dt = 0; \\ \int [\rho u] dx - \left[p + \rho u^2 \right] dt &= \int ([\rho u] D - [p + \rho u^2]) dt = 0; \\ \int \left[\rho \left(i + \frac{u^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) \right] dx - \left[\rho u \left(i + \frac{u^2}{2} \right) \right] dt &= \\ = \int \left\{ \left[\rho \left(i + \frac{u^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) \right] D - \left[\rho u \left(i + \frac{u^2}{2} \right) \right] \right\} dt &= 0. \end{aligned}$$

В квадратных скобках здесь записана разность значений параметров по обе стороны от поверхности разрыва.

Вследствие произвольности области интегрирования для каждой точки поверхности разрыва имеем

$$\begin{aligned} [\rho] D - [\rho u] &= 0; \\ [\rho u] D - [p + \rho u^2] &= 0; \\ \left[\rho \left(i + \frac{u^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) \right] D - \left[\rho u \left(i + \frac{u^2}{2} \right) \right] &= 0. \end{aligned} \tag{7.85}$$

Введем понятие «массовая скорость». Для этого рассмотрим первое уравнение системы (7.85) и приведем его для левой ударной волны:

$$(\rho_I - R_{III}) D_I - (\rho_I u_I - R_{III} U_{кр}) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\rho_I (u_I - D_I) = R_{III} (U_{кр} - D_I). \tag{7.86}$$

Уравнение (7.86) соответствует уравнению неразрывности, записанному относительно неподвижной ударной волны. В этом случае частицы газа в области I с плотностью ρ_I движутся со скоростью $(u_I - D_I)$, а за ударной волной с плотностью R_I — со скоростью $(U_{кр} - D_I)$.

Массовой c_I назовем относительную скорость движения газа по обе стороны от ударной волны, умноженную на соответствующую плотность:

$$c_I = \rho_I (u_I - D_I) = R_{III} (U_{KP} - D_I).$$

Аналогично для правой ударной волны имеем

$$\begin{aligned} (R_{IV} - \rho_{II}) D_{II} - (R_{IV} U_{KP} - \rho_{II} u_{II}) &= 0; \\ c_{II} = \rho_{II} (D_{II} - u_{II}) &= R_{IV} (D_{II} - U_{KP}). \end{aligned} \quad (7.87)$$

Преобразовав уравнения (7.86) и (7.87) (с учетом выражения для адиабаты Гюгонио), выражаем разность скоростей:

$$U_{KP} - u_I + \frac{P_{KP} - p_I}{c_I} = 0; \quad (7.88)$$

$$U_{KP} - u_{II} + \frac{P_{KP} - p_{II}}{c_{II}} = 0; \quad (7.89)$$

Здесь

$$c_I = \sqrt{\rho_I \frac{(k+1)P_{KP} + (k-1)p_I}{2}}; \quad (7.90)$$

$$c_{II} = \sqrt{\rho_{II} \frac{(k+1)P_{KP} + (k-1)p_{II}}{2}}. \quad (7.91)$$

В результате распада произвольного разрыва возможно также образование одной или двух слабых волн разрежения, течение в которых является изоэнтропическим. В отличие от ударной волны скорость волны разрежения соответствует распространению слабых возмущений, т. е. скорости a звука. Для определения скорости U в данном случае используют условие непрерывности римановых инвариантов:

$$[u] \pm \frac{2}{k-1} [a] = 0$$

(знак «+» берут для левой волны разрежения, а знак «-» — для правой).

С учетом зависимости для скорости звука скорость газа за левой волной разрежения

$$U_{KP} - u_I = -\frac{2a_I}{k-1} \left[\left(\frac{R_{III}}{\rho_I} \right)^{(k-1)/2} - 1 \right],$$

или

$$U_{\text{кр}} - u_1 = \frac{2a_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{P_{\text{кр}}}{p_1} \right)^{(k-1)/(2k)} \right].$$

Аналогично для скорости газа за правой волной разрежения находим

$$U_{\text{кр}} - u_{\text{II}} = -\frac{2a_{\text{II}}}{k-1} \left[1 - \left(\frac{P_{\text{кр}}}{p_{\text{II}}} \right)^{(k-1)/(2k)} \right].$$

Как и для ударной волны, используя условное понятие «массовая скорость»:

$$c_1 = \frac{k-1}{2k} \rho_1 a_1 \frac{1 - P_{\text{кр}}/p_1}{1 - (P_{\text{кр}}/p_1)^{(k-1)/2k}}; \quad (7.92)$$

$$c_{\text{II}} = \frac{k-1}{2k} \rho_{\text{II}} a_{\text{II}} \frac{1 - P_{\text{кр}}/p_{\text{II}}}{1 - (P_{\text{кр}}/p_{\text{II}})^{(k-1)/(2k)}}, \quad (7.93)$$

получаем соответственно следующие соотношения:

$$U_{\text{кр}} - u_1 + \frac{P_{\text{кр}} - p_1}{c_1} = 0; \quad (7.94)$$

$$U_{\text{кр}} - u_{\text{II}} - \frac{P_{\text{кр}} - p_{\text{II}}}{c_{\text{II}}} = 0. \quad (7.95)$$

Параметры потока с использованием приведенных зависимостей рассчитывают итерационным способом. На первой итерации по заданному значению давления $P_{\text{кр}}^{(0)}$ оценивают значения p_1 и p_{II} и определяют соответствующую структуру течения. Так, если $P_{\text{кр}}^{(\bullet)} \geq p_1$, то в левой области образуется ударная волна, за которой давление выше, чем в покоящемся газе. Массовую скорость c_1 и скорость $U_{\text{кр}}$ за ударной волной вычисляют с использованием соотношений (7.88) и (7.90). При $P_{\text{кр}}^{(0)} < p_1$ значение $U_{\text{кр}}$ рассчитывают по соотношениям (7.92) и (7.94). Аналогично проводят расчет для ударной волны в правой области (при $P_{\text{кр}}^{(\bullet)} \geq p_{\text{II}}$ происходит образование ударной волны и использование формул (7.89) и (7.91), а при $P_{\text{кр}}^{(0)} < p_{\text{II}}$ — волны разрежения и формул (7.93), (7.95)).

На второй итерации $P_{\text{кр}}^{(1)}$ можно определить с помощью следующего соотношения:

$$P_{\text{кр}}^{(1)} = \frac{\alpha^{(0)} P_{\text{кр}}^{(0)} + \varphi(P_{\text{кр}}^{(0)})}{1 + \alpha^{(0)}}.$$

Здесь

$$\alpha^{(0)} = \begin{cases} \frac{k-1}{3k} \frac{1 - z^{(0)}}{(z^{(0)})^{(k+1)/(2k)} [1 - (z^{(0)})^{(k-1)/(2k)}]} - 1 & \text{при } \alpha^{(0)} > 0; \\ 0 & \text{при } \alpha^{(0)} \leq 0; \end{cases}$$

$$z^{(0)} = \frac{P_{\text{кр}}^{(0)}}{P_I + P_{II}}; \quad \varphi(P_{\text{кр}}^{(0)}) = \frac{c_{II}^{(0)} P_I + c_I^{(0)} P_{II} + c_I^{(0)} c_{II}^{(0)} (u_I - u_{II})}{c_I^{(0)} + c_{II}^{(0)}}.$$

После того как итерационный процесс доведен до сходимости, т. е. найдено истинное значение давления слева и справа от поверхности контактного разрыва (соответственно за левой и правой волнами) $P_{\text{кр}}^{(h)} = P$ (где h — число итераций) и получена соответствующая ему действительная картина течения, определяют скорость $U_{\text{кр}}$:

$$U_{\text{кр}} = \frac{c_I u_I + c_{II} u_{II} + P_I - P_{II}}{c_I + c_{II}},$$

где c_I, c_{II} — массовые скорости, вычисленные на последней итерации.

Если в полученной структуре течения левая волна является ударной, то скорость ее движения

$$D_I = u_I - c_I / \rho_I.$$

Плотность газа за ударной волной можно найти с помощью уравнения ударной адиабаты:

$$R_{II} = \rho_I \frac{(k+1)P_{\text{кр}} + (k-1)p_I}{(k-1)P_{\text{кр}} + (k+1)p_I},$$

или через массовую скорость:

$$R_{II} = \frac{\rho_I c_I}{c_I - \rho_I (u_I - U_{\text{кр}})}.$$

Если левая волна является волной разрежения, скорость ее движения

$$D_I = u_I - a_I,$$

а связь между давлением и плотностью до волны и за ней определяется соотношениями

$$\frac{P_{KP}}{P_I} = \left(1 - \frac{k-1}{2} \frac{|U_{KP}|}{a_I}\right)^{2/(k-1)}; \quad \frac{R_{III}}{\rho_I} = \left(1 - \frac{k-1}{2} \frac{|U_{KP}|}{a_I}\right)^{2k/(k-1)}.$$

Аналогичные формулы можно записать для правой волны. Если она является ударной, то скорость и плотность за волной будут соответственно

$$D_{II} = u_{II} + \frac{c_I}{\rho_I}; \quad R_{IV} = \frac{\rho_{II} c_{II}}{c_{II} + \rho_{II} (u_{II} - U_{KP})},$$

а если волной разрежения, то

$$D_{II} = u_{II} + a_{II};$$

$$\frac{P_{KP}}{P_{II}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{|U_{KP}|}{a_{II}}\right)^{2/(k-1)}; \quad \frac{R_{IV}}{\rho_{II}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{|U_{KP}|}{a_{II}}\right)^{2k/(k-1)}.$$

Для выделенной в расчетной области произвольной ячейки задачу о распаде разрыва решают для проекции скорости U_n , нормальной к рассматриваемой грани, в локальной ортогональной системе координат, связанной с этой ячейкой.

Таким образом, если известны начальные значения параметров газа в ячейках расчетной области, решив задачу о распаде разрыва описанным выше способом, всегда можно найти параметры течения U_n , P , R на грани выделенного объема. При этом необходимо отметить следующее.

1. Если полученные значения скоростей D_I и D_{II} положительные, то траектории движения волн располагаются в правой полуплоскости Oxt , плоскость разрыва попадает в зону невозмущенного течения I и параметры $P = p_I$, $R = \rho_I$, $U_n = u_I$. В противном случае скорости D_I и D_{II} имеют отрицательные значения и параметры возмущенного потока равны параметрам невозмущенного течения в области II: $P = p_{II}$, $R = \rho_{II}$, $U_n = u_{II}$.

2. Если скорости D_I и D_{II} имеют разные знаки, а продольная составляющая скорости в возмущенной области положительна ($U_{KP} > 0$), то плоскость разрыва находится в области между левой

волной и поверхностью контактного разрыва и $P = P_{\text{КР}}$, $R = R_{\text{III}}$, $U_n = U_{\text{КР}}$; если же $U_{\text{КР}} < 0$, то $P = P_{\text{КР}}$, $R = R_{\text{IV}}$, $U_n = U_{\text{КР}}$.

Проекции вектора скорости на оставшиеся оси локальной системы координат определяют в зависимости от направления распространения контактного разрыва (знака нормальной компоненты скорости) и переводят их в исходную систему координат.

Граничные условия и оценка сходимости метода

В качестве примера рассмотрим способ задания граничных и начальных условий для случая сверхзвукового обтекания конического тела (см. рис. 7.16, а).

Начальные условия задают во всех ячейках, на которые разбита расчетная область. В качестве них можно принять, например, параметры газа в набегающем потоке. Расчет можно проводить с использованием абсолютных параметров потока, однако лучше применять безразмерные величины. При расчете обтекания корпуса внешним потоком можно задавать давление, отнесенное к двойному скоростному напору: $\bar{p}_\infty = 1/(kM_\infty^2)$; плотность, отнесенную к плотности в набегающем потоке: $\bar{\rho}_\infty = 1$; составляющие вектора скорости набегающего потока в декартовой системе координат: $\bar{v}_{x\infty} = v_{x\infty}/v_\infty$, $\bar{v}_{y\infty} = v_{y\infty}/v_\infty$, $\bar{v}_{z\infty} = v_{z\infty}/v_\infty$, и полную энтальпию

$$\bar{i}_{0\infty} = \frac{k}{k-1} \frac{\bar{p}_{0\infty}}{\bar{\rho}_{0\infty}}.$$

Граничные условия задают, исходя из следующих соображений. В случае невязкого газа на поверхности тела должны выполняться условия непротекания. Одним из возможных способов удовлетворения этого условия является решение задачи о распаде разрыва для двух симметричных потоков на грани ячейки, совпадающей с поверхностью корпуса ЛА.

В качестве параметров на грани ячейки, совпадающей с внешней границей расчетной области, допустимо принимать значения, соответствующие набегающему потоку. Однако лучше воспользоваться общим подходом и решать задачу распада разрыва, формально введя слой ячеек с параметрами набегающего потока.

В случае если поток на выходной границе расчетной области полностью сверхзвуковой и отсутствуют возмущения, распространяющиеся внутрь этой области, вводят примыкающий к границе с внешней стороны фиктивный интервал, параметры в котором либо принимают равными параметрам в приграничном интервале, либо

экстраполируют по нескольким ячейкам и решают задачу о распаде разрыва.

Необходимым условием сходимости численного решения является устойчивость вычислительного алгоритма, что непосредственно связано с правильным выбором шага расчета по времени.

Одним из допущений при составлении разностной схемы является неизменность параметров потока на боковых гранях выделенного объема в течение текущего шага. Для определения этих параметров решают задачу о распаде разрыва между соседними гранями. Очевидно, что это допущение будет выполняться в тот промежуток времени, пока возмущения не достигнут противоположной грани объема.

Поскольку размеры ячеек в расчетной области могут различаться, неодинаковыми будут и площади проекций граней на соответствующие плоскости. Кроме того, в зависимости от соотношений параметров потока в соседних ячейках могут возникать волны различной интенсивности. Поэтому в каждой ячейке допустимый шаг расчета будет свой. Для устойчивости нестационарной задачи в целом необходимо выбирать наименьший шаг среди всех ячеек расчетной сетки. Если в качестве итерационной процедуры в методе установления используют решение нестационарных уравнений, то допустимый шаг выбирают индивидуально для каждой ячейки сетки.

На основе анализа устойчивости линеаризованного аналога рассматриваемой численной схемы было получено, что допустимый шаг τ должен удовлетворять следующему соотношению:

$$\frac{1}{\tau} \leq \frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} + \frac{1}{\tau_z}.$$

Здесь

$$\tau_x = \frac{h_x}{\max(v_x + a, a - v_x)}; \quad \tau_y = \frac{h_y}{\max(v_y + a, a - v_y)};$$

$$\tau_z = \frac{h_z}{\max(v_z + a, a - v_z)},$$

а h_x, h_y, h_z — шаги сетки вдоль соответствующей оси координат.

Это условие имеет простой физический смысл: значения τ_x, τ_y, τ_z представляют собой частные временные интервалы, за которые самые «быстрые» волны, образующиеся в задаче о распаде разрыва, достигают противоположной грани многогранника по осям Ox, Oy и Oz соответственно.

При решении нестационарной задачи, требующей единого шага по времени для всех ячеек, необходимо среди всех значений $\tau_{i,j,k}$, рассчитанных для каждой ячейки сетки, выбрать минимальное:

$$\tau = \min \tau_{i,j,k}.$$

Учитывая приближенный характер формулы, для окончательного выбора шага по времени берут некоторый коэффициент запаса K :

$$\tau = K \min \tau_{i,j,k},$$

где $K \approx 0,4 \dots 0,8$.

В случае произвольной сетки критерий выбора шага может быть модифицирован с учетом скорости увеличения объемов W_m , охватываемых распространяющимися от граней возмущениями в сторону увеличения или уменьшения индексов $m = i, j, k$ соответственно:

$$W_{m+} = \bar{V} \bar{S}_m + a |\bar{S}_m|;$$

$$W_{m-} = a |\bar{S}_m| - \bar{V} \bar{S}_m,$$

где $\bar{V}$ — скорость газа в ячейке; a — скорость звука.

Тогда за среднее минимальное время распространения возмущения вдоль сеточного направления m можно принять интервал, удовлетворяющий следующему соотношению:

$$W = \tau_m W_m,$$

где W — объем ячейки; $W_m = \max (W_{m+}, W_{m-})$.

В результате для произвольной ячейки критерий выбора шага будет определяться так:

$$\tau_{i,j,k} \leq \frac{1}{1/\tau_i + 1/\tau_j + 1/\tau_k} = \frac{W}{W_i + W_j + W_k}.$$

В качестве показателя сходимости решения в процессе расчета (при переходе от текущего шага расчета к следующему) можно взять параметр ε_p , который характеризует скорость изменения плотности:

$$\varepsilon_p = \sqrt{\sum_{i,j,k} \left[\frac{\rho(t_{n+1}) - \rho(t_n)}{\tau_{n+1} \rho_{\max}} \right]^2 \frac{1}{KJ}}.$$

Здесь $\rho(t_{n+1})$, $\rho(t_n)$ — плотность в ячейке соответственно на текущем и предыдущем временных слоях; $\rho_{\max}$ — максимальное значение плотности на текущем временном слое; KJ — общее число ячеек во всей расчетной области.

Метод сквозного счета

Рассмотрим частный случай расчета параметров потока, когда во всей расчетной области продольная составляющая скорости превышает скорость звука. Такое течение имеет место, например, при безотрывном обтекании острых конусов, истечении сверхзвуковой струи газа из сопла и т. д. Исходную систему уравнений сохранения записывают для модели стационарного невязкого сверхзвукового течения, а параметры потока на боковых гранях ячеек определяют из решения задачи о взаимодействии двух полубесконечных сверхзвуковых потоков.

Пусть истечение двумерной незакрученной струи происходит в затопленное пространство. Дифференциальное уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} = 0, \text{ или } \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} = -\rho \frac{v}{r}.$$

Умножив правую и левую части этого уравнения на $dxdr$, интегрируя его по характерной площади ячейки:

$$\iint_S \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dxdr + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} dxdr \right] = - \iint_S \rho \frac{v}{r} dxdr,$$

и применив формулу Грина, получаем уравнение неразрывности в виде

$$\oint_L \rho u dr - \rho v dx = - \iint_S \rho \frac{v}{r} dS,$$

где L — замкнутый контур, ограничивающий площадку S .

Аналогично можно записать интегральные уравнения движения в проекции на оси Ox и Or :

$$\oint_L (\rho u^2 + p) dr - \rho uv dx = - \iint_S \rho \frac{uv}{r} dS;$$

$$\oint_L \rho uv dr - (\rho u^2 + p) dx = - \iint_S \rho \frac{v^2}{r} dS.$$

В общем случае для плоского и осесимметричного течений система интегральных уравнений сохранения массы и импульса будет следующей:

$$\oint_L \rho (u dr - v dx) = - \kappa \iint_S \rho \frac{v}{r} dS; \quad (7.96)$$

$$\oint_L \rho u (u dr - v dx) + p dr = -\kappa \iint_S \rho \frac{vu}{r} dS; \quad (7.97)$$

$$\oint_L \rho v (u dr - v dx) - p dx = -\kappa \iint_S \rho \frac{v^2}{r} dS, \quad (7.98)$$

где $\kappa = 0$ для плоского и 1 — для осесимметричного течения.

Решая уравнения (7.96)–(7.98) совместно с уравнением энергии

$$\frac{2k}{k-1} \frac{p}{\rho} + u^2 + v^2 = \frac{k+1}{k-1}, \quad (7.99)$$

определяют параметры p , ρ , u , v . Все переменные уравнений (7.96)–(7.99) являются безразмерными. Приведение к безразмерному виду достигается отнесением плотности и скорости к критическим значениям ρ^* , a^* , а давления — к $\rho^* a^{*2}$.

Для проведения численных расчетов вводят сетку с узлами, расположенными в сечениях $x = \text{const}$ (рис. 7.22, а). В каждом сечении узлы имеют равномерный шаг

$$H_y = 2r(x)/(d_a N_1),$$

где N_1 — некоторое число, равное числу отрезков на оси Or .

Шаг H_y определяют в процессе расчета и изменяют от сечения к сечению. Параметрам потока на текущем слое $x = 2x_0/d_a$ приписывают нижний индекс, указывающий номер отрезка (p_n , ρ_n , u_n , v_n и т. д.), а параметрам на следующем слое $x = 2(x_0 + H_x)/d_a$ — такой же верхний индекс (p^n , ρ^n , u^n , v^n и т. д.). Узлы рассматриваемых сечений с одинаковыми номерами соединяют отрезками. Па-

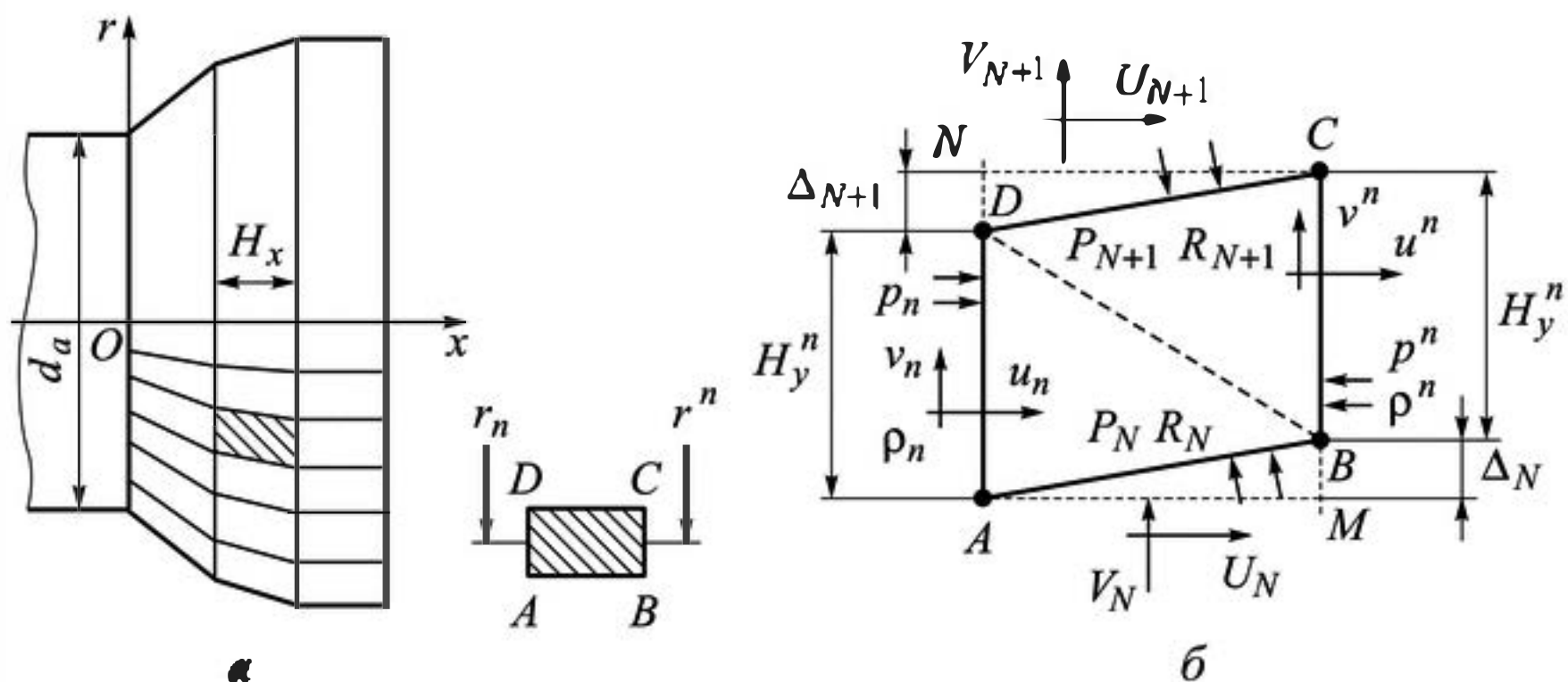


Рис. 7.22. Расчетная область (а) и расчетная ячейка (б)

параметры на каждом таком узловом отрезке обозначают заглавными буквами (P, R, U, V). Им присваивают нижние индексы, соответствующие номеру узла.

Интегрирование вдоль контура $ABCD$ (рис. 7.22, б) осуществляют против направления движения часовой стрелки. Например, в уравнении (7.96) интеграл в левой части можно представить в виде суммы интегралов:

$$\oint_{ABCD} \rho(udr - vdx) = J_1 = J_{DA} + J_{AM} + J_{MB} + J_{BC} + J_{CN} + J_{ND},$$

а в правой части записать так:

$$-\kappa \iint_S \rho \frac{v}{r} dS = J_2 = -\kappa \left(\rho_n \frac{v_n H_{yn} H_x}{2r_n} + \rho^n \frac{v^n H_y^n H_x}{2r^n} \right).$$

Здесь $J_{DA} = \rho_n u_n (-H_{yn})$; $J_{AM} = R_N (-V_N) H_x$; $J_{MB} = R_N U_N (+\Delta_N)$; $J_{BC} = \rho^n u^n (+H_y^n)$; $J_{CN} = R_{N+1} (-V_{N+1}) (-H_x)$; $J_{ND} = R_{N+1} U_{N+1} (\Delta_{N+1})$.

После алгебраических преобразований уравнение неразрывности примет вид

$$\begin{aligned} \rho^n u^n H_y^n &= \rho_n u_n H_{yn} + R_{N+1} (U_{N+1} \Delta_{N+1} H_x) - R_N (U_N \Delta_N - V_N H_x) - \\ &\quad - \kappa \rho_n \frac{v_n}{2r_n} H_{yn} H_x - \kappa \rho^n \frac{v^n}{2r^n} H_y^n H_x. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha = \rho u H_y$, $D = R(U\Delta - VH_x)$ и $\delta = \kappa \rho \frac{v}{2r} H_y H_x$. Тогда

$$\alpha^n = \alpha_n + D_{N+1} + D_N - \delta_n - \delta^n. \quad (7.100)$$

Аналогично можно записать разностные уравнения движения:

$$\begin{aligned} \beta^n &= \beta_n + P_{N+1} \Delta_{N+1} - P_N \Delta_N + U_{N+1} D_{N+1} - \\ &\quad - U_N D_N - (u\delta)_n - (u\delta)^n, \end{aligned} \quad (7.101)$$

$$\gamma^n = \gamma_n + (P_N - P_{N+1}) H_x + V_{N+1} D_{N+1} - V_N D_N - (v\delta)_n - (v\delta)^n, \quad (7.102)$$

где $\beta = (p + \rho u^2) H_y$; $\gamma = \rho uv H_y$.

При известных $\alpha^n, \beta^n, \gamma^n$ параметры u, v, p, ρ на слое $x = x_0 + H_x$ определяют по формулам

$$u = \frac{\frac{k}{k-1}\beta + \sqrt{\left(\frac{k}{k-1}\beta\right)^2 - \frac{k+1}{k-1}\left(\alpha^2 \frac{k+1}{k-1} - \gamma^2\right)}}{\alpha(k+1)/(k-1)}; \quad (7.103)$$

$$v = \frac{\gamma}{\alpha}; \quad \rho = \frac{\alpha}{uH_y}; \quad p = \frac{\beta - \alpha u}{H_y}.$$

Уравнения (7.100)–(7.103) решают методом последовательных приближений.

Таким образом, зная параметры потока p_n, ρ_n, u_n, v_n и величины $P_{N+1}, R_{N+1}, U_{N+1}, V_{N+1}, P_N, R_N, U_N, V_N$, можно вычислить аналогичные параметры p^n, ρ^n, u^n, v^n на правой границе ячейки.

Параметры потока на верхней AB и нижней DC гранях элементарной ячейки $ABCD$ (см. рис. 7.22, б) находят из решения плоской задачи о взаимодействии двух полубесконечных равномерных сверхзвуковых потоков, имеющих параметры с индексами $n-1$ и n , а также n и $n+1$. При определении величин P, R, U и V в зависимости от соотношения параметров в потоках на границах AD и AD' может реализоваться одна из структур течений, представленных на рис. 7.23. Продольная граница ячейки соответствует отрезку AB . Эта граница в общем случае может попасть в любую область спра-

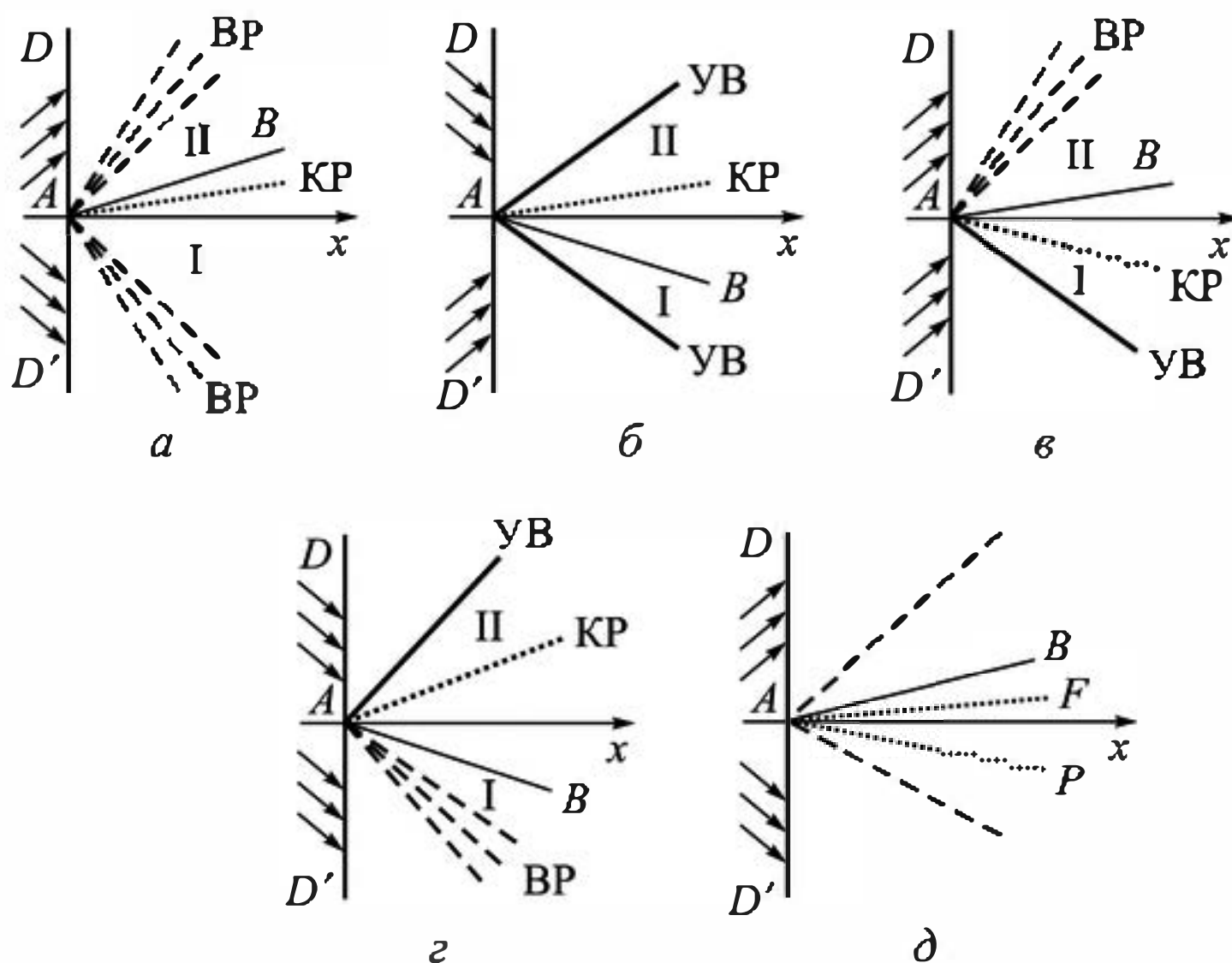


Рис. 7.23. Структуры взаимодействия сверхзвуковых потоков

ва от линии DD' , включая невозмущенный поток, веер волн разрежения и т. д. Структуры, приведенные на рис. 7.23, $a-g$, представляют собой различные комбинации двух элементов взаимодействия: скачка уплотнения, или ударной волны, и волны разрежения. В случае, изображенном на рис. 7.23, d , границы веера волн разрежения совпадают с контактными разрывами (линии AF , AP) и зона FAP является областью вакуума.

Параметры потока в областях I и II (рис. 7.24) определяют по зависимостям, известным из теории скачков уплотнений и течения Прандтля – Майера. Буквами P , R , U и V обозначают параметры газа в той области, куда попала граница ячейки.

Задачу решают методом последовательных приближений. Например, при расчете параметров потока на границе ячейки AB для случая, приведенного на рис. 7.23, e , первоначально задают угол отклонений потока $|\vartheta|$ (см. рис. 7.24) и определяют углы $\Delta\beta = |\theta_1| + |\vartheta|$, $\Delta\omega = |\theta_2| + |\vartheta|$. По известным значениям чисел Маха M_1 , M_2 , давлений p_1 , p_2 и найденным углам $\Delta\beta$, $\Delta\omega$ вычисляют давления в областях I и II решением следующих систем уравнений:

для области I:

$$\frac{\operatorname{tg} \Delta\beta}{\operatorname{tg}(\theta_{\text{ск}} - \Delta\beta)} = \frac{[(k+1)/2]M_1^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}{1 + [(k-1)/2]M_1^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}};$$

$$p_I = p_1 \left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}} - \frac{k-1}{k+1} \right);$$
(7.104)

для области II:

$$\omega_{II}(M_{II}, k) = \omega_2(M_2, k) + \Delta\omega;$$

$$\omega_2(M_2, k) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M_2^2 - 1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{M_2^2 - 1};$$

$$\omega_{II}(M_{II}, k) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M_{II}^2 - 1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{M_{II}^2 - 1};$$
(7.105)

$$p_{II} = p_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{II}^2 \right)^{-\frac{k}{k-1}} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Процесс заканчивают при условии $p_I = p_{II}$. По найденным значениям давления $p_I = p_{II} = P$ и угла ϑ находят плотность, модуль и компоненты вектора скорости, скорость звука, число M :

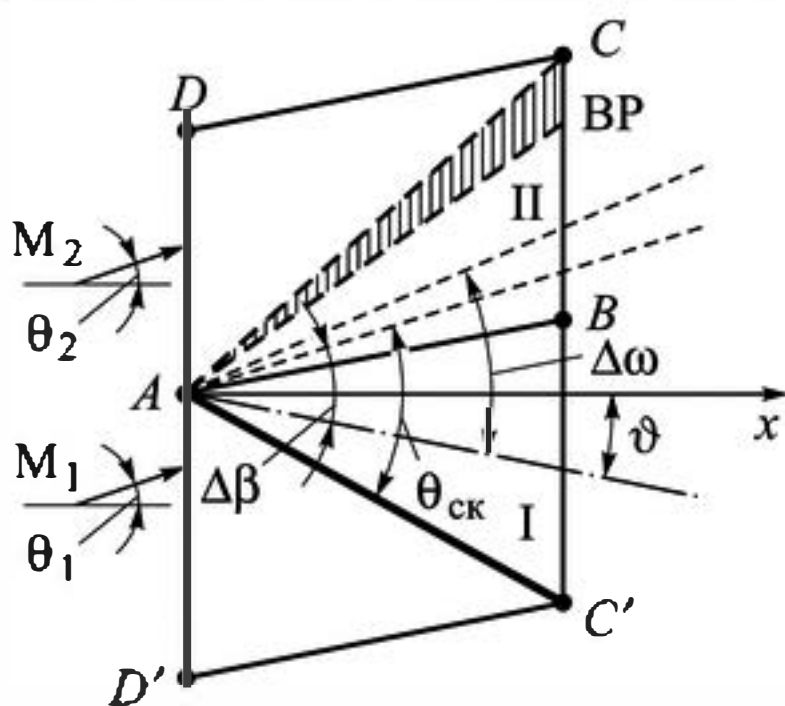


Рис. 7.24. Схема взаимодействия потоков

$$R = \begin{cases} \rho \left(\frac{P}{P_2} \right)^{1/k}; \\ \frac{(k-1)p_1 + (k+1)P}{(k+1)p_1 + (k-1)P} \rho_1; \end{cases}$$

$$V_{\Sigma} = \left[2 \frac{k+1}{k-1} - \frac{2kP}{(k-1)P} \right]^{1/2};$$

$$U = V_{\Sigma} \cos \vartheta; \quad V = V_{\Sigma} \sin \vartheta;$$

$$a = (kP/R)^{1/2}; \quad M = V_{\Sigma}/a.$$

Для крайних ячеек величины P, R, U, V вычисляют иначе.

Если границей ячейки является стенка сопла и известен угол ее наклона к оси Ox , т. е. определен угол разворота потока ϑ , то давление на продольных границах ячеек находят по формулам (7.104), (7.105).

Если же границей является свободная поверхность с заданным давлением p_i , то решают обратную задачу: полагая $P = p_i$, вычисляют направление движения потока, т. е. угол ϑ .

Для устойчивости счета по изложенной разностной схеме шаг H_x следует выбирать из условия, что все волны, возникающие в результате взаимодействия потоков, внутри каждой ячейки достигали ее правой границы и не пересекались с продольными.

7.5. Метод контрольного объема*

Для численного метода решения задач газовой динамики выделяют следующие основные составляющие: математическую модель, метод дискретизации, систему координат, расчетную сетку; способ аппроксимации производных и интегралов, метод решения, критерий сходимости численного метода.

* Настоящий параграф подготовлен по материалам В.Ю. Соболева. Основные положения метода контрольного объема см.: Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1989; Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб / Ю.А. Быстров, С.А. Исаев, Н.А. Кудрявцев, А.И. Леонтьев. СПб.: Судостроение, 2005.

Основополагающей составляющей любого численного метода является математическая модель, которая представляет собой систему уравнений сохранения аэрогазодинамики, а также граничные условия, необходимые при решении этой системы. Для описания турбулентного течения математическая модель включает в себя уравнения неразрывности, движения и энергии, а также модель турбулентности.

Уравнения сохранения имеют общие члены, поэтому их удобно представлять в единой форме, используемой в численном методе. Дискретизацию и анализ этих уравнений можно проводить в общем виде, а далее при необходимости рассматривать дополнительные слагаемые, характерные лишь для одного конкретного уравнения.

Обобщенная форма записи уравнений сохранения имеет следующий вид:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_W \rho \Phi dW}_{\text{Нестационарный поток}} + \underbrace{\iint_S \rho \Phi (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{Конвективный поток}} = \underbrace{\iint_S \Gamma (\text{grad } \vec{\Phi} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{Диффузионный поток}} + Q,$$

где Φ — произвольная величина, значение которой зависит от рассматриваемого уравнения (например, в уравнении неразрывности $\Phi = 1$, в уравнении движения $\Phi = V$ и т. д.), Γ — коэффициент диффузии для величины Φ (например, $\Gamma = \mu$); Q — источниковый член, который может содержать составляющие как от массовых сил, так и от перепада давления.

При исследовании вязкого турбулентного течения в расчетах диффузионного потока используют разнообразные подходы — от полуэмпирических моделей турбулентности до методов прямого интегрирования уравнений движения газа. Все они различаются между собой точностью и затратами вычислительных ресурсов на их осуществление. Наиболее представительной группой являются модели турбулентности с двумя дифференциальными уравнениями. Рассмотренная в § 2.7 (k - ϵ)-модель турбулентности пригодна для полностью турбулентных течений. Однако, как известно, вблизи стенок местное турбулентное число Рейнолдса является столь малым, что вязкие эффекты превалируют над турбулентными. Один из наиболее распространенных подходов к моделированию таких течений связан с применением метода пристеночных функций, который использует универсальные соотношения (пристеночные функции), связывающие параметры течения с расстоянием от стенки.

Такой подход позволяет экономить вычислительные ресурсы и учитывать влияние различных факторов, в частности шероховатости.

Положения точек, в которых будут рассчитаны параметры потока, определяют с помощью расчетной сетки, линии которой разбивают рассматриваемую область на конечное число контрольных объемов. Для областей с простой геометрией границ при вычислении параметров обтекания плоских тел наиболее простыми для построения и последующего решения являются структурированные сетки. Они состоят из нескольких семейств линий, причем линии одного семейства никогда не пересекаются между собой и пересекают линии другого семейства только один раз. Это позволяет задать положение каждого контрольного объема при помощи двух (в двумерном случае) или трех (в трехмерном случае) индексов, например i, j, k . Каждая точка такой двумерной сетки имеет четыре соседние точки, индексы которых отличаются от ее индексов на ± 1 . Это значительно облегчает процесс программирования и матрицу коэффициентов получаемой системы алгебраических уравнений. Недостатками структурированных сеток являются невозможность их применения для областей со сложной геометрией границ и невозможность локального увеличения частоты узлов сетки для повышения точности решения в некоторой части расчетной области.

Существует три типа структурированных сеток, называемых по форме линий сетки: Н, О и С. Примеры сеток различных типов показаны на рис. 7.25. Отметим, что для сеток типа О (см. рис. 7.25, б) одно семейство линий является бесконечным и в сетку необходимо вносить искусственный разрез, от которого ведется отсчет индекса

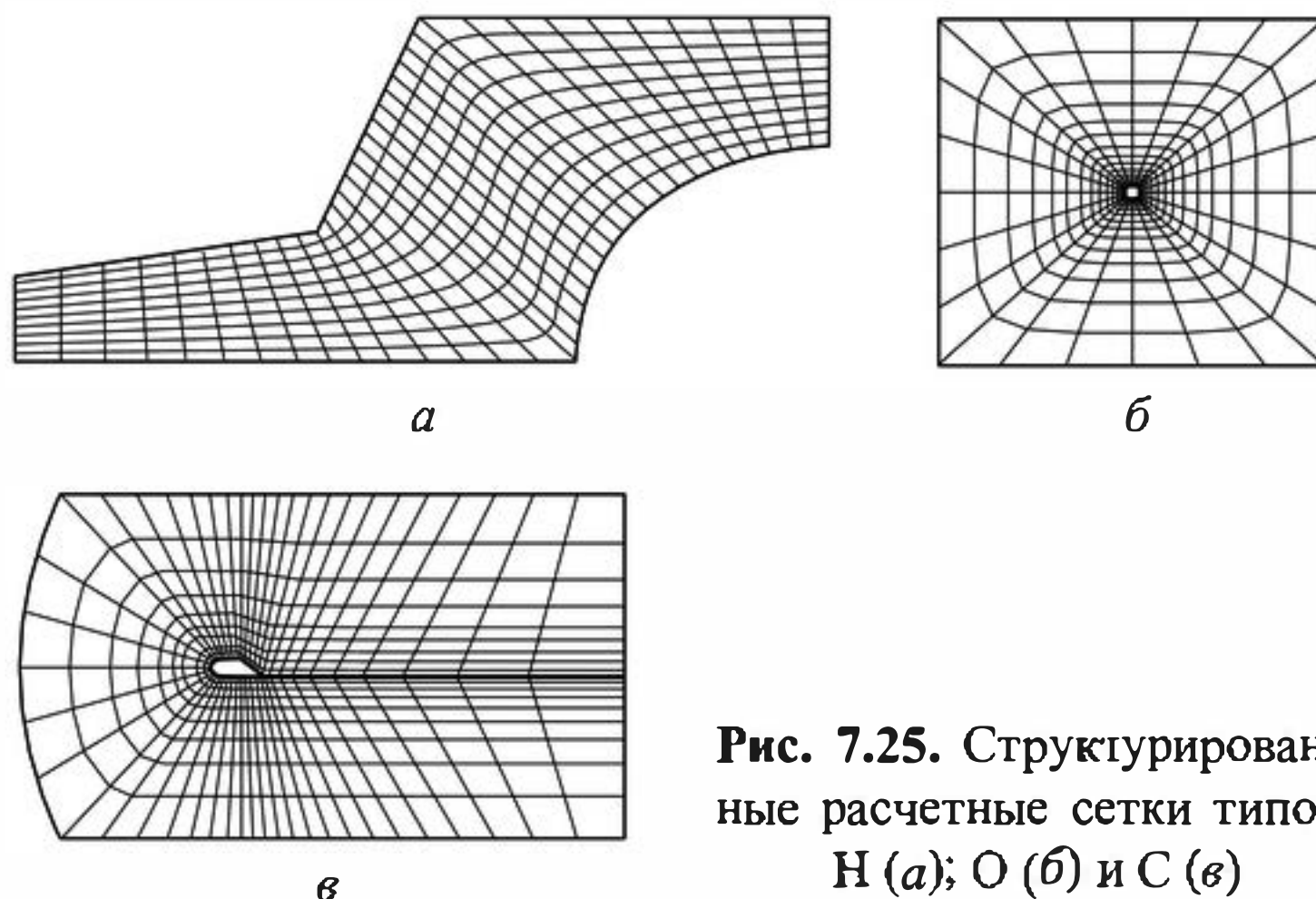


Рис. 7.25. Структурированные расчетные сетки типов Н (а); О (б) и С (в)

окружных точек (контрольных объемов) сетки. На рис. 7.25, в показан пример сетки типа С, которая построена вокруг профиля. У сетки этого типа происходит совпадение точек, расположенных на двух отрезках одной ее линии, с образованием разреза, схожего с разрезом сетки типа О. Сетки типа С часто используют для расчета тел с острыми кромками.

Как уже было отмечено ранее, параметры потока определяют в отдельных точках расчетной сетки, называемых узлами. В расчетах используют совмещенную схему расположения узлов (рис. 7.26), в которой для вычисления значений всех переменных рассматривают один расчетный узел в центре контрольного объема, а следовательно, единый контрольный объем. Такая схема является наиболее простой, но приходится проводить большое количество интерполяций. Так, для определения массового расхода через какую-либо грань контрольного объема необходимо интерполировать значения составляющих вектора скорости с использованием их значений в узлах по обе стороны от рассматриваемой грани.

Для задания граничных условий на сетке с совмещенными узлами на гранях контрольных объемов вводят дополнительные узлы, поэтому число граничных узлов в каждом направлении на два больше числа контрольных объемов в этом же направлении. Пример такой сетки показан на рис. 7.27.

Для получения более точного решения и сокращения вычислительных ресурсов используют дробление сетки (рис. 7.28). Для сеток рассматриваемого типа в трехмерном случае целесообразно проводить дробление контрольных объемов на восемь частей, по-

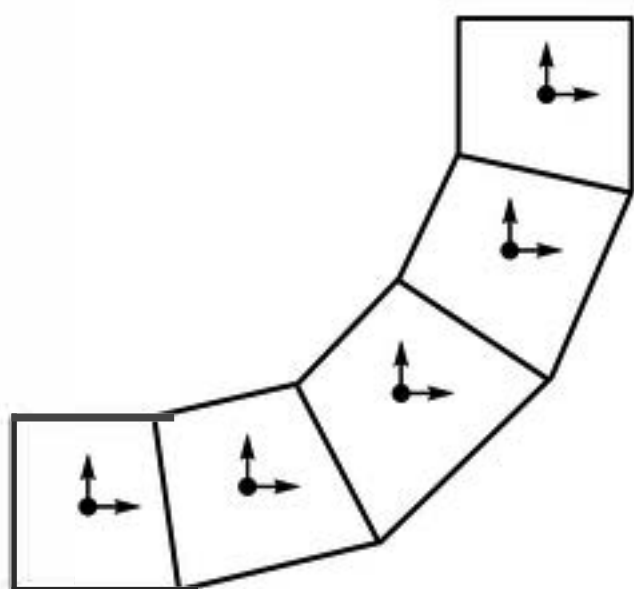


Рис. 7.26. Совмещенная схема расположения узлов (стрелки – составляющие вектора скорости; точки – место определения давления)

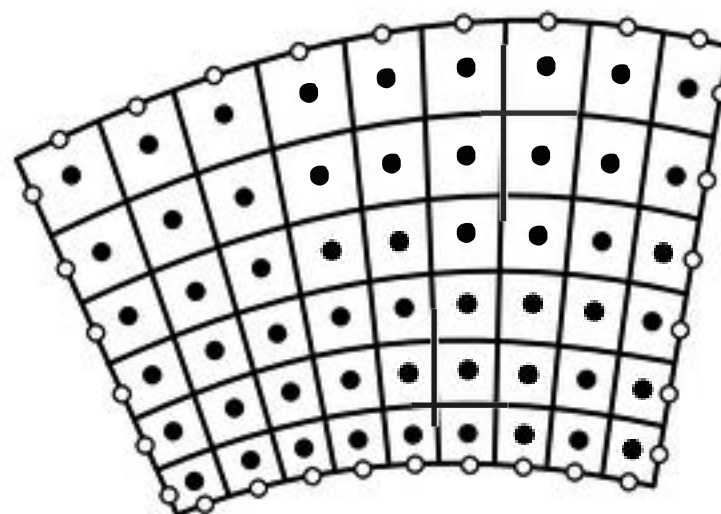


Рис. 7.27. Расположение граничных (светлые точки) и расчетных (темные точки) узлов на сетке, содержащей 9×6 контрольных объемов, 11×8 узлов

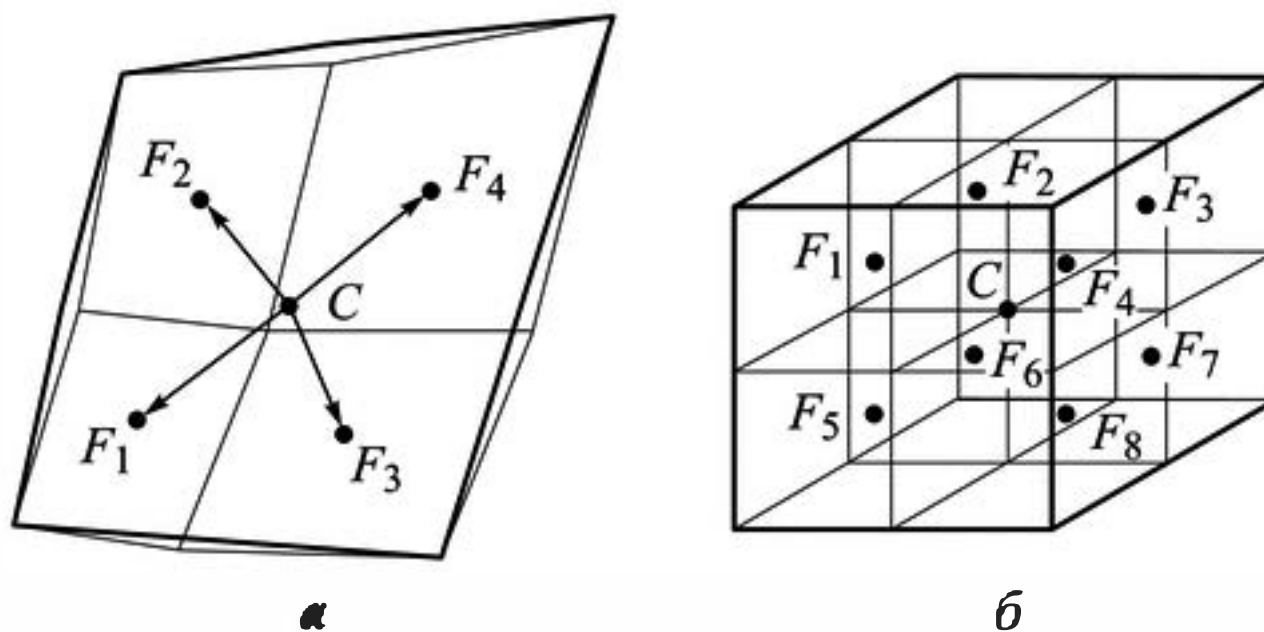


Рис. 7.28. Перенос переменных из узла C грубой сетки в узлы F_i мелкой сетки при двух- (*а*) и трехмерном (*б*) течении

сколько каждый из них представляет собой восьмиугольник. При этом вершины контрольного объема грубой сетки и восьми объемов мелкой сетки совпадают, тогда как их соответствующие грани могут и не совпадать.

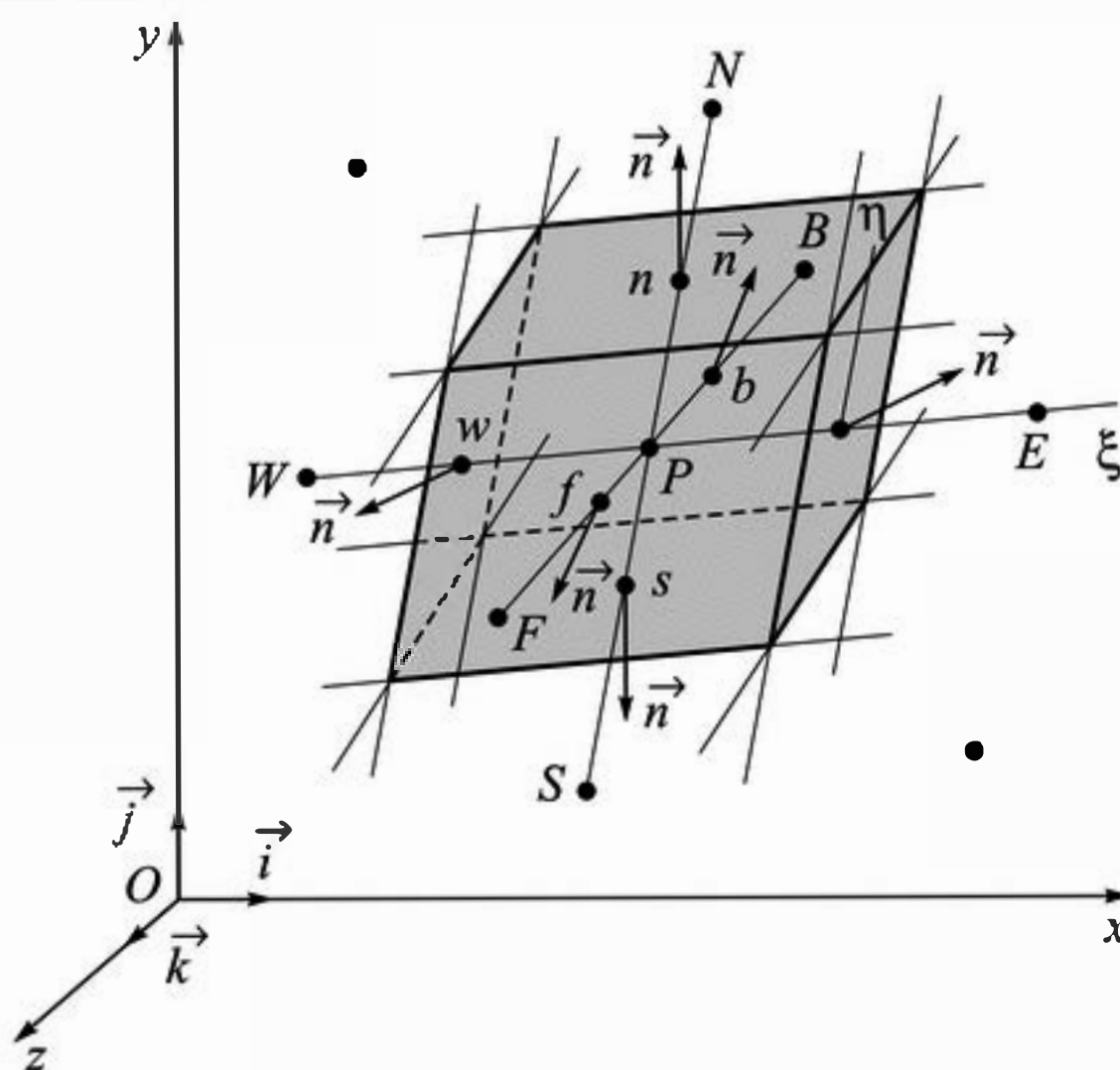
Дроблением сетки можно получить несколько ее уровней для одной и той же расчетной области. Чтобы сократить время расчета на более мелкой (т. е. более высокого уровня) сетке, можно в качестве начальных условий использовать результаты расчета на более грубой сетке (т. е. предыдущего уровня). В случае, приведенном на рис. 7.28, одному узлу C грубой сетки соответствуют восемь узлов мелкой сетки F_i , поэтому необходимо проводить экстраполяцию решения с грубой сетки на мелкую. Зная приближенные значения частных производных экстраполируемой переменной Φ в узле C , можно использовать для этих целей $\text{grad } \Phi$:

$$\Phi_{F_i} = \Phi_C + (\text{grad } \Phi)_C (\vec{r}_{F_i} - \vec{r}_C),$$

где $\vec{r}_C, \vec{r}_{F_i}$ — радиус-векторы узлов грубой и мелкой сетки соответственно.

После выбора типа сетки определяют аппроксимационные схемы для построения дискретного аналога дифференциальных уравнений. Для метода контрольного объема можно использовать схемы аппроксимации поверхностных и объемных интегралов с помощью теоремы о среднем, приняв в качестве среднего значения по объему значение в центре ячейки, а в качестве среднего значения на грани — значение в центре грани.

Рассмотрим «восточную» (т. е. находящуюся между узлами P и E) грань контрольного объема, изображенного на рис. 7.29. (Для пяти остальных граней приведенные ниже зависимости имеют аналогичный характер, изменяются лишь индексы переменных.)



с прилегающими узлами

МАЦИН:

$$F_e^c = F_{e\pi\pi}^c + G(F_{e\varphi\pi}^c - F_{e\pi\pi}^c) = \dot{m}_e \Phi_{e\pi\pi} + G\dot{m}_e (\Phi_{e\varphi\pi} - \Phi_{e\pi\pi}),$$

где G — коэффициент смешения; Φ_e — значение переменной Φ в центре грани контрольного объема;

$$\Phi_{\text{exp}} = \Phi_E^f + \Phi_P(1-f);$$

$$\Phi_{\text{епп}} = \begin{cases} \Phi_P & \text{при } \dot{m}_e > 0; \\ \Phi_E & \text{при } \dot{m}_e < 0, \end{cases}$$

$f = L_{Pe} / L_{PE}$; L_{Pe} , L_{PE} — расстояния между точками P , e и P , E соответственно.

Такая схема имеет второй порядок точности. На неортогональных сетках используют и более сложные методы отыскания конвективных потоков, однако данный метод наиболее выгоден в алгоритмах с дроблением сетки.

Кратные интегралы, входящие в источниковый член, согласно теореме о среднем, можно представить как произведение подын-

тегральной функции и контрольного объема или площади Φ . Такая аппроксимация пригодна для контрольного объема любой формы.

С использованием теоремы о среднем можно также аппроксимировать и нестационарный член:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho \Phi dW \approx \rho \Delta W \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_P.$$

Производную по времени $\partial \Phi / \partial t$ можно определить с помощью одной из схем Рунге – Кутты, а при решении нестационарной задачи организовать внешний цикл времени с расчетом поля течения на каждой итерации по времени. После необходимых преобразований получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho \Phi dW \approx A'_P \Phi_P^{n+1} - Q'_P,$$

где A'_P, Q'_P — нестационарные коэффициент и источниковый член, вычисляемые соответственно по формулам

$$A'_P = \frac{\rho \Delta W}{\Delta t} (1 + 0,5 \gamma_t);$$

$$Q'_P = \frac{\rho \Delta W}{\Delta t} \left[(1 + \gamma_t) \Phi_P^n - 0,5 \gamma_t \Phi_P^{n-1} \right].$$

Здесь γ_t — так называемый коэффициент схемы. При $\gamma_t = 0$ схема вырождается в схему Эйлера, а при $\gamma_t = 1$ имеем трехточечную схему Рунге – Кутты. Возможно образование и других схем путем варьирования коэффициента γ_t .

Для аппроксимации диффузионного потока F^d можно также воспользоваться теоремой о среднем:

$$F_e^d = \int_{S_e} \Gamma(\text{grad } \Phi \bar{n}) dS \approx \left[\Gamma(\text{grad } \Phi \bar{n}) \right]_e S_e,$$

где S_e — площадь грани контрольного объема, содержащей точку e .

Для трехмерного случая $\text{grad } \Phi$ в точке e можно представить как в общей декартовой системе координат, так и в местной ортогональной системе с центром в точке e :

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} i + \frac{\partial \Phi}{\partial y} j + \frac{\partial \Phi}{\partial z} k = \frac{\partial \Phi}{\partial n} n + \frac{\partial \Phi}{\partial t} t + \frac{\partial \Phi}{\partial s} s,$$

где n, t, s — оси, направленные соответственно по нормали и касательным к грани контрольного объема.

В декартовой системе координат диффузионный поток

$$F_e^d = \Gamma_e \sum_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_e S_e.$$

Однако нахождение частных производных непосредственно в точке e сопряжено с определенными трудностями. Поэтому на практике их вычисляют сначала в центрах контрольных объемов, у которых рассматриваемая грань является общей, а затем путем интерполяции непосредственно на грани.

Для сеток в декартовой системе координат при линейной интерполяции применяют центрально-разностную аппроксимацию:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_P \approx \frac{\Phi_E - \Phi_W}{2\Delta x}.$$

После вычисления производных в точке P и интерполяции эти же производные определяют на границе, например в точке e . Далее находят диффузионные потоки через грани контрольного объема. Главной проблемой при этом является возможность получения так называемого шахматного поля величины Φ (рис. 7.30), которое удовлетворяет соотношениям, используемым в расчете, но не является истинным решением дифференциального уравнения.

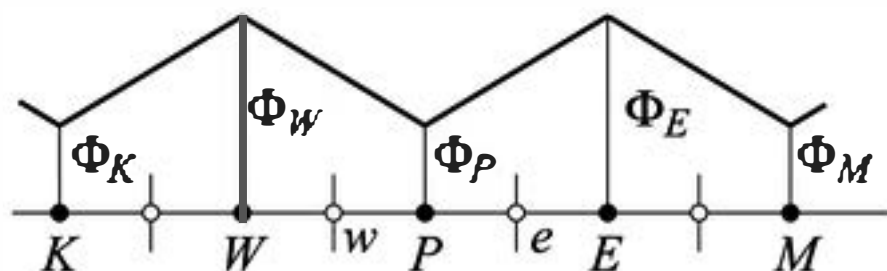


Рис. 7.30. Шахматное поле величины Φ

Для метода контрольного объема наиболее пригодным способом избежания получения такого решения является использование так называемой отложенной поправки. Для этого уравнение диффузионного потока аппроксимируют неявным способом и формируют дополнительное слагаемое, компенсирующее разность между точным и приближенным значениями F_0 . При этом отложенная поправка практически не влияет на сходимость метода.

Воспользуемся местной ортогональной системой координат с началом в точке e . В этом случае в выражение для диффузионного потока будет входить только производная по n :

$$F_e^d = \Gamma_e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_e S_e.$$

В декартовой системе координат на «восточной» грани ячейки $n = x$, поэтому для нахождения производной применим центрально-разностную аппроксимацию:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_e \approx \frac{\Phi_E - \Phi_P}{L_{PE}},$$

где L_{PE} — расстояние между узлами E и P , причем в рассматриваемом случае $L_{PE} = \Delta x$.

Чтобы избежать получения решения в виде шахматного поля распределения величины, введем интерполяцию следующего вида:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_e^* = \frac{1}{2} \frac{\Phi_E - \Phi_W}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_M - \Phi_P}{2\Delta x}.$$

Изображенное на рис. 7.30 шахматное распределение величины Φ вдоль оси Ox всегда обращает последнее выражение в нуль, поскольку $\Phi_E - \Phi_W = \Phi_M - \Phi_P = 0$. Поэтому, чтобы в процессе счета не дать развиваться шахматному полю, необходимо на каждой итерации расчета Φ корректировать значение F_e^d по формуле

$$F_e^d = F_e^{d_{ня}} + \left[F_e^{d_{я}} - F_e^{d_{ня}} \right]^{пд}, \quad (7.106)$$

где индексы «ня» и «я» соответствуют значениям, рассчитанным по неявной и явной зависимостям соответственно, а индекс «пд» — значениям из предыдущей итерации. Следует отметить, что проблема возникновения шахматного поля возникает при решении уравнения для поправки давления при использовании совмещенной сетки.

Если при расчете используется не декартова, а произвольная сетка, то необходимо ввести допущения. Так, если прямая, соединяющая узлы P и E , пересекает «восточную» грань контрольного объема под углом, близким к прямому, то производная по координате n может быть аппроксимирована производной по координате ξ . Выражение для неявной аппроксимации примет вид

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_e = \Gamma_e S_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{L_{PE}}. \quad (7.107)$$

Если прямая, соединяющая узлы P и E , ортогональна к грани контрольного объема, то мы получаем аппроксимацию второго порядка точности, и второе слагаемое в выражении (7.106) обращается в нуль. В противном случае (прямая не ортогональна грани) это слагаемое, являющееся отложенной поправкой, должно компенсировать

ровать разницу между производными по координатам ξ и n . Тогда модифицированное выражение для диффузионного потока величины Φ через «восточную» грань контрольного объема примет вид

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_e + \Gamma_e S_e \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_e^* - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_e^* \right]^{\text{пд}}.$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения вычисляем неявным способом по формуле (7.107), а второе (отложенную поправку) — по предварительно найденным градиентам величины Φ в точке e :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_e^* = (\text{grad } \Phi_e)^* \vec{n}; \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_e^* = (\text{grad } \Phi_e)^* \vec{i}_\xi,$$

где $\vec{i}_\xi$ — единичный вектор.

В результате можно записать окончательное выражение для аппроксимации диффузионного потока через «восточную» грань контрольного объема:

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{L_{PE}} + \Gamma_e S_e \overline{(\text{grad } \Phi)_e^{\text{пд}}} (\vec{n} - \vec{i}_\xi).$$

Отметим, что если неортогональность сетки незначительна, значение поправки имеет более высокий порядок малости, чем у неявного члена.

Если линии сетки имеют изломы в точках пересечения, то прямая, соединяющая P и E , не пройдет через центр грани контрольного объема, и аппроксимация по имеющимся схемам даст значения Φ и $\partial \Phi / \partial \xi$ уже не в точке e , а в точке e' (рис. 7.31). Для точки e такая схема уже не будет обеспечивать второй порядок точности, хотя в случае, когда e и e' находятся между собой на относительно небольшом расстоянии, ошибка аппроксимации невелика. Если же точка e' находится ближе к одной из вершин контрольного объема, чем к центру грани, аппроксимационная схема имеет лишь первый порядок точности.

Чтобы обеспечить второй порядок точности при наличии таких изломов,

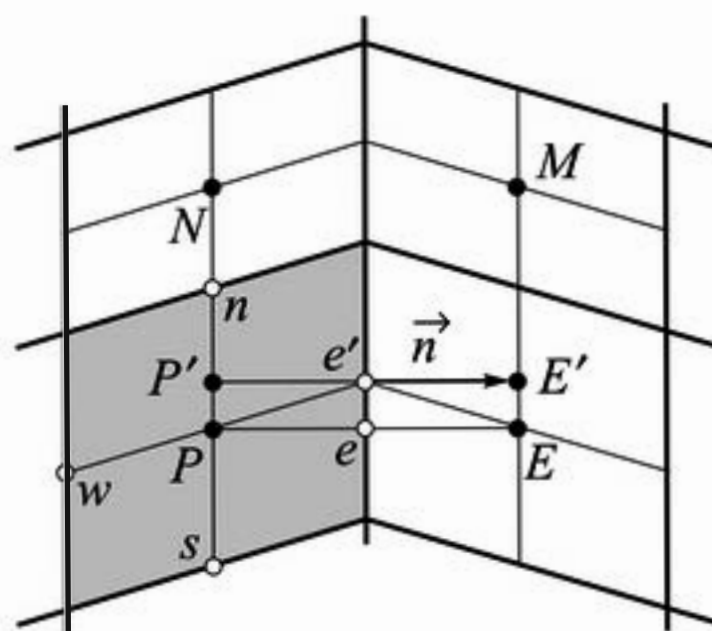


Рис. 7.31. Расположение дополнительных узлов на неортогональной сетке

необходимо либо использовать специальные функции формы, либо вводить в расчет дополнительные узлы P' и E' . Эти узлы лежат на пересечении прямой, перпендикулярной грани контрольного объема, с прямыми, соединяющими узлы P , N и E , M соответственно. Зная значения в узлах P' и E' , можно найти значение переменной и ее градиент в точке e .

При подстановке в уравнение сохранения аппроксимированных выше значений конвективных и диффузионных потоков, а также источниковых и нестационарных членов, получается линейное алгебраическое уравнение, называемое дискретным аналогом исходного в частных производных. Это уравнение, записанное относительно отдельного контрольного объема, имеет приближенное решение. Расчетная сетка в целом как совокупность контрольных объемов порождает систему линейных алгебраических уравнений, решение которой представляет собой приближенное решение задачи расчета поля величины Φ .

В выражение для дискретного аналога будут также входить слагаемые, у которых нет явного аналога в обобщенном уравнении, поскольку они возникают в процессе аппроксимации. Если считать неортогональность сетки малой, а рассматриваемый контрольный объем не приграничным, то дискретный аналог уравнения будет иметь следующий вид:

$$A'_P \Phi_P + F^c = F^d + Q_P^p + Q_P^b + Q_P^i + Q_P^c + Q_P^d. \quad (7.108)$$

Здесь $F^c = F_e^c + F_w^c + F_n^c + F_s^c + F_b^c + F_f^c$, $F^d = F_e^d + F_w^d + F_n^d + F_s^d + F_b^d + F_f^d$ — соответственно суммарные конвективный и диффузионный потоки через грани контрольного объема, а A'_P и Q_P^i получены при аппроксимации нестационарного члена. Неизвестными остаются лишь слагаемые Q_P^p , Q_P^b , Q_P^c и Q_P^d .

Величина Q_P^p является составляющей источникового члена, определяется перепадом давления и записывается в виде

$$Q_P^p = - \int_S p \vec{i} \vec{n} dS \approx \sum_c p_c S_c^x,$$

где c — индекс грани.

Слагаемое Q_P^b — составляющая источникового члена, обусловленная подъемной силой частиц нагретого газа. Данное слагаемое отлично от нуля лишь в уравнениях движения и аппроксимируется следующим образом:

$$Q_P^b = \int_W (\rho - \rho_\bullet) g_i dW \approx (\rho_P^{\text{пд}} - \rho_\bullet) g_i \Delta W,$$

где ρ_0 — плотность ненагретого газа; g_i — проекции вектора ускорения свободного падения на оси используемой в расчете декартовой системы координат; β — коэффициент теплового расширения среды.

Конвективная составляющая Q_P^c источникового члена возникает при комбинации противопоточной и центрально-разностной схем аппроксимации, когда рассчитывают конвективные потоки. При составлении дискретного аналога конвективные потоки определяем по противопоточной схеме, т. е. $F^c = \sum_J F_J^c$, где $J = e, w, n, s, b, f$. Вторые же слагаемые потоков после переноса их в правую часть дискретного аналога образуют член Q_P^c :

$$Q_P^c = G \sum_J [\dot{m}_J (\Phi_J^{\text{пп}} - \Phi_J^{\text{цр}})].$$

Диффузионная составляющая Q_P^d источникового члена возникает при введении в расчет диффузионных потоков отложенной поправки. При дискретизации допускаем

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{L_{PE}},$$

поэтому в правую часть дискретного аналога интегрального уравнения переносим слагаемое

$$Q_P^d = \Gamma_e S_e (\text{grad } \Phi)_e^{\text{пд}} (\vec{n} - \vec{i}_\xi).$$

Преобразуем уравнение (7.108) к виду, удобному для решения. Пусть $Q_P = Q_P^p + Q_P^b + Q_P^f + Q_P^c + Q_P^d$. Перенеся F^d в левую часть этого уравнения, имеем

$$A_P^t \Phi_P + F^c - F^d = Q_P. \quad (7.109)$$

Слагаемое F^c рассчитываем с использованием противопоточной схемы. Тогда

$$\begin{aligned} F^c &= F_e^c + F_w^c + F_n^c + F_s^c + F_f^c + F_b^c = \\ &= \min(\dot{m}_e, 0) \Phi_E + \max(\dot{m}_e, 0) \Phi_P + \min(\dot{m}_w, 0) \Phi_W + \max(\dot{m}_w, 0) \Phi_P + \\ &+ \min(\dot{m}_n, 0) \Phi_N + \max(\dot{m}_n, 0) \Phi_P + \min(\dot{m}_s, 0) \Phi_S + \max(\dot{m}_s, 0) \Phi_P + \\ &+ \min(\dot{m}_b, 0) \Phi_B + \max(\dot{m}_b, 0) \Phi_P + \min(\dot{m}_f, 0) \Phi_F + \max(\dot{m}_f, 0) \Phi_P. \end{aligned}$$

Здесь

$$\min(\dot{m}_e, 0) = \begin{cases} \dot{m}_e & \text{при } \dot{m}_e < 0; \\ 0 & \text{при } \dot{m}_e > 0; \end{cases} \quad \max(\dot{m}_e, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{m}_e < 0; \\ \dot{m}_e & \text{при } \dot{m}_e > 0, \end{cases}$$

но $\max(\dot{m}_j, 0)\Phi_P = -\min(\dot{m}_j, 0)\Phi_P$, где $j = e, w, n, s, b, f$. После приведения подобных членов получаем

$$\begin{aligned} F^c = & \min(\dot{m}_e, 0)(\Phi_E - \Phi_P) + \min(\dot{m}_w, 0)(\Phi_W - \Phi_P) + \\ & + \min(\dot{m}_n, 0)(\Phi_N - \Phi_P) + \min(\dot{m}_s, 0)(\Phi_S - \Phi_P) + \\ & + \min(\dot{m}_b, 0)(\Phi_B - \Phi_P) + \min(\dot{m}_f, 0)(\Phi_F - \Phi_P). \end{aligned} \quad (7.110)$$

Слагаемое F^d определяем по неявной схеме:

$$\begin{aligned} F^d = & \frac{\Gamma_e S_e}{L_{PE}}(\Phi_E - \Phi_P) + \frac{\Gamma_w S_w}{L_{PW}}(\Phi_W - \Phi_P) + \frac{\Gamma_n S_n}{L_{PN}}(\Phi_N - \Phi_P) + \\ & + \frac{\Gamma_s S_s}{L_{PS}}(\Phi_S - \Phi_P) + \frac{\Gamma_b S_b}{L_{PB}}(\Phi_B - \Phi_P) + \frac{\Gamma_f S_f}{L_{PF}}(\Phi_F - \Phi_P). \end{aligned} \quad (7.111)$$

Подставив выражения (7.110) и (7.111) в уравнение (7.109) и выполнив соответствующие преобразования, находим

$$\begin{aligned} A'_P \Phi_P + & \left[\min(\dot{m}_e, 0) - \frac{\Gamma_e S_e}{L_{PE}} \right] (\Phi_E - \Phi_P) + \\ & + \left[\min(\dot{m}_w, 0) - \frac{\Gamma_w S_w}{L_{PW}} \right] (\Phi_W - \Phi_P) + \left[\min(\dot{m}_n, 0) - \frac{\Gamma_n S_n}{L_{PN}} \right] (\Phi_N - \Phi_P) + \\ & + \left[\min(\dot{m}_s, 0) - \frac{\Gamma_s S_s}{L_{PS}} \right] (\Phi_S - \Phi_P) + \left[\min(\dot{m}_f, 0) - \frac{\Gamma_f S_f}{L_{PF}} \right] (\Phi_F - \Phi_P) + \\ & + \left[\min(\dot{m}_b, 0) - \frac{\Gamma_b S_b}{L_{PB}} \right] (\Phi_B - \Phi_P) = Q_P. \end{aligned} \quad (7.112)$$

Введем коэффициенты:

$$\begin{aligned} A_E = \min(\dot{m}_e, 0) - \frac{\Gamma_e S_e}{L_{PE}}; \quad A_N = \min(\dot{m}_n, \bullet) - \frac{\Gamma_n S_n}{L_{PN}}; \\ A_W = \min(\dot{m}_w, 0) - \frac{\Gamma_w S_w}{L_{PW}}; \quad A_S = \min(\dot{m}_s, \bullet) - \frac{\Gamma_s S_s}{L_{PS}}; \end{aligned}$$

$$A_F = \min(\dot{m}_f, 0) - \frac{\Gamma_f S_f}{L_{PF}}; \quad A_B = \min(\dot{m}_b, 0) - \frac{\Gamma_b S_b}{L_{PB}}.$$

Тогда уравнение (7.112) будет иметь вид

$$A_P^t \Phi_P + A_E (\Phi_E - \Phi_P) + A_W (\Phi_W - \Phi_P) + A_N (\Phi_N - \Phi_P) + \\ + A_S (\Phi_S - \Phi_P) + A_F (\Phi_F - \Phi_P) + A_B (\Phi_B - \Phi_P) = Q_P.$$

Если же принять

$$A_P = A_P^t - A_E - A_W - A_N - A_S - A_F - A_B,$$

то получим окончательный вид дискретного аналога исходного дифференциального уравнения (7.108):

$$A_P \Phi_P + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_N \Phi_N + \\ + A_S \Phi_S + A_F \Phi_F + A_B \Phi_B = Q_P. \quad (7.113)$$

Система, составленная из уравнений вида (7.113) для всей расчетной сетки, может быть решена любым из известных методов. Следует отметить, что при записи дискретных аналогов уравнений движения (т. е. для составляющих скорости V_j) коэффициенты A_j , где $j = E, W, N, S, F, B$, имеют одинаковые значения как для V_x , V_y , так и для V_z ; различаются лишь коэффициент A_P и источниковый член Q_P .

Задание граничных условий при использовании неортогональной расчетной сетки требует особого внимания, поскольку ее границы не параллельны осям декартовой системы координат, а следовательно, проекциям вектора скорости. Метод контрольного объема требует, чтобы были заданы потоки величин через входные грани, либо чтобы эти потоки были выражены через известные величины во внутренних узлах. При этом должно непременно выполняться равенство числа контрольных объемов числу неизвестных.

Как правило, на границе типа «вход потока» необходимо задать все величины. Если условия на этой границе точно неизвестны, следует как можно дальше разнести ее с представляющим интерес участком расчетной сетки. Поскольку на границе задают значения скорости и других переменных, можно найти значения конвективных потоков. Значения диффузионных потоков обычно неизвестны, но они могут быть аппроксимированы с использованием известных граничных значений переменных и односторонней разностной аппроксимации частных производных.

На границе типа «выход потока» отсутствует полная информация о параметрах течения. Поэтому границу необходимо расположить как можно дальше от исследуемой области и принять на ней параметры, соответствующие невозмущенным, или определить их экстраполяцией значений во внутренних узлах расчетной сетки по направлениям линий тока.

На непроницаемой стенке для составляющих вектора скорости выполняется условие

$$V_i = V_{i\text{ст}},$$

вызванное трением вязкой среды о твердую стенку (при отсутствии скольжения). Если стенка является непроницаемой, конвективные потоки для всех величин равны нулю. Диффузионные же потоки определить сложнее. Так, для скалярных величин, например тепловой энергии, они могут быть как равны нулю (адиабатическая стенка), так и иметь заданное значение (изотермическая стенка). Если составляющие потока известны, их можно ввести в исходное дифференциальное уравнение для пристеночного контрольного объема.

При составлении дискретных аналогов дифференциальных уравнений получена система линейных алгебраических уравнений (7.113). В матричной форме система уравнений метода контрольного объема имеет вид

$$A\Phi = Q,$$

где A — матрица коэффициентов, Φ — вектор производных, Q — вектор правых частей уравнений (источниковых членов).

Существует две группы методов решения подобных систем: прямые, наиболее известными из которых являются методы Гаусса, LU -разложения и прогонки (для трехдиагональных матриц), и итерационные, в которых решения получают методом последовательных приближений. Поскольку размерность системы линейных алгебраических уравнений достаточно велика, для их решения используют итерационные методы.

7.6. Метод дискретных вихрей

Среда, в которой движется ЛА, является вязкой, вследствие чего силовое воздействие потока на его поверхность может быть сведено к двум видам распределенных нагрузок: нормальному давлению

и касательным напряжениям (см. гл.1). Во многих случаях с достаточной для практики точностью их можно определять отдельно, а в ряде задач пренебречь вязкостью и считать среду идеальной. Среди численных методов расчета обтекания тел потоком идеального газа широкое распространение получил метод дискретных вихрей.

Будем считать, что все пространство $Oxyz$ заполнено невязким несжимаемым газом. На рис 7.32 изображена несущая поверхность S со сходящей с нее вихревой пеленой σ , обтекаемая в области D потоком постоянной плотности ρ со скоростью $\vec{V}_\infty$.

При известных векторе скорости невозмущенного (набегающего) потока, законах движения и деформаций тела, заданной форме тела (поверхность S) требуется определить взаимное влияние тела на среду (возмущенные поля скоростей и давлений) и среды на тело (его аэродинамические характеристики).

Для невязкого и несжимаемого газа справедливы известные уравнения аэродинамики: неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (7.114)$$

и движения (уравнение Эйлера)

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{F}, \quad (7.115)$$

где $\vec{V}(t, \vec{r})$ — вектор абсолютной скорости частиц газа; $p(t, \vec{r})$ — давление; $\vec{F}(t, \vec{r})$ — вектор массовых сил; t — время; $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ — радиус-вектор; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ — оператор Гамильтона.

Полагая, что поле возмущенных скоростей $\vec{V}(t, \vec{r}) - \vec{V}_\infty$ потенциально всюду вне поверхности S и вихревого следа σ , запишем для потенциала скоростей φ известную формулу связи его градиента с возмущенной скоростью:

$$\vec{V}(t, \vec{r}) - \vec{V}_\infty = \nabla \varphi(t, \vec{r}) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}.$$

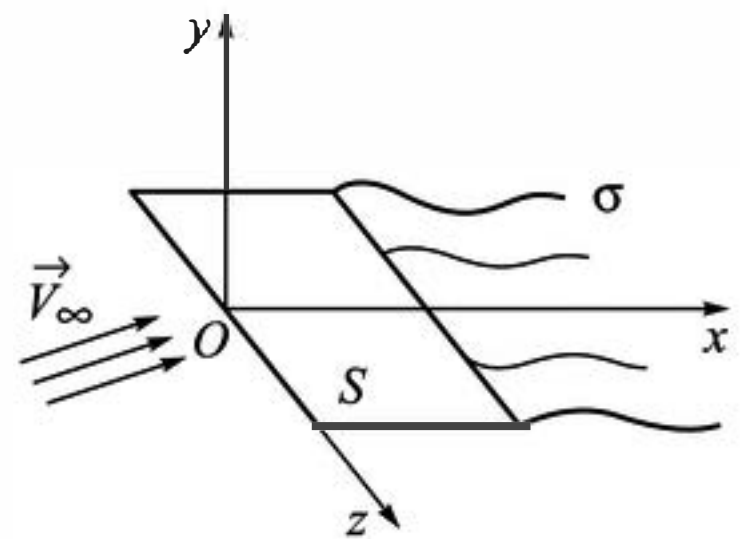


Рис. 7.32. Несущая поверхность с вихревой пеленой

Тогда в силу уравнения неразрывности (7.114) для потенциала φ получим уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi(t, \vec{r}) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (7.116)$$

В случае отсутствия массовых сил ($\vec{F} = 0$) интеграл уравнения движения (7.115) (интеграл Коши – Лагранжа) имеет вид

$$p(t, \vec{r}) = f(t) - \rho \left[\frac{\partial \varphi(t, \vec{r})}{\partial t} + \frac{\vec{V}^2(t, \vec{r})}{2} \right], \quad (7.117)$$

где $f(t)$ — функция, определяемая из граничных условий и постоянная в области $\rho = \text{const}$.

Таким образом, потенциал $\varphi(t, \vec{r})$ возмущенных скоростей полностью определяет поле скоростей во всем пространстве:

$$\vec{V}(t, \vec{r}) = \vec{V}_\infty + \nabla \varphi(t, \vec{r}). \quad (7.118)$$

При проведении расчетов методом дискретных вихрей следует принимать во внимание характер обтекания несущей поверхности. В дальнейшем будем рассматривать случай ее безотрывного обтекания.

Результаты эксперимента показывают, что задняя кромка поверхности огибается потоком лишь в первый момент после начала движения. В дальнейшем происходит переход от бесциркуляционного течения к циркуляционному, что обусловлено формированием разгонного вихря. Характер обтекания задней кромки при этом изменяется, и поток не огибает, а плавно сходится с нее. Скорость жидкости на задней кромке оказывается конечной, т. е. выполняется гипотеза Жуковского – Чаплыгина.

Большинство численных схем, реализующих метод дискретных вихрей, основано на замене несущей поверхности конечной толщины (рис. 7.33, а) бесконечно тонкой несущей поверхностью, на которой задают условия обтекания (рис. 7.33, б). Это, например, условие непротекания, согласно которому нормальная составляющая на поверхности профиля крыла равна нулю. Различают линейную и не-

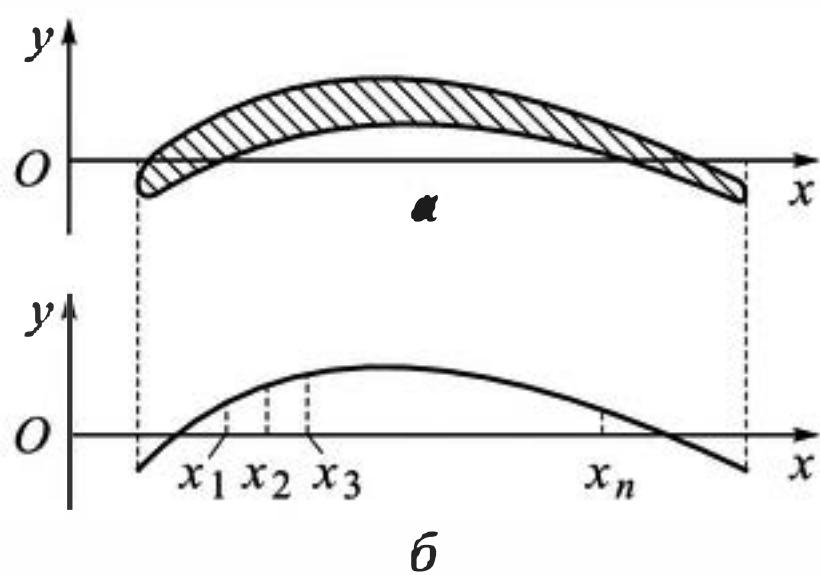


Рис. 7.33. Представление несущей поверхности конечной толщины (а) бесконечно тонкой несущей поверхностью (б)

линейную интерпретацию данного метода. В нелинейной постановке граничные условия задают на самой базовой поверхности. При исследовании обтекания с малыми углами атаки тонких слабоизогнутых несущих поверхностей граничные условия можно задавать в линейной постановке, т. е. в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ проекции базовой поверхности на ось Ox связанной системы координат.

Таким образом, искомый потенциал $\varphi(t, \vec{r})$ в соотношениях (7.117) и (7.118) должен удовлетворять уравнению Лапласа (7.116) и следующим граничным условиям:

1) условию непротекания на жесткой поверхности S :

$$\left. \frac{\partial \varphi(t, \vec{r})}{\partial n} \right|_S = \nabla \varphi(t, \vec{r}_S) \vec{n} = V_{Sn}(t, \vec{r}) - \vec{V}_\infty \vec{n}, \quad (7.119)$$

где V_{Sn} — нормальная составляющая скорости точек поверхности S ;

2) условиям непрерывности давления и нормальной составляющей скорости при переходе через вихревой след σ за телом:

$$p_+(t, \vec{r}) = p_-(t, \vec{r}); \quad \left. \frac{\partial \varphi(t, \vec{r})}{\partial n} \right|_+ = \left. \frac{\partial \varphi(t, \vec{r})}{\partial n} \right|_-. \quad (7.120)$$

Индексы «+» и «-» относятся к различным поверхностям следа. Условия (7.120) должны выполняться на всем следе σ , включая и заднюю кромку поверхности S , для которой требуется выполнение гипотезы Жуковского — Чаплыгина. Первое равенство (7.120) (отсутствие перепада давления) называется *динамическим условием*, а второе (равенство нормальных составляющих скоростей) — *кинематическим условием* совместности течений;

3) на бесконечном удалении от несущей поверхности S и следа σ за ней возмущения убывают:

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \nabla \varphi(t, \vec{r}) = 0. \quad (7.121)$$

Все перечисленные условия должны выполняться в каждый расчетный момент времени для рассматриваемого нестационарного процесса.

В дальнейшем будем искать решение плоской стационарной задачи безотрывного циркуляционного обтекания тонкого профиля потенциальным потоком несжимаемого газа. Такое решение можно рассматривать как предельное для очень больших значений времени при решении нестационарной задачи. Разгонный вихрь в этом случае находится на бесконечном удалении от несущей поверхности, и в окрестности задней кромки интенсивность свободного вих-

ревого следа, моделирующего этот вихрь, близка к нулю. Поэтому при стационарном подходе вихревой след в расчетной схеме отсутствует.

Учитывая отмеченное, перепишем систему уравнений (7.116)–(7.121) для задачи стационарного обтекания профиля:

уравнение неразрывности (уравнение Лапласа для потенциала φ):

$$\operatorname{div} \vec{V}(\vec{r}) \equiv \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \equiv \nabla^2 \varphi(\vec{r}) = 0; \quad (7.122)$$

интеграл уравнения движения (интеграл Бернулли):

$$p(\vec{r}) = C - \frac{\rho \vec{V}^2(\vec{r})}{2}, \quad (7.123)$$

где C — константа, определяемая из условий на бесконечности, $C = p_\infty + \rho V_\infty^2/2$;

условие непротекания на поверхности S профиля:

$$\left. \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial n} \right|_S \equiv \nabla \varphi(\vec{r}_S) \vec{n} = V_{Sn}(t, \vec{r}) - \vec{V}_\infty \vec{n}; \quad (7.124)$$

условия Жуковского – Чаплыгина для задней кромки профиля:

$$p_+(\vec{r}) = p_-(\vec{r}); \quad \left. \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial n} \right|_+ = \left. \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial n} \right|_-; \quad (7.125)$$

условие убывания возмущений на бесконечном удалении от профиля:

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \nabla \varphi(\vec{r}) = 0. \quad (7.126)$$

Таким образом, система (7.122)–(7.126) описывает задачу обтекания профиля стационарным потоком идеального незавихренного несжимаемого газа.

Большинство численных схем основано на замене профиля малой толщины бесконечно тонкой несущей поверхностью S , т. е. дугой контура OB с хордой b и кривизной f (рис. 7.34, а).

В нелинейной постановке граничные условия задают на базовой поверхности S . При исследовании обтекания слабоизогнутых поверхностей с малыми углами атаки граничные условия задают в линейной постановке, т. е. в точках проекции поверхности S на ось Ox связанной системы координат.

Из теоретической аэродинамики известно, что скорости потока в произвольной точке по обе стороны от несущей поверхности $V_{\tau\pm}$

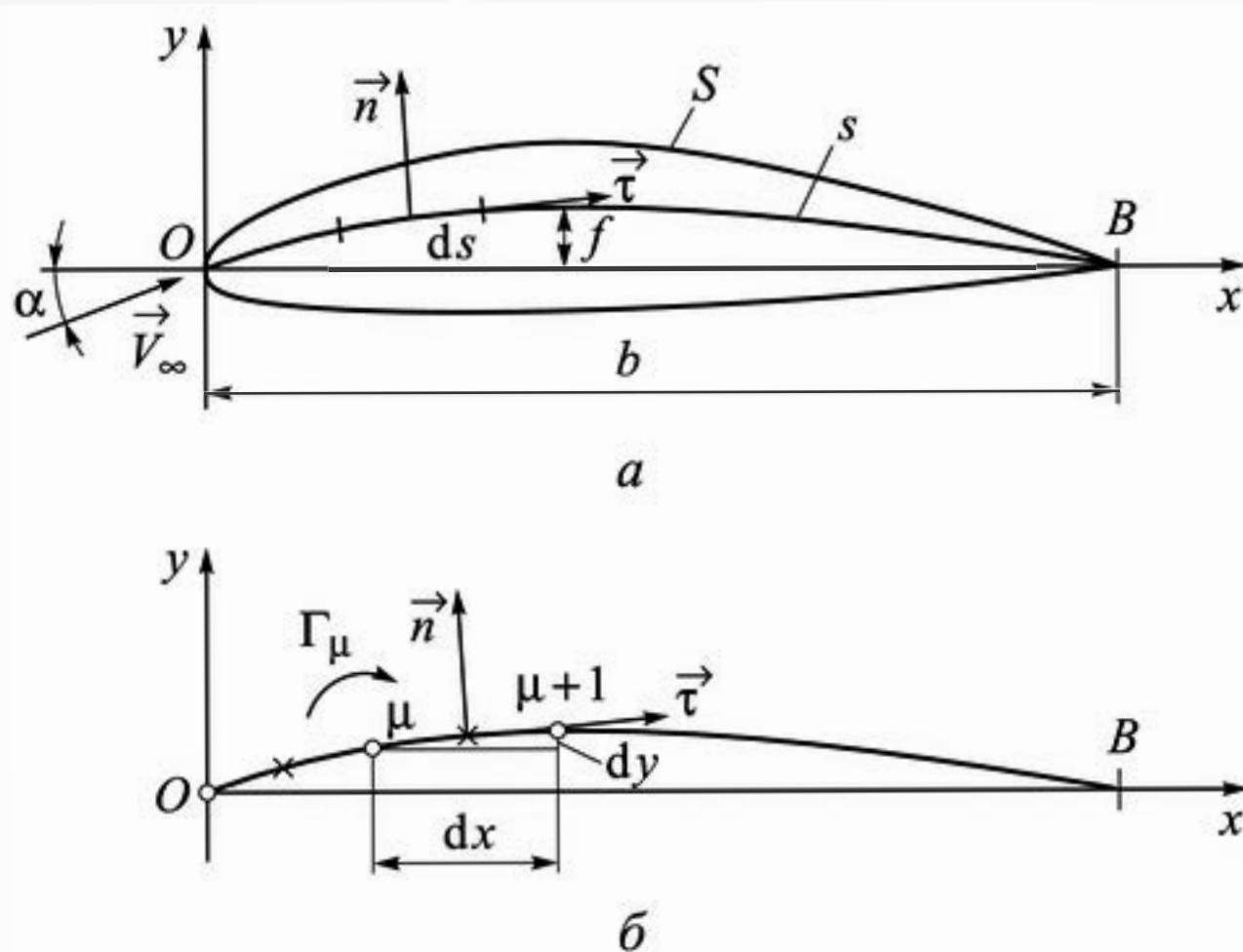


Рис. 7.34. Профиль (а) и вихревая схема (б) его обтекания

и $V_{\tau-}$ различны. Поэтому поверхность эквивалентна поверхности тангенциального разрыва скоростей, при этом последнюю можно моделировать слоем непрерывно распределенных вихревых нитей — вихревым слоем.

Плотность γ распределения вихрей связана с предельными значениями скорости по обе стороны от поверхности разрыва соотношением

$$\gamma = V_{\tau+} - V_{\tau-}. \quad (7.127)$$

Граничные поверхности тангенциального разрыва также моделируют вихревыми слоями, которые иногда называют *свободными вихревыми пеленами*. Касательная составляющая скорости движения пелены связана с предельными значениями скорости среды по обе стороны от несущей поверхности соотношением

$$V_{\tau} = (V_{\tau+} + V_{\tau-})/2. \quad (7.128)$$

Заменим тонкую несущую поверхность S вихревым слоем с системой распределенных вихрей $\gamma(s)$ вдоль дуги s . Поле возмущенных скоростей вихревого слоя будет иметь вид

$$\nabla\phi = \bar{V}(t, \bar{r}) - \bar{V}_{\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_B} \frac{\gamma(s) \bar{k} \times (\bar{r} - \bar{r}_0)}{|\bar{r} - \bar{r}_0|^2} ds, \quad (7.129)$$

где $\bar{r}_0$ — радиус-вектор элемента вихревого слоя.

Данное уравнение можно получить с помощью формулы Био – Савара для точечного «размытого» на площадке ds вихря с интенсивностью $d\Gamma = \gamma ds$. Поле скоростей, определяемое зависимостью (7.129), является потенциальным. В этом можно убедиться, если подставить правую часть уравнения (7.129) в (7.116):

$$\operatorname{div} \nabla \varphi = \operatorname{div} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{s_B} \frac{\gamma(s) \vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} ds \right] = 0.$$

Очевидно, что выражение (7.129) можно рассматривать как общее решение для $\nabla \varphi(\vec{r})$, по которому нетрудно определить потенциал $\varphi(\vec{r})$, однако для дальнейшего решения необходимо знать только $\nabla \varphi(\vec{r})$.

Анализ формулы (7.129) показывает, что полученное общее решение автоматически удовлетворяет не только уравнению Лапласа (7.116), но и условию (7.126) на бесконечности. Для решения краевой задачи обтекания профиля необходимо, чтобы выполнялось условие непротекания (7.124), т. е.

$$\nabla \varphi(\vec{r}) \vec{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_B} \frac{\gamma(s) [\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)] \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} ds = -\vec{V}_\infty \vec{n}. \quad (7.130)$$

(Здесь $V_{Sn}(\vec{r}) = 0$, поскольку рассматривается обтекание неподвижного профиля.)

Интегральное уравнение (7.130) решают относительно неизвестной функции $\gamma(s)$. Кинематическое условие Жуковского – Чаплыгина (7.125) на задней кромке для $\gamma(s)$ имеет вид

$$\gamma|_{s=s_B} = 0.$$

Значение функции $\nabla \varphi(\vec{r})$ дает возможность с помощью интеграла Бернулли (7.123) определить давление по обе стороны от поверхности S , нагрузку, нормальную силу, момент относительно передней кромки профиля, координату центра давления.

Как следует из уравнения (7.123), давление в точке $\vec{r}$ с разных сторон поверхности S соответственно

$$\begin{aligned} p_+ &= C - \rho \vec{V}_+^2(\vec{r})/2 = C - \rho \vec{V}_{\tau+}^2(\vec{r})/2; \\ p_- &= C - \rho \vec{V}_-^2(\vec{r})/2 = C - \rho \vec{V}_{\tau-}^2(\vec{r})/2. \end{aligned} \quad (7.131)$$

Отсюда действующее на профиль давление

$$p_- - p_+ = \Delta p = \rho(V_{\tau+}^2 - V_{\tau-}^2)/2. \quad (7.132)$$

В соответствии с (7.127) и (7.128) уравнение (7.132) можно записать в виде

$$\Delta p = \rho V_{\tau} \gamma, \quad (7.133)$$

где

$$V_{\tau} = [\vec{V}_{\infty} + \nabla \varphi(\vec{r})] \vec{\tau}. \quad (7.134)$$

Нормальную Y и продольную X составляющие аэродинамической силы находим по формулам

$$Y = \int_0^{s_B} \Delta p \cos(\hat{n}y) ds = \rho \int_0^{s_B} V_{\tau} \gamma dx; \quad (7.135)$$

$$X = \int_0^{s_B} \Delta p \cos(\hat{n}x) ds = -\rho \int_0^{s_B} V_{\tau} \gamma dy, \quad (7.136)$$

где $s = s(x, y)$; $dx = ds \cos(\hat{n}y)$; $dy = -ds \cos(\hat{n}x)$.

Как было указано выше, интенсивность γ вихревого слоя связана с циркуляцией Γ одиночного вихря соотношением

$$\gamma = \frac{d\Gamma}{ds}.$$

Момент M_z относительно передней кромки профиля можно определить по формуле

$$M_z = - \int_0^{s_B} (x dY - y dX) = -\rho \int_0^{s_B} V_{\tau} \gamma (x dx + y dy), \quad (7.137)$$

а абсциссу и ординату центра давления — на основании выражений (7.135)–(7.137):

$$x_{цд} = \frac{\rho}{Y} \int_0^{s_B} V_{\tau} \gamma x dx; \quad y_{цд} = \frac{\rho}{X} \int_0^{s_B} V_{\tau} \gamma y dy. \quad (7.138)$$

Поля скоростей, давлений и аэродинамические характеристики тонкого профиля при безотрывном обтекании несжимаемым газом рассчитывают следующим образом.

В соответствии с рассматриваемым методом вихревой слой на поверхности заменяют точечными вихрями конечной интенсивности, т. е. дифференциальную зависимость $\gamma = d\Gamma/ds$ разностной

$$\gamma_\mu = \Gamma_\mu / \Delta s, \quad (7.139)$$

располагая дискретные вихри интенсивностью Γ_μ в характерных точках μ . Для этого профиль разбивают на m равных по длине расчетных отрезков (рис. 7.34, б). В более сложных численных схемах допускается неравномерное разбиение. Координаты точек разбиения определяют по заданной геометрической форме профиля. На каждом из расчетных отрезков имеется дискретный вихрь с циркуляцией Γ_μ , где $\mu = 1, \dots, m$. Таким образом, исходный профиль заменяют вихревой системой, состоящей из m дискретных вихрей.

При замене несущей поверхности системой дискретных вихрей необходимо выполнение условий непротекания не на всей базовой поверхности, а в m специально выбранных (контрольных) точках. Чаще всего дискретные вихри располагают посередине расчетных участков, а контрольные точки — на их концах (наиболее распространенный способ) либо на расстоянии одной четвертой длины расчетного участка, считая от его начала, а контрольные точки — на расстоянии трех четвертых его длины.

Выразив в интегральном граничном уравнении (7.130) $\gamma(s)$ через Γ_μ в соответствии с формулой (7.139) и применив метод дискретных вихрей, получают систему, состоящую из m алгебраических уравнений относительно неизвестных Γ_μ , в которой предполагается выполнение граничных условий в m контрольных точках:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^m \Gamma_\mu \frac{[\vec{k} \times (\vec{r}_v - \vec{r}_\mu)] \vec{n}_v}{|\vec{r}_v - \vec{r}_\mu|^2} = -\vec{V}_\infty \vec{n}_v, \quad v = 1, \dots, m. \quad (7.140)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \vec{k} \times (\vec{r}_v - \vec{r}_\mu) &= -(y_v - y_\mu) \vec{i} + (x_v - x_\mu) \vec{j}; \\ \vec{n}_v &= \cos(\widehat{nx})_v \vec{i} + \cos(\widehat{ny})_v \vec{j} = -\sin\Theta_v \vec{i} + \cos\Theta_v \vec{j}; \end{aligned} \quad (7.141)$$

$$\sin\Theta_v = \frac{y_{\mu+1} - y_\mu}{\Delta s}; \quad \cos\Theta_v = \frac{x_{\mu+1} - x_\mu}{\Delta s} \quad (\mu = v), \quad (7.142)$$

причем координаты с индексами « $\mu + 1$ » и « μ » соответствуют концам отрезка, в середине которого находится контрольная точка с индексом « v ».

Правую часть уравнения (7.140) можно записать так:

$$-\vec{V}_\infty \vec{n}_v = -\vec{V}_\infty (-\cos\alpha \sin\Theta_v + \sin\alpha \cos\Theta_v). \quad (7.143)$$

Для перехода к безразмерным величинам в качестве масштабов выбирают хорду b и скорость невозмущенного потока V_∞ :

$$\bar{x} = \frac{x}{b}; \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \Delta\bar{s} = \frac{\Delta s}{b}; \quad \bar{V}_\tau = \frac{V_\tau}{V_\infty}; \quad \bar{\Gamma}_\mu = \frac{\Gamma_\mu}{bV_\infty}; \quad \bar{\gamma}_\mu = \frac{\gamma_\mu}{V_\infty}. \quad (7.144)$$

(В дальнейшем черта над безразмерными параметрами опущена.)

Уравнение (7.140) с учетом (7.141)–(7.144) в матричной форме будет иметь вид

$$A\Gamma = B, \quad (7.145)$$

где $A = [a_{v\mu}]$ — квадратная матрица коэффициентов;

$$a_{v\mu} = \frac{(y_v - y_\mu)\sin\Theta_v + (x_v - x_\mu)\cos\Theta_v}{(x_v - x_\mu)^2 + (y_v - y_\mu)^2};$$

$\Gamma = [\Gamma_\mu]$ — вектор-столбец неизвестных Γ_μ ; $B = [b_v]$ — вектор-столбец; $b_v = -2\pi(-\cos\alpha\sin\Theta_v + \sin\alpha\cos\Theta_v)$.

Решив систему (7.145) методом Гаусса — Зейделя и определив Γ_μ , можно найти вектор скорости в любой точке поля. Для этого необходимо использовать конечно-разностный аналог формулы (7.129):

$$\bar{V}(\bar{r}) = -\bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^m \Gamma_\mu \frac{\bar{k} \times (\bar{r} - \bar{r}_\mu)}{|\bar{r} - \bar{r}_\mu|^2}.$$

В безразмерном виде давление, действующее на профиль, определяется выражением

$$\Delta\bar{p} = \frac{2\Delta p}{\rho V_\infty^2}. \quad (7.146)$$

(В дальнейшем черта в обозначении $\Delta\bar{p}$ также опущена.)

Поскольку Δp определяют в контрольных точках, интенсивность γ вихревого слоя и скорость слоя V_τ находят в этих же точках. Тогда в соответствии с (7.139)

$$\gamma_v = \frac{\Gamma_\mu + \Gamma_{\mu+1}}{2\Delta s} \quad (\mu = v). \quad (7.147)$$

Согласно (7.134),

$$V_{\tau\mu} = \cos\alpha\cos\Theta_\mu + \sin\alpha\sin\Theta_\mu + \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^m C_{v\mu}\Gamma_\mu \quad (\mu \neq v, v+1). \quad (7.148)$$

Здесь

$$C_{v\mu} = \frac{-(y_v - y_\mu)\cos\Theta_v + (x_v - x_\mu)\sin\Theta_v}{(x_v - x_\mu)^2 + (y_v - y_\mu)^2},$$

а правая часть — результат преобразования выражения

$$\left[\vec{k} \times (\vec{r}_v - \vec{r}_\mu) \right] \bar{\tau}_v / |\vec{r}_v - \vec{r}_\mu|^2,$$

где $\bar{\tau}_v = \cos\Theta_v \vec{i} + \sin\Theta_v \vec{j}$.

На основании уравнений (7.133) и (7.146) в точках v

$$\Delta p_v = 2V_{\infty} \gamma_v, \quad (7.149)$$

а в соответствии с (7.135)–(7.137) коэффициент нормальной силы

$$c_y = \frac{Y}{0,5\rho V_{\infty}^2 b} = \sum_{v=1}^m \Delta p_v \Delta x_v; \quad \Delta x_v = \Delta s \cos\Theta_v, \quad (7.150)$$

коэффициент продольной силы

$$c_x = \frac{X}{0,5\rho V_{\infty}^2 b} = \sum_{v=1}^m \Delta p_v \Delta y_v; \quad \Delta y_v = \Delta s \sin\Theta_v \quad (7.151)$$

и коэффициент момента тангажа

$$m_z = \frac{M_z}{0,5\rho V_{\infty}^2 b^2} = \sum_{v=1}^m \Delta p_v (x_v \Delta x_v + y_v \Delta y_v). \quad (7.152)$$

Наконец, согласно (7.138) и (7.139), координаты центра давления

$$x_{\text{цд}} = \frac{1}{c_y} \sum_{v=1}^m \Delta p_v x_v \Delta x_v; \quad y_{\text{цд}} = \frac{1}{c_x} \sum_{v=1}^m \Delta p_v y_v \Delta y_v. \quad (7.153)$$

Таким образом, последовательное использование формул (7.147)–(7.153) является основой алгоритма для определения аэродинамических характеристик тонкого профиля.

7.7. Метод Ньютона

При расчете аэродинамических характеристик ЛА, движущихся с большими сверхзвуковыми и гиперзвуковыми скоростями, широко используют метод Ньютона. Несмотря на ряд недостатков и приближенный характер, по сравнению с другими, более современ-

ными и точными методами расчетов этот метод достаточно прост и позволяет получать аэродинамические характеристики тел сложной формы в полном диапазоне углов атаки (от 0 до 180°).

При определении сопротивления движению тел в газах по методу Ньютона принимают, что обтекающая тело среда состоит из одинаковых частиц, не взаимодействующих между собой. При столкновении с элементом поверхности тела частицы полностью теряют нормальную к элементу составляющую скорости, а тангенциальная составляющая остается без изменения (абсолютно неупругий удар). Такой подход позволяет получить зависимость коэффициента давления в точке поверхности от угла взаимодействия потока с обтекаемой поверхностью.

Пусть проекции вектора скорости на нормаль и касательную к поверхности (рис. 7.35, а)

$$V_n = V_\infty \cos \eta; V_\tau = V_\infty \sin \eta.$$

Запишем для выделенного объема вблизи этой поверхности уравнение движения в проекции на внутреннюю нормаль.

За единицу времени в объем ΔW (рис. 7.35, б) поступает масса газа

$$\dot{m} = \rho_\infty V_n dS,$$

имеющая скорость V_n . В объеме ΔW скорость газа снижается до нуля. При этом изменение количества движения в единицу времени

$$\Delta \dot{m} V_n = \rho_\infty V_n (0 - V_n) dS = -\rho_\infty V_n^2 dS$$

равно действующей на элементарный объем силе

$$F_n = (p_\infty - p) dS = -\rho_\infty V_n^2 dS.$$

Однако на поверхность ЛА действует сила, равная данной по модулю, но противоположная по направлению. Таким образом, для избыточного давления на поверхности получаем зависимость

$$(p - p_\infty) = \rho_\infty V_n^2,$$

или

$$(p - p_\infty) = \rho_\infty V_\infty^2 \cos^2 \eta.$$

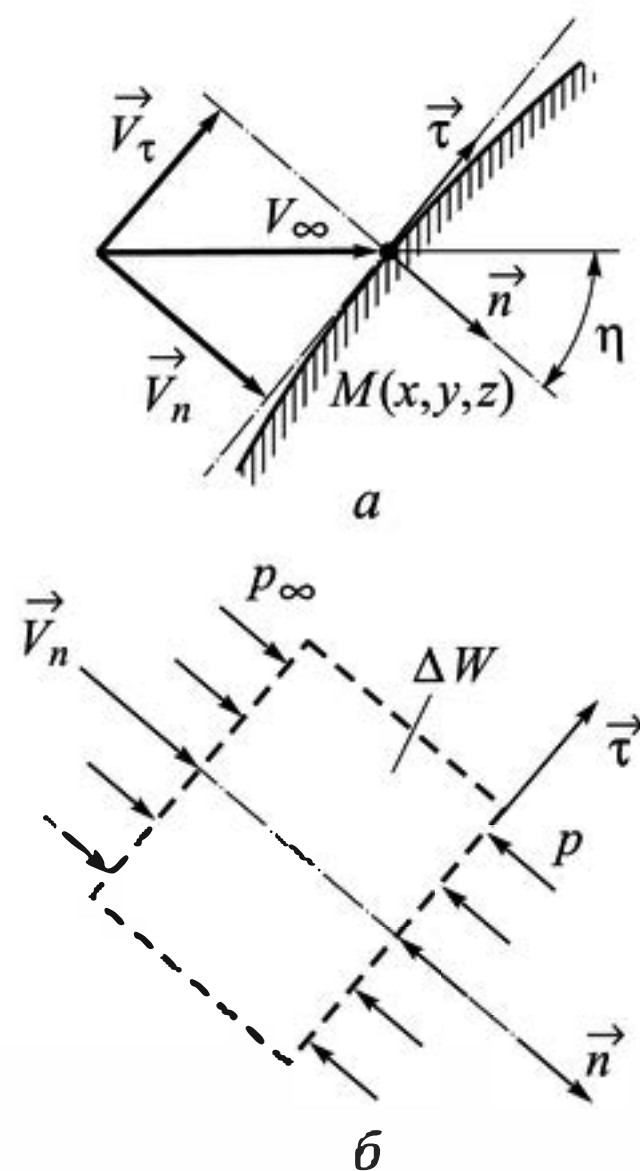


Рис. 7.35. Схема (а) и элементарный объем в области взаимодействия потока с поверхностью (б)

Следовательно, коэффициент давления в точке $M(x, y, z)$

$$\bar{p}(x, y, z) = \frac{p - p_{\infty}}{(\rho_{\infty} V_{\infty}^2)/2} = 2 \cos^2 \eta(x, y, z). \quad (7.154)$$

Данное соотношение представляет собой основную формулу метода Ньютона, согласно которой давление на элемент поверхности ЛА зависит только от ориентации этого элемента по отношению к набегающему потоку частиц.

Необходимо учитывать, что по формуле Ньютона можно определить коэффициент давления только для той части поверхности ЛА, для которой выполняется условие

$$-90^\circ \leq \eta \leq +90^\circ.$$

Остальная часть поверхности ЛА оказывается в так называемой области аэродинамической тени, где коэффициент давления по методу Ньютона определить нельзя и поэтому его принимают равным нулю.

Такая модель взаимодействия потока с поверхностью приближается к реальной при больших числах Маха. Кроме того, формула Ньютона будет давать заведомо неверные результаты в областях отрыва потока, в частности в местах «изломов» поверхности ЛА. Поэтому метод Ньютона дает удовлетворительные результаты для тел со сравнительно плавными обводами. С его помощью нельзя определить, например, такую важнейшую аэродинамическую характеристику, как донное сопротивление.

Учитывая указанные выше достоинства расчетов с использованием данного метода, различные исследователи неоднократно предпринимали попытки усовершенствовать формулу (7.154).

Как следует из выражения (7.154), в точке полного торможения угол $\eta = 0$, а значит, коэффициент давления в этой точке $\bar{p}_0 = 2$. Поэтому формулу (7.154) можно представить в виде

$$\bar{p}(x, y, z) = \bar{p}_0 \cos^2 \eta(x, y, z). \quad (7.155)$$

Исследования показывают, что если постоянный коэффициент $\bar{p}_0 = 2$ заменить переменным $\bar{p}_0(k, M)$, полученным экспериментально либо теоретически, то расчет по формуле (7.155) будет более точным. Это особенно справедливо при исследовании обтекания затупленных головных частей. В этом случае для определения коэффициента давления в точке полного торможения можно использовать зависимость

$$\bar{p}_0(k, M) = 2 \frac{v(k, M)/\pi(k, M) - 1}{kM^2}.$$

Здесь k — показатель адиабаты газа, обтекающего тело;

$$v(k, M) = \left(\frac{k-1}{k+1} \right) \left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)} \right]^{k/(k-1)} \frac{M^2}{[2k/(k-1) - 1/M^2]^{1/(k-1)}} \pi(k, M);$$

$$\pi(k, M) = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-k/(k-1)}.$$

Поскольку формулы (7.154) и (7.155) имеют одну и ту же структуру, для удобства дальнейшего использования и универсальности будем их записывать в единой форме:

$$\bar{p}(x, y, z) = K \cos^2 \eta(x, y, z), \quad (7.156)$$

где K — универсальный коэффициент, принимающий различные значения в зависимости от особенностей решаемой задачи.

При определении по методу Ньютона аэродинамических коэффициентов для тел произвольной формы удобно использовать две связанные системы координат: прямоугольную $Oxyz$ и цилиндрическую $Ox\eta\gamma$ (рис. 7.36, а). Формулы для пересчета из цилиндрической в прямоугольную систему координат имеют вид

$$x = x; \quad y = r \sin \gamma; \quad z = r \cos \gamma.$$

Начало систем координат размещают в носке ЛА, эта же точка служит центром приведения моментов.

Элементарная сила, обусловленная избыточным нормальным давлением, и действующая на поверхность ЛА в некоторой точке $M(x, y, z)$, может быть записана в следующем виде:

$$dF(x, y, z) = [p(x, y, z) - p_\infty] dS. \quad (7.157)$$

При $p(x, y, z) - p_\infty > 0$ эта сила действует по направлению внутренней нормали к поверхности в точке $M(x, y, z)$.

Проекции элементарной силы на оси прямоугольной системы координат вычисляют по формулам

$$dX = dF \cos \alpha_x; \quad dY = dF \cos \beta_y; \quad dZ = dF \cos \gamma_z, \quad (7.158)$$

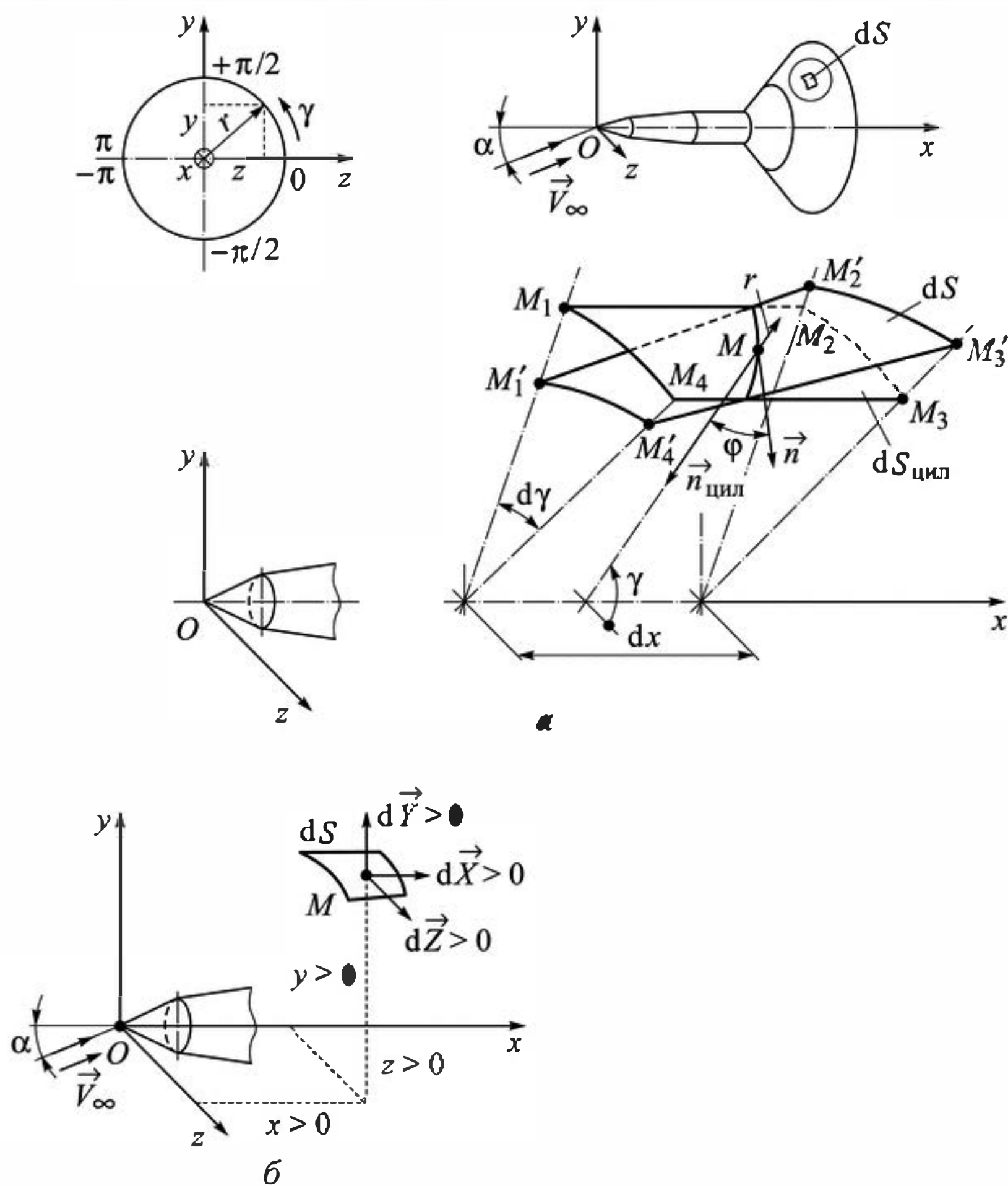


Рис. 7.36. Системы координат, используемые в методе Ньютона для определения аэродинамических коэффициентов (а) и моментов (б)

где α_x , β_y и γ_z — углы, образованные вектором внутренней нормали с осями координат.

Коэффициент аэродинамической силы

$$c_i = \frac{F_i}{q_\infty S_{\text{мид}}}. \quad (7.159)$$

Из уравнений (7.157)–(7.159) следуют выражения для элементарных коэффициентов аэродинамических сил, действующих вдоль соответствующих осей координат:

$$\begin{aligned}
dc_x &= \frac{p(x, y, z) - p_\infty}{q_\infty} \cos \alpha_x \frac{dS}{S_{\text{мид}}}; \\
dc_y &= \frac{p(x, y, z) - p_\infty}{q_\infty} \cos \beta_y \frac{dS}{S_{\text{мид}}}; \\
dc_z &= \frac{p(x, y, z) - p_\infty}{q_\infty} \cos \gamma_z \frac{dS}{S_{\text{мид}}},
\end{aligned} \tag{7.160}$$

или

$$\begin{aligned}
dc_x &= \bar{p}(x, y, z) \cos \alpha_x \frac{dS}{S_{\text{мид}}}; \\
dc_y &= \bar{p}(x, y, z) \cos \beta_y \frac{dS}{S_{\text{мид}}}; \\
dc_z &= \bar{p}(x, y, z) \cos \gamma_z \frac{dS}{S_{\text{мид}}},
\end{aligned} \tag{7.161}$$

где $\bar{p}(x, y, z)$ определяется соотношением (7.156).

Как известно из аналитической геометрии, косинус угла между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ можно определить через их направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

Ориентация вектора скорости $\vec{V}_\infty$ набегающего потока относительно ЛА определяется углами атаки α и скольжения $\beta_{\text{ск}}$ (см. рис. 7.36). С учетом этого направляющие косинусы вектора $\vec{V}_\infty$ можно записать в виде

$$\cos \alpha_{V_\infty} = \cos \beta_{\text{ск}} \cos \alpha; \quad \cos \beta_{V_\infty} = \cos \beta_{\text{ск}} \sin \alpha; \quad \cos \gamma_{V_\infty} = \sin \beta_{\text{ск}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\cos \eta &= \cos(\vec{V}_\infty, \vec{n}) = \cos \beta_{\text{ск}} \cos \alpha \cos \alpha_x + \\
&+ \cos \beta_{\text{ск}} \sin \alpha \cos \beta_y + \sin \beta_{\text{ск}} \cos \gamma_z.
\end{aligned} \tag{7.162}$$

Если обтекание ЛА рассматривать без угла скольжения ($\beta_{\text{ск}} = 0$), то

$$\cos \eta = \cos \alpha \cos \alpha_x + \sin \alpha \cos \beta_y.$$

Для вычисления площади dS произвольно ориентированного элемента поверхности ЛА рассмотрим в цилиндрической системе координат (см. рис. 7.36) цилиндр радиусом r , содержащий точку $M(x, r, \gamma)$. Элемент $M_1M_2M_3M_4$ (с площадью поверхности $dS_{\text{цил}}$) является ортогональной проекцией элемента поверхности $M'_1M'_2M'_3M'_4$ произвольной формы, площадь которого dS . Поэтому можно записать

$$dS_{\text{цил}} = dS \cos \varphi,$$

где φ — угол между нормальми $\bar{n}$ и $\bar{n}_{\text{цил}}$.

Поскольку $dS_{\text{цил}} = r d\gamma dx$, то

$$dS = r d\gamma dx / \cos \varphi. \quad (7.163)$$

Косинус угла φ между векторами $\bar{n}$ и $\bar{n}_{\text{цил}}$ определяется аналогично косинусу угла η :

$$\cos \alpha_{n_{\text{цил}}} = \cos 90^\circ = 0; \quad \cos \beta_{n_{\text{цил}}} = \cos(90^\circ + \gamma) = -\sin \gamma;$$

$$\cos \gamma_{n_{\text{цил}}} = \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma.$$

Тогда

$$\cos \varphi = -(\cos \beta_y \sin \gamma + \cos \gamma_z \cos \gamma).$$

Для интегрирования уравнений (7.161) необходимо найти выражение для направляющих косинусов внутренней нормали $\bar{n}$ к рассматриваемой поверхности в точке $M(x, y, z)$. Из аналитической геометрии известно, что если поверхность задана общим уравнением вида

$$F(x, y, z) = 0,$$

то направляющие косинусы нормали в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ вычисляются по формулам

$$\cos \alpha_x, \beta_y, \gamma_z = \pm \frac{F'_{x,y,z}}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}, \quad (7.164)$$

где $F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{M(x_0, y_0, z_0)}$; $F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{M(x_0, y_0, z_0)}$; $F'_z = \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{M(x_0, y_0, z_0)}$. При-

чем, чтобы вектор $\bar{n}$ был внутренней нормалью, в уравнениях (7.164) следует выбирать знак «—».

С учетом выражения (7.163) система (7.161) будет иметь вид

$$dc_x = \frac{1}{\pi} K \cos^2 \eta \frac{\cos \alpha_x}{\cos \varphi} r d\bar{x} d\gamma,$$

$$dc_y = \frac{1}{\pi} K \cos^2 \eta \frac{\cos \beta_y}{\cos \varphi} \bar{r} d\bar{x} d\gamma; \quad (7.165)$$

$$dc_z = \frac{1}{\pi} K \cos^2 \eta \frac{\cos \gamma_z}{\cos \varphi} \bar{r} d\bar{x} d\gamma,$$

где $\bar{r} = r/R_{\text{мид}}$; $d\bar{x} = dx/R_{\text{мид}}$.

Интегрирование по выбранному участку поверхности ЛА проводят во вспомогательной цилиндрической системе координат в пределах

$$x_{\text{н}} \leq x \leq x_{\text{в}} \text{ и } \gamma_{\text{н}} \leq \gamma \leq \gamma_{\text{в}},$$

где индексы «н» и «в» обозначают нижний и верхний пределы интегрирования по соответствующей координате.

Таким образом, для выбранного участка поверхности окончательные выражения для аэродинамических коэффициентов в связанной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{1}{\pi} \int_{\bar{x}_{\text{н}}}^{\bar{x}_{\text{в}}} \int_{\gamma_{\text{н}}}^{\gamma_{\text{в}}} K \cos^2 \eta \frac{\cos \alpha_x}{\cos \varphi} \bar{r} d\bar{x} d\gamma; \\ c_y &= \frac{1}{\pi} \int_{\bar{x}_{\text{н}}}^{\bar{x}_{\text{в}}} \int_{\gamma_{\text{н}}}^{\gamma_{\text{в}}} K \cos^2 \eta \frac{\cos \beta_y}{\cos \varphi} \bar{r} d\bar{x} d\gamma; \\ c_z &= \frac{1}{\pi} \int_{\bar{x}_{\text{н}}}^{\bar{x}_{\text{в}}} \int_{\gamma_{\text{н}}}^{\gamma_{\text{в}}} K \cos^2 \eta \frac{\cos \gamma_z}{\cos \varphi} \bar{r} d\bar{x} d\gamma. \end{aligned} \quad (7.166)$$

Выражения для вычисления аэродинамических моментов относительно носка ЛА имеют вид

$$\begin{aligned} dM_x &= dZy - dYz; \\ dM_y &= dXz - dZx; \\ dM_z &= -(dYx - dXy). \end{aligned} \quad (7.167)$$

Знаки в них расставлены в соответствии со вспомогательной схемой (рис. 7.36, б), причем в выражении для момента тангажа необходимо добавить знак «-», поскольку стабилизирующий (уменьшающий угол атаки) момент принято считать отрицательным.

Преобразуем уравнения (7.167) на примере выражения для момента тангажа. С учетом (7.158) запишем

$$dM_z = -dF(x \cos \beta_y - y \cos \alpha_x).$$

Коэффициент момента тангажа

$$dm_z = \frac{dM_z}{\rho_\infty \pi R_{\text{мид}}^3 L_{\text{хар}} / R_{\text{мид}}},$$

где $L_{\text{хар}}$ — характерный линейный размер ЛА.

Проводя те же преобразования, что и при выводе системы (7.165), получаем

$$dm_z = -\frac{1}{\pi \bar{L}_{\text{хар}}} K \frac{\cos^2 \eta}{\cos \varphi} \bar{r} (\bar{x} \cos \beta_y - \bar{y} \cos \alpha_x) d\bar{x} d\bar{y},$$

где $\bar{L}_{\text{хар}} = L_{\text{хар}} / R_{\text{хар}}$, $\bar{x}(\bar{y}, \bar{z}) = x(y, z) / R_{\text{хар}}$.

Проинтегрировав выражения для элементарных моментов по выбранному участку поверхности, находим

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{1}{\pi \bar{L}_{\text{хар}}} \int_{\bar{x}_H}^{\bar{x}_B} \int_{\gamma_H}^{\gamma_B} K \frac{\cos^2 \eta}{\cos \varphi} \bar{r} (\bar{z} \cos \alpha_x - \bar{x} \cos \gamma_z) d\bar{x} d\bar{y}; \\ m_y &= \frac{1}{\pi \bar{L}_{\text{хар}}} \int_{\bar{x}_H}^{\bar{x}_B} \int_{\gamma_H}^{\gamma_B} K \frac{\cos^2 \eta}{\cos \varphi} \bar{r} (\bar{y} \cos \gamma_z - \bar{z} \cos \beta_y) d\bar{x} d\bar{y}; \quad (7.168) \\ m_z &= -\frac{1}{\pi \bar{L}_{\text{хар}}} \int_{\bar{x}_H}^{\bar{x}_B} \int_{\gamma_H}^{\gamma_B} K \frac{\cos^2 \eta}{\cos \varphi} \bar{r} (\bar{x} \cos \beta_y - \bar{y} \cos \alpha_x) d\bar{x} d\bar{y}. \end{aligned}$$

Выражения (7.166) и (7.168) для аэродинамических коэффициентов и моментов являются универсальными, т. е. они справедливы для участка поверхности ЛА любой формы. Чтобы вычислить аэродинамические коэффициенты и моменты для ЛА в целом, необходимо провести интегрирование по всем участкам его поверхности, задав для каждого свое уравнение поверхности и свой коэффициент K в формуле Ньютона.

При расчете характеристик затупленного конуса (рис. 7.37, а) при заданном угле конуса β_k и диаметре донного среза все остальные размеры определяют через параметр $\lambda = L_{\text{хар}} / L_k$. Результаты тестовых расчетов при $\lambda = 1; 0,7$ и $0,5$ и $\beta_k = 10^\circ$ приведены на рис. 7.37, б, в.

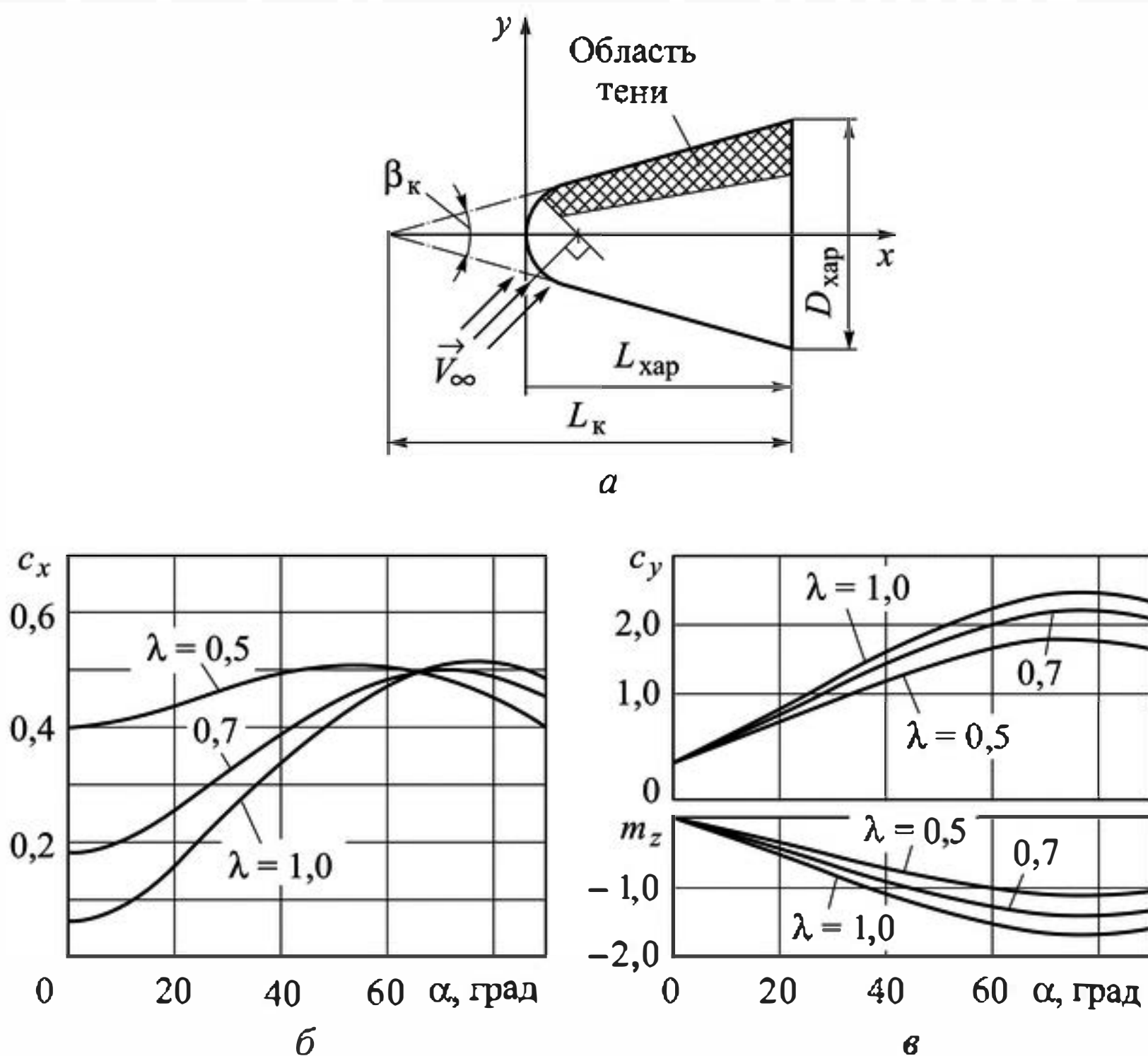


Рис. 7.37. Геометрические параметры (а) и аэродинамические характеристики (б, в) затупленного конуса

Рассмотрим также последовательность вычисления давления на поверхности ЛА при сложном движении, являющемся результатом поступательного и вращательного движений. Пусть вращение происходит с постоянной угловой скоростью ω относительно условного центра масс ЛА (рис. 7.38). Общую зависимость для коэффициента давления, рассчитанного по формуле (7.156), можно представить в виде

$$\bar{p}_p = K \frac{V_{n\Sigma}^2}{V_\infty^2},$$

где $V_{n\Sigma} = V_n + V_{n\omega}$ — нормальная к поверхности ЛА результирующая составляющая скорости V_m , обусловленной поступательным движением, и до-

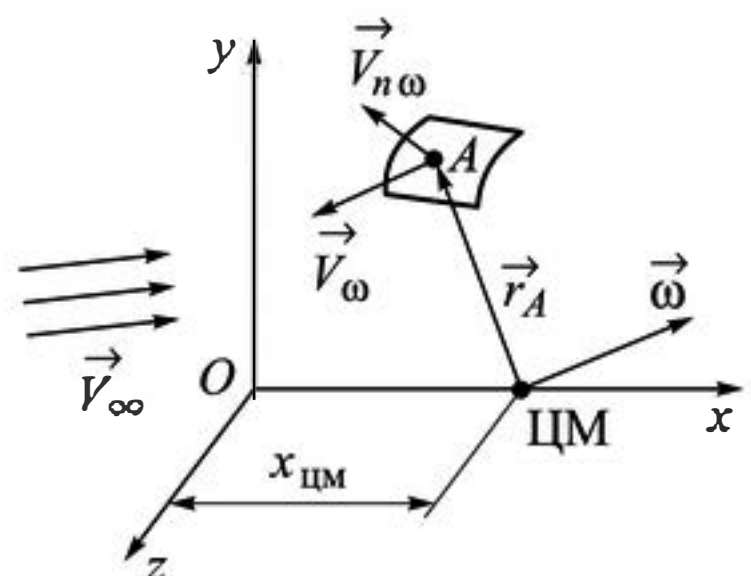


Рис. 7.38. К определению дополнительной составляющей коэффициента давления

бавочной скорости $V'_{n\omega}$, обусловленной вращением. Согласно выражению (7.162), при отсутствии угла скольжения

$$V_n = V_\infty (\cos \alpha \cos \alpha_x + \sin \alpha \cos \beta_y).$$

Добавочная скорость, индуцируемая в некоторой точке A поверхности, равна векторному произведению $\bar{V}_\omega = \bar{\omega} \times \bar{r}_A$, где $\bar{r}_A$ — радиус-вектор, проведенный из центра масс к точке A . Тогда нормальная составляющая добавочной скорости

$$V_{n\omega} = V_{\omega x} \cos \alpha_x + V_{\omega y} \cos \beta_y + V_{\omega z} \cos \gamma_z. \quad (7.169)$$

Если представить радиус-вектор $\bar{r}_A$ в виде $\bar{r}_A = x_A \bar{i} + y_A \bar{j} + z_A \bar{k}$, где x_A, y_A, z_A — расстояния до точки A от центра вращения, то вектор индуцированной скорости будет вычисляться по формуле

$$\begin{aligned} \bar{V}_\omega &= V_{\omega x} \bar{i} + V_{\omega y} \bar{j} + V_{\omega z} \bar{k} = \\ &= (\omega_y z_A - \omega_z y_A) \bar{i} - (\omega_x z_A - \omega_z x_A) \bar{j} + (\omega_x y_A - \omega_y x_A) \bar{k}, \end{aligned}$$

из которой можно определить компоненты добавочной скорости в выражении (7.169).

Таким образом, коэффициент давления

$$\bar{p} = \bar{p}_V + \bar{p}_\omega. \quad (7.170)$$

Здесь

$$\bar{p}_V = K \cos^2 \eta = K \frac{V_n^2}{V_\infty^2}; \quad (7.171)$$

$$\bar{p}_\omega = \frac{K}{V_\infty^2} (2V_n V_{n\omega} + V_{n\omega}^2) \quad (7.172)$$

($\bar{p}_\omega$ — составляющая, обусловленная вращательным движением).

При использовании данных формул следует понимать, что составляющие $\bar{p}_V$ и $\bar{p}_\omega$ при обращенном движении будут складываться только в том случае, если у скоростей V_n и $V_{n\omega}$ противоположные знаки (поверхность ЛА в окрестности точки A движется навстречу набегающему потоку). При этом для расчета $\bar{p}_\omega$ по формуле (7.172) нужно брать модули скоростей V_n и $V_{n\omega}$.

8. КОМПОНОВКИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ И ФОРМЫ ИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Основой ЛА являются планер, двигательная установка, оборудование и полезная нагрузка. Планер состоит из корпуса, крыльев, оперения, органов управления и некоторых дополнительных устройств, объединяемых в понятие надстроечных элементов. В зависимости от назначения ЛА имеют различные компоновочные схемы.

В главе рассмотрены основные формы, геометрические и аэродинамические характеристики корпусов, крыльев, оперения и т. д., даны рекомендации по выбору их параметров в зависимости от условий полета. Показано влияние назначения и тактико-технических требований на выбор аэродинамических схем и органов управления полетом.

8.1. Основные характеристики и геометрические параметры корпуса летательного аппарата

Беспилотные ЛА чаще являются устройствами одноразового применения, для которых конструктивная простота и технологичность играют определяющую роль. Наибольшее распространение получили корпуса ЛА, выполненные в виде тел вращения, в контуре которых допускаются изломы образующих.

Корпус ЛА целесообразно рассматривать состоящим из трех участков: головного (носового), среднего и хвостового (кормового), что облегчает расчет его аэродинамических характеристик (рис. 8.1).

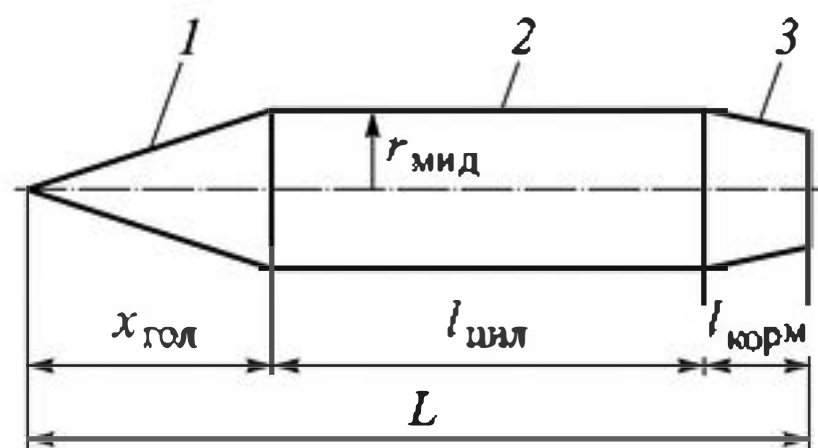


Рис. 8.1. Схема корпуса ЛА:
1 – головная часть; 2 – средняя часть;
3 – кормовая часть

В целях уменьшения аэродинамического сопротивления корпуса головную часть выполняют в виде заостренного тела вращения, сплошного или с протоком. Традиционно такая головная часть имеет коническую, оживальную, параболическую или комбинированную форму (рис. 8.2).

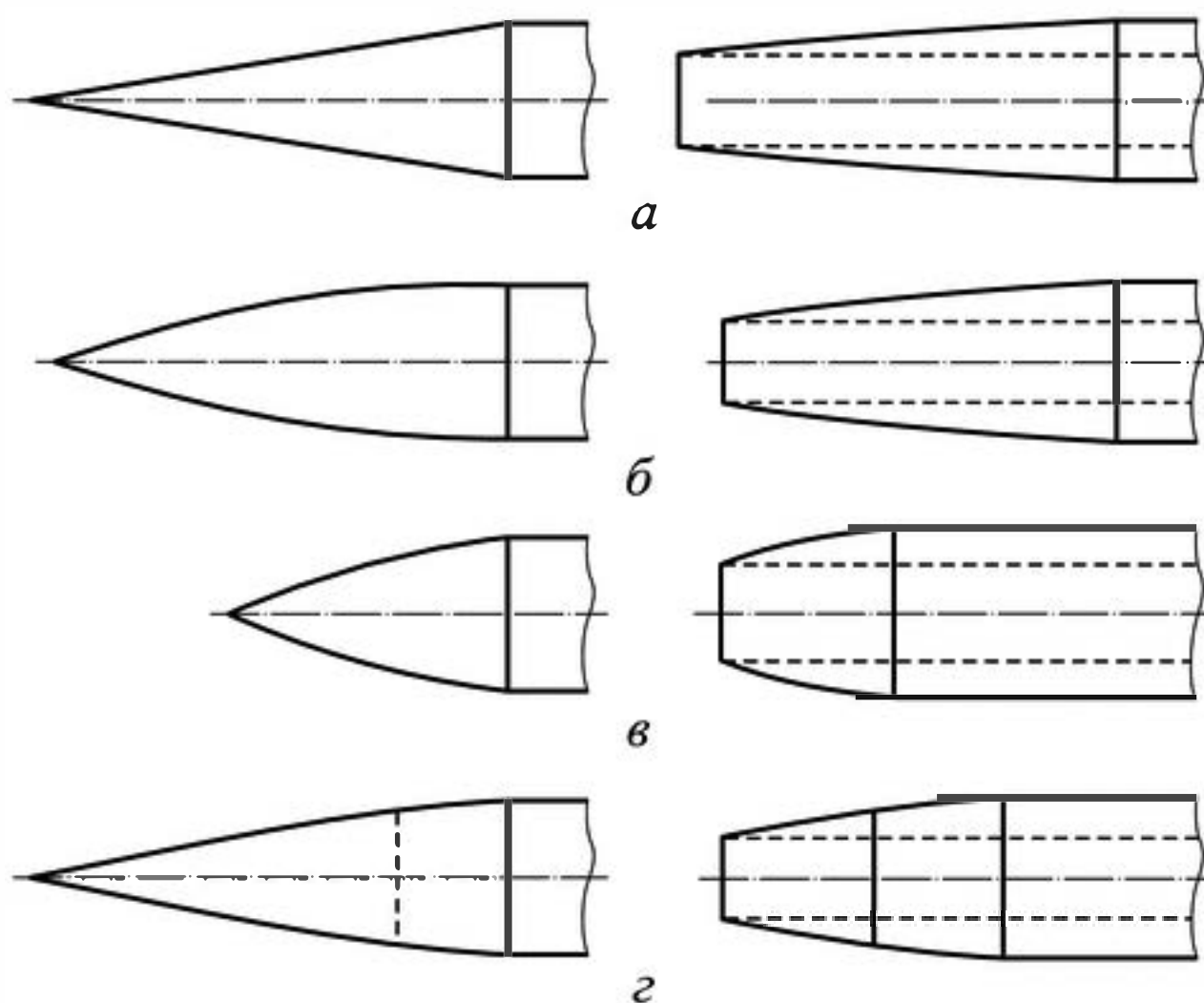


Рис. 8.2. Формы сплошных (слева) и с протоками (справа) заостренных головных частей:

а — коническая; *б, в* — оживальные касательная и секущая соответственно; *г* — комбинированная (конус с оживалом)

Оживальная головная часть образуется дугой окружности радиусом R (рис. 8.3). Сопряжение головной части и цилиндрического участка возможно по касательной ($\beta = 0$), и тогда эту оживальную кривую называют *касательной*, либо под некоторым углом $\beta \neq 0$, и тогда такую кривую называют *секущей*. Уравнение оживальной кривой в безразмерной форме имеет вид

$$\bar{r} = 2\bar{R} \left\{ \left[1 - \lambda_{\text{гол}}^2 \bar{R}^{-2} (\bar{x} - 1)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\} + 1, \quad (8.1)$$

где $\bar{r} = r/r_{\text{мид}}$, $\bar{R} = R/(2r_{\text{мид}})$; $\lambda_{\text{гол}} = x_{\text{гол}}/(2r_{\text{мид}})$ — удлинение головной части; $\bar{x} = x/x_{\text{гол}}$.

Согласно рис. 8.3, связь между удлинением $\lambda_{\text{гол}}$ головной части и безразмерным радиусом для оживальной образующей определяется соотношением

$$\lambda_{\text{гол}} = \sqrt{\bar{R} - 0,25}. \quad (8.2)$$

Дифференцируя уравнение (8.2), получаем закон изменения наклона касательной вдоль этой образующей:

$$\text{tg} \beta = \frac{dr}{dx} = \frac{1}{2\lambda_{\text{гол}}} \frac{d\bar{r}}{d\bar{x}} = -\frac{\lambda_{\text{гол}}}{\bar{R}} (\bar{x} - 1) \left[1 - \frac{\lambda_{\text{гол}}^2}{\bar{R}^2} (\bar{x} - 1)^2 \right]^{-1/2}. \quad (8.3)$$

Из выражения (8.3) определяем угол наклона касательной у острия корпуса ЛА:

$$\text{tg} \beta_0 = \left(\frac{dr}{dx} \right)_{x=0} = \frac{\lambda_{\text{гол}}}{\bar{R}} \left(1 - \frac{\lambda_{\text{гол}}^2}{\bar{R}^2} \right)^{-1/2}.$$

Для головной части с параболической образующей справедливо уравнение

$$r = x(a + bx + cx^2 + \dots),$$

где a, b, c — коэффициенты.

При большом безразмерном радиусе $\bar{R}$ в уравнении (8.2) можно пренебречь вычитаемым 0,25 (при $\bar{R} \geq 4$ погрешность не превышает 3 %). Подставив полученную зависимость $\bar{R} = \lambda_{\text{гол}}^2$ в уравнение (8.1), имеем для параболической образующей в безразмерной форме

$$\bar{r} = \bar{x} (2 - \bar{x}). \quad (8.4)$$

По аналогии с оживальной образующей находим

$$\text{tg} \beta = \frac{dr}{dx} = \frac{1}{\lambda_{\text{гол}}} (1 - \bar{x}); \quad (8.5)$$

$$\text{tg} \beta_0 = \left(\frac{dr}{dx} \right)_{x=0} = \frac{1}{\lambda_{\text{гол}}}. \quad (8.6)$$

С учетом выражения (8.6) уравнение (8.5) можно преобразовать к виду

$$\text{tg} \beta = \text{tg} \beta_0 (1 - \bar{x}).$$

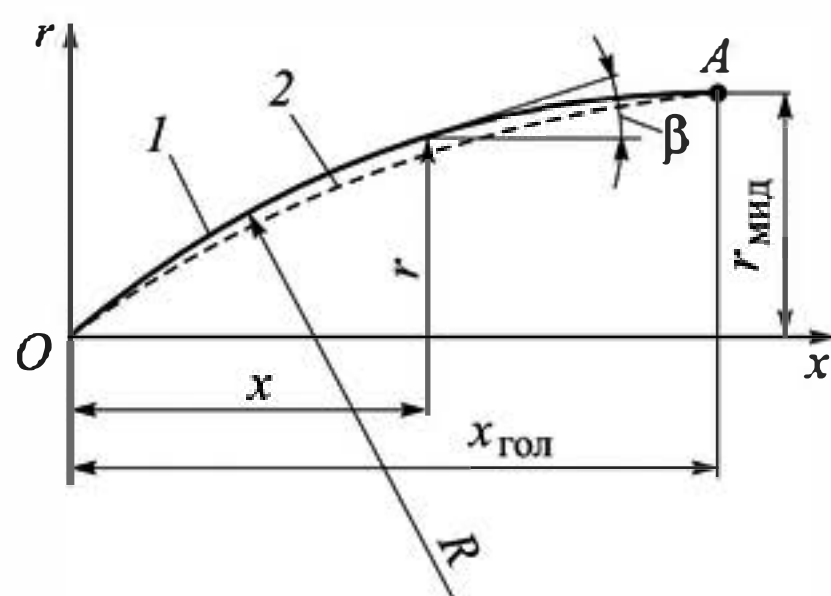


Рис. 8.3. Геометрические параметры оживальной головной части тела вращения:

1 — касательная кривая ($\beta = 0$ в точке A);
2 — секущая кривая ($\beta \neq 0$ в точке A)

Очевидно, что оживальная и параболические образующие могут быть как касательными, так и секущими.

Из уравнения (8.4) для тел с параболической образующей следует, что вся их бесконечная совокупность характеризуется одинаковой зависимостью относительной толщины $r/r_{\text{мид}}$ от безразмерной координаты $\bar{x}$. Среди таких тел можно выбрать геометрически подобные тела, т. е. отличающиеся своими линейными размерами в одно и то же число раз. Эти тела имеют одинаковое удлинение и их можно совместить одно с другим в результате равномерной деформации. Но существуют параболические тела, формы которых совпадают только после неравномерной деформации. Рассмотрим два тела с различным удлинением. Введя масштаб для радиальной координаты, можно при деформировании одного из них в вертикальном направлении не получить полного совмещения с другим, поскольку для этого следует принять новый масштаб для осевой координаты. Такое преобразование называют *аффинным*, а тела с параболической образующей — *аффинно-преобразованными* или *аффинно-подобными*.

Конические тела, образующая которых описывается уравнением $\bar{r} = \bar{x}$, также характеризуются одинаковым распределением относительных толщин и являются аффинно-подобными.

Оживальные тела нельзя аффинно преобразовать, т. е. они не являются аффинно-подобными, кроме случая, когда тела имеют одинаковое удлинение и являются геометрически подобными.

При больших удлинениях ($\lambda_{\text{тол}} > 2$) оживальная форма мало отличается от параболической, поэтому такое тело можно рассматривать как аффинно-подобное.

На практике часто приходится иметь дело с затупленной головкой, поскольку технологически невозможно добиться абсолютно острого тела. Головки затупленной формы применяют при высоких скоростях полета, когда основным требованием к форме головной части является способность противостоять действию очень высоких температур.

Довольно широко распространены ЛА, выполненные в виде сферы или имеющие в качестве головной части сферический носок. Образующая основного участка, идущая за сферическим носком, может быть прямолинейной или криволинейной (рис. 8.4).

Характерными формами затуплений являются сегментно-сферический касательный носок и плоский торец.

Сферический носок и плоский торец можно рассматривать как частные случаи эллиптической поверхности. Эллиптический носок

характеризуется большой и малой осями, причем их ориентация может быть произвольной. Если обе оси равны, то эллиптическое затупление переходит в сферическое, а если одна из осей равна нулю — то в плоский торец.

Аэродинамические характеристики затупленных тел при заданной форме носка зависят от степени затупления $\bar{r}_{\text{тор}}$, под которой понимают отношение радиуса основания носка $r_{\text{тор}}$ к радиусу наибольшего (миделева) сечения $r_{\text{мид}}$, т. е. $\bar{r}_{\text{тор}} = r_{\text{тор}} / r_{\text{мид}}$ (см. рис. 8.4).

На практике применяются и другие формы затуплений, например плоский торец с круглой фаской радиусом r (рис. 8.5). При $r = r_{\text{тор}}$ затупление приобретает сферическую форму, а при $r = 0$ становится плоским торцем.

Традиционно среднюю часть корпуса ЛА выполняют цилиндрической. Встречаются ЛА, у которых она имеет форму усеченного конуса с малым углом наклона образующей. Аппараты с воздушно-реактивными двигателями в средней части корпуса могут иметь кольцевой уступ либо один или несколько секторных уступов, обеспечивающих расположение воздухозаборников. Средняя часть может быть не осесимметричной формы, в частности иметь овальное сечение, обеспечивающее возможность размещения воздухозаборников воздушно-реактивного двигателя. Хвостовая часть (корма) выделяется из корпуса как его элемент, диаметр которого постепенно уменьшается (или увеличивается) по направлению к донному срезу, причем его форма может быть конической, оживальной или параболической (рис. 8.6).

Основное назначение хвостовой части с уменьшающимся диаметром — снижение полного сопротивления. Часто выбор формы

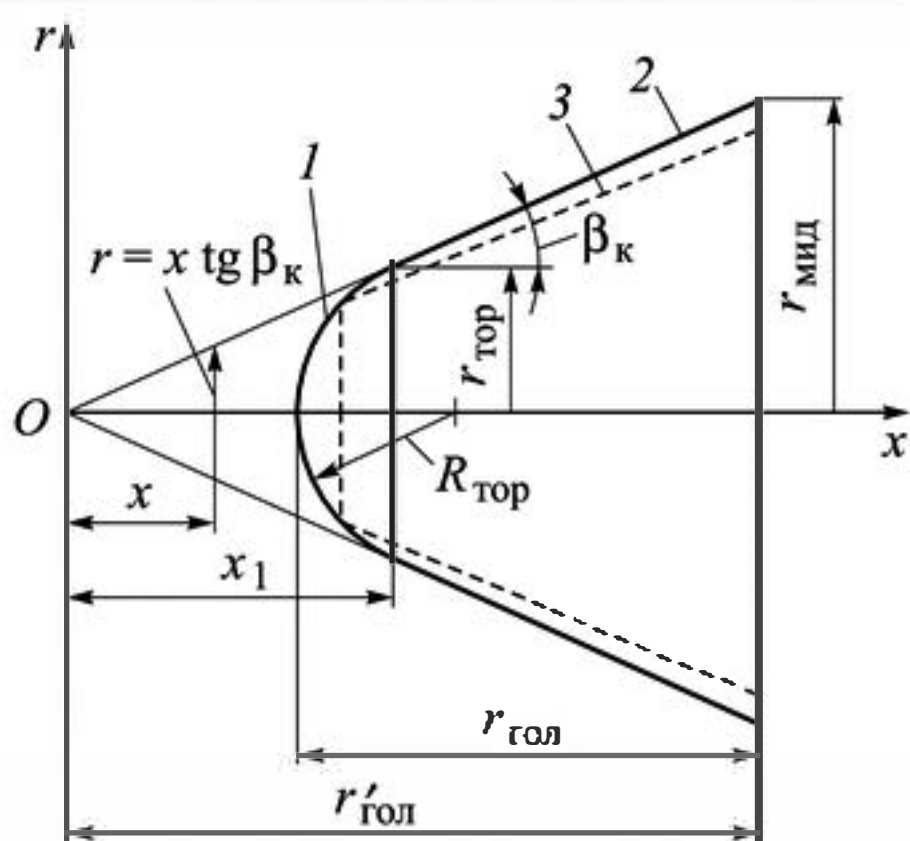


Рис. 8.4. Головная часть со сферическим носком:

1 — сферический носок; 2 — касательная образующая; 3 — секущая образующая

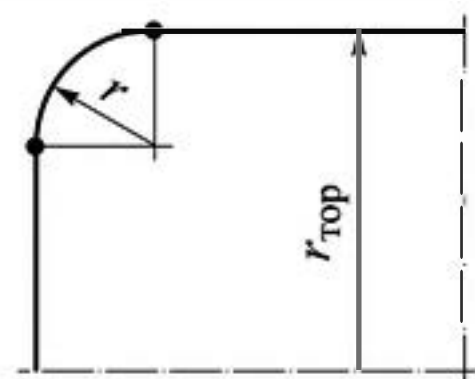


Рис. 8.5. Затупление в виде торца с круглой фаской

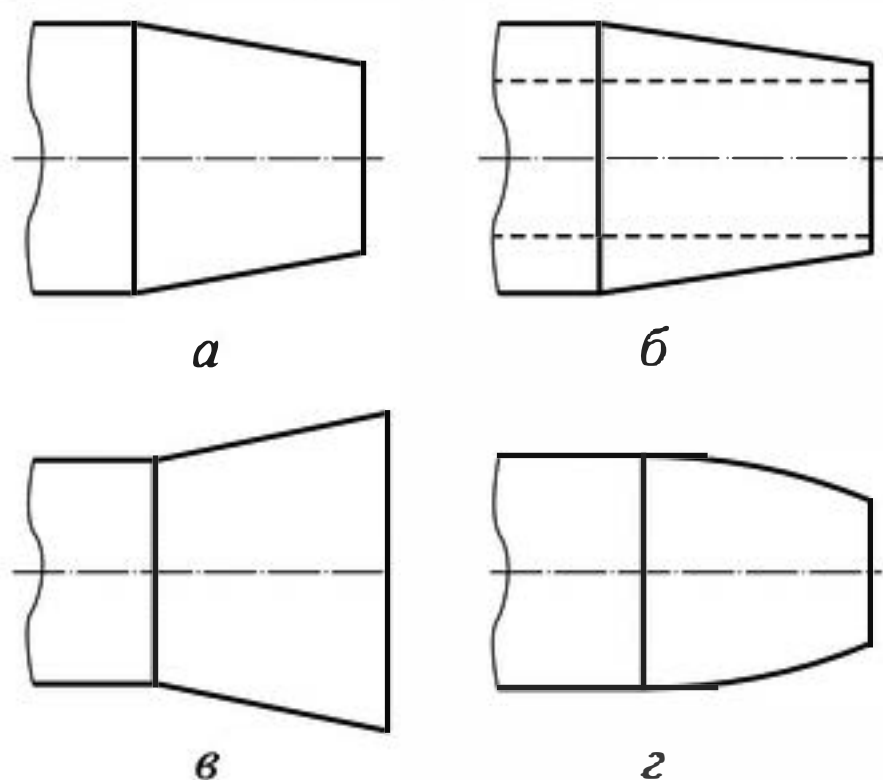


Рис. 8.6. Формы хвостовых частей: а–в – конические суживающаяся, суживающаяся с протоком и расширяющаяся соответственно; г – оживальная суживающаяся

хвостовой части определяется конструктивными соображениями. Выполнение ее расширяющейся способствует повышению устойчивости ЛА при росте его сопротивления.

Конструктивно корпус иногда выполняют таким образом, что отсутствует четко выраженный донный срез и донная часть представляет собой поверхность произвольной формы. На форму донной поверхности часто оказывает влияние сопловой блок двигательной установки.

Представленные наиболее простые формы корпусов, носков и хвостовых частей в известной степени отражают их многообразие, поэтому могут быть рассмотрены как типичные.

8.2. Формы несущих, управляющих, стабилизирующих и вспомогательных поверхностей летательного аппарата

Аэродинамические свойства крыльев, рулей, стабилизаторов определяются как их формой в плане, так и профилем, т. е. контуром,

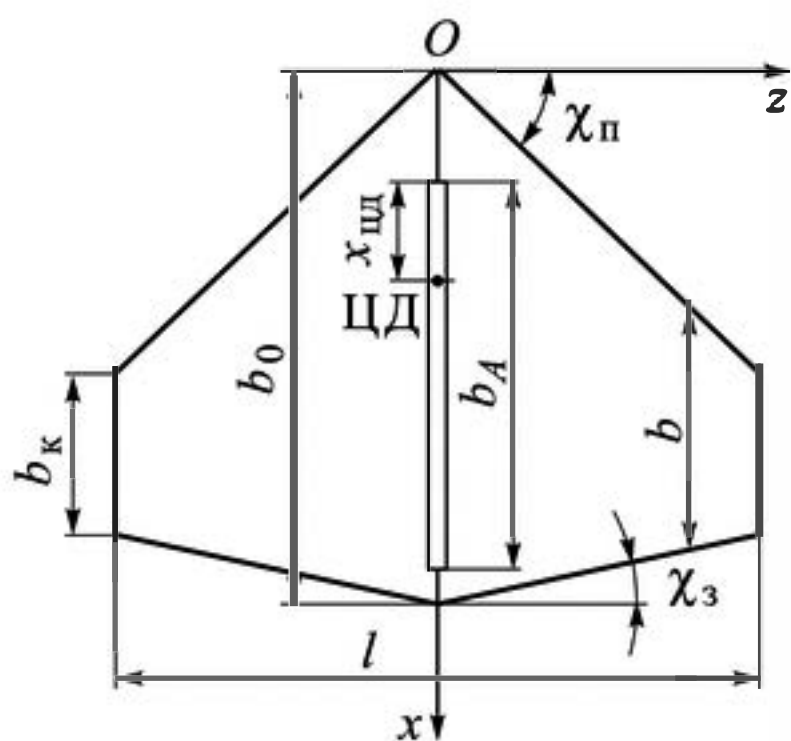


Рис. 8.7. Основные геометрические параметры крыла в плане

лежащим в сечении, перпендикулярном поверхности. Конкретная форма каждого такого элемента зависит от назначения ЛА и диапазона скоростей его полета. Например, форму крыла в плане выбирают с учетом не только его контура, но и всех геометрических параметров (как размерных, так и безразмерных). Типичная схема крыла современного ЛА приведена на рис. 8.7.

Аэродинамические коэффициенты крыла заданной формы в плане при определенной скорости полета

зависят от углов стреловидности χ_n , χ_z или углов наклона γ_n , γ_z передней и задней кромок крыла соответственно, а также удлинения λ и сужения η крыла:

$$\lambda = \frac{l}{b_{\text{ср}}} = \frac{2l}{b_0 + b_k} = \frac{l^2}{S};$$

$$\eta = b_0/b_k,$$

где l — размах крыла; $b_{\text{ср}} = (b_k + b_0)/2$ — средняя хорда крыла; b_k , b_0 — концевая и корневая хорды крыла; S — площадь крыла в плане.

Важнейшей геометрической характеристикой, используемой в аэродинамических исследованиях, является средняя аэродинамическая хорда b_A , т. е. хорда эквивалентного крыла прямоугольной формы в плане, имеющего ту же площадь в плане, что и заданное крыло, и обладающее одинаковыми с ним аэродинамическими характеристиками.

Центр давления, или фокус крыла, отсчитывают от начала средней аэродинамической хорды крыла, располагающейся вдоль его корневой хорды (см. рис. 8.7). Под аэродинамическим или просто фокусом крыла понимают точку приложения равнодействующей всех добавочных сил, вызванных углом атаки. Применение средней аэродинамической хорды в качестве характерного геометрического параметра удобно в том отношении, что ее длина и положение центра давления (фокуса крыла) относительно ее передней кромки остаются почти неизменными для любой формы крыла в плане при сохранении его площади.

Характерной особенностью крыльев современных высокоскоростных ЛА является наличие передней стреловидности, главным назначением которой является снижение сопротивления благодаря уменьшению нормальной к передней кромке составляющей скорости невозмущенного набегающего потока ($V_{n\infty} = V_{\infty} \cos \chi_n$). У аппаратов, предназначенных для полетов с дозвуковыми скоростями, при общем снижении сопротивления волновой кризис («звуковой барьер») сдвигается в сторону большей скорости. У сверхзвуковых ЛА, обладающих большой стреловидностью, обеспечивается более плавный переход через звуковой барьер без значительного увеличения сопротивления, что имеет очень важное значение для сохранения устойчивости полета.

Аэродинамические характеристики крыла при сверхзвуковой скорости существенно зависят от того, является ли передняя кром-

ка дозвуковой или сверхзвуковой. Передняя кромка называется дозвуковой, если она лежит внутри конуса Маха с углом μ и вершиной в передней точке крыла. В этом случае нормальная к кромке составляющая скорости набегающего потока будет меньше скорости звука ($V_{n\infty} < a_\infty$, $M_{n\infty} < 1$). Поскольку $M_{n\infty} = M_\infty \cos \chi_n = M_\infty \sin \gamma_n$, условие того, что передняя кромка (это справедливо для любой кромки крыла) является дозвуковой, выполняется при $\gamma_n < \mu$, где $\mu = \arcsin(1/M_\infty)$.

Если крыло находится в условиях дозвукового обтекания, то заостренная передняя кромка оказывается невыгодной. Условия обтекания, а следовательно, и аэродинамические характеристики улучшатся, если слегка закруглить переднюю кромку, т. е. создать разрежение в окрестностях передней кромки, что приведет к образованию подсасывающей силы и уменьшению сопротивления. Однако снижение сопротивления возможно только при правильном выборе радиуса закругления в зависимости от угла атаки. Например, при уменьшении радиуса закругления и повышении угла атаки по сравнению с их оптимальными значениями возникает срыв потока и сопротивление возрастает.

Передняя кромка крыла называется сверхзвуковой, если она лежит вне конуса Маха, поскольку в этом случае $\gamma_n > \mu$ и $M_\infty \sin \gamma_n > 1$. Учитывая особенности сверхзвукового обтекания, желательно применять заостренную переднюю кромку.

Подобно передней, задняя и боковая кромки могут быть дозвуковыми и сверхзвуковыми, что влияет на характер обтекания крыла. Например, если боковая кромка является дозвуковой, то через нее имеет место перетекание, что вызывает уменьшение подъемной силы в данной области крыла. Для исключения этого неблагоприятного воздействия боковую кромку выполняют сверхзвуковой, размещая вне конуса Маха. Из сказанного можно сделать вывод, что при соответствующем выборе формы крыла в плане можно достичь необходимых аэродинамических характеристик.

Треугольные крылья обычно используют для высокоскоростных сверхзвуковых ЛА. Так, треугольное крыло обладает всеми положительными свойствами крыльев со стреловидной передней кромкой, а также рядом благоприятных особенностей, имеющих существенное значение при некоторых условиях полета. Отметим, что в трансзвуковой области полета центр давления крыла перемещается незначительно, что облегчает стабилизацию и управление ЛА. Аэродинамическое качество треугольного крыла при

сверхзвуковых скоростях выше, чем у ряда крыльев с другой формой в плане, например обычного стреловидного, поскольку нет отрицательного воздействия концевое эффекта. У треугольного крыла имеются некоторые конструктивные преимущества, позволяющие выполнить его прочным и жестким и использовать достаточно большую внутреннюю полость для размещения оборудования и топлива. Размещение органов управления вдоль задней кромки перпендикулярно продольной оси ЛА повышает их эффективность.

Отмеченные выше и некоторые другие положительные качества треугольных крыльев проявляются при определенных режимах полета. При изменении условий полета и назначения ЛА треугольные крылья могут оказаться неэффективными и их следует заменить на другие.

Прямоугольные крылья с обычным удлинением не имеют широкого применения. Основными причинами этого является значительное сопротивление, которое резко увеличивается при достижении волнового кризиса, наблюдаемого даже при сравнительно небольших числах Маха ($M_\infty < 1$), а также существенное изменение положения центра давления в трансзвуковой области полета.

В конструкциях высокоскоростных ЛА в последнее время вводят в качестве несущих и управляющих элементов прямоугольные крылья малого удлинения. Благодаря интерференции с корпусом такие крылья обладают достаточно хорошими аэродинамическими характеристиками.

Выбор формы крыла (несущих, управляющих, стабилизирующих и вспомогательных поверхностей) является одним из самых ответственных моментов в разработке аэродинамической компоновки и конструкции ЛА и должен быть основан на глубинных теоретических и экспериментальных исследованиях, учитывающих назначение ЛА и его конкретные условия полета.

Аэродинамические свойства крыла во многом определяются его профилем. В общем случае профиль может иметь криволинейную форму и не обладать симметрией (рис. 8.8). Форма профиля задается уравнениями $y_v = f_v(x)$ и $y_n = f_n(x)$ соответственно для верхнего и нижнего контуров. Традиционно вводят безразмерные параметры: наибольшую толщину $\bar{c} = c/b$ (где b — хорда крыла; c — наибольшая толщина); стрелу прогиба $\bar{c}_1 = c_1/b$ (где c_1 — стрела прогиба); расстояние до места наибольшей толщины $\bar{x}_c = x_c/b$ и до максимального прогиба $\bar{x}_{c1} = x_{c1}/b$.

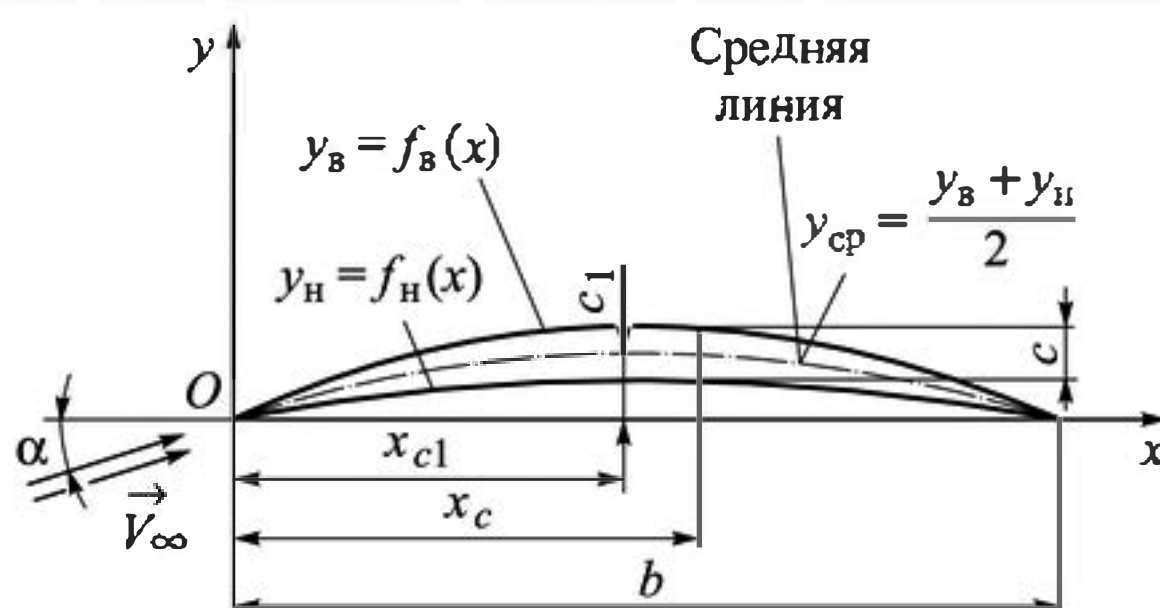


Рис. 8.8. Произвольный профиль крыла

При наличии горизонтальной симметрии уравнения верхнего и нижнего контуров принимают вид $y_{в,н} = \pm f(x)$, где знак «+» относится к верхнему, а знак «—» — к нижнему контуру. Средняя линия в этом случае совпадает с хордой, а стрела прогиба равна нулю.

Характер давлений при сверхзвуковой скорости таков, что искривление средней линии профиля, выгодное при дозвуковой скорости, не дает при этом режиме особых преимуществ.

Для сверхзвукового профиля характерна симметричность относительно хорды и острая передняя кромка. Несущие и стабилизирующие поверхности у современных высокоскоростных ЛА имеют один из следующих профилей: ромбовидный, трапецеидальный и чечевицеобразный (рис. 8.9).

Первые два типа профилей отличаются простотой изготовления, причем ромбовидная форма профиля обеспечивает крылу большую жесткость по сравнению с трапецеидальной. С позиции аэродинамики некоторым преимуществом обладает трапецеидальный профиль, поскольку при одинаковой с ромбовидным профилем ширине он может обеспечить меньшее сопротивление и большее аэродинамическое качество. У чечевицеобразного профиля еще меньше сопротивление, чем у трапецеидального при одинаковой относительной толщине. Выбором соответствующих углов заострения передней и задних кромок можно добиться требуемой жесткости крыла.

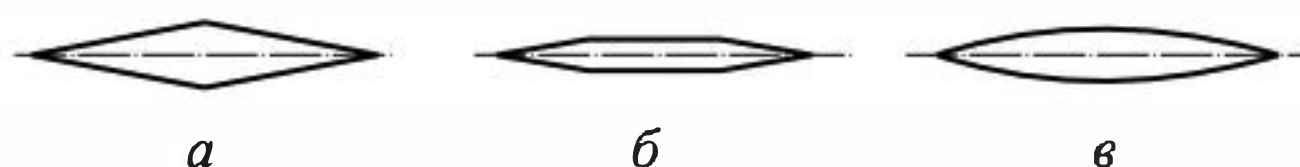


Рис. 8.9. Ромбовидный (а), трапецеидальный (б) и чечевицеобразный (в) профили сверхзвуковых несущих и стабилизирующих поверхностей

С увеличением угла заострения передней кромки возрастает волновое сопротивление, а также уменьшается угол атаки, при котором наступает режим обтекания с отошедшей волной, приводящий к резкому возрастанию волнового сопротивления.

8.3. Аэродинамические схемы и органы управления полетом летательного аппарата

Выбор размеров, внешних форм, взаимного расположения корпуса, крыла, оперения, органов управления и других элементов ЛА определяет его аэродинамическую компоновку (схему).

Аэродинамические схемы ЛА подразделяют на два класса.

К первому классу относятся аэродинамические схемы неоперенных аппаратов, которые различаются в зависимости от того, управляемым или неуправляемым является ЛА. Неоперенный управляемый ЛА — это ракета дальнего действия с отделяющейся головной частью (рис. 8.10, а). Стабилизация ракеты на активном участке траектории осуществляется с помощью газодинамических органов управления, например поворотных сопел или газовых рулей. Турбореактивные снаряды (рис. 8.10, б) относятся к неуправляемым неоперенным ЛА, стабилизация которых обеспечивается их быстрым вращением вокруг продольной оси. У ЛА, выполненного в виде конуса со стабилизирующей «юбкой» (рис. 8.10, в), передняя часть конуса определяет положение центра масс, а вся его поверхность — положение центра давления, который располагается за центром масс, что обеспечивает статическую устойчивость аппарата.

Ко второму классу относятся схемы оперенных ЛА, на корпусе которых установлены несущие, стабилизирующие, управляющие и вспомогательные поверхности. Если площадь аэродинамических поверхностей велика и создаваемая ими подъемная сила определяет подъемную силу ЛА, то такой аппарат называют крылатым. При небольшой площади аэродинамических поверхностей они

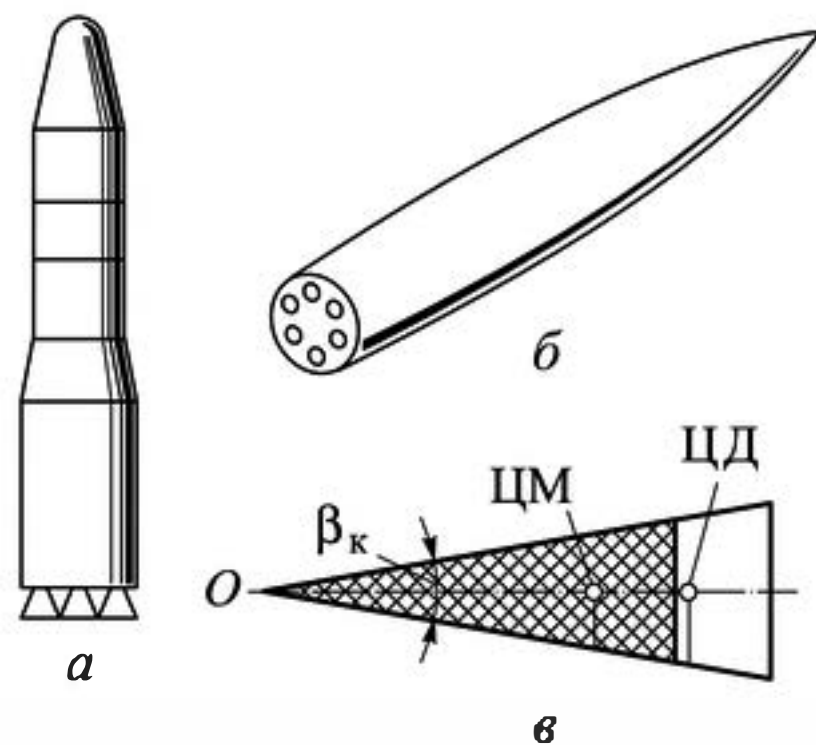


Рис. 8.10. Неоперенные ЛА

бывают управляющими, стабилизирующими и вспомогательными.

Таким образом, аэродинамические схемы оперенных ЛА могут быть крылатые и бескрылые, а также с совмещенным крылом и оперением. Бескрылые ЛА бывают управляемые и неуправляемые.

Неуправляемый ЛА, выполненный по схеме бескрылого оперенного снаряда (рис. 8.11, а), имеет неподвижно закрепленное на корпусе оперение, выполняющее роль стабилизаторов. Управляемый ЛА, снабженный поворотными консолями оперения (рис. 8.11, б), относится также к классу бескрылых.

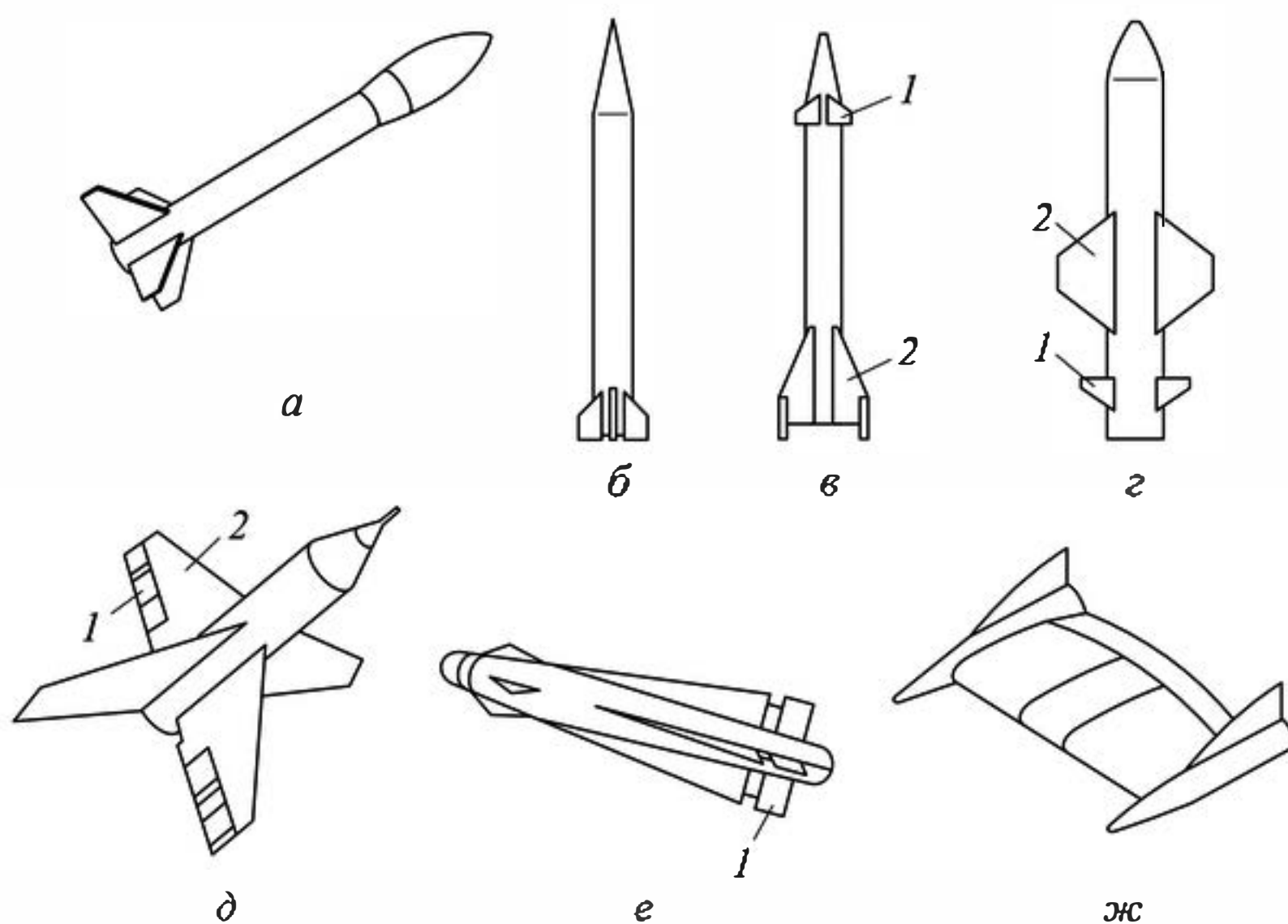


Рис. 8.11. Оперенные ЛА

К крылатым управляемым ЛА можно отнести аппараты, содержащие размещенные на корпусе крыло и управляющие консоли (рис. 8.11, в) или выполненные по схеме с совмещенным крылом и оперением (рис. 8.11, д).

Крылатые ЛА с разнесенными крыльями и управляющими поверхностями в зависимости от принятого способа управления имеют нормальную схему (рис. 8.11, г) или схему «утка». В первой схеме управляющее оперение 1 расположено за крылом 2 в хвостовой части корпуса, во второй (см. рис. 8.11, в) — перед крылом 2 в носовой части, впереди центра тяжести ЛА.

В схеме «бесхвостка» (см. рис. 8.11, д) изолированное управляющее оперение отсутствует и рулевые устройства 1 расположены

на задней кромке несущей поверхности (крыла) 2. Аппараты, выполненные по схеме «бесхвостка», могут иметь неуправляемое оперение (дестабилизатор), расположенное впереди крыла (рис. 8.11, е). Необходимость в таком оперении возникает для изменения характеристик устойчивости и демпфирования. Разновидностью схемы «бесхвостка» является схема «летающее крыло» (рис. 8.11, ж), в которой корпус ЛА почти полностью вписывается в очертание крыла.

Каждая из рассмотренных аэродинамических схем обладает определенными преимуществами. В нормальной схеме рули могут обеспечить резкий маневр ЛА при сохранении их плавного обтекания. Это достигается поворотом руля на большой первоначальный угол δ (рис. 8.12, а), который при маневре уменьшается на угол атаки α , что предотвращает срыв потока с рулевых поверхностей. Конструктивный перенос рулей в хвостовую часть корпуса обеспе-

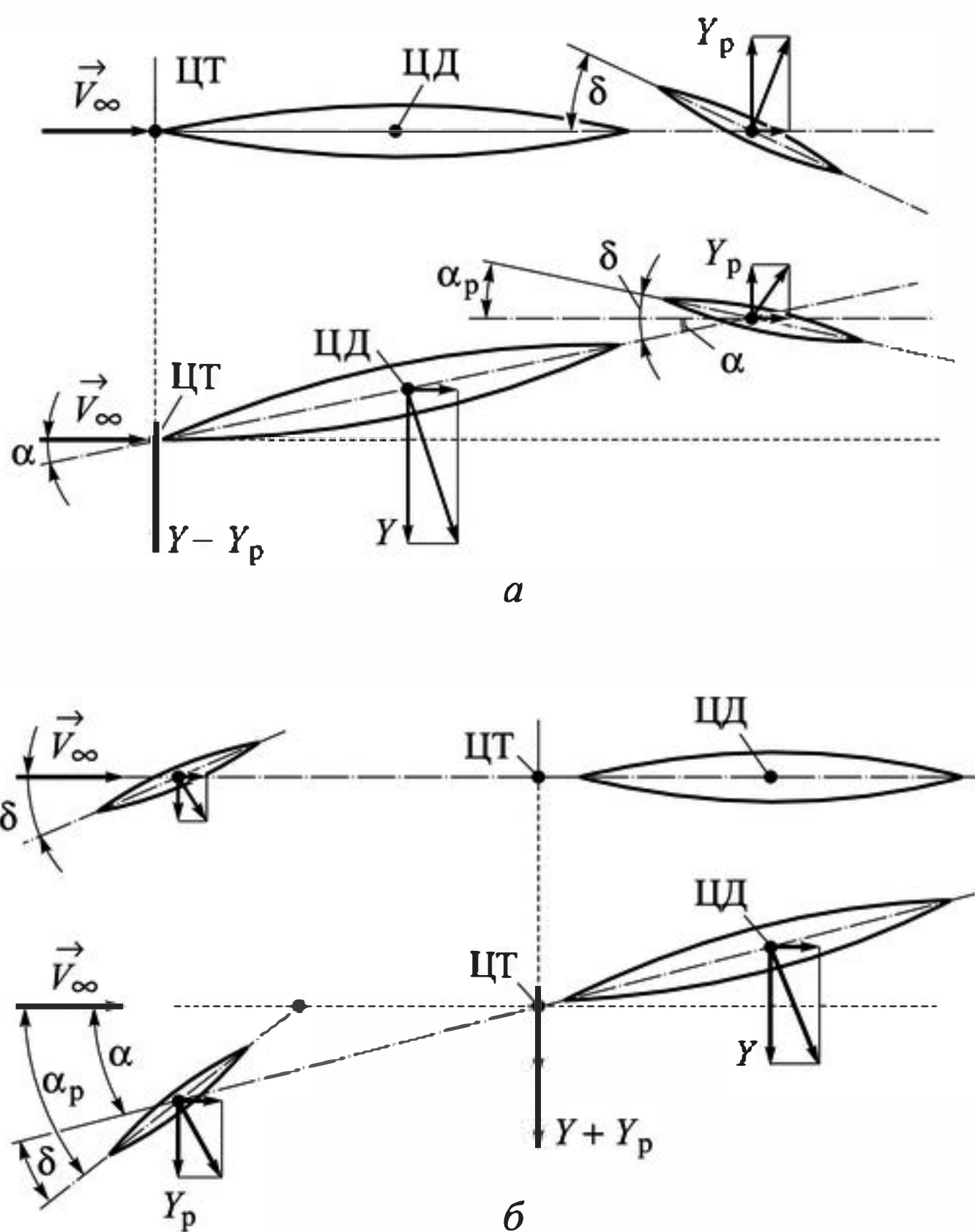


Рис. 8.12. Управление ЛА по нормальной схеме (а) и по схеме «утка» (б) (сверху – положение до, снизу – после поворота ЛА)

чивает дифференциальное отклонение горизонтальных консолей, позволяющее создавать крен. При такой схеме облегчается балансировка корпуса относительно центра масс, обеспечивается большая свобода в расположении и выборе размеров аэродинамических поверхностей, а также в выборе схемы управления. При заднем расположении рулей приложенные к корпусу изгибающие моменты оказываются сравнительно небольшими, что уменьшает нагрузку на него.

Нормальная схема имеет и свои недостатки. Хвостовое оперение (рули) находится в зоне возмущенного потока, прошедшего крыло. Вследствие этого оперение испытывает сильную тряску — так называемый бафтинг. Для исключения этого стремятся перенести оперение выше плоскости крыла за пределы возмущенного потока, хотя при этом снижается жесткость оперения, что может привести к флаттеру.

Поскольку углы атаки крыла и рулей имеют разный знак, создаваемые ими подъемные силы направлены в противоположные стороны, а следовательно, суммарная подъемная сила ЛА меньше. По этой причине при отклонении рулей возникает дестабилизирующий эффект, обусловленный тем, что расстояние между центром масс и центром давления сокращается, вызывая снижение статической устойчивости. Если рули расположены на небольшом расстоянии от центра масс, то может уменьшиться демпфирующий момент от оперения, а значит, и динамическая устойчивость, т. е. возникающие периодические колебания будут затухать медленнее.

Положительные качества схемы «утка» проявляются в том, что рули не испытывают возмущений от крыла (оказываются более эффективными). Так как знаки углов атаки рулей и крыла одинаковые (рис. 8.12, б), создаваемые ими подъемные силы направлены в одну сторону и суммарная подъемная сила ЛА больше. При отклонении рулей уменьшается дестабилизирующий момент и повышается статическая устойчивость ЛА по сравнению с нормальной схемой. Поскольку рулевое устройство обычно располагается на большом расстоянии от центра масс, характеристики демпфирования улучшаются. Некоторые конструктивные выгоды связаны с тем, что рули имеют сравнительно небольшие размеры, а значит, для их управления необходимы малые моменты. При переднем расположении рулей и сопутствующего оборудования баки с топливом и двигательную установку можно размещать в средней и хвостовой частях корпуса.

К недостаткам рассматриваемой схемы можно отнести то, что на крыло воздействует скошенный рулями поток, приводящий к уменьшению истинного угла атаки крыльев и их подъемной силы. Этот эффект особенно значителен, если крылья имеют небольшое удлинение, т. е. почти вся их поверхность попадает в зону скошенного потока. В схеме «утка» рулевые поверхности не целесообразно применять в качестве элеронов для управления по крену. Вследствие скосов потока за рулями крылья создают противоположный по знаку момент крена, и эффект от элеронов практически исчезает. Отмеченный недостаток можно устранить, применяя на неподвижных крыльях элероны, управляемые независимо от передних рулей. Это приводит к дополнительным конструктивным трудностям и утяжелению аппарата. Рулевые поверхности, в связи с тем, что их угол атаки α_r увеличивается при отклонении ЛА на угол α (см. рис. 8.12, б), оказываются в неблагоприятных условиях, и возможен срыв потока, вызывающий возникновение продольных колебаний ЛА. Расположение управляющего оперения впереди центра масс вызывает смещение центра давления вперед и, как следствие, дестабилизирующий эффект. Нагрузки на рули и изгибающие моменты оказываются больше, чем в нормальной схеме. Схема «утка» предполагает длинную носовую часть корпуса для размещения рулей, что вызывает трудности обеспечения путевой устойчивости, для которой в этом случае требуется развитое вертикальное хвостовое оперение.

Преимуществом аэродинамической схемы «бесхвостка» является отсутствие скосов потока, вызывающих понижение эффективности рулей или крыльев. Использование рулей на горизонтальных крыльях делает более надежным управление по крену, поскольку в такой схеме исключается возможность обратного влияния, как, например, в схеме «утка». Статическая устойчивость достаточно независима от движения по тангажу, курсу и крену.

К недостаткам этой схемы можно отнести то, что ЛА в этом случае не приспособлен для резких маневров (рули расположены на небольшом расстоянии от центра масс). Кроме того, при больших углах атаки возможно попадание рулей в область отрывных течений, что существенно снижает управляющие силы. Вследствие небольшого расстояния между центром масс ЛА и центром тяжести крыла демпфирующий момент и характеристики демпфирования малы. Для этой схемы характерна существенная зависимость положения центра давления от скорости, что сказывается на устой-

чивости и управляемости ЛА. Для других аэродинамических компоновок это влияние меньше.

На ЛА, не предназначенных для широкого маневра по курсу и выполненных по так называемой самостоятельной схеме, применяют, как правило, монопланное расположение крыльев на корпусе. Крылья могут быть поворотными или снабжены элеронами для создания управляющей силы, обеспечивающей маневр по курсу при одновременном выполнении движения крена.

Для выполнения широкого маневра в пространстве на ЛА устанавливают крылья (рули) по так называемой плюсо- или иксообразной схемам (рис. 8.13). Следует иметь в виду, что ни одна из этих схем не дает существенного выигрыша в подъемной силе, но как средство управления плюсообразные крылья имеют некоторые преимущества.

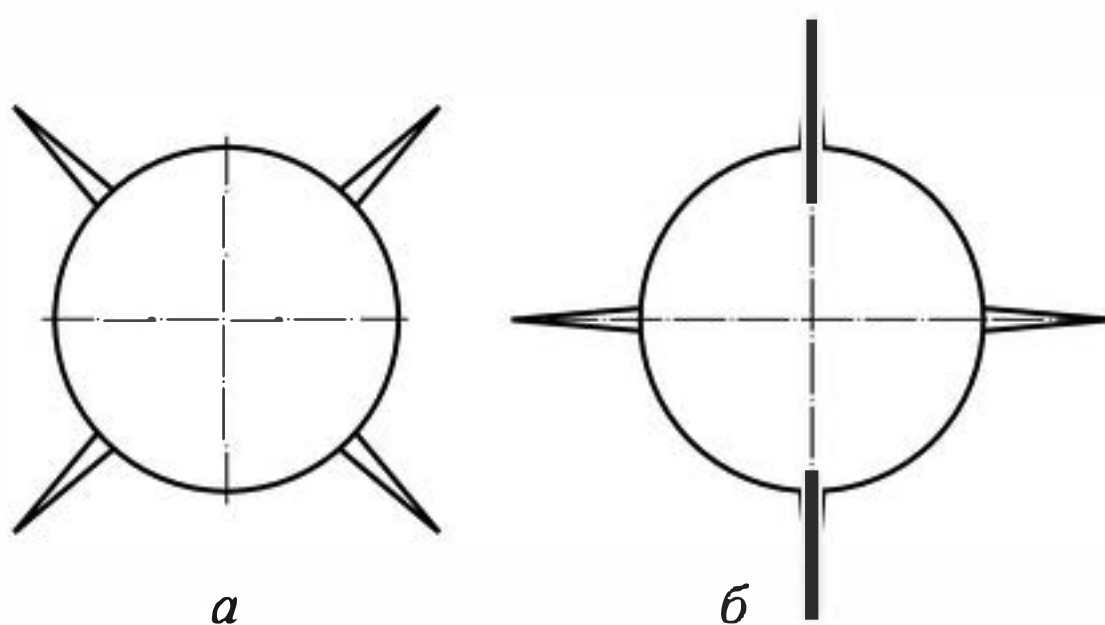


Рис. 8.13. Плюсо- (а) и иксообразная (б) схемы расположения крыльев на корпусе ЛА

Оперение и его отдельные элементы на корпусе располагают с учетом того, чтобы неблагоприятное влияние корпуса, крыльев и двигателя было минимальным.

Управление движением ЛА заключается в изменении условий полета и устранении возникающих отклонений от его заданного режима. Понятие «управление» включает в себя протекающие одновременно процессы организации движения по заданной траектории и его стабилизации. Для обеспечения требуемого закона движения ЛА и его стабилизации используют совокупность различных технических средств, образующих систему управления. К неотъемлемым элементам этой системы относятся органы управления полетом, которые вместе с приводом входят в состав контура управления ракетой и являются его исполнительным звеном. Ос-

новное их назначение — создание сил и моментов для программного разворота и стабилизации положения ЛА.

Существует большое разнообразие таких органов, которые можно подразделить на несколько общих типов, встречающихся на практике. В зависимости от физического характера создаваемого ими управляющего усилия выделяют аэродинамические, газодинамические и комбинированные органы управления.

Аэродинамические органы управления создают управляющую силу путем изменения условий внешнего обтекания при взаимодействии газообразной среды с элементами конструкции ЛА. Органы управления этого типа применяют на ЛА, движущихся в достаточно плотных слоях атмосферы. К их числу можно отнести поворотные крылья, рулевые поверхности, элероны, элевоны, роллероны, щитки, интерцепторы, аэродинамические иглы, надстройки, подвижные кормовые насадки, «юбки».

В основе использования *газодинамических органов управления* лежит эффект, связанный с изменением направления истекающей из сопла двигательной установки газовой струи (регулирование силы тяги по величине и направлению) или с локальным изменением параметров газового потока внутри сопла. Их применяют в тех условиях, когда аэродинамические органы управления малоэффективны (при малых скоростях движения ЛА, в разреженных слоях атмосферы и т. д.). Газодинамические органы управления создают моменты и управляющую силу без изменения угла атаки, а их функционирование в большинстве случаев не зависит от внешних условий обтекания ЛА.

В настоящее время применяют различные газодинамические органы управления, среди которых можно выделить поворотные двигатели, поворотные сопла, поворотные и выдвижные насадки, дефлекторы, газовые рули, интерцепторы, щитки (плоские, уголкового, тангенциальные), впрыск и вдув газа в закритическую часть сопла. Исходя из принципа действия, их подразделяют на две группы: устройства, которые изменяют импульс газовой струи по величине и направлению за счет разворота всего потока, и органы управления, для которых характерно локальное внесение возмущений в поток, приводящее к изменению параметров течения по соплу. Все они обеспечивают управление ракетой в трех плоскостях, однако не всегда это можно сделать при односопловой схеме двигателя.

Основные недостатки газодинамических органов управления: создание управляющей силы и моментов только при работающем

двигателе, возникновение значительных шарнирных моментов и моментов инерции подвижных частей, подверженность элементов конструкций таких органов воздействию высокотемпературных газовых потоков.

В *комбинированных органах управления* при создании управляющей силы используют одновременно эффекты аэродинамических и газодинамических органов управления. Такие устройства часто называют струйными органами управления. Управляющая сила у них имеет две составляющие: от тяги сопла и от перераспределения давления по поверхности ЛА, обусловленного интерференцией инжектирующего и внешнего потоков.

8.4. Выбор аэродинамической схемы летательного аппарата. Исследование устойчивости тел в полете

Выбор той или иной аэродинамической схемы увязан с назначением ЛА и тактико-техническими требованиями, в соответствии с которыми устанавливают расположение точек старта и цели, вид траектории движения, тип двигательной установки системы управления, характерные особенности конструкции. Каждому определенному ЛА соответствует конкретная аэродинамическая схема, обеспечивающая выполнение тактико-технических требований.

На начальном этапе проектирования выбор аэродинамической схемы и расчеты можно вести отдельно. Принципиальную аэродинамическую схему можно наметить, исходя из тактико-технических требований, без конкретизации форм отдельных элементов. Для правильного выбора аэродинамической схемы ЛА необходимо учитывать накопленный практический опыт в авиационной и ракетной технике, а также имеющиеся теоретические и экспериментальные данные.

В качестве фактора, определяющего тип ЛА, примем взаимное расположение точек старта и цели полета: «космос—космос», «космос—земля» и т. д.

Движение аппаратов класса «космос—космос» происходит в безвоздушном пространстве, поэтому форма и их аэродинамические характеристики не влияют на параметры траектории. Форма ЛА определяется конструктивными соображениями, он может быть как управляемым, так и неуправляемым. В качестве органов управления используют газодинамические устройства, обеспечивающие ориентировку и корректирование траектории.

Для аппаратов класса «космос—земля» характерно то, что при входе в земную атмосферу с огромными скоростями они испытывают сильное влияние аэродинамического нагрева. Для защиты от нагрева и предохранения от разрушения предусматривают применение огнезащитных обмазок и использование тормозных ракетных движений в целях уменьшения скорости полета. Аппараты класса «космос—земля» выполняют по схемам неоперенного неуправляемого (управляемого) и крылатого ЛА. Для стабилизации неуправляемых ЛА (спускаемых аппаратов) используют стабилизирующую «юбку», представляющую собой пустотелую хвостовую часть конструкции.

Крылатые ЛА тоже содержат элементы тепловой защиты и традиционные аэродинамические органы управления. Траектории движения аппаратов класса «воздух—земля» и «воздух—воздух» проходят в плотных слоях атмосферы, поэтому в их аэродинамических схемах это необходимо учитывать. Наиболее широко используют крылатые управляемые и неуправляемые ЛА. Такие аппараты часто должны обладать повышенной маневренностью, что требует применения мощных органов управления.

Аппараты класса «земля—земля» целесообразно подразделять по дальности и виду траектории полета. ЛА, имеющие межконтинентальные дальности и баллистические траектории, являются многоступенчатыми с отделяющейся головной частью, их выполняют по аэродинамической схеме без оперения. На активном участке траектории управление и стабилизация обеспечиваются газо- и (или) аэродинамическими органами, а на пассивном участке — комбинированными и (или) аэродинамическими. На одноступенчатых ЛА класса «земля—земля» без отделяющейся головной части размещают оперение, обеспечивающее стабилизацию на пассивном участке траектории.

Полет ЛА с планирующей траекторией происходит в плотных слоях атмосферы без приложения тяги. Для обеспечения полета в аэродинамической схеме должны быть предусмотрены крылья, создающие необходимую подъемную силу и максимальное аэродинамическое качество, обеспечивающее достижение наибольшей дальности полета. При многоступенчатой компоновке ЛА крылья устанавливают на последней ступени, совершающей планирующий полет на нисходящей ветви траектории.

Поскольку планирующий полет осуществляется в плотных слоях атмосферы со значительными скоростями, аэродинамическая схе-

ма ЛА должна обеспечивать уменьшение теплопередачи и нагрева поверхности. Головные части ЛА, имеющие рикошетирующие траектории, выполняют по схеме крылатого управляемого аппарата, которая обеспечивает его чередующееся пребывание в плотных слоях атмосферы и в разреженной среде. При движении в плотных слоях атмосферы необходимо обеспечение максимального аэродинамического качества и снижение тепловых потоков к поверхности ЛА. Для этого передние кромки крыльев и корпус должны быть затуплены. Для уменьшения сопротивления передние кромки крыльев выполняют скошенными. Поэтому в планирующих и рикошетирующих гиперзвуковых ЛА целесообразно применять треугольное крыло.

К ЛА, обладающим настильной траекторией, относятся обычные самолеты и самолеты-снаряды. Эти ЛА выполняют крылатыми, а для компенсации силы тяжести используют аэродинамические или комбинированные органы управления.

При старте с помощью ракетных ускорителей в аэродинамической схеме предусматривают средства, обеспечивающие стабилизацию и управление в этих условиях. Также необходимо гарантировать устойчивость в полете в условиях заправки ЛА со специальных самолетов-заправщиков.

На выбор аэродинамической схемы влияет тип двигательной установки. Ракетную двигательную установку традиционно размещают в кормовой части корпуса, что определяет центровку и взаимное расположение центров тяжести и давления, влияет на устойчивость и управляемость. Размещение сопел определяет форму хвостовой части и условия ее обтекания.

При использовании нескольких двигательных установок («пакетная» схема) или ракетных двигателей в качестве стартовых ускорителей требуются дополнительные средства стабилизации, поскольку после окончания работы эти двигатели отделяются. Аэродинамическая схема ЛА должна обеспечить в моменты отделения необходимую устойчивость и управляемость. Лобовое сопротивление отделяемых двигательных установок должно быть достаточным для быстрого их отделения от корпуса.

Для работы прямоточных турбореактивных двигателей необходим кислород воздуха, который поступает из воздухозаборников, размещенных на корпусе ЛА. Очевидно, что размеры воздухозаборных устройств, их число и характер расположения, режим работы определяют условия обтекания и аэродинамические характе-

ристики ЛА. Для обеспечения оптимальных условий работы двигателей воздухозаборные устройства следует размещать таким образом, чтобы они не затенялись крыльями и оперением. Нежелательно располагать воздухозаборное устройство на большом удалении от носовой части вблизи поверхности, поскольку в этом случае входной канал оказывается в зоне толстого пограничного слоя и поступающий воздух будет иметь большие потери полного давления. Обычно воздухозаборные устройства выполняют в виде кольцевого воздухозаборника, размещаемого в передней части корпуса, или боковых воздухозаборников, выносимых за пределы пограничного слоя.

Для сверхзвуковых ЛА с прямоточными двигателями необходимы специальные ускорительные двигатели, создающие начальную скорость, которая обеспечивала бы их устойчивую работу. Однако это утяжеляет хвостовую часть конструкции, что требует установки стабилизаторов.

Под *статической устойчивостью* ЛА понимают его способность возвращаться в исходное положение равновесия после прекращения действия возмущающего фактора. Управляемость характеризует способность ЛА реагировать на отклонение органов управления. *Динамическая устойчивость* характеризуется неустановившимся движением ЛА, вызываемым различными возмущающими факторами: турбулентностью, порывами ветра, действием оружия, отклонением органов управления и т. д. Динамическая устойчивость, конечно, более полно оценивает характер движения ЛА, однако анализ статической устойчивости в большинстве случаев позволяет конструктору сделать необходимые практические выводы.

В практических задачах используют схематическое разделение общей устойчивости на продольную и боковую. При исследовании характеристик продольной устойчивости считают, что все возмущающие силы и моменты действуют в продольной плоскости связанных осей Ox . В этом случае рассматривается движение ЛА, происходящее в его плоскости симметрии при отсутствии крена и скольжения. При анализе боковой устойчивости рассматривают возмущенное движение ЛА, связанное с изменением углов скольжения и крена при неизменном угле атаки.

Движение по крену и скольжение связаны между собой. Отклонение элеронов обычно вызывает не только крен аппарата, но и его вращение относительно оси Oy . Отклонение руля направления вызывает скольжение аппарата, но это сопровождается и движением

по крену. Поэтому исследование боковой устойчивости связано с одновременным анализом моментов как крена, так и рыскания.

Для ЛА, обладающего статической устойчивостью, продольный момент стремится вернуть угол атаки к прежнему значению. В этом случае направление действия момента M_z (соответственно и коэффициента m_z) противоположно направлению изменения угла α . Из этого следует, что условие продольной статической устойчивости выражается неравенством $\partial M_z / \partial \alpha < 0$ или $\partial m_z / \partial \alpha = m_z^\alpha < 0$. В случае продольной статической неустойчивости возникает дестабилизирующий опрокидывающий момент, который стремится увеличить угол атаки α . Это условие выражается неравенством $\partial M_z / \partial \alpha > 0$ или $\partial m_z / \partial \alpha = m_z^\alpha > 0$.

Статическая устойчивость пути характеризуется неравенством $\partial M_y / \partial \beta < 0$ или $\partial m_y / \partial \beta = m_y^\beta < 0$, а статическая неустойчивость — $\partial M_y / \partial \beta > 0$ или $\partial m_y / \partial \beta = m_y^\beta > 0$. Очевидно, в первом случае направление действия момента рыскания и изменения угла рыскания различны, а во втором — одинаковы. Момент в первом случае является стабилизирующим, а во втором — дестабилизирующим.

Мерой поперечной статической устойчивости (статической устойчивости крена) является производная $\partial M_x / \partial \beta$ или $\partial m_x / \partial \beta = m_x^\beta$. Если производная $m_x^\beta < 0$, то ЛА обладает поперечной статической устойчивостью, а при $m_x^\beta > 0$ имеет место поперечная статическая неустойчивость.

При $m_z^\alpha = 0$, $m_y^\beta = 0$ и $m_x^\beta = 0$ ЛА нейтрален в отношении продольной устойчивости, устойчивости пути и поперечной устойчивости.

Продольную статическую устойчивость ЛА можно характеризовать расстоянием между его центром масс $x_{цм}$ и центром давления $x_{цд}$, т. е. разностью $x_{цд} - x_{цм}$. В безразмерной форме это можно записать так:

$$x_{цд} / l_{хар} - x_{цм} / l_{хар} = \bar{x}_{цд} - \bar{x}_{цм},$$

где $\bar{x}_{цд} = x_{цд} / l_{хар}$.

Разность $\bar{x}_{цд} - \bar{x}_{цм}$ называют запасом статической устойчивости. При положительной разности имеет место статическая устойчивость ЛА, при отрицательной — статическая неустойчивость, а при нулевой — нейтральность в отношении продольной устойчивости.

Для оценки статической устойчивости ЛА с отклоненными рулями используют соотношение

$$\frac{\partial m_{z_{\text{цм}}}}{\partial c_y} = -(\bar{x}_{\text{цд}} - \bar{x}_{\text{цм}}),$$

где $m_{z_{\text{цм}}}$ — коэффициент продольного момента относительно центра масс ЛА.

При заднем расположении центра давления относительно центра масс разность в скобках будет положительная, а производная $\partial m_{z_{\text{цм}}}/\partial c_y < 0$, т. е. выполняется условие статической устойчивости. Условие $\partial m_{z_{\text{цм}}}/\partial c_y > 0$ соответствует статической неустойчивости.

При неустановившемся обтекании на ЛА действуют дополнительные силы и моменты. Аппарат обладает динамической устойчивостью, если отклонение кинематических параметров, вызванное какими-либо возмущающими силами или моментами, с течением времени уменьшается (возмущенное движение затухает и стремится к исходному программному полету). В противном случае наблюдается динамическая неустойчивость ЛА.

Динамическую устойчивость (неустойчивость) исследуют с использованием уравнений возмущенного движения, в которые входят аэродинамические характеристики, зависящие от времени, — нестационарные аэродинамические характеристики. Как показали исследования, решение задач, связанных с их нахождением, можно упростить, если кинематические параметры, определяющие движение тел, принять изменяющимися по так называемому гармоническому закону. Основой расчета нестационарных аэродинамических характеристик ЛА и их элементов являются общие зависимости, выраженные через производные коэффициентов давления по кинематическим параметрам, например по угловой скорости ω_z , скорости $\dot{\alpha}$ изменения угла атаки и др.

9. АЭРОДИНАМИКА КОРПУСОВ

Корпус (фюзеляж) в виде тела вращения или тела, по форме близкого к нему, представляет собой наряду с крыльями, управляющими и стабилизирующими элементами важнейшую часть многих ЛА. Некоторые типы таких аппаратов имеют корпус как единственный или основной элемент аэродинамической схемы, поэтому в аэродинамических исследованиях изучение обтекания тел вращения и разработка методов расчета силового воздействия на них при таком обтекании занимают важное место. Современная аэродинамика тел вращения благодаря развитию математики и вычислительной техники достигла больших успехов. Вместе с тем возросла роль и экспериментальных исследований обтекания корпусов, что вызвано значительным усложнением аэродинамических задач и повышением требований к проверке правильности их решения опытным путем. В главе рассмотрены методы аэродинамического расчета тел вращения, основанные на применении аналитических и численных решений или использовании экспериментальных данных.

9.1. Определение аэродинамических коэффициентов тел вращения

Воздействие среды на движущееся в ней тело сводится к непрерывно распределенным по поверхности тела силам от нормального давления, а также силам от касательного напряжения, обусловленного вязкостью среды. Все эти силы приводятся к одному главному вектору аэродинамических сил $\vec{R}$ и главному вектору момента $\vec{M}$ этих сил относительно какой-либо точки приведения, например центра тяжести, острия носка и т. д. В инженерной практи-

ке имеют дело не с векторами $\vec{R}$ и $\vec{M}$, а с их проекциями на оси скоростной (поточной) или связанной системы координат.

При исследовании аэродинамики тел вращения положение вертикальной плоскости Oxy связанной системы координат целесообразно выбирать таким образом, чтобы она являлась плоскостью симметрии самого тела, а при угле скольжения $\beta = 0$ — и плоскостью симметрии обтекающего тело потока. Тогда в плоскости Oxy будут располагаться и продольная ось Ox тела и вектор скорости $\vec{V}_\infty$ (см. рис. 1.9). Любая другая плоскость, проходящая через продольную ось и называемая *меридиональной*, образует с вертикальной плоскостью некоторый меридиональный угол γ . В соответствии с этим вертикальная плоскость является *нулевой меридиональной плоскостью*. Поскольку вектор $\vec{V}_\infty$ расположен в этой плоскости, то ее определяют как плоскость угла атаки.

При таком выборе вертикальной плоскости в ней расположен вектор $\vec{R}$, а вектор $\vec{M}$ ориентирован по нормали к плоскости. Следовательно, движение тела в поточной системе координат будет определяться лобовым сопротивлением X_a , подъемной силой Y_a и моментом тангажа M_{za} или соответственно аэродинамическими коэффициентами $c_{xa} = X_a/(q_\infty S_{\text{мид}})$, $c_{ya} = Y_a/(q_\infty S_{\text{мид}})$, $m_{za} = M_z/(q_\infty S_{\text{мид}} x_T)$, а в связанной системе координат — продольной силой X , нормальной силой Y и продольным моментом M_z или соответственно аэродинамическими коэффициентами c_x , c_y и m_z .

Коэффициенты лобового сопротивления c_{xa} и подъемной силы c_{ya} связаны с коэффициентами c_x , c_y следующим образом ($\beta = 0$): в поточной системе координат

$$c_{xa} = c_x \cos \alpha + c_y \sin \alpha; \quad c_{ya} = c_y \cos \alpha - c_x \sin \alpha,$$

в скоростной системе координат

$$c_{xa} = c_x \cos \alpha - c_y \sin \alpha; \quad c_{ya} = c_y \cos \alpha + c_x \sin \alpha.$$

Аэродинамический расчет удобнее вести в связанной системе координат, поэтому в дальнейшем будем рассматривать коэффициенты c_x и c_y . Коэффициент момента тангажа определяется выбором точки, относительно которой рассчитывают момент. Чтобы не связывать значение момента с положением центра тяжести, которое в полете может изменяться, будем вести расчет относительно носка тела вращения. В отдельных случаях, например при колебательном движении тела вращения в полете, момент тангажа и его коэффициент целесообразнее определять относительно центра тяжести.

Представим коэффициент продольной силы в виде суммы трех составляющих, обусловленных действием давления на боковую поверхность тела и за донным срезом, а также поверхностным трением соответственно:

$$c_x = c_{xp} + c_{x\text{дон}} + c_{xf}.$$

Для их нахождения необходимо знать распределение по поверхности тела нормального давления и касательного напряжения. Рассмотрим более общий и сравнительно простой случай определения составляющих осевой силы и соответствующих коэффициентов по известному распределению нормального давления и касательного напряжения. Пусть при данном угле атаки α и заданных параметрах набегающего потока (скорость V_∞ , статическое давление p_∞ , плотность ρ_∞) известны распределение давления по боковой поверхности тела вращения и давление за донным срезом. Найдём общие выражения для коэффициентов c_{xp} и $c_{x\text{дон}}$, если задана геометрическая форма тела, в частности уравнение его образующей $r = f(x)$.

Выражение для составляющей $c_{x\text{дон}}$ находим из условия, что продольная сила от избыточного давления $(p_{\text{дон}} - p_\infty)$ за донным срезом площадью $S_{\text{дон}}$ равна $(p_{\text{дон}} - p_\infty)S_{\text{дон}}$. Вместе с тем $(p_{\text{дон}} - p_\infty)S_{\text{дон}} = c_{x\text{дон}}q_\infty S_{\text{мид}}$. Следовательно, коэффициент

$$c_{x\text{дон}} = \bar{p}_{\text{дон}} \bar{S}_{\text{дон}},$$

где $\bar{p}_{\text{дон}} = (p_{\text{дон}} - p_\infty)/q_\infty$ — коэффициент донного давления; $\bar{S}_{\text{дон}} = S_{\text{дон}}/S_{\text{мид}}$ — безразмерная площадь донного среза.

Для определения выражения для составляющей c_{xp} выделим на рис. 9.1 элемент поверхности шириной dx на расстоянии x от носка ЛА. На участок этого элемента площадью $r dy dl$ действует сила от избыточного давления, равная $(p - p_\infty)r dy dl$. Элементарную длину dl образующей находим из соотношения $dx = dl \cos \beta$, где β — угол между осью ЛА и касательной к образующей в данной точке.

Составляющая продольной силы от давления, действующей на выделенный элементарный участок, будет $dX_p = (p - p_\infty)r dy dl \sin \beta$. Имея в виду, что $dx = dl \cos \beta$, и учитывая также симметричный характер распределения давления по обе стороны от нулевой меридиональной плоскости, получаем

$$X_p = 2 \int_0^{x_T} r \operatorname{tg} \beta dx \int_0^\pi (p - p_\infty) dy,$$

где x_T — расстояние до донного среза (длина тела вращения).

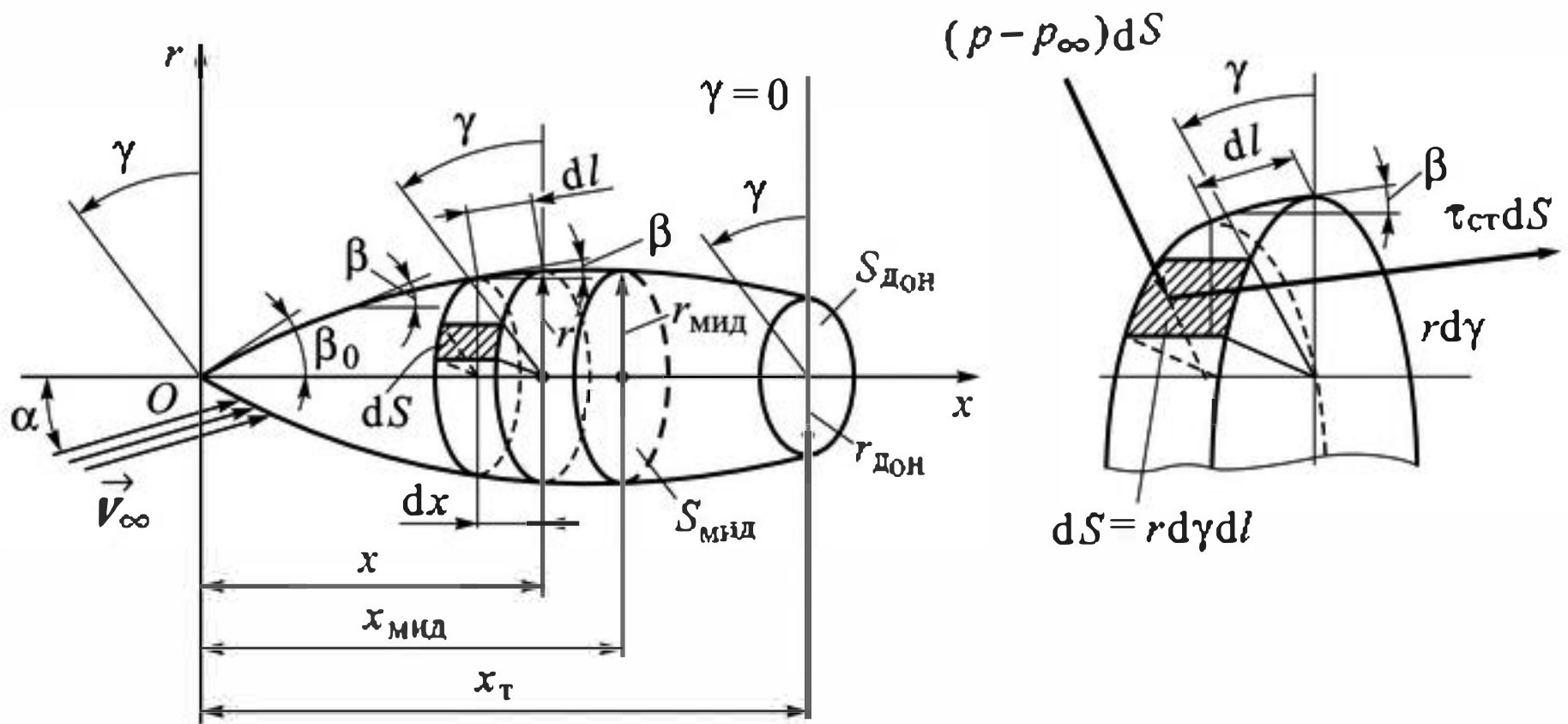


Рис. 9.1. Схема тела вращения для определения аэродинамических коэффициентов

Поскольку

$$X_p = c_{xp} q_\infty S_{\text{мид}},$$

а площадь наибольшего сечения тела $S_{\text{мид}} = \pi r_{\text{мид}}^2$, находим

$$c_{xp} = \frac{4\lambda_T}{\pi} \int_0^1 \bar{r} \operatorname{tg} \beta d\bar{x} \int_0^\pi \bar{p} d\gamma, \quad (9.1)$$

где $\bar{r} = r/r_{\text{мид}}$; $\bar{x} = x/x_T$; $\lambda_T = x_T/(2r_{\text{мид}})$ — удлинение; $\bar{p} = (p - p_\infty)/q_\infty$ — коэффициент давления, распределение которого считается известной функцией переменных $x(r)$, γ .

В случае нулевого угла атаки выражение (9.1) упрощается:

$$c_{xp} = 4\lambda_T \int_0^1 \bar{p} \bar{r} \operatorname{tg} \beta d\bar{x}, \quad (9.2)$$

причем распределение коэффициента давления зависит только от одной переменной (x или r).

Пусть известно распределение касательного напряжения $\tau_{\text{ст}}$ по поверхности ЛА, т. е. величина $\tau_{\text{ст}}$ как функция переменных $x(r)$, γ . Определим коэффициент c_{xf} продольной силы от трения. Вначале найдем составляющую продольной силы от трения, действующей на элементарную площадку $dS = r dy dl$ (см. рис. 9.1):

$$dX_f = \tau_{\text{ст}} dS \cos \beta = \tau_{\text{ст}} r \cos \beta dl/d\gamma.$$

Поскольку $dx = dl \cos \beta$, составляющая продольной силы от трения,

действующей на боковую поверхность $S_{\text{бок}}$, определяется выражением

$$X_f = \iint_{S_{\text{бок}}} \tau_{\text{ст}} \cos \beta dS = 2 \int_0^{x_T} r dx \int_0^{\pi} \tau_{\text{ст}} d\gamma.$$

Введем местный коэффициент трения, определяемый из условия

$$c_{fx} = \tau_{\text{ст}} / q_{\infty}.$$

Тогда для коэффициента c_{xf} продольной силы получаем выражение

$$c_{xf} = \frac{X_f}{q_{\infty} S_{\text{мид}}} = \frac{1}{S_{\text{мид}}} \iint_{S_{\text{бок}}} c_{fx} \cos \beta dS = \frac{4\lambda_T}{\pi} \int_0^1 \bar{r} d\bar{x} \int_0^{\pi} c_{fx} d\gamma.$$

При симметричном обтекании коэффициент c_{xf} является функцией только переменной x .

Нормальная сила, как и продольная, зависит от распределения по поверхности ЛА нормального давления и касательного напряжения. Представим коэффициент нормальной силы c_y в виде суммы двух составляющих, обусловленных действием давления и поверхностного трения соответственно:

$$c_y = c_{yp} + c_{yf}.$$

Получим зависимость, определяющую коэффициент c_{yp} при известном распределении давления. На рис. 9.1 видно, что элементарная сила $dY_p = -(p - p_{\infty}) r d\gamma dl \cos \gamma \cos \beta$. Поскольку $dl / \cos \beta = dx$, то с учетом симметричности распределения давления составляющая нормальной силы от давления

$$Y_p = -2 \int_0^{x_T} r dx \int_0^{\pi} (p - p_{\infty}) \cos \gamma d\gamma,$$

а ее коэффициент

$$c_{yp} = \frac{Y_p}{q_{\infty} S_{\text{мид}}} = -\frac{4\lambda_T}{\pi} \int_0^1 \bar{r} d\bar{x} \int_0^{\pi} \bar{p} \cos \gamma d\gamma. \quad (9.3)$$

При симметричном обтекании $c_{yp} = 0$, поскольку распределение давления в этом случае подчиняется свойству круговой симметрии, а следовательно, не зависит от угла γ .

Влияние вязкости на значение силы Y , как показывают исследования, будет существенным при больших удлинениях тел, причем оно возрастает с увеличением угла атаки и скорости.

Коэффициент c_{yf} нормальной силы можно определить, если известно распределение касательного напряжения τ_{ct} по поверхности обтекаемого тела. На рис. 9.1 видно, что на элементарную площадку действует сила

$$dY_f = \tau_{ct} \sin \beta \cos \gamma dS = \tau_{ct} r \sin \beta \cos \gamma dl d\gamma.$$

Тогда

$$Y_f = \iint_{S_{бок}} \tau_{ct} \sin \beta \cos \gamma dS = 2 \int_0^{x_T} r \operatorname{tg} \beta dx \int_0^\pi \tau_{ct} \cos \gamma d\gamma.$$

Следовательно, коэффициент нормальной силы от трения

$$c_{yf} = \frac{1}{q_\infty S_{мид}} \iint_{S_{бок}} \tau_{ct} \sin \beta \cos \gamma dS = \frac{4\lambda_T}{\pi} \int_0^1 \bar{r} \operatorname{tg} \beta d\bar{x} \int_0^\pi c_{fx} \cos \gamma d\gamma.$$

В случае нулевого угла атаки местный коэффициент трения c_{fx} не зависит от переменной γ , а значит, $c_{yf} = 0$.

Коэффициент момента тангажа m_z определяется теми же факторами, что и коэффициент нормальной силы, поэтому можно записать

$$m_z = m_{zp} + m_{zf},$$

где m_{zp} , m_{zf} — составляющие, обусловленные действием нормального давления и вязкостью соответственно. Кроме того, коэффициент m_z зависит от точки приведения момента.

Найдем общее выражение для коэффициента m_z , имея в виду, что в качестве точки приведения выбран носок ЛА. Составляющая момента от давления, действующего на расположенную на расстоянии x от точки приведения элементарную площадку (см. рис. 9.1), будет определяться выражением

$$\begin{aligned} dM_{zp} &= -x dY_p + r \cos \gamma dX_p = \\ &= x(p - p_\infty) r \cos \beta \cos \gamma dl d\gamma + r^2 (p - p_\infty) \sin \beta \cos \gamma dl d\gamma. \end{aligned}$$

Учитывая симметричность распределения давления, после интегрирования имеем

$$M_{zp} = 2 \int_0^{x_T} x r dx \int_0^\pi (p - p_\infty) \cos \gamma d\gamma + 2 \int_0^{x_T} r^2 \operatorname{tg} \beta dx \int_0^\pi (p - p_\infty) \cos \gamma d\gamma, \quad (9.4)$$

откуда

$$m_{zp} = \frac{M_{zp}}{q_\infty S_{мид} x_T} = \frac{4\lambda_T}{\pi} \int_0^1 \bar{r} \bar{x} d\bar{x} \int_0^\pi \bar{p} \cos \gamma d\gamma + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \bar{r}^2 \operatorname{tg} \beta d\bar{x} \int_0^\pi \bar{p} \cos \gamma d\gamma. \quad (9.5)$$

Если тело (ЛА) тонкое, то вторыми членами в уравнениях (9.4) и (9.5) можно пренебречь.

Вычислим составляющую коэффициента момента тангажа от вязкости. Поскольку

$$\begin{aligned} dM_f &= -x dY_f + r \cos \gamma dX_f = -x \tau_{ct} \sin \beta \cos \gamma dS + r \tau_{ct} \cos \beta \cos \gamma dS = \\ &= -x \tau_{ct} r \sin \beta \cos \gamma dl d\gamma + r^2 \tau_{ct} \cos \beta \cos \gamma dl d\gamma, \end{aligned}$$

после интегрирования имеем

$$M_{zf} = -2 \int_0^{x_T} x r \operatorname{tg} \beta dx \int_0^\pi \tau_{ct} \cos \gamma d\gamma + 2 \int_0^{x_T} r^2 dx \int_0^\pi \tau_{ct} \cos \gamma d\gamma.$$

В соответствии с этим выражением составляющая коэффициента момента тангажа, рассчитанная по наибольшему сечению тела,

$$m_{zf} = -\frac{4\lambda_T}{\pi} \int_0^1 \bar{x} \bar{r} \operatorname{tg} \beta d\bar{x} \int_0^\pi c_{fx} \cos \gamma d\gamma + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \bar{r}^2 d\bar{x} \int_0^\pi c_{fx} \cos \gamma d\gamma.$$

9.2. Система уравнений при осесимметричном обтекании заостренного конуса

Задача об обтекании заостренного конуса — одна из наиболее важных в аэродинамике. Ее решение имеет большое практическое значение, поскольку позволяет рассчитывать аэродинамические характеристики ЛА или их элементов, имеющих коническую форму, и наряду с этим результаты такого решения используют для расчета сверхзвукового потока около заостренных тел вращения. Например, это решение дает начальную точку на кривой распределения параметров обтекания заостренного криволинейного тела. Кроме того, результаты симметричного обтекания конусов применяют для приближенного расчета распределения параметров газа по периферийной поверхности тел вращения (метод «местных конусов»); ими пользуются как сравнительными при исследовании аэродинамики затупленных конусов.

В теоретической аэродинамике наряду с точными разработаны приближенные решения, позволяющие упрощенно рассчитывать обтекание конуса. Некоторые из них относятся к тонким конусам, обтекаемым линеаризованным потоком или потоком с очень большими

ми числами Маха. Точное решение может быть, вообще говоря, применено к конусам с произвольными толщинами, причем обтекающие их потоки могут иметь любые скорости. Основное условие, которое должно при этом выполняться, связано с сохранением около обтекаемого тела конического потока — потока, параметры которого остаются постоянными вдоль прямых, проведенных из вершины обтекаемого невязким потоком конуса. Однако получаемые результаты также применяют при исследовании вязкого обтекания. «Невязкие» параметры, такие как давление, скорость, плотность, рассматривают в качестве параметров на внешней границе пограничного слоя, образующегося на конусе, и считают факторами, определяющими напряжение трения и идущие от газа к стенке тепловые потоки.

Пусть имеет место осесимметричное невязкое обтекание сверхзвуковым потоком конуса с углом β_k при вершине (рис. 9.2). Задача заключается в том, чтобы рассчитать параметры течения газа между этим конусом и возникающим перед ним скачком уплотнения, имеющим вид конической поверхности. При этом необходимо также определить угол наклона $\theta_{ск}$ прямолинейной образующей конического скачка. Запишем систему уравнений сохранения применительно к такому случаю обтекания, когда газ за скачком под влиянием высоких температур претерпевает физико-химические

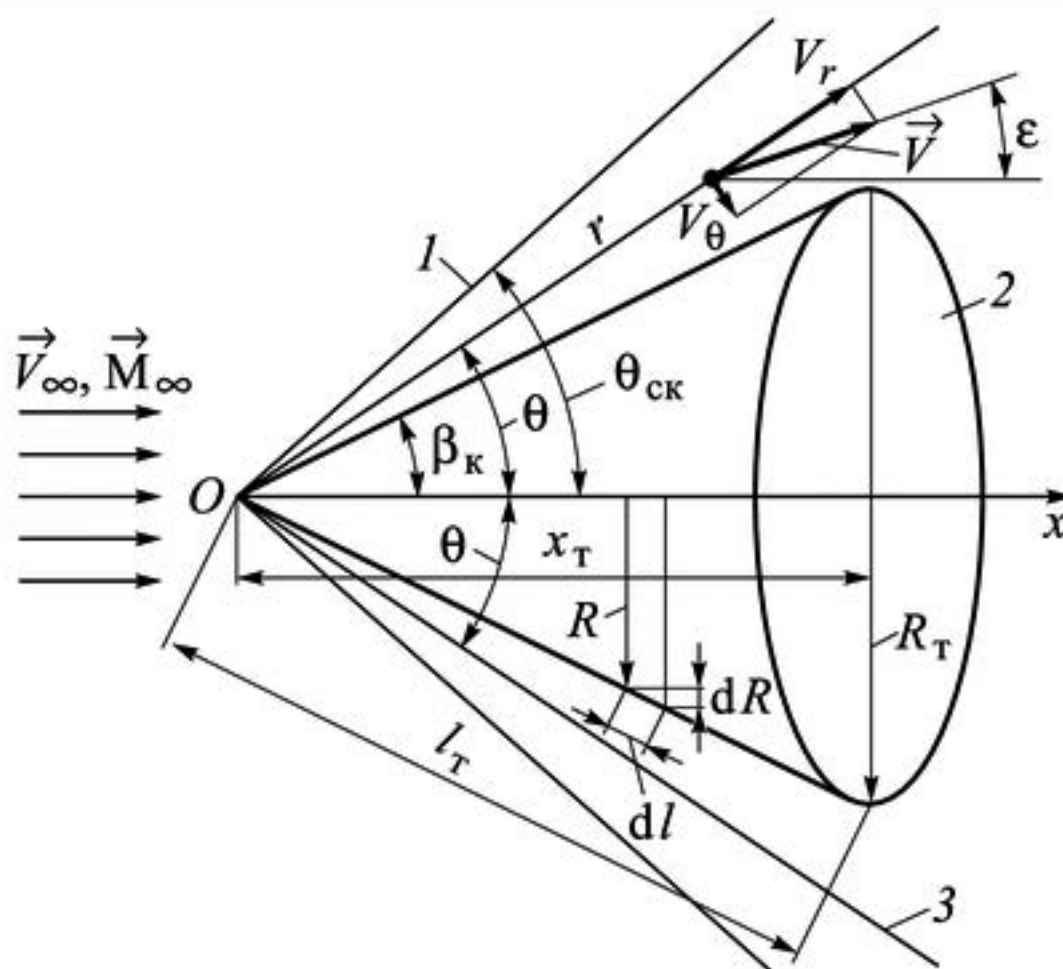


Рис. 9.2. Схема осесимметричного обтекания заостренного конуса:
1 — скачок уплотнения; 2 — обтекаемый конус; 3 — промежуточная коническая поверхность

превращения. При этом будем считать, что в возмущенной области устанавливается термодинамическое равновесие. Отыскиваемое решение для конуса должно соответствовать осесимметричному коническому полю возмущенного потока, в котором параметры газа сохраняются постоянными вдоль прямых, проведенных из вершины и являющихся образующими промежуточных конических поверхностей (в том числе конических поверхностей с углами $\theta = \theta_{\text{ск}}$, $\theta = \beta_{\text{к}}$). На основании указанного свойства любая частная производная от параметров газа по сферической координате r (см. рис. 9.2) равна нулю.

Уравнения неразрывности и количества движения, в которых приняты равными нулю массовые силы и члены, характеризующие вязкость, в декартовой системе координат имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{dV_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{dV_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Переходя к сферической системе координат, для осесимметричного течения получаем (см. рис. 9.2)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho V_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} = 0;$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r};$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} = -\frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

В соответствии с числом определяемых параметров к этим уравнениям надо добавить уравнения состояния, записанные для газа в произвольной точке потока и непосредственно за скачком уплотнения:

$$\frac{p}{p_{\text{ск}}} = \frac{\mu_{\text{ск}}}{\mu} \frac{\rho}{\rho_{\text{ск}}} \frac{T}{T_{\text{ск}}}. \quad (9.6)$$

В рассматриваемую систему также должны войти уравнение энергии

$$i + V^2/2 = i_{\text{ск}} + V_{\text{ск}}^2/2 \quad (9.7)$$

и общие зависимости для расчета энтальпии, энтропии, молярной массы и скорости звука:

$$i = f_1(p, T); \quad S = f_2(p, T); \quad \mu = f_3(p, T); \quad a = f_4(p, T). \quad (9.8)$$

В таком виде система может быть использована для исследования обтекания конуса диссоциирующим газом. В частном случае отсутствия диссоциации эта система упрощается. Если принять, что в возмущенной области между скачком уплотнения и поверхностью конуса удельные теплоемкости и молярная масса газа остаются такими же, как в невозмущенной части потока, а скорость звука и энтальпия зависят только от температуры, то можно записать

$$i = c_p T = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}; \quad S = c_V \ln \frac{p}{\rho^k} + C_1; \quad \mu = \text{const}; \quad a^2 = kRT = k \frac{p}{\rho}.$$

Принимая частные производные по t и r для конического стационарного течения равными нулю, имеем

$$2\rho V_r + V_\theta \frac{d\rho}{d\theta} + \rho \frac{dV_\theta}{d\theta} + \rho V_\theta \text{ctg}\theta = 0; \quad (9.9)$$

$$\frac{dV_r}{d\theta} = V_\theta;$$

$$\rho V_\theta \frac{dV_\theta}{d\theta} + \rho V_r V_\theta + \frac{dp}{d\theta} = 0. \quad (9.10)$$

Рассмотрим обтекание конуса при постоянных теплоемкостях. Этот случай имеет важное практическое значение и результаты его расчета также могут быть использованы для приближенной оценки некоторых параметров обтекания (например, давления), в случае, когда обтекание сопровождается значительным разогревом, вызывающим физико-химические превращения и, как следствие, изменение удельных теплоемкостей.

Расчет обтекания конуса может быть сведен к кинематической задаче, связанной с определением поля скоростей в возмущенном потоке около конуса. Воспользуемся выражением для скорости звука $a^2 = dp/d\rho$, записанном в виде

$$\frac{dp}{d\theta} = a^2 \frac{d\rho}{d\theta}. \quad (9.11)$$

Подставив производные $dp/d\theta$ из выражения (9.11) и $d\rho/d\theta$ из уравнения (9.9) в уравнение (9.10), с учетом соотношений для скоростей V и a получаем

$$\frac{dV_r}{d\theta} = V_\theta; \quad (9.12)$$

$$\frac{dV_\theta}{d\theta} = \frac{-V_\theta \operatorname{ctg} \theta + V_r (V_\theta^2/a^2 - 2)}{1 - V_\theta^2/a^2}; \quad (9.13)$$

$$V(\theta) = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}; \quad (9.14)$$

$$a^2 = \frac{k+1}{2} a^{*2} - \frac{k-1}{2} (V_r^2 + V_\theta^2), \quad (9.15)$$

где $a^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_0}$ — критическая скорость звука; T_0 — температура торможения в набегающем потоке.

Граничные условия для численного интегрирования дифференциальных уравнений (9.12) и (9.13) определяются условиями течения газа на поверхности конуса, а также непосредственно за скачком уплотнения.

Граничное условие обтекания конуса заключается в том, что на его поверхности нормальная составляющая скорости равна нулю, т. е.

$$V_\theta = 0 \text{ при } \theta = \beta_k.$$

Граничные условия на скачке уплотнения позволяют определить составляющие скорости $V_{\text{ск}r}$ и $V_{\text{ск}\theta}$ за скачком уплотнения. Первую из них можно получить, приравняв касательные составляющие скорости до и после скачка (рис. 9.3). В соответствии с этим

$$V_{r\infty} = V_{\text{ск}r} = V_\infty \cos \theta_{\text{ск}}. \quad (9.16)$$

Нормальная составляющая скорости $V_{\text{ск}\theta} = -V_{\text{ск}r} \operatorname{tg}(\theta_{\text{ск}} - \epsilon_{\text{ск}})$. (Знак «—» указывает на то, что направление скорости $V_{\text{ск}\theta}$ противоположно внешней нормали к конической поверхности, принятой за положительное направление при выводе дифференциальных уравнений.) Используя уравнение для наклона фронта скачка уплотнения

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_{\text{ск}}}{\operatorname{tg}(\theta_{\text{ск}} - \epsilon_{\text{ск}})} = \frac{(k+1)M_\infty^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}{2 + (k-1)M_\infty^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}},$$

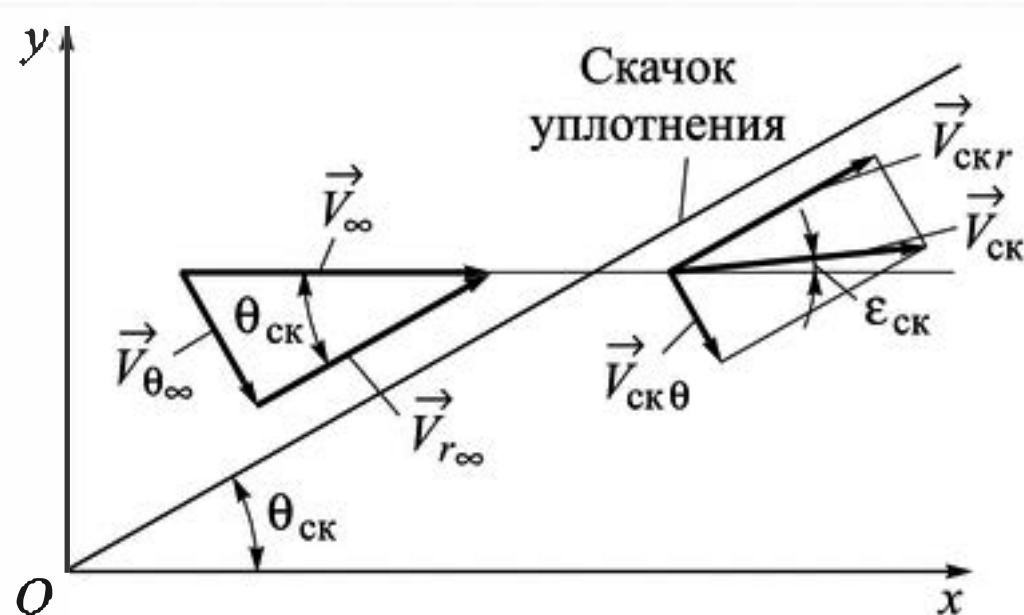


Рис. 9.3. Треугольники скоростей перед скачком уплотнения и непосредственно за ним в случае сверхзвукового обтекания конуса

окончательно получаем

$$V_{ск\theta} = -V_{скr} \frac{2 + (k-1)M_{\infty}^2 \sin^2 \theta_{ск}}{(k+1)M_{\infty}^2 \sin^2 \theta_{ск}} \operatorname{tg} \theta_{ск}. \quad (9.17)$$

Систему уравнений (9.12)–(9.15) интегрируем каким-либо численным методом. При этом заданными считаем угол скачка $\theta_{ск}$ и скорость набегающего потока V_{∞} . В процессе решения уравнений определяем поле скоростей и находим соответствующий угол β_k конуса и скорость V_k на нем.

Алгоритм решения задачи следующий. При известной скорости набегающего потока V_{∞} задаем угол $\theta_{ск}$ скачка уплотнения. По формулам (9.16) и (9.17) находим радиальную $V_{r1} = V_{скr}$ и нормальную $V_{\theta1} = V_{ск\theta}$ составляющие скорости за скачком. Затем переходим к промежуточной конической поверхности с наклоном образующей $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta_1$, где $\theta_1 = \theta_{ск}$, $\Delta\theta_1 < 0$ (рис. 9.4). Радиаль-

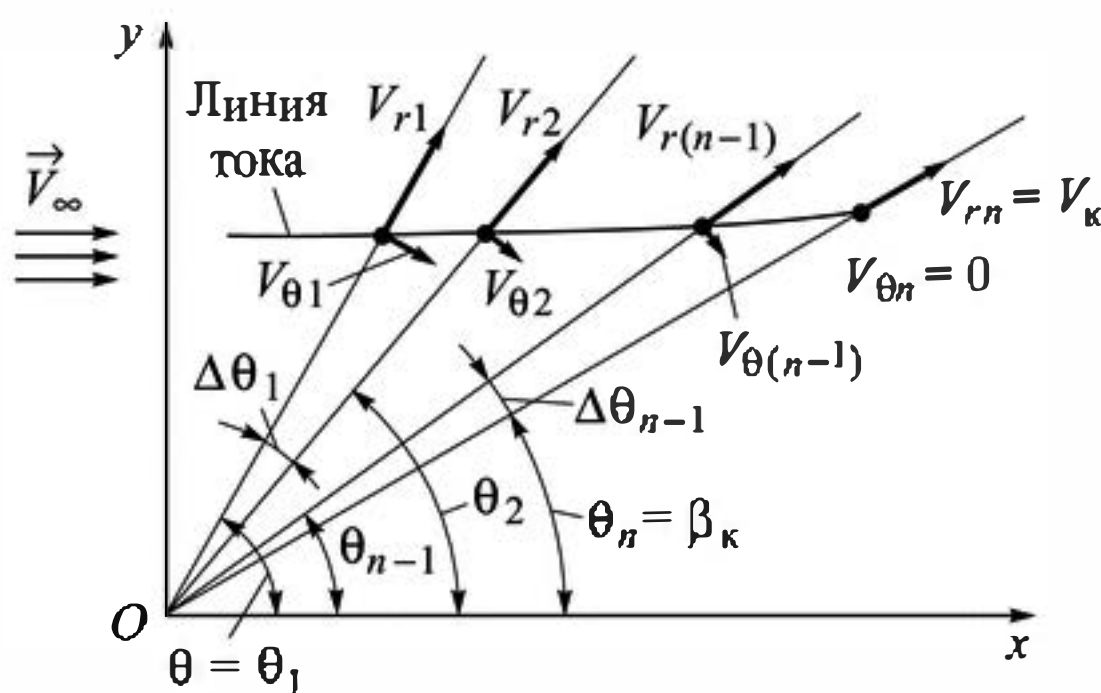


Рис. 9.4. Схема к расчету поля скоростей

ную и нормальную составляющие скорости на этой поверхности вычисляем с учетом выражения (9.15) по уравнениям (9.12) и (9.13), представленным в конечных разностях:

$$V_{r2} = V_{r1} + V_{\theta1} \Delta\theta_1; \quad (9.18)$$

$$V_{\theta2} = V_{\theta1} + \left(\frac{dV_{\theta}}{d\theta} \right)_1 \Delta\theta_1. \quad (9.19)$$

Далее рассчитываем параметры течения на следующей промежуточной конической поверхности с углом наклона образующей $\theta_3 = \theta_2 + \Delta\theta_2$ до тех пор, пока нормальная составляющая скорости не обратится в нуль.

В процессе вычислений, как правило, не удастся в первом же приближении выбрать такой малый угол $\Delta\theta_{n-1}$, чтобы удовлетворялось равенство $V_{\theta n} = 0$. Обычно выбранному углу $\Delta\theta_{n-1}$ соответствует вычисленная скорость $V_{\theta n}$, меняющая свой знак на противоположный по сравнению со знаком скорости $V_{\theta(n-1)}$ на соседней поверхности с углом наклона образующей θ_{n-1} . Это указывает на то, что скорости $V_{\theta n} = 0$ соответствует приращение угла $\Delta\theta_{n-1}$, меньше выбранного. Для определения этого приращения надо провести интерполирование, воспользовавшись равенством

$$\Delta\theta_{n-1} = -V_{\theta(n-1)} \left(\frac{dV_{\theta}}{d\theta} \right)_{n-1}^{-1}.$$

Решая приведенные выше уравнения, находим поле скоростей, соответствующий угол β конуса и скорость на нем:

$$\beta = \theta_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\theta_i;$$

$$V_k = V_{r(n-1)} + V_{\theta(n-1)} \Delta\theta_{n-1}.$$

Если полученный угол β не совпадает с заданным углом β_k , то выбираем новое значение угла $\theta_{ск}$ и повторяем вычисления.

Аналогичные расчеты можно проводить в обратном порядке, задав условия на конусе, причем надо знать угол β_k и скорость на конусе V_k . Когда будут выполняться граничные условия (9.16) и (9.17), численное интегрирование заканчиваем. В результате находим параметры газа в возмущенной области, а также угол наклона скачка, возникающего перед заданным конусом, и скорость (число

Маха) набегающего потока. При несовпадении этой скорости с заданной V_∞ корректируем значение скорости V_k на конусе и повторяем вычисления.

По окончательному значению вычисленной скорости V_k с помощью газодинамических функций можно определить давление, плотность, температуру и другие параметры газа на поверхности конуса.

Температура T_0 в потоке при отсутствии физико-химических превращений остается неизменной, поэтому на поверхности конуса ее и число Маха можно определить так:

$$T_k = T_0 \left(1 - \frac{V_k^2}{V_{\max}^2} \right);$$

$$M_k = V_k / a_k = V_k / \sqrt{kRT_k},$$

где $V_{\max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0}$.

Зная угол наклона $\theta_{\text{ск}}$, полное давление за коническим скачком уплотнения можно вычислить по формуле

$$p'_0 = p_\infty \left[\frac{k+1}{2kM_\infty^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}} - (k-1)} \right]^{\frac{1}{k-1}} \times \\ \times \left\{ \frac{(k+1)M_\infty^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}} \left[(k-1)M_\infty^2 + 2 \right]}{2 \left[2 + (k-1)M_\infty^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}} \right]} \right\}^{\frac{k}{k-1}}.$$

Далее по газодинамической функции определяем давление на поверхности конуса

$$p_k = p'_0 \pi(M_k, k) = p'_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_k^2 \right)^{-\frac{k}{k-1}},$$

а по уравнению состояния — плотность

$$\rho_k = p_k / (RT_k).$$

На основе результатов расчета поля течения между скачком уплотнения и конусом можно объяснить физическую картину обтекания конуса сверхзвуковым газовым потоком. На ударной волне происходит скачкообразное возрастание давления и уменьшение ско-

рости, а в области между скачком и конусом вдоль линий тока — постепенное изобарическое сжатие газа. Линии тока, как видно на рис. 9.4, постепенно искривляются и приближаются к поверхности конуса, принимая направление образующей. При этом скорость уменьшается, а давление возрастает. При малых углах β_k и больших числах M_∞ изобарическое сжатие за ударной волной происходит при сверхзвуковых скоростях. При угле $\beta_k > \beta_{k\text{кр}}$ скачок

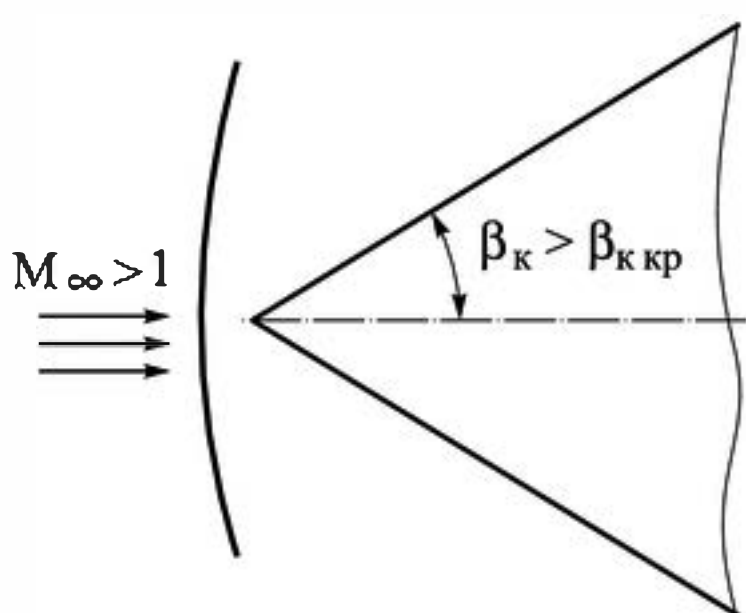


Рис. 9.5. Форма скачка уплотнения при сверхкритическом обтекании конуса

отходит от острия и искривляется (рис. 9.5). Такое обтекание называют сверхкритическим. Нетрудно заметить, что критический угол является функцией только скорости набегающего потока (числа M_∞).

Экспериментальные исследования показывают, что коническое течение, соответствующее постоянной скорости на конусе, сохраняется до тех пор, пока на его поверхности не достигается скорость звука.

Для расчета обтекания конуса с учетом изменения состава воздуха можно использовать систему уравнений (9.6)–(9.15), дополненную зависимостями для скорости звука, энтальпии, энтропии и молярной массы, которые учитывают влияние физико-химических превращений. При этом общая схема численного интегрирования дифференциальных уравнений такая же, как и в случае постоянных теплоемкостей.

Расчет начинают с определения за косым скачком уплотнения параметров газа по заданному углу $\theta_{ск}$ и известным значениям p_∞ , ρ_∞ , T_∞ . Радиальную составляющую $V_{скr}$ скорости определяют по формуле (9.16), нормальную составляющую $V_{ск\theta}$ — с использованием соотношений теории скачка уплотнения, учитывающих влияние диссоциации и ионизации.

Примем в первом приближении

$$\Delta \bar{V}_n^{(1)} = \frac{V_{n1} - V_{n2}}{V_{n1}} = \frac{V_{\theta\infty} - V_{ск\theta}}{V_{\theta\infty}} = 1,$$

т. е. рассмотрим условие полного торможения за скачком, при котором $V_{ск\theta} \cong 0$. Полагая $\Delta \bar{V}_n = 1$ и учитывая, что $M_{n1} = M_\infty \sin \theta_{ск}$, находим соответствующее этим условиям давление

$$p_{\text{ск}}^{(1)} = (1 + k M_{n1}^2 \Delta \bar{V}_n) p_{\infty} = (1 + k M_{\infty}^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}) p_{\infty}.$$

Затем вычисляем энтальпию за скачком уплотнения в первом приближении:

$$i_{\text{ск}}^{(1)} = i_{\infty} + V_{\infty}^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}} / 2.$$

По значениям $p_{\text{ск}}^{(1)}$ и $i_{\text{ск}}^{(1)}$, используя таблицы и графики термодинамических функций воздуха, определяем температуру $T_{\text{ск}}^{(1)}$ и молярную массу воздуха $\mu_{\text{ск}}^{(1)}$ и соответствующую плотность

$$\rho_{\text{ск}}^{(1)} = \frac{p_{\text{ск}}^{(1)} \mu_{\text{ск}}^{(1)} T_{\infty}}{p_{\infty} \mu_{\infty} T_{\text{ск}}^{(1)}} \rho_{\infty},$$

где для недиссоциированного воздуха можно принять $\mu_{\infty} = 29$ г/(К·моль).

Затем во втором приближении находим изменение безразмерной скорости и нормальную составляющую скорости за скачком:

$$\Delta \bar{V}_n^{(2)} = 1 - (\rho_{\infty} / \rho_{\text{ск}}^{(1)}); \quad V_{\text{ск}\theta}^{(2)} = V_{n2}^{(2)} = V_{\theta\infty} (1 - \Delta \bar{V}_n^{(2)}).$$

По приращению скорости уточняем давление

$$p_{\text{ск}}^{(2)} = p_{\infty} (1 + k M_{\infty}^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}} \Delta \bar{V}_n^{(2)})$$

и энтальпию

$$i_{\text{ск}}^{(2)} = i_{\infty} + \frac{V_{\infty}^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}{2} - \frac{(V_{\text{ск}\theta}^{(2)})^2}{2}.$$

Используя графики термодинамических функций, рассчитываем $T_{\text{ск}}^{(2)}$, $\mu_{\text{ск}}^{(2)}$, $\rho_{\text{ск}}^{(2)}$, а затем уточняем значение $\Delta \bar{V}_n$:

$$\Delta \bar{V}_n^{(3)} = 1 - \rho_{\infty} / \rho_{\text{ск}}^{(2)}.$$

Если значение $\Delta \bar{V}_n^{(3)}$ мало отличается от значения $\Delta \bar{V}_n^{(2)}$, то расчет $\Delta \bar{V}_n$ заканчиваем и определяем нормальную составляющую скорости после скачка:

$$V_{\text{ск}\theta} = V_{\theta 1} = V_{\theta\infty} (1 - \Delta \bar{V}_n^{(3)}) = V_{\infty} \sin \theta_{\text{ск}} (1 - \Delta \bar{V}_n^{(3)}).$$

Для заданного шага интегрирования вычисляем, согласно уравнениям (9.18) и (9.19), на соседней конической поверхности V_{r2} и $V_{\theta 2}$. Причем производную $(dV_{\theta}/d\theta)_1$ определяем по формуле (9.13), в которой скорость звука за скачком $a_{\text{ск}} = a_1$ находим из таблиц или

графиков термодинамических функций по известным значениям $p_{\text{ск}}^{(2)}$ и $i_{\text{ск}}^{(2)}$ (или $p_{\text{ск}}^{(2)}$ и $T_{\text{ск}}^{(2)}$).

На выбранной конической поверхности, согласно уравнению (9.7), определяем энтальпию

$$i_2 = i_{\text{ск}}^{(2)} + \left[(V_{r1}^2 + V_{\theta1}^2) - (V_{r2}^2 + V_{\theta2}^2) \right] / 2.$$

Для дальнейших расчетов следует воспользоваться значением энтропии газа, полагая, что возмущенный поток за скачком уплотнения во всей области изоэнтропический и, следовательно, энтропия всюду будет такой, как в потоке газа непосредственно за скачком. Эту энтропию $S = S_{\text{ск}} = \text{const}$ определяем из таблиц термодинамических функций по значениям $p_{\text{ск}}^{(2)}$ и $i_{\text{ск}}^{(2)}$ (или $p_{\text{ск}}^{(2)}$ и $T_{\text{ск}}^{(2)}$).

Зная энтальпию i_2 и энтропию $S_{\text{ск}}$, из таблиц или графиков находим скорость звука a_2 , а по формулам (9.18), (9.19) вычисляем соответственно составляющие скорости V_{r3} и $V_{\theta3}$ на конической поверхности с углом

$$\theta_3 = \theta_{\text{ск}} - \sum_{i=1}^2 \Delta|\theta_i|.$$

Аналогично можно рассчитать параметры потока для соседних промежуточных конических поверхностей. Вычисления заканчиваем тогда, когда на одной из таких поверхностей нормальная составляющая скорости окажется равной нулю. Соответствующий ей угол будет углом обтекаемого конуса, а скорость — скоростью $V_{\text{к}}$ на этом конусе. При этом энтальпия

$$i_{\text{к}} = i_{\text{ск}} + (V_{\text{ск}}^2 - V_{\text{к}}^2) / 2,$$

где $V_{\text{ск}}^2 = V_{\theta1}^2 + V_{r1}^2$; $i_{\text{ск}} = i_{\text{ск}}^{(2)}$.

Зная энтальпию $i_{\text{к}}$ и энтропию $S = S_{\text{ск}}$, можно из таблиц, графиков или по известным формулам вычислить на конусе температуру $T_{\text{к}}$, давление $p_{\text{к}}$ и плотность $\rho_{\text{к}}$.

Все параметры на конусе, обтекаемом потоком с заданным числом M_{∞} , зависят не только от температуры, но и от давления p_{∞} набегающего потока, которое определяет степень диссоциации и ионизации.

Обработка результатов расчета параметров обтекания конуса, а также экспериментальных данных позволила получить приближенные соотношения для коэффициента давления $\bar{p}_{\text{к}}$, безразмерной плотности $\bar{\rho} = \rho_{\infty} / \rho_{\text{к}}$ и угла наклона скачка $\theta_{\text{ск}}$:

$$\bar{p}_k = \frac{2 \sin^2 \beta_k}{(1 - 0,25 \bar{\rho}) \cos^2 (\theta_{ск} - \beta_k)};$$

$$\bar{\rho} = 2 \left[1 - \frac{2 \operatorname{tg} \beta_k / \operatorname{tg} \theta_{ск}}{1 + \sqrt{1 - 2 \bar{\rho} \operatorname{tg}^2 \beta_k / (1 - 0,5 \bar{\rho})^2}} \right];$$

$$10^2 M_\infty \sin \theta_{ск} = 39 - \lg p_\infty + 0,5(196 + \lg p_\infty) M_\infty \sin \beta_k,$$

где p_∞ — атмосферное давление, Па.

Эти соотношения дают удовлетворительные результаты при $\bar{\rho} \leq 0,1$, причем для расчета не требуются таблицы термодинамических функций. По известным значениям M_∞ , β_k , p_∞ определяют угол $\theta_{ск}$, а затем безразмерную плотность $\bar{\rho}$ и коэффициент давления $\bar{p}_k$.

Для вычисления температуры T_k необходимо воспользоваться уравнением состояния. Записав одно из них для течения газа на конусе, а другое — для набегающего потока, находим

$$T_k = \left(\frac{k M_\infty^2}{2} \bar{p}_k + 1 \right) \frac{\bar{\rho} T_\infty}{\mu_\infty} \mu_k.$$

Некоторые результаты расчета параметров обтекания конуса потоками с большими скоростями приведены на рис. 9.6.

Характер изменения давления, температуры и плотности на конусе при наличии диссоциации и ионизации тот же, что и непосредственно за скачком уплотнения. При этом давление, как и за скачком, мало зависит от диссоциации и ионизации. Оно определяется в основном условиями набегающего потока, причем максимальное избыточное давление на конусе не может превысить некоторого предельного давления, получаемого при условии $V_{n2} = 0$, $V_{n1} = V_1 = V_\infty$ (прямой скачок уплотнения) и равного $p_2 - p_1 = \rho_\infty V_\infty^2$. В то же время температура и плотность изменяются существенно, причем тем больше, чем толще конус.

Если углы конуса невелики, то даже при значительных скоростях обтекания эти параметры на конусе испытывают небольшое влияние физико-химических превращений. Расчеты показывают, что при $M_\infty = 24$ плотность почти не меняется с высотой вплоть до угла $\beta_k = 15^\circ$, а при $M_\infty = 10$ (см. рис. 9.6, б) — до $\beta_k = 35^\circ$. Таким образом, интервал изменения угла β_k , которому соответствуют сравнительно невысокие температуры и пренебрежимо малая степень

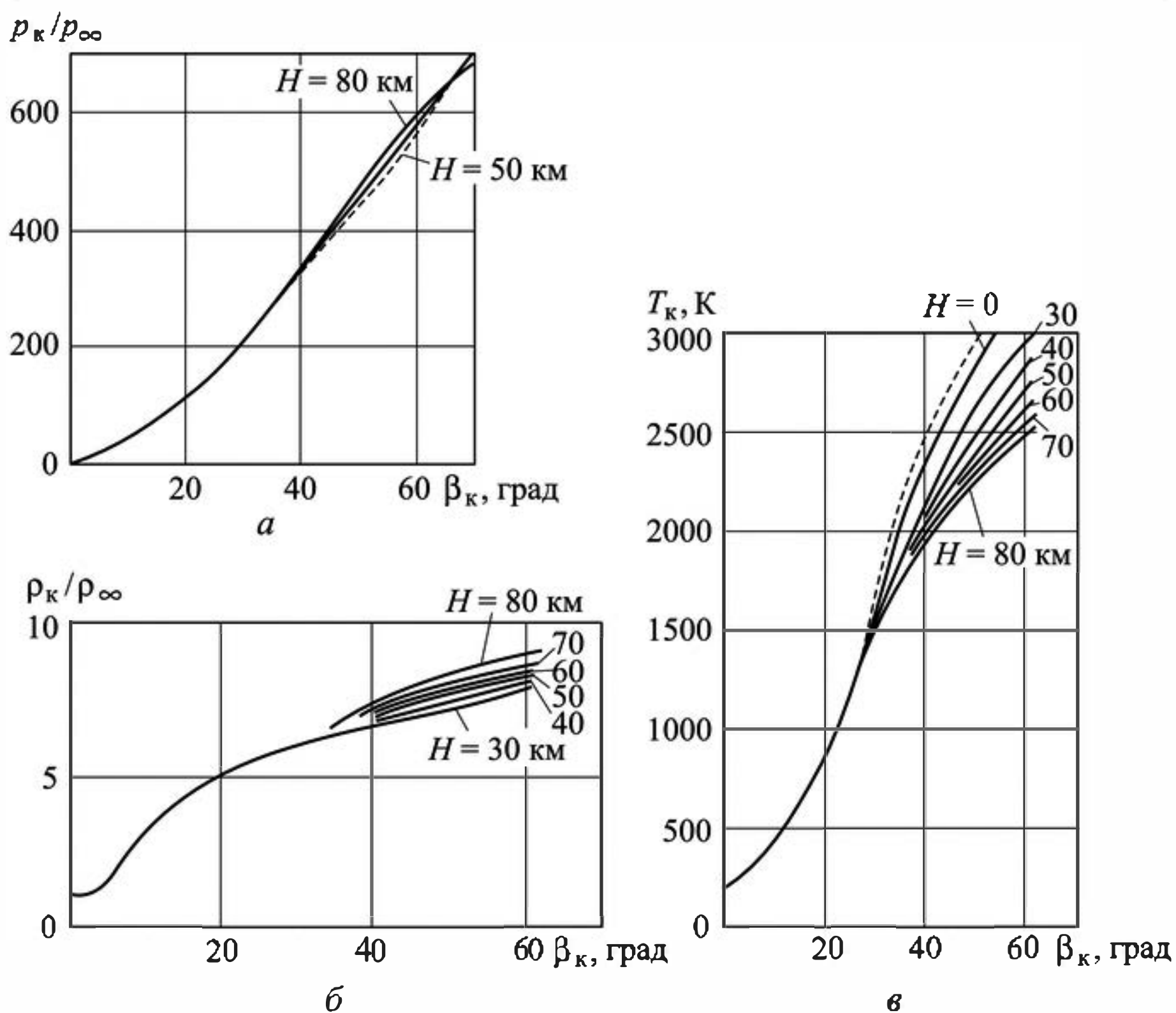


Рис. 9.6. Изменение давления (*a*), плотности (*б*) и температуры (*в*) на конусе, обтекаемом диссоциирующим потоком, при $T_\infty = 220$ К:
a – $M_\infty = 23,5$; *б*, *в* – $M_\infty = 10$ (штриховая линия – без учета диссоциации)

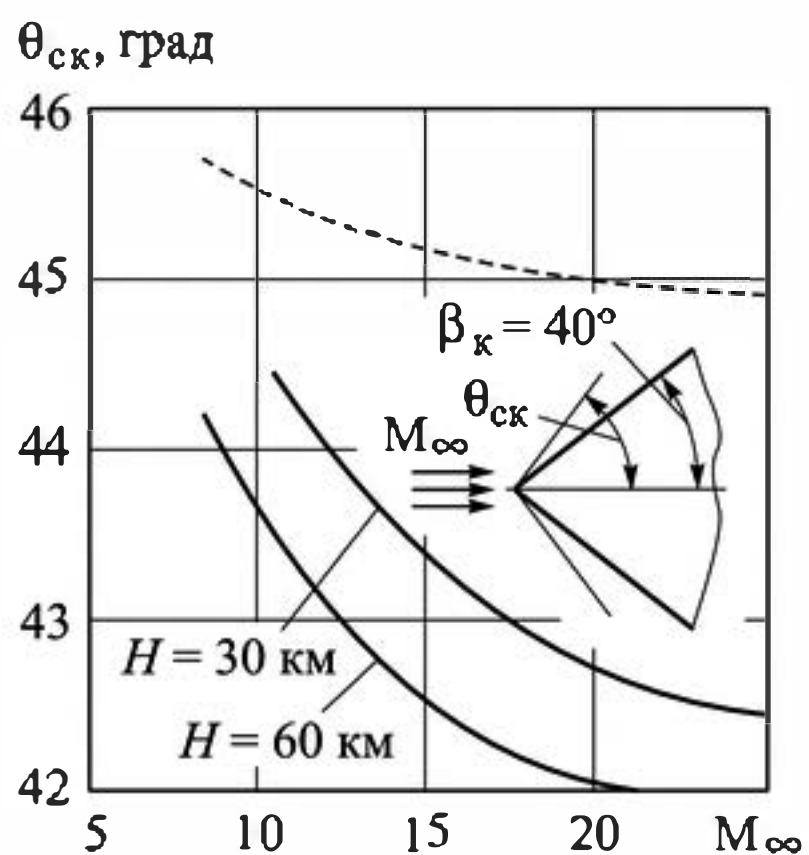


Рис. 9.7. Изменение угла наклона скачка уплотнения перед конусом, расположенным в сверхзвуковом потоке (сплошная кривая – реальный газ, штриховая – совершенный)

диссоциации, расширяется с уменьшением скорости. Такое же явление наблюдается с уменьшением высоты полета.

Утолщение конуса вызывает более интенсивный нагрев и, как следствие, диссоциацию и ионизацию, которые могут существенно влиять на параметры обтекания (рис. 9.7). Угол $\theta_{ск}$ уменьшается по сравнению с тем, что наблюдалось при постоянных теплоемкостях (штриховая линия, $k = 1,4$). Это вызывает снижение интенсивности скачка уплотнения и увеличение скорости за ним, что влечет за собой рост скорости на обтекаемом конусе. Повышение скорости потока и уменьшение скорости звука приводят к увеличению числа M_k на конической поверхности, расположенной в диссоциированном газе.

Повышение местного числа Маха должно вызвать снижение давления. Вместе с тем оно становится больше в результате увеличения количества частиц газа при диссоциации и, следовательно, большего числа их соударений. Суммарный эффект проявляется в незначительном возрастании давления (см. рис. 9.6, а).

9.3. Метод местных конусов. Приближенные методы расчета обтекания заостренного конуса

Расчет обтекания конуса под углом атаки

При обтекании конуса сверхзвуковым потоком под углом атаки параметры течения на поверхности конуса при изменении угла γ меняются. При углах атаки $\alpha > \beta_k$ происходит общий срыв потока на подветренной поверхности конуса (рис. 9.8), поэтому расчет аэродинамических характеристик возможен только с использованием теории отрывных течений.

При углах атаки, не превышающих угол β_k , коническое течение сохраняется, однако ось поверхностей, на которых параметры потока постоянны, не совпадает с осью обтекаемого конуса. Существует несколько возможных методов расчета.

При малых углах атаки давление p на текущей образующей конуса определяется зависимостью

$$p = p|_{\alpha=0} + \alpha F(M_\infty, \beta_k, \theta, \gamma) + \dots$$

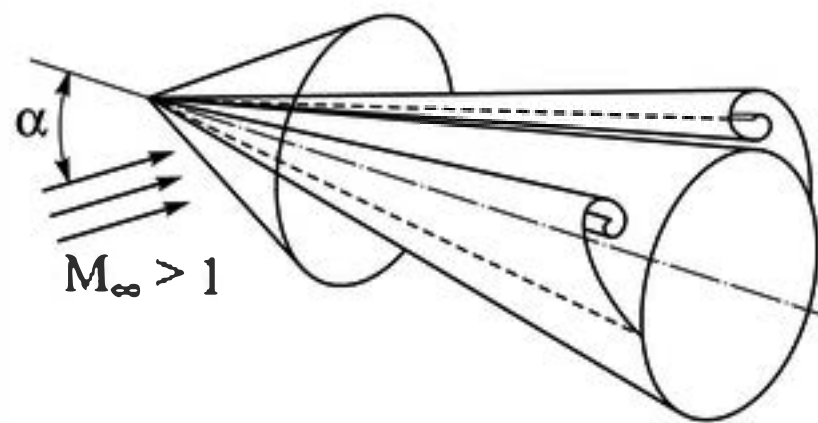


Рис. 9.8. Схема отрывного обтекания подветренной поверхности конуса

Практика показывает, что функция F здесь может быть представлена законом косинуса: $F = -\eta \cos \gamma$, где $\eta = \eta(M_\infty, \beta_k, \theta)$. Поскольку нас интересуют параметры течения на конусе, то окончательно получаем

$$p_k = p_k|_{\alpha=0} - \alpha \eta_k(M_\infty, \beta_k) \cos \gamma.$$

Значения функции $\eta_k(M_\infty, \beta_k)$ можно взять из таблиц, приведенных в специальной литературе*.

При больших числах M_∞ для вычисления аэродинамических характеристик часто применяют метод местных конусов (касательных поверхностей). В качестве касательной поверхности при этом выбирают местный касательный конус, построенный около образующей, на которой ищут параметры течения. Ось такого «фиктивного» конуса совпадает с направлением скорости набегающего потока, а угол при вершине β_{kf} равен углу между вектором $\vec{V}_\infty$ и этой образующей. По значению этого угла рассчитывают параметры симметричного обтекания «фиктивного» конуса, значения которых принимают равными их значениям на образующей, принадлежащей реальной конической поверхности. Вычислив коэффициент давления как функцию угла γ при заданных M_∞ , α и β_k , находят аэродинамические коэффициенты конуса.

Для расчета угла местного конуса можно рекомендовать одну из следующих зависимостей:

$$\sin \beta_{kf} = \sin \beta_k \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta_k \cos \gamma,$$

$$\beta_{kf} = \beta_k - \alpha \cos \gamma - 0,5 \alpha^2 \operatorname{ctg} \beta_k \sin^2 \gamma.$$

Расчет обтекания заостренного тела вращения

Метод местных конусов широко используют и при расчете обтекания заостренного тела вращения с произвольной образующей (как при осесимметричном течении, так и при течении с $\alpha \neq 0$). При этом получаемые результаты близки к данным численного расчета, полученным, например, методом характеристик.

При расчете по методу местных конусов используют две гипотезы — одинаковых давлений и одинаковых скоростей. В первом случае равными принимают давления в некоторой точке A поверхности заостренного тела вращения, расположенного в осесимметричном потоке с числом $M_\infty > 1$, и на касательной конической по-

* См., например: Краснов Н.Ф. Аэродинамика тел вращения. М.: Машиностроение, 1964.

верхности в этой точке, обтекаемой потоком с тем же числом M_∞ (рис. 9.9), во втором — местные скорости в этих же точках. Таким образом, метод местных конусов позволяет исследовать обтекание тела вращения с криволинейной образующей, используя данные о сверхзвуковом потоке около более простой по форме конической поверхности. Давление, вычисленное по гипотезе равных давлений, обозначим p_p , а по гипотезе равных скоростей — p_v .

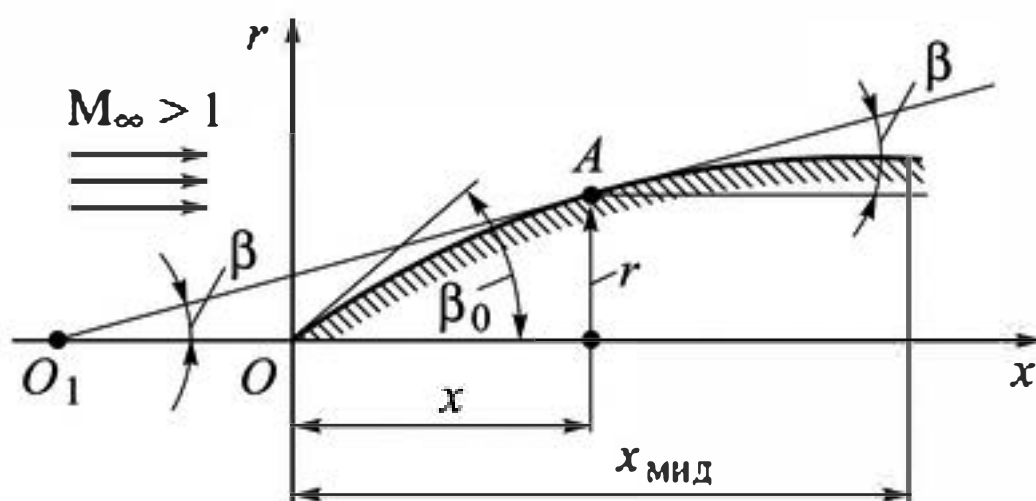


Рис. 9.9. Схема к расчету обтекания методом местных конусов

Скорости, определенные на основе обеих гипотез, равны, отличие заключается в вычислении потерь полного давления за коническим скачком уплотнения, а следовательно, и в расчете местного давления. В гипотезе равных давлений коэффициент потерь σ полного давления рассчитывают по углу β наклона местной касательной конической поверхности, а в гипотезе равных скоростей — по углу β_0 наклона касательной у острия тела.

Воспользовавшись соотношением (4.33) для изэнтропического течения за скачком, можно записать

$$p_v = p'_{0v} \left(1 - V_A^2 / V_{\max}^2 \right)^{k/(k-1)}; \quad (9.20)$$

$$p_p = p'_{0p} \left(1 - V_A^2 / V_{\max}^2 \right)^{k/(k-1)}, \quad (9.21)$$

где p'_{0v} — давление торможения, определяемое для заданного M_∞ по углу β_0 ; p'_{0p} — то же, но по углу β .

Расчет на основе гипотезы одинаковых скоростей можно упростить, если воспользоваться результатами, полученными с применением гипотезы одинаковых давлений. Поскольку скорости, вычисленные на основе обеих гипотез, равны, то, разделив выражение (9.20) на (9.21), получим

$$p_v = \frac{p'_{0v}}{p'_{0p}} p_p = \frac{\sigma_0}{\sigma} p_p = \bar{\sigma} p_p,$$

где $\sigma_0 = \frac{p'_{0V}}{p_{0\infty}} = \sigma(M_\infty, k, \theta_{ск0}(\beta_0))$ — коэффициент, определяемый по давлению торможения p'_{0V} ; $p_{0\infty}$ — давление торможения набегающего потока; $\sigma = \frac{p'_{0p}}{p_{0\infty}} = \sigma(M_\infty, k, \theta_{ск}(\beta))$ — коэффициент, рассчитанный по давлению торможения p'_{0p} .

Переходя к коэффициенту давления, имеем

$$\bar{p}_V = \frac{p_V - p_\infty}{0,5k p_\infty M_\infty^2} = \frac{\bar{\sigma}(p_p - p_\infty)}{0,5k p_\infty M_\infty^2} + \frac{(\bar{\sigma} - 1)p_\infty}{0,5k p_\infty M_\infty^2},$$

или

$$\bar{p}_V = \bar{p}_p \bar{\sigma} + \frac{2}{k M_\infty^2} (\bar{\sigma} - 1). \quad (9.22)$$

Таким образом, чтобы рассчитать коэффициент давления $\bar{p}_V$ на местной касательной поверхности, сначала надо найти коэффициент $\bar{p}_p$ и величину $\bar{\sigma} = \sigma_0/\sigma$. У острия тела $\bar{\sigma} = 1$, а для тех точек, где $\beta < \beta_0$, значение $\bar{\sigma} < 1$. Поэтому коэффициент $\bar{p}_V$, как следует из выражения (9.22), в некотором сечении имеет нулевое значение, а далее, вниз по потоку, становится отрицательным.

Возможность получения отрицательных значений коэффициента давления принципиально отличает расчет, основанный на гипотезе одинаковых скоростей, от расчета, основанного на гипотезе одинаковых давлений, согласно которому коэффициент давления $\bar{p}_p \geq 0$.

Экспериментальные данные и некоторые теоретические исследования показывают, что при $M_\infty \leq 3$ в удаленных от носка участках возникают четко выраженные области разрежения. Это подтверждает, что при соответствующих скоростях гипотеза одинаковых скоростей более реальна, чем гипотеза одинаковых давлений. При $M_\infty > 3$ почти вся поверхность с положительным наклоном находится под положительным избыточным давлением, что не согласуется с гипотезой одинаковых скоростей, когда в результате расчета получаются неправдоподобно малые значения давления.

Рассматриваемый метод применим для расчета потока в тех точках, где наклон касательной поверхности к вектору $\vec{V}_\infty$ составляет угол $\beta > 0$. При этом в точке, где $\beta = 0$, давление p_p принимают равным p_∞ и, следовательно, коэффициент давления в этой точке $\bar{p}_p = 0$. Таким образом, для площадок с отрицательным наклоном

($\beta < 0$) метод местных конусов не применим. Однако для приближенной оценки коэффициента давления в затененной зоне его можно использовать, предполагая при этом, что коэффициент давления на поверхности с углом $\beta < 0$ по знаку отрицательный, но по абсолютной величине равен коэффициенту давления на поверхности с углом $\beta > 0$.

Приближенные методы расчета заостренного конуса.

Параметры подобия

Наряду с точными методами расчета параметров течения на поверхности конуса в аэродинамике используют соотношения, позволяющие с достаточной для инженерной практики точностью вычислить аэродинамические коэффициенты конуса.

При дозвуковых скоростях коэффициент сопротивления конического тела в основном определяется трением и донным давлением, поэтому составляющей коэффициента лобового сопротивления от давления на конической поверхности можно пренебречь.

Существенный рост коэффициента лобового сопротивления наблюдается при $M_\infty > 0,8$ (рис. 9.10).

При околосвуковых скоростях

$$c_{xa} = \frac{k M_\infty^2 + 1}{(k + 1) M_\infty^2} (c_{xap})_{M_\infty=1} + \frac{2(M_\infty^2 - 1)}{(k + 1) M_\infty^2},$$

где $(c_{xap})_{M_\infty=1}$ можно определить с помощью экспериментального графика, приведенного на рис. 9.11.

При сверхзвуковых скоростях и осесимметричном обтекании коэффициент продольной силы от давления (коэффициент волнового сопротивления) конической головной части и угол наклона конического скачка уплотнения для воздуха ($k = 1,4$) можно определить по следующим приближенным зависимостям:

$$c_{xpк} = \bar{p}_к = (0,0016 + 0,002/M_\infty^2) \beta_k^{1,7}; \quad (9.23)$$

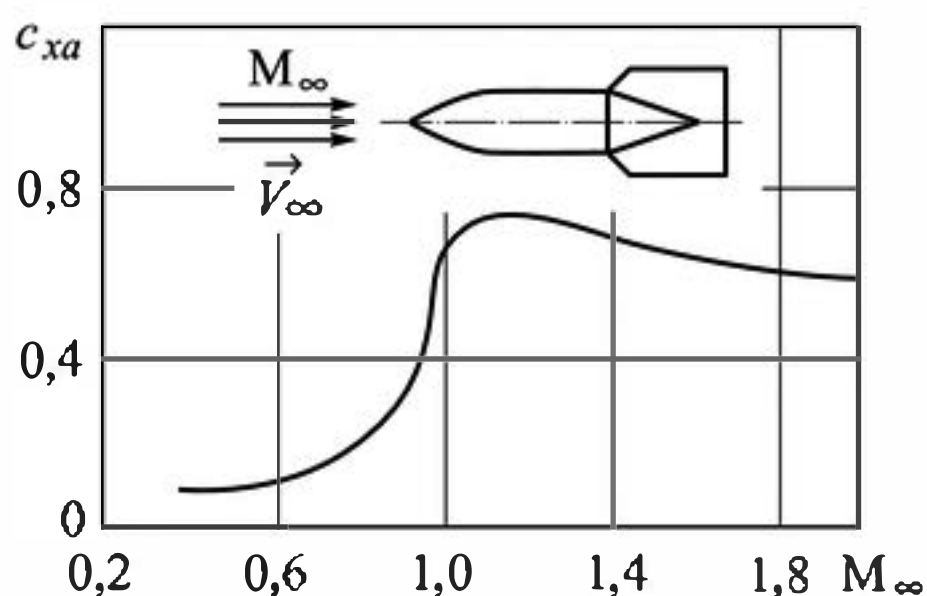


Рис. 9.10. Изменение коэффициента лобового сопротивления тела вращения при до- и сверхзвуковых скоростях и $\alpha = 0$

$$\sin\theta_{\text{ск}} = \left(1 - \cos\beta_k + \sqrt{1 + \frac{k+1}{2} M_\infty^2 \sin^2\beta_k} \right) / M_\infty.$$

Отметим, что в эти соотношения значение угла β_k следует подставлять в градусах, они обеспечивают хорошую точность при $\beta_k \leq 50^\circ$ и $M_\infty \leq 7 \dots 8$. Нижний предел M_∞ здесь соответствует критическому значению $\beta_{k \text{ кр}}$, при котором скачок уплотнения остается еще присоединенным, а погрешность расчета не превышает 5 %.

При $2,5^\circ \leq \beta_k \leq 30^\circ$ более точный результат дает использование следующей формулы:

При $2,5^\circ \leq \beta_k \leq 30^\circ$ более точный результат дает использование следующей формулы:

$$c_{\text{хрк}} = \bar{p}_k = 2e^x \sin^2\beta_k, \quad (9.24)$$

где $x = 0,18145 - 2,0923y + 9,092y^2 + 6,876y^3 - 62,225y^4 - 97,1y^5$; $y = 0,1 \times \lg(\alpha' \sin\beta_k)$; $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

В сверхзвуковом диапазоне чисел M_∞ производную $c_{\text{ук}}^\alpha$ заостренной конической головной части можно

определить по следующей формуле:

$$c_{\text{ук}}^\alpha = 0,035 \cos^2\beta_k = 0,035 \frac{4\lambda_T^2}{1 + 4\lambda_T^2} \quad (9.25)$$

или использовать более точное выражение, полученное в результате обработки данных решения Копала:

$$c_{\text{ук}}^\alpha = \left[0,035 - 0,009 \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{\lambda_T} \exp\left(-2 \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{\lambda_T}\right) \right] \frac{4\lambda_T^2}{1 + 4\lambda_T^2},$$

где $\lambda_T = x_T / d_{\text{мид}}$.

Коэффициент центра давления конуса, отсчитываемый от носка, можно рассчитать по следующему соотношению:

$$\bar{x}_{\text{цд}} = -\frac{m_{\text{зк}}}{c_{\text{ук}}} = \frac{2}{3} (1 + \text{tg}^2\beta_k), \quad (9.26)$$

где $\bar{x}_{\text{цд}} = x_{\text{д}} / x_T$.

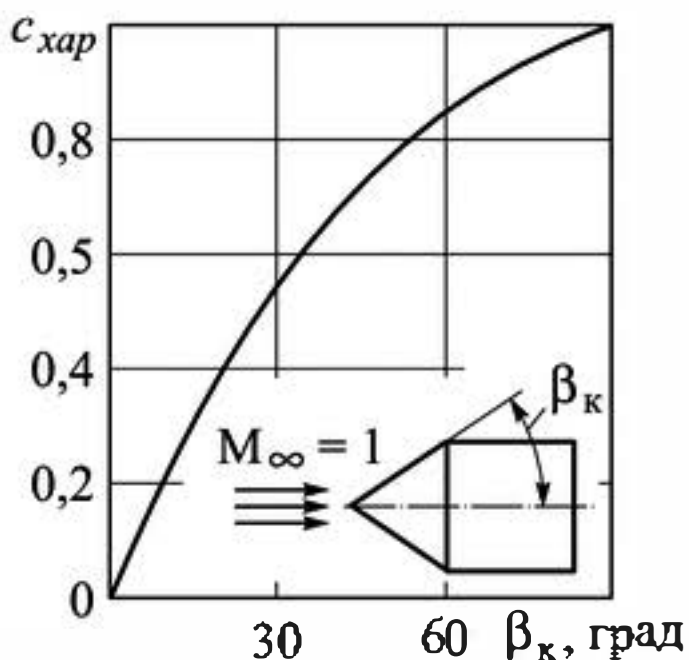


Рис. 9.11. Зависимость коэффициента лобового сопротивления конических головных частей от угла β_k при $M_\infty = 1$

Для тонких конусов можно принять $\operatorname{tg}^2 \beta_k \cong \beta_k^2$.

Согласно выражению (9.26), с утолщением конуса (увеличением угла β_k) центр давления сдвигается к кормовой части, поскольку возрастают силы от давления, действующие на этом участке, и значительней становится стабилизирующий момент от этих сил, способствующий такому сдвигу центра давления.

Расчет аэродинамических характеристик конуса в гиперзвуковом потоке также имеет ряд особенностей.

С увеличением числа Маха набегающего потока M_∞ угол конического скачка уплотнения $\theta_{ск}$ уменьшается. При гиперзвуковых скоростях скачок уплотнения достаточно близко приближается к поверхности тонкого конуса, поэтому разность углов $\Delta\theta = \theta_{ск} - \beta_k$ становится малым параметром, что делает возможным применение упрощенных методов расчета. В частности, для составляющих скорости возмущенного потока на скачке уплотнения (при малой разности $\theta_{ск} - \beta_k$) можно привести следующие зависимости:

$$\bar{V}_{\alpha r} = \bar{V}_k \left[1 - (\theta_{ск} - \beta_k)^2 + \frac{1}{3} (\theta_{ск} - \beta_k)^3 \operatorname{ctg} \beta_k - \dots \right];$$

$$\bar{V}_{ск\theta} = \bar{V}_k \left[-2(\theta_{ск} - \beta_k) + (\theta_{ск} - \beta_k)^2 \operatorname{ctg} \beta_k - \dots \right],$$

где $\bar{V}_{\alpha r} = V_{\alpha r} / V_{\max}$; $\bar{V}_{ск\theta} = V_{ск\theta} / V_{\max}$; $\bar{V}_k = V_k / V_{\max}$; $V_{\max} = \sqrt{\frac{2kRT_0}{k-1}}$.

Поскольку на скачке уплотнения

$$V_{ск\theta} = -V_{скr} \frac{2 + (k-1)M_\infty^2 \sin^2 \theta_{ск}}{(k+1)M_\infty^2 \sin^2 \theta_{ск}} \operatorname{tg} \theta_{ск},$$

для угла наклона скачка уплотнения получаем

$$K_0 = \frac{k+1}{k+3} K_1 + \sqrt{\left(\frac{k+1}{k+3} \right)^2 K_1^2 + \frac{2}{k+3}}, \quad (9.27)$$

где $K_0 = M_\infty \theta_{ск}$; $K_1 = M_\infty \beta_k$.

Из выражения (9.27) следует, что при разных значениях угла β_k и числа M_∞ , но соблюдении постоянства параметра K_1 , значение K_0 у всех конусов одинаковое. Найденному углу наклона скачка при заданном числе M_∞ соответствует отношение давлений на конусе и в набегающем потоке:

$$\frac{p_k}{p_\infty} = \frac{2k}{k+1}(K_0^2 - 1) + (K_0 - K_1)^2 \frac{kK_0^2(k+1)}{2 + (k-1)K_0^2} + 1.$$

С помощью этой формулы нетрудно вычислить коэффициент давления на конусе

$$\bar{p}_k = \frac{2(p_k/p_\infty - 1)}{kM_\infty^2},$$

равный коэффициенту волнового сопротивления, а также функцию сопротивления

$$c_{xpk} M_\infty^2 = \bar{p}_k M_\infty^2 = \frac{4}{k+1}(K_0^2 - 1) + (K_0 - K_1)^2 \frac{2(k+1)K_0^2}{2 + (k-1)K_0^2}, \quad (9.28)$$

которая, согласно этой формуле, зависит лишь от параметра K_1 .

Таким образом, течения с большими числами M_∞ около конусов оказываются подобными

Результаты расчетов по формулам (9.27) и (9.28) получаются тем точнее, чем больше число M_∞ и, следовательно, ближе к поверхности тонкого конуса расположен скачок уплотнения. Те значения $c_{xpk} = \bar{p}_k$, которые соответствуют значениям параметра $K_1 \gg 1$, лучше согласуются с точной теорией и экспериментом.

В предельном случае, когда $M_\infty \rightarrow \infty$, формула (9.27) для угла наклона скачка уплотнения принимает вид

$$\theta_{ск} = [2(k+1)/(k+3)]\beta_k,$$

а выражение для коэффициента давления будет следующим:

$$\bar{p}_k = \left[2(k+1)(k+7)/(k+3)^2 \right] \beta_k^2.$$

Эту формулу можно распространить и на случай расчета коэффициента давления на конусе произвольной толщины (усовершенствованная формула Ньютона для конуса):

$$\bar{p}_k = \left[2(k+1)(k+7)/(k+3)^2 \right] \sin^2 \beta_k.$$

При гиперзвуковых скоростях можно рекомендовать упрощенный алгоритм численного расчета параметров течения на конусе. Экспериментально установлено, что значение производной $dV_\theta/d\theta$ при гиперзвуковых скоростях мало изменяется в расчетной области, т. е.

$$\frac{dV_{\theta}}{d\theta} = \left(\frac{dV_{\theta}}{d\theta} \right)_{\text{ск}} = \text{const.}$$

Производная $\frac{dV_r}{d\theta} = V_{\theta}$ изменяется в расчетной области от некоторого значения на скачке уплотнения до нуля на поверхности конуса, поэтому в случае малых размеров этой области ее осредняют:

$$\frac{dV_r}{d\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{dV_r}{d\theta} \right)_{\text{ск}} = \frac{1}{2} V_{\theta \text{ск}}.$$

Таким образом, алгоритм расчета выглядит следующим образом.

1. При заданном M_{∞} выбирают $\theta_{\text{ск}}$ и рассчитывают параметры $p_{\text{ск}}$, $\rho_{\text{ск}}$, $V_{\text{ск}}$ на скачке уплотнения, а также производные $\left(\frac{dV_{\theta}}{d\theta} \right)_{\text{ск}}$ и $\left(\frac{dV_r}{d\theta} \right)_{\text{ск}}$.

2. Определяют разность $\Delta\theta$. Поскольку

$$\left(\frac{dV_{\theta}}{d\theta} \right)_{\text{ск}} = \frac{V_{\theta \text{ск}} - V_{\theta \text{к}}}{\Delta\theta},$$

а $V_{\theta \text{к}} = 0$, то

$$\Delta\theta = V_{\theta \text{ск}} / \left(\frac{dV_{\theta}}{d\theta} \right)_{\text{ск}} \quad (\Delta\theta > 0).$$

3. Находят угол конуса

$$\beta_{\text{красч}} = \theta_{\text{ск}} - \Delta\theta.$$

4. Если значения вычисленного $\beta_{\text{красч}}$ и заданного $\beta_{\text{к}}$ угла конуса совпадают, то скорость на поверхности конуса определяют через значение производной $dV_r/d\theta$ на скачке уплотнения:

$$\frac{dV_r}{d\theta} = \frac{V_{r \text{ск}} - V_{r \text{к}}}{\Delta\theta};$$

$$V_{\text{к}} = V_{r \text{к}} = V_{r \text{ск}} - \frac{1}{2} \left(\frac{dV_r}{d\theta} \right)_{\text{ск}} \Delta\theta = V_{r \text{ск}} - \frac{1}{2} V_{\theta \text{ск}} \Delta\theta.$$

9.4. Расчет обтекания заостренного тела вращения с произвольной образующей

Расчет с использованием метода характеристик

Летательный аппарат (например, ракета, снаряд) или некоторые его конструктивные элементы могут иметь форму заостренного тела вращения. Рассмотрим расчет сверхзвукового обтекания заостренного тела вращения, расположенного в потоке газа под нулевым углом атаки. Форма тела вращения (рис. 9.12) задана уравнением образующей $r = f(x)$. Известны также параметры набегающего потока ($M_\infty, p_\infty, \rho_\infty, T_\infty$). Если толщина тела вращения такова, что оно вносит в обтекающий поток большие возмущения, то расчет этого потока может быть осуществлен численно, например методом сквозного счета или методом характеристик.

Рассмотрим особенности применения метода характеристик. Расчет обычно начинают с определения конического потока около острия, которое в малой окрестности носка можно заменить конусом (на рис. 9.12 его границей является точка K). В результате расчета на образующих $OD, OA, \dots$ промежуточных конических поверхностей (включая образующие конуса OK и скачка OS) находят

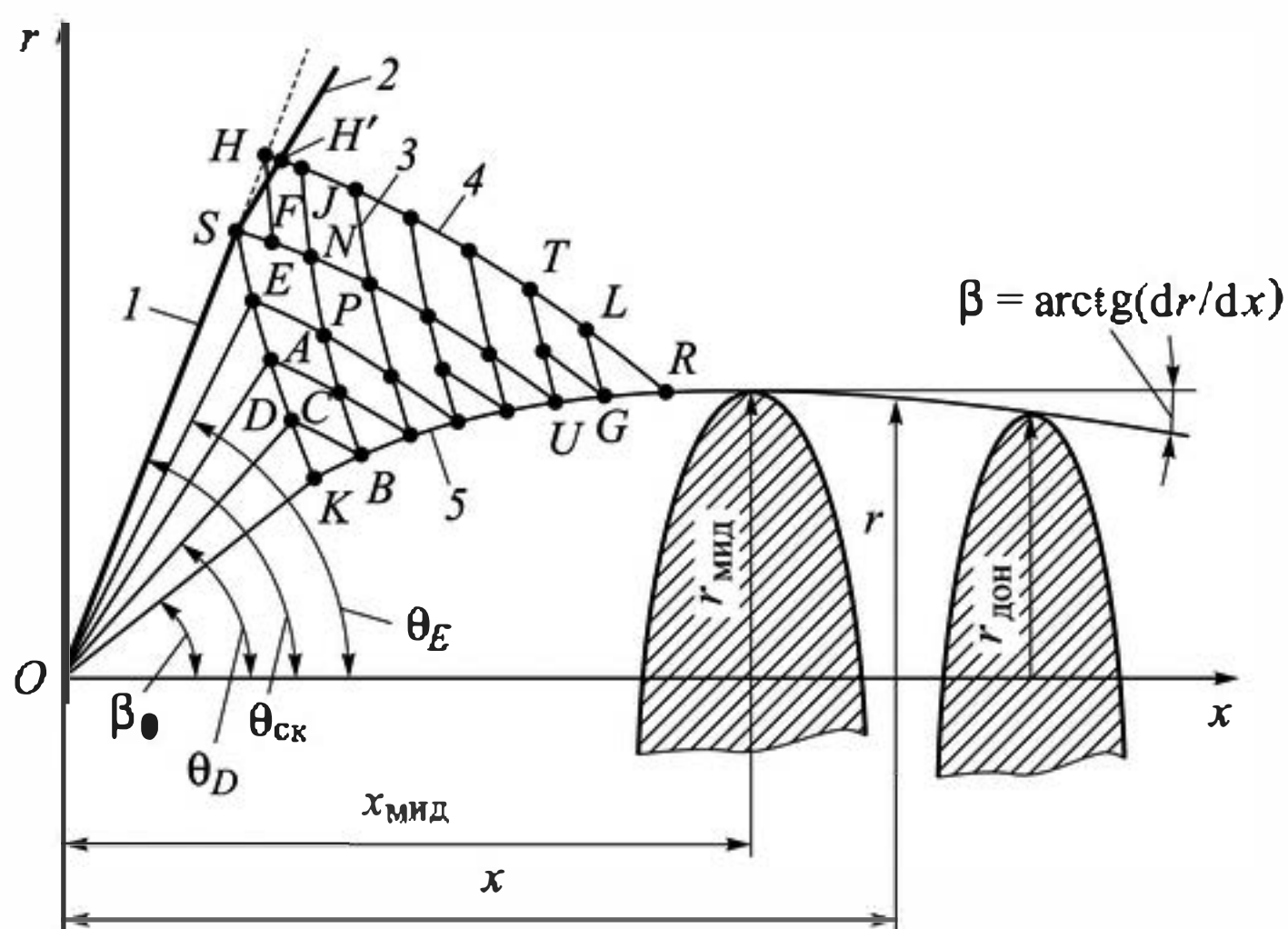


Рис. 9.12. Схема к расчету сверхзвукового обтекания тела вращения по методу характеристик:

1 – прямолинейный скачок; 2 – искривленный участок скачка; 3 – характеристика первого семейства; 4 – характеристика второго семейства; 5 – образующая тела вращения

скорости, а также углы ω , μ и β . При этом углы θ_D , θ_A , ... наклона образующих промежуточных конусов выбирают произвольно, но так, чтобы интервалы $\Delta\theta$ были достаточно малы и обеспечивали заданную точность рассчитываемых параметров.

Вычисления целесообразно сопровождать графическим построением сетки характеристик, как это показано на рис. 9.12. Вначале строят элемент KD характеристики первого семейства, проведя через точку K прямую под углом $\mu_K + \beta_K$, где $\beta_K = \beta_0$, к оси конуса до пересечения в точке D с соседней образующей промежуточной конической поверхности, имеющей угол θ_D . В результате графически определяют координаты x_D , r_D точки D .

Большую точность дает аналитическое определение этих координат. С этой целью записывают уравнения для элемента характеристики первого семейства и образующей:

$$r_K - r_D = (x_K - x_D) \operatorname{tg}(\mu_K + \beta_K);$$

$$r_D = x_D \operatorname{tg} \theta_D,$$

решая которые находят неизвестные x_D и r_D . Аналогично вычисляют координаты остальных точек характеристики KS первого семейства, имеющей вид ломаной линии, которая является границей конического потока. Причем координаты x_S , r_S точки S , лежащей на пересечении элемента характеристики первого семейства ES с образующей OS конического скачка уплотнения, находят в результате совместного решения следующих уравнений:

$$r_E - r_S = (x_E - x_S) \operatorname{tg}(\mu_E + \beta_E);$$

$$r_S = x_S \operatorname{tg} \theta_S.$$

После того как определены вид кривой характеристики KS , скорости, числа Маха, а также углы μ и β в точках этой характеристики, дальнейшее решение задачи сводится к нахождению поля скоростей (чисел Маха) в области между этой характеристикой и образующей обтекаемого тела. С этой целью применяют соответствующие соотношения для характеристик в физической плоскости (плоскости потока) и в плоскости годографа.

При выборе соотношений для характеристик в плоскости годографа необходимо учитывать, что в области потока, ограниченной прямолинейной образующей OS скачка уплотнения, характеристикой SU второго семейства (строят постепенно в ходе решения задачи) и образующей OU тела, течение будет безвихревым (изоэн-

тропическим). В соседней области, ограниченной той же характеристикой SU , участками криволинейного скачка SH и образующей UR тела, течение будет вихревым (неизоэнтропическим).

Для отыскания поля скоростей на изоэнтропическом участке течения проведем через каждую точку характеристики KS элементы характеристики второго семейства. Одна из них, проходящая через точку D , пересечет стенку в точке B , в которой и необходимо найти скорость. Координаты этой точки определяем из совместного решения уравнений для элемента характеристики второго семейства и образующей тела вращения:

$$r_D - r_B = (x_D - x_B) \operatorname{tg}(\beta_D - \mu_D);$$

$$r_B = f(x_B).$$

Решая эти уравнения, находим координаты r_B, x_B точки B . Угол β_B наклона касательной к образующей в точке B , совпадающий в силу безотрывного обтекания с углом наклона вектора скорости в этой точке, определяем из уравнения

$$\left(\frac{dr}{dx} \right)_B = \operatorname{tg} \beta_B = \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_B}.$$

Чтобы найти скорость в точке B , воспользуемся уравнением для характеристики второго семейства в плоскости годографа скорости. В конечных разностях для осесимметричного течения оно будет иметь вид

$$\Delta \omega_D + \Delta \beta_D - \frac{x_B - x_D}{r_D} m_D = 0,$$

где $m_D = \sin \beta_D \sin \mu_D / \cos(\beta_D - \mu_D)$.

Приращение $\Delta \beta_D = \beta_B - \beta_D$ представляет собой разность углов наклона векторов скоростей в точках B и D . При этом

$$\beta_B = r \operatorname{ctg} \left(\frac{dr}{dx} \right)_B.$$

Учитывая, что $\Delta \omega_D = \omega_B - \omega_D$, находим

$$\omega_B = \omega_D - (\beta_B - \beta_D) + \frac{x_B - x_D}{r_D} m_D,$$

где $\omega_{B(D)} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (M^2 - 1) - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}$.

Подставляя в эту формулу число M_D , определяем угол ω_D , затем, вычислив ω_B , число M_B и далее угол наклона линии Маха в точке B :

$$\mu_B = \arcsin \frac{1}{M_B}.$$

По известным числам M_K и M_B с помощью газодинамических функций рассчитываем остальные параметры течения в точках K и B :

$$p_{K(B)} = p'_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{K(B)}^2 \right)^{-k/(k-1)};$$

$$\frac{V_{K(B)}}{V_{\max}} = \left[1 - \left(\frac{p_{K(B)}}{p'_0} \right)^{(k-1)/k} \right]^{1/2};$$

$$T_{K(B)} = T_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{K(B)}^2 \right)^{-1};$$

$$\rho_{K(B)} = \frac{p_{K(B)}}{RT_{K(B)}},$$

где $p'_0 = p_0 \sigma_0$ — давление торможения за коническим скачком; p_0 — давление торможения до скачка; σ_0 — функция потерь полного давления, вычисляемая по углу конического скачка $\theta_{\text{ск}}$ и числу M_∞ ;

$V_{\max} = \left(V_\infty^2 + \frac{2}{k-1} a_\infty^2 \right)^{1/2}$; T_0 — температура торможения в набегающем потоке; R — газовая постоянная.

Определив параметры в точке B , проводим через нее элемент характеристики первого семейства до пересечения в точке C с прямолинейным участком характеристики второго семейства, выходящей из точки A (см. рис. 9.12). Координаты точки C определяем из решения уравнений элементов AC и BC характеристик, которые соответственно имеют следующий вид:

$$r_A - r_C = (x_A - x_C) \operatorname{tg}(\beta_A - \mu_A);$$

$$r_B - r_C = (x_B - x_C) \operatorname{tg}(\beta_B + \mu_B).$$

Решая их совместно, находим координаты x_C , r_C точки C . Чтобы вычислить углы β_C и ω_C , надо воспользоваться уравнениями

для характеристик. Записывая их в конечных разностях и полагая $\varepsilon = 1$, получаем

$$\Delta\omega_B - \Delta\beta_B - \frac{x_C - x_B}{r_B} l_B = 0;$$

$$\Delta\omega_A + \Delta\beta_A - \frac{x_C - x_A}{r_A} m_A = 0,$$

где $l_B = \sin\beta_B \sin\mu_B / \cos(\beta_B + \mu_B)$; $m_A = \sin\beta_A \sin\mu_A / \cos(\beta_A - \mu_A)$.

После преобразований имеем

$$\Delta\beta_B = \frac{x_C - x_A}{r_A} m_A - \frac{x_C - x_B}{r_B} l_B - (\omega_B - \omega_A) - (\beta_B - \beta_A).$$

Зная $\Delta\beta_B$, находим угловое приращение

$$\Delta\omega_B = \Delta\beta_B + \frac{x_C - x_B}{r_B} l_B$$

и углы в точке C :

$$\beta_C = \Delta\beta_B + \beta_B; \quad \omega_C = \Delta\omega_B + \omega_B,$$

а также число M_C , угол возмущения $\mu_C = \arcsin(1/M_C)$ и другие параметры (давление, плотность, температура, скорость) в первом приближении, поскольку вдоль элементов характеристик коэффициенты l и m , а также радиальные координаты принимали постоянными и равными их значениям в точках A и B соответственно. Эти параметры можно уточнить, если в уравнения подставить вместо l_B , m_A , r_B , r_A величины, вычисленные как средние между заданными в точках A и B и полученными в точке C в первом приближении. Для средних величин соотношения имеют вид

$$l_B^* = \sin\beta_B^* \sin\mu_B^* / \cos(\beta_B^* + \mu_B^*); \quad m_A^* = \sin\beta_A^* \sin\mu_A^* / \cos(\beta_A^* - \mu_A^*);$$

$$r_B^* = (r_B + r_C)/2; \quad r_A^* = (r_A + r_C)/2,$$

где $\beta_B^* = (\beta_B + \beta_C)/2$; $\mu_B^* = (\mu_B + \mu_C)/2$; $\beta_A^* = (\beta_A + \beta_C)/2$; $\mu_A^* = (\mu_A + \mu_C)/2$.

Продолжая аналогичные вычисления, можно определить параметры во всех точках второго ряда, включая точку N , которая находится на пересечении элемента PN характеристики первого семейства с элементом SN характеристики второго семейства, проведенной из конца прямолинейного конического скачка уплотнения.

Дальнейший расчет заключается в том, чтобы найти параметры в точке пересечения элемента характеристики первого семейства, проведенной через точку N , с продолжением скачка за точкой S . В целях получения лучшего приближения характеристику следует проводить не через точку N , а через точку F , расположенную между точками N и S (см. рис. 9.12). Координаты x_F, r_F точки F выбираем таким образом, чтобы примыкающий к скачку элемент FH характеристики был достаточно мал и его можно было бы рассматривать в виде прямолинейного участка. Параметры в точке F вычисляем по их известным значениям в точках S и N линейной интерполяцией, например:

$$\omega_F = \omega_S + (\omega_N - \omega_S) \frac{x_F - x_S}{x_N - x_S}.$$

Уравнение элемента FH характеристики первого семейства имеет вид

$$r_F - r_H = (x_F - x_H) \operatorname{tg}(\beta_F + \mu_F).$$

Решая его совместно с уравнением прямолинейной образующей скачка $r_H = x_H \operatorname{tg} \theta_{\text{ск}}$, определяем в первом приближении координаты x_H, r_H , т. е. положение точки H на скачке уплотнения. Эти координаты должны быть уточнены, поскольку реальный скачок за точкой S будет искривлен. Действительно, характеристики первого семейства (ES, FH и др.) являются по своей природе волнами разрежения. Встречая скачок уплотнения, эти волны уменьшают его интенсивность и, следовательно, наклон, в результате скачок искривляется (точка H' на рис. 9.12).

Течение за таким скачком уплотнения будет вихревым (неизоэнтропическим), поэтому для определения скорости в точке H необходимо использовать уравнение для элемента FH характеристики первого семейства, учитывающее изменение энтропии за криволинейным скачком*.

Как показывают расчеты и экспериментальные исследования, существенное влияние вихревого характера движения за криволинейным скачком уплотнения наблюдается лишь при больших скоростях обтекания. Например, для параболической головки с удлинением $\lambda_{\text{мнд}} = x_{\text{мнд}} / (2r_{\text{мнд}}) = 5$ при значении параметра $K_1 = M_\infty / \lambda_{\text{мнд}} = 1$, которому соответствует $M_\infty = 5$, волновое сопротивление при уче-

* Особенности расчета, учитывающие изменение энтропии, см. в § 7.1.

те вихревого движения возросло на 5 % по сравнению с его значением в потенциальном потоке. В то же время при $K_1 = 4$ ($M_\infty = 20$) оно увеличивалось уже более чем на 25 %. Физически это объясняется тем, что на образование вихрей необратимо затрачивается дополнительная часть кинетической энергии потока.

На рис. 9.13 приведены кривые распределения давления, найденные по методу характеристик для двух тел с параболической головной частью, уравнение образующей которых

$$\bar{r} = \bar{x}(2 - \bar{x}),$$

где $\bar{r} = r/r_{\text{мид}}$, $\bar{x} = x/x_{\text{мид}}$, а параметр $K_1 = 2$. В случае вихревого течения четко видно повышение давления по сравнению с потенциальным обтеканием. Это следует учитывать в практических случаях начиная со значений $K_1 = 1,2 \dots 1,5$. При $K_1 < 1,2$ вихревым влиянием можно пренебречь.

Кривые на рис. 9.13 подтверждают действие закона подобия по параметру K_1 при

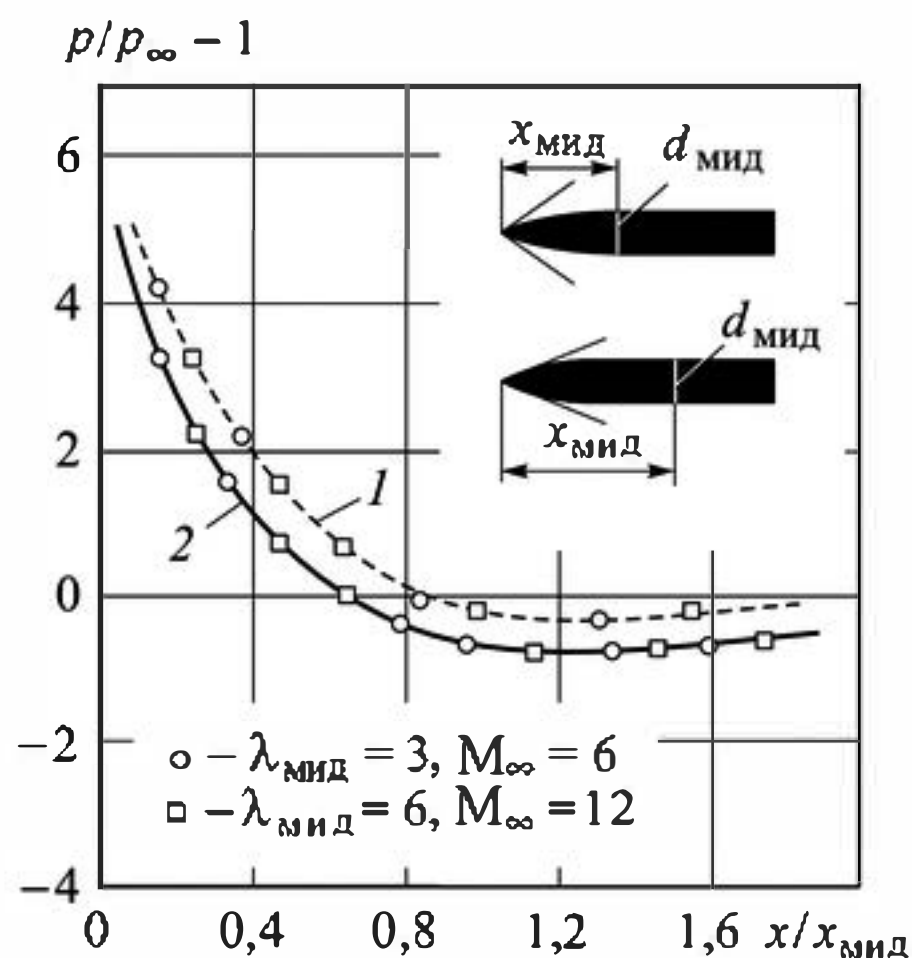


Рис. 9.13. Распределение давления около тел вращения с параболической головной частью для вихревого (1) и потенциального (2) движения за скачком при $K_1 = 2$

больших скоростях не только для конусов, но и для аффинно-подобных тел вращения с криволинейной образующей, какими являются тела параболической формы. Это подобие распространяется и на цилиндрические участки тел. Видно, что обтекание двух различных по размерам тел характеризуется одной кривой для функции давления $p/p_\infty - 1$, поскольку в каждом случае параметр K_1 один и тот же.

Закон подобия по параметру K_1 имеет большое практическое значение. Действительно, вместо экспериментирования с различными моделями можно провести продувку с одним телом, получив при этом данные о распределении давления для ряда значений параметра K_1 . Затем в соответствии с законом подобия эти данные можно распространить на всю совокупность аффинно-преобразованных тел с конкретными геометрическими размерами. Например,

если результаты на рис. 9.13 получены при $M_\infty = 6$ для тела с удлинением головной части $\lambda_{\text{мид}} = 3$ так, что $K_1 = 2$, то, очевидно, найденная кривая действительна (как это видно из графика) также для другого тела с удлинением $\lambda_{\text{мид}} = 6$, но уже при $M_\infty = 12$, т. е. при условии сохранения того же значения $K_1 = 2$. Используя закон подобия, можно отнести полученные результаты, например, к телу с $\lambda_{\text{мид}} = 5$ и $M_\infty = 10$ и т. д. Таким образом, в данном случае действие закона подобия ограничено одним и тем же значением параметра $K_1 = 2$. Чтобы расширить эти границы, эксперименты или расчеты ведут для различных значений K_1 .

Следует отметить еще одно важное следствие закона подобия. Оно заключается в том, что при отсутствии возможности осуществить продувки на больших скоростях необходимые результаты можно получить при меньших числах M_∞ . Для этого надо вести эксперимент с менее удлиненной аффинно-подобной моделью при сохранении значения параметра K_1 . При этом область применимости закона подобия для заостренного тела вращения может быть установлена на основе анализа возможности использования этого закона для конического острия путем сравнения результатов приближенного аэродинамического расчета с точной теорией или экспериментом и выявления отклонения от допустимой погрешности.

Расчет с применением соотношений для конических течений и течений разрежения

Параметры на заостренном носке, с которого начинают расчет сверхзвукового обтекания тела с криволинейной образующей, при осесимметричном обтекании определяют с привлечением соотношений для скачков уплотнения, а на последующих участках, расположенных вниз по потоку, — с использованием соотношений сверхзвуковой теории разрежения Прандтля – Майера. Формула для расчета местного коэффициента давления имеет вид

$$\frac{\bar{p}}{\beta_0^2} = \left(\frac{\bar{p}_k}{\beta_0^2} + \frac{2}{kK_1^2} \right) \left[1 - \frac{k-1}{2} M_{\text{ск}} \left(\frac{p_{\text{ск}}}{p_k} \right)^{\frac{k-1}{2k}} (\beta_\bullet - \beta) \right]^{\frac{2k}{k-1}} - \frac{2}{kK_1^2},$$

где $\bar{p}_k$ — коэффициент давления на коническом носке; $K_1 = M_\infty \beta_0$; $M_{\text{ск}}$, $p_{\text{ск}}$ — число Маха и давление у острия непосредственно за скачком уплотнения.

Число $M_{ск} = M_2$ находят по формуле

$$M_2^2 = \left[\left(kK_{ск}^2 - \frac{k-1}{2} \right) \left(\frac{1}{K_{ск}^2} + \frac{k-1}{2} \right) \right]^{-1} \frac{M_\infty^2 (k+1)^2}{4},$$

в которой $K_{ск} = M_\infty \theta_{ск}$ определяют как функцию параметра $K_1 = M_\infty \beta_0$ из выражения (9.27).

Давление $p_{ск} = p_2$ вычисляют по зависимости

$$\frac{\bar{p}_2}{\beta_0^2} = \frac{2(p_2 - p_\infty)}{k M_\infty^2 p_\infty \beta_0^2} = \frac{k+1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{16}{(k+1)^2 K_1^2}} \right].$$

Особенность применения этого метода к расчету *неосесимметричного потока* около заостренного тела вращения состоит в том, что число M и другие параметры на носке в каждой меридиональной плоскости определяют из решения задачи об обтекании под углом атаки, а поток за носком в соответствующей меридиональной плоскости рассматривают как двухмерное сверхзвуковое течение разрежения, известное под названием течения Прандтля – Майера.

Решая задачу о неосесимметричном обтекании конуса, находят число M_2 на конусе для выбранного угла γ и соответствующий угол ω_2 . Затем расчет ведут так же, как для осесимметричного случая: вычисляют полный угол поворота $\omega = \omega_2 + (\beta_0 - \beta)$, определяют местное число M , абсолютное давление и соответствующий коэффициент давления.

Таким образом, для заданных значений M_∞ и α рассчитывают распределение коэффициента давления по поверхности тела вращения, т. е. функцию $\bar{p} = \bar{p}(x, \gamma)$. Получаемые данные тем точнее, чем больше значение параметра подобия K_1 .

При этом приближенный расчет по сравнению с экспериментальными результатами дает заниженные значения коэффициента давления на верхней поверхности тела. Это наблюдается практически при всех значениях $K_1 > 1$, хотя точность расчета снижается при уменьшении параметра подобия. Если $K_1 < 1$, то, как правило, приближенные вычисления оказываются неприемлемыми.

Кроме того, рассматриваемый метод дает лучшие результаты по мере снижения угла атаки. При этом отклонение теоретических данных от экспериментальных при больших значениях α объясняется влиянием вязкости поперечного потока (особенно на верхней поверхности тела), которое возрастает с увеличением числа M_∞ .

Расчет с применением теории тонкого тела

При установившемся обтекании тонких тел, расположенных под малым углом атаки, возмущенное течение мало отличается от невозмущенного, поэтому его можно исследовать с помощью линеаризованных уравнений аэродинамики.

В случае линеаризованного обтекания тонкого тела вращения (рис. 9.14) потенциал скоростей $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$, где φ_∞ — потенциал скоростей невозмущенного потока; φ' — потенциал скоростей возмущенного линеаризованного потока (потенциал возмущения); причем $\varphi' \ll \varphi_\infty$. В свою очередь

$$\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2,$$

где $\varphi'_1(x, r)$ — потенциал скоростей возмущенного осесимметричного течения; $\varphi'_2(x, r, \gamma)$ — составляющая возмущенного потенциала, обусловленная поперечным обтеканием.

Таким образом,

$$\varphi = \varphi_\infty + \varphi'_1(x, r) + \varphi'_2(x, r, \gamma).$$

В теории линеаризованных течений φ'_1 и φ'_2 рассматривают как функции, которые, являясь решениями уравнений движения, определяют независимые между собой потоки.

Линеаризация уравнений движения газа около тонких тел вращения, движущихся под малыми углами атаки, заключается в приведении нелинейных дифференциальных уравнений, не имеющих общих решений, к линейному виду, для которого общее решение имеется. Такое упрощение уравнений возможно, если сделать предположение, что около тонких тел параметры в возмущенном и невозмущенном потоках мало отличаются. Тогда в цилиндрической системе координат составляющие скорости

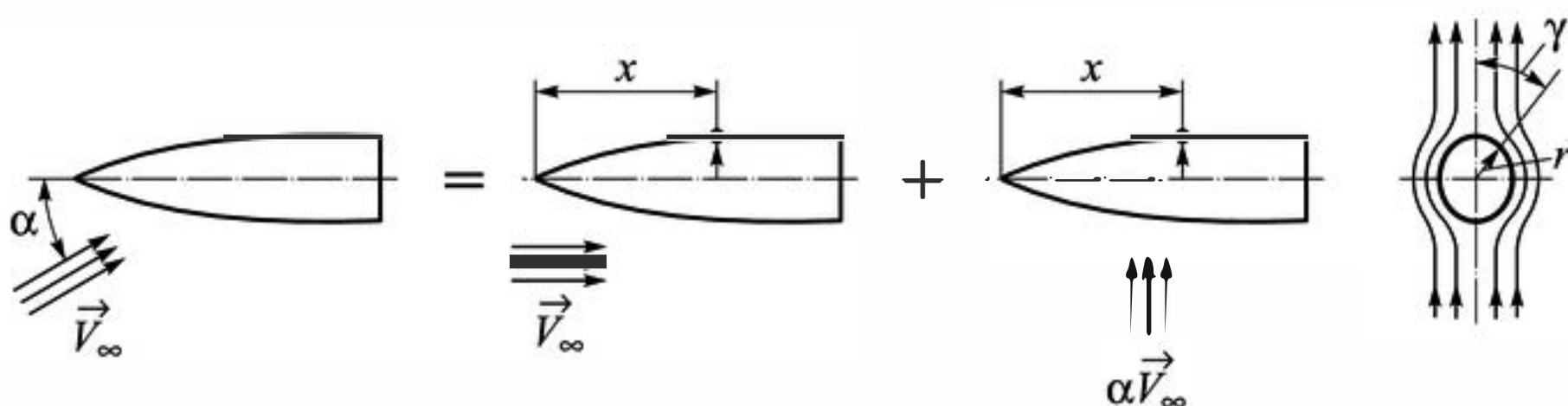


Рис. 9.14. Представление обтекания тонкого тела вращения линеаризованным потоком в виде суммы осесимметричного течения и дополнительного поперечного потока

$$V_x = V_\infty + V'_x; \quad V_r = V'_r; \quad V_\gamma = V'_\gamma,$$

а давление, плотность и скорость звука определяются соотношениями

$$p = p_\infty + p'; \quad \rho = \rho_\infty + \rho'; \quad a = a_\infty + a'.$$

Здесь $V'_x, V'_r, V'_\gamma, p', \rho', a'$ — составляющие параметров, обусловленные возмущенным характером течения, причем

$$V'_x \ll V_\infty, \quad V'_r \ll V_\infty, \quad V'_\gamma \ll V_\infty, \quad p' \ll p_\infty, \quad \rho' \ll \rho_\infty, \quad a' \ll a_\infty.$$

Тогда при установившемся течении нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} (V_x^2 - a^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (V_r^2 - a^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} (V_\gamma^2 - a^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma^2} + 2V_x V_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial r} + \\ + \frac{2}{r} V_x V_\gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \gamma} + \frac{2}{r} V_r V_\gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \gamma} - \frac{V_r (a^2 + V_\gamma^2)}{r} = 0 \end{aligned}$$

может быть приведено к линейному виду:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi'}{\partial r} = 0. \quad (9.29)$$

Уравнение (9.29) лежит в основе расчета стационарных слабо-возмущенных (линеаризованных) течений около тонких тел вращения. Общее решение этого уравнения позволяет вычислить скорости и давления около тонких тел вращения (в том числе движущихся под малым углом атаки), а также коэффициенты нормальной силы, продольного момента, центра давления и продольного момента относительно центра масс тела вращения соответственно по формулам

$$c_y = 2\alpha \bar{S}_{\text{дон}};$$

$$m_z = -2\alpha (\bar{S}_{\text{дон}} - W_T / W_{\text{цил}});$$

$$\bar{x}_{\text{цд}} = \frac{x_{\text{цд}}}{x_T} = 1 - \frac{W_T}{\bar{S}_{\text{дон}} W_{\text{цил}}};$$

$$m_{zT} = 2\alpha \left[\left(\frac{x_{\text{цм}}}{x_K} - 1 \right) \bar{S}_{\text{дон}} + \frac{W_T}{W_{\text{цил}}} \right].$$

Здесь α — угол атаки, рад; $\bar{S}_{\text{дон}} = S_{\text{дон}}/S_{\text{мид}}$ — донное сужение; W_T — объем тела вращения; $W_{\text{цил}}$ — объем описанного вокруг него цилиндра.

Эти соотношения справедливы для тел малого удлинения $\lambda = 3 \dots 5$, поскольку при больших λ существенное влияние оказывают силы вязкого трения. Кроме того, в них не учитывается влияние отрыва потока, наблюдаемого у длинных тел при их поперечном обтекании со скоростью $V_\infty \alpha$.

9.5. Расчет обтекания затупленного тела вращения

Формы затупления головной части летательного аппарата

Во многих конструкциях ЛА головная часть имеет затупленную форму. Ее применяют прежде всего при очень больших скоростях полета, когда основным требованием, предъявляемым к головной части, является способность противостоять действию высоких температур обтекающего газа. Однако часто затупленная форма встречается у ЛА (отдельных его элементов), имеющих небольшие скорости, что может быть обусловлено конструктивными особенностями, назначением и т. п.

Рассмотрим наиболее распространенные формы затупленных носков. На рис. 9.15, а показано коническое тело с затупленным

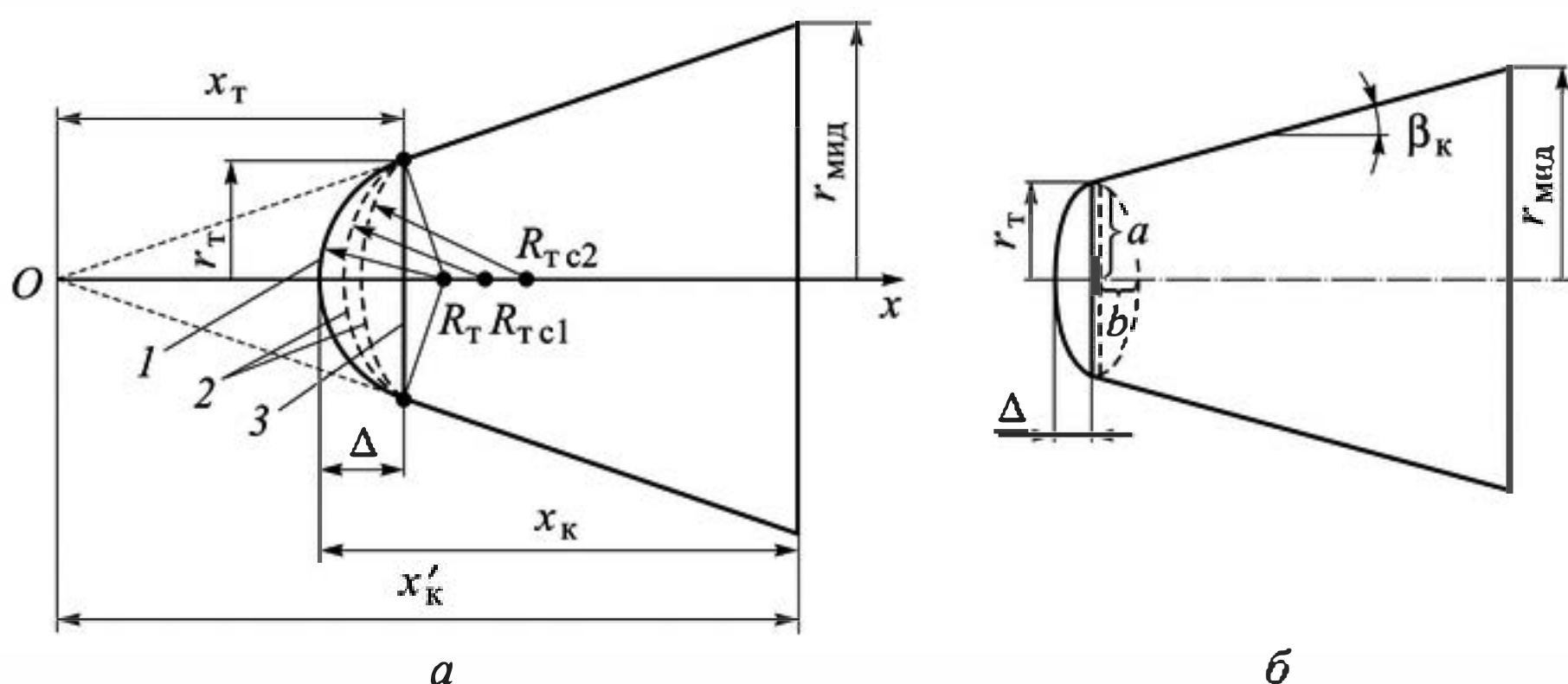


Рис. 9.15. Конус с затуплением в виде секущей сферы (а) и с эллиптическим затуплением (б):

1 — касательный сферический носок; 2 — секущий сферический носок; 3 — затупление в виде плоского торца

носком сферической формы. Носок конуса выполнен таким образом, что его образующая является либо касательной, либо секущей по отношению к сферической поверхности. Радиус такой поверхности, построенной для точки с координатами r_T, x_T , будет $R_{Tc} \geq R_T$, где R_T — радиус касательного носка, связанный с координатами r_T и x_T следующими зависимостями:

$$r_T = R_T \cos \beta_k; \quad x_T = r_T \operatorname{ctg} \beta_k.$$

На рис. 9.15, а также показан конус с затуплением в виде плоской поверхности (плоского торца), которую можно рассматривать как сферу с бесконечно большим радиусом. В свою очередь, сферический носок и плоский торец можно рассматривать как «предельные» формы эллиптической поверхности. На рис. 9.15, б изображен конус с затупленным носком в виде такой поверхности.

Сферический касательный носок и плоский торец — наиболее характерные формы затуплений, которые можно рассматривать как граничные. Обе эти формы представляют интерес при исследовании аэродинамики затупленных тел с какой-либо промежуточной формой носка, поскольку дают возможность оценить крайние значения их аэродинамических характеристик. У затупленных тел они существенно зависят при заданном типе носка от степени затупления, под которой понимают отношение радиуса r_T основания носка к радиусу $r_{\text{мид}}$ миделевого сечения тела.

Особенности сверхзвукового обтекания затупленного тела

Важное для практики аэродинамическое свойство затупленных тел заключается в том, что при движении в атмосфере с очень большими скоростями они нагреваются и разрушаются меньше, чем заостренные тела.

Рассмотрим, какими газодинамическими явлениями обусловлено это свойство затупленных тел. На рис. 9.16 изображена схема потока около затупленного конического тела. Перед телом образуется отошедшая ударная волна с переменной интенсивностью в различных точках ее поверхности, которая вдали от носка вырождается в обычную волну возмущения с бесконечно малой интенсивностью и углом наклона $\theta_{\text{ск}} = \mu_{\infty} = \arcsin(1/M_{\infty})$. Максимальная интенсивность будет в вершине волны (точка В на рис. 9.16), где $\theta_{\text{ск}} = \pi/2$. Поскольку в окрестности носка угол $\theta_{\text{ск}}$ мало отличается от $\pi/2$, то, следовательно, этот участок волны будет обладать достаточно большой интенсивностью, близкой к интенсивности прямого скачка.

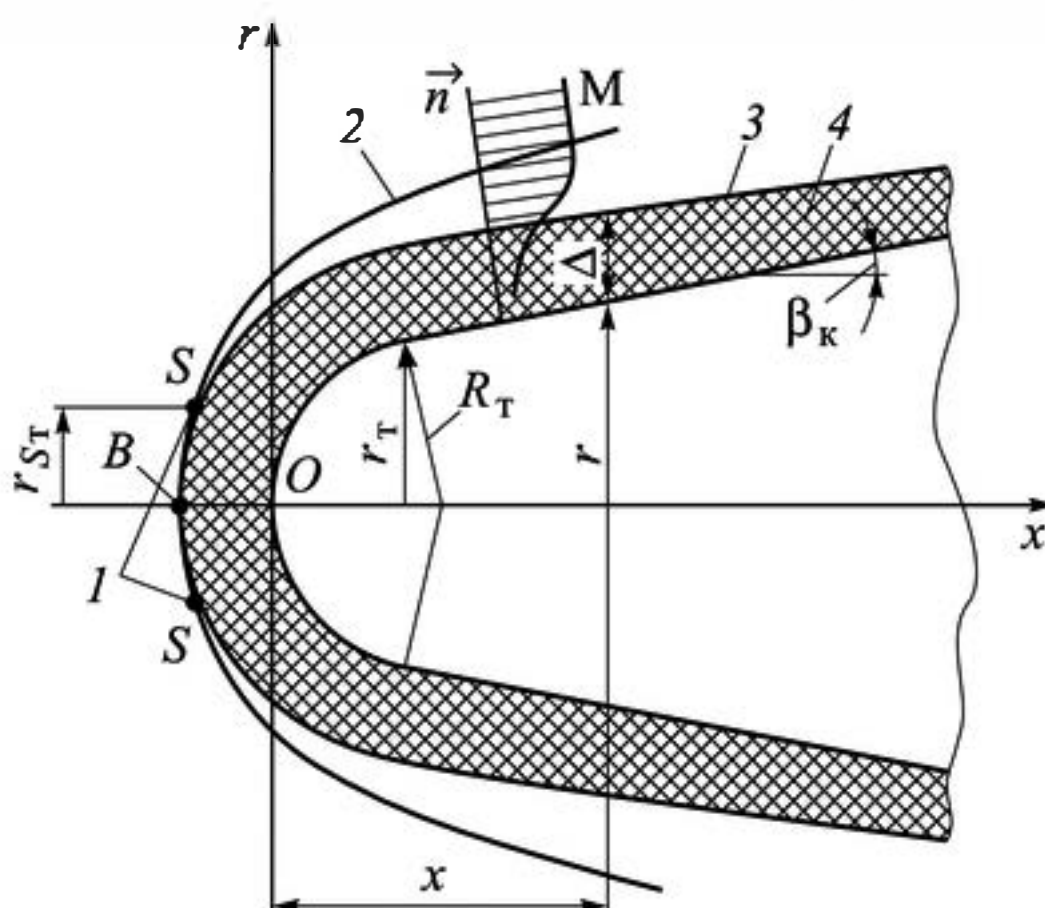


Рис. 9.16. Схема обтекания затупленного конуса сверхзвуковым потоком: 1 — «звуковые» точки; 2 — ударная волна; 3 — «звуковая» линия тока; 4 — высокоэнтропийный слой

Переход частиц газа через такой сильный скачок уплотнения сопровождается значительными потерями полного давления и повышением энтропии. В результате у поверхности тела образуется слой некоторой толщины, в котором газ обладает высокой энтропией. Принято, что такой высокоэнтропийный слой ограничен частью ударной волны и поверхностью, полученной от вращения «звуковой» линии тока, т. е. линии тока, проходящей через «звуковую» точку на волне (см. рис. 9.16, точка S с координатой r_{ST}).

В высокоэнтропийном слое вследствие неодинаковой степени торможения в различных точках ударной волны течение будет характеризоваться некоторым градиентом скорости в направлении нормали $\vec{n}$ и, следовательно, переменным значением местного числа M по толщине Δ (см. рис. 9.16). Вблизи поверхности область течения, занятая высокоэнтропийным слоем и характеризующаяся малыми скоростями (а значит, малыми числами M и Re), оказывает решающее влияние на формирование процессов в пограничном слое.

Существенная особенность обтекания заключается в том, что под влиянием затупления изменяется режим течения в пограничном слое. Вследствие уменьшения местного числа Re , подсчитываемого по скорости в высокоэнтропийном слое, ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный гораздо ниже по течению и протяженность ламинарного пограничного слоя возрастает.

Это способствует снижению трения и уменьшению тепловых потоков к стенке.

Таким образом, наличие отошедшей ударной волны приводит к значительному рассеянию теплоты в атмосферу. Тепловой поток к поверхности ЛА будет меньше. Снижение тепловых потоков, обусловленное повышением энтропии газа при переходе через скачок уплотнения, называется *энтропийным эффектом*. При этом следует иметь в виду, что энтропийный эффект сводится не только к уменьшению скорости на внешней границе пограничного слоя, но и к снижению плотности газа, а следовательно, и числа Re . Вместе с тем повышение энтропии приводит к увеличению (по сравнению с заостренным телом) температуры на внешней границе пограничного слоя. В этом проявляется противоположный эффект высокоэнтропийного слоя, приводящий к некоторому возрастанию теплового потока от пограничного слоя к стенке. Однако суммарный энтропийный эффект при соответствующем подборе толщины стенки и формы затупления тела, как показывают расчеты и экспериментальные исследования, связан с уменьшением тепловых потоков.

Волновое сопротивление затупленного тела по сравнению с заостренным, как правило, возрастает. Хотя для тонких конических тел с малым затуплением имеет место снижение сопротивления, которое объясняется тем, что, несмотря на повышение давления у

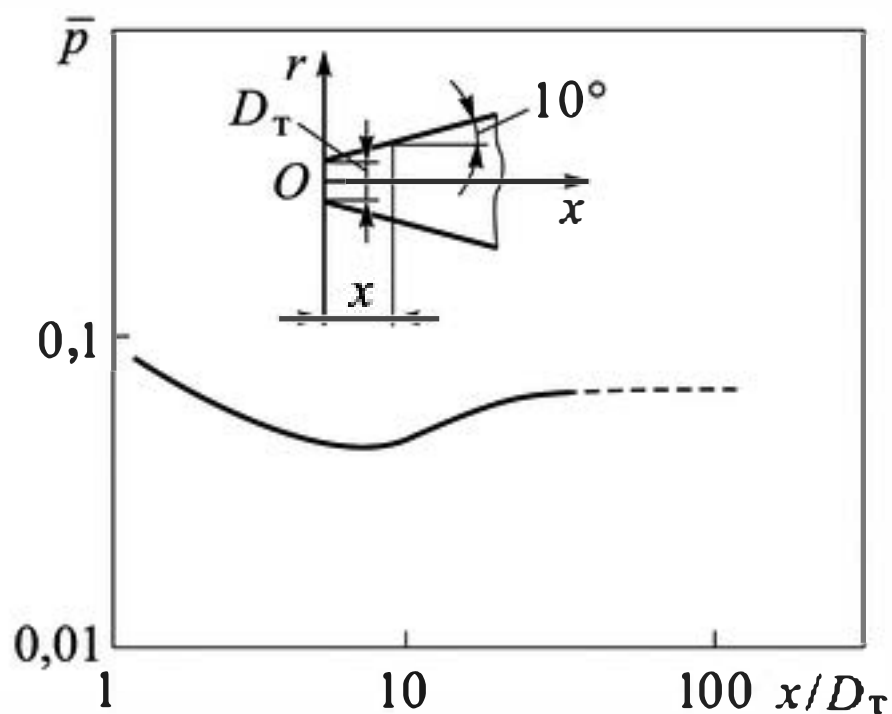


Рис. 9.17. Изменение коэффициента давления на поверхности конуса с плоским затуплением при $M_\infty = 6,85$: сплошная линия — эксперимент; штриховая — расчет с использованием конической теории для заостренного тела

носки, на значительной части обтекаемой поверхности возникает пониженное давление по сравнению с заостренным конусом. Это явление понижения давления за носком показано на рис. 9.17, где приведены экспериментальные результаты, которые получены в аэродинамической трубе для тонкого конуса с затуплением в виде торца, обтекаемого сверхзвуковым потоком при $M_\infty = 6,85$. Минимальное давление достигается на расстоянии около 10 диаметров затупления. При дальнейшем удалении от носка происходит восстановление давления до его

значения на заостренном конусе. Если такой конус будет иметь небольшую длину, а следовательно, малую поверхность с пониженным давлением, то уменьшение сопротивления для этого участка будет недостаточным, чтобы компенсировать его рост в результате повышения сопротивления торца. Для достаточно длинного конуса уменьшение сопротивления периферийного участка может быть более существенным и приведет к снижению полного сопротивления затупленной конической поверхности по сравнению с заостренной.

Главный эффект от применения затупления заключается не в изменении сопротивления, которое при малой степени затупления оказывается сравнительно небольшим, а в существенном уменьшении теплопередачи. Как показывают исследования, такое преимущество затупления проявляется в основном в области гиперзвуковых скоростей.

Можно указать и другие случаи применения затупленных поверхностей, связанные не столько с необходимостью уменьшения теплопередачи, сколько с увеличением лобового сопротивления. Именно такую форму поверхности имеют спускаемые космические аппараты, для которых важно иметь большой коэффициент продольной силы, обеспечивающий их интенсивное торможение в атмосфере.

Аэродинамические коэффициенты затупленных носков при сверхзвуковых скоростях

Изучение аэродинамики затупленного тела связано с исследованием обтекания его передней части, выполненной в виде затупленного носка какой-либо формы. Результаты этих исследований, с одной стороны, являются основой для расчета параметров потока на остальном участке тела, а с другой — имеют самостоятельное значение, поскольку позволяют установить аэродинамические характеристики собственно затупленного носка. Суммарные аэродинамические характеристики тела можно определить путем сложения составляющих для носка и остального участка тела.

При этом необходимо указать, что если обтекание периферийной части тела зависит от затупления, то условия течения около носка определяются лишь его формой, точнее, видом той части носка, которая расположена между «звуковой» точкой на поверхности и точкой полного торможения. Из этого следует, что задача об обтекании затупленного носка является автономной, а значит, может быть решена независимо.

В настоящее время имеется ряд методов решения задачи об обтекании затупленного носка. Некоторые из них основаны на предварительном задании формы и положения ударной волны или их определении экспериментальным путем. При этом решают обратную задачу: систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных интегрируют приближенно при известных граничных условиях на криволинейной ударной волне, рассчитывают таким образом поток около затупления и в результате определяют форму носка.

Рассмотрим расчет аэродинамических коэффициентов затупленных носков различной формы при невязком обтекании и приведем некоторые зависимости, позволяющие описать геометрию головного скачка уплотнения, возникающего перед ними в сверхзвуковом потоке. Эти данные имеют большое практическое значение, поскольку позволяют также определить основные условия течения вне пограничного слоя, которые необходимо знать при исследовании процессов трения и теплопередачи, формируемых в пограничном слое.

Аэродинамические коэффициенты *сферического носка* зависят от распределения скорости вблизи точки полного торможения (рис. 9.18). Как показывают исследования, на значительном участке сферической поверхности действителен линейный закон изменения скорости: $V_x = \xi R_T \varphi$, где $\xi = (\partial V_x / \partial x)_{x=0}$ — начальный градиент скорости, вычисленный, например, на основе усовершенствованной формулы Ньютона.

Для некоторого диапазона скоростей, охватывающего дозвуковые и средние сверхзвуковые скорости, в окрестности критической точки можно рекомендовать следующую зависимость:

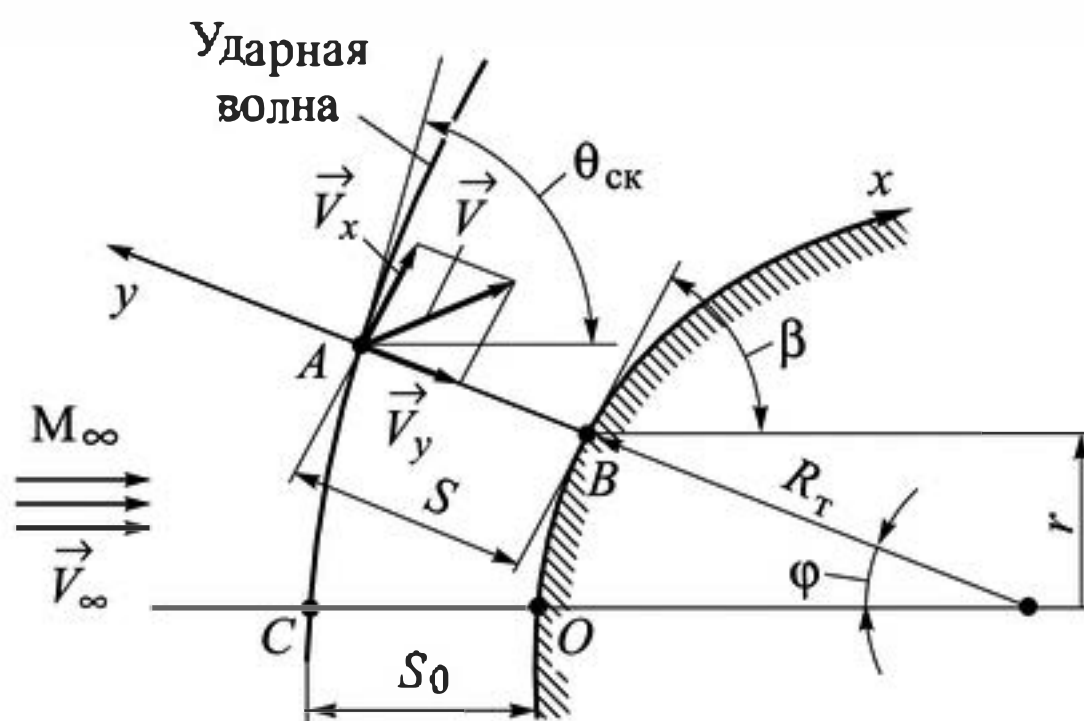


Рис. 9.18. Схема сверхзвукового обтекания сферической поверхности

$$V_x = \chi V_\infty x / R_T.$$

В этой формуле для несжимаемого потока $\chi = 1,5$ и, следовательно, градиент скорости

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{3V_\infty}{2R_T}.$$

С увеличением числа M_∞ значение χ уменьшается. При $M_\infty > 1$ оно может быть найдено из выражения

$$\chi = 0,8 M_\infty^{-0,232}.$$

Оценим размеры области несжимаемого потока (где значения $M < 0,3$) и определим звуковую точку на сфере. Для этого воспользуемся соотношением для изэнтропического течения, считая, что оно начинается с критической точки. С известным приближением условия в этой точке можно считать такими, как непосредственно за прямой частью ударной волны.

На рис. 9.19 приведены найденные таким образом углы между осью и радиальными линиями, проведенными через точки на сфере, где местные значения числа M равны 0,3 и 1.

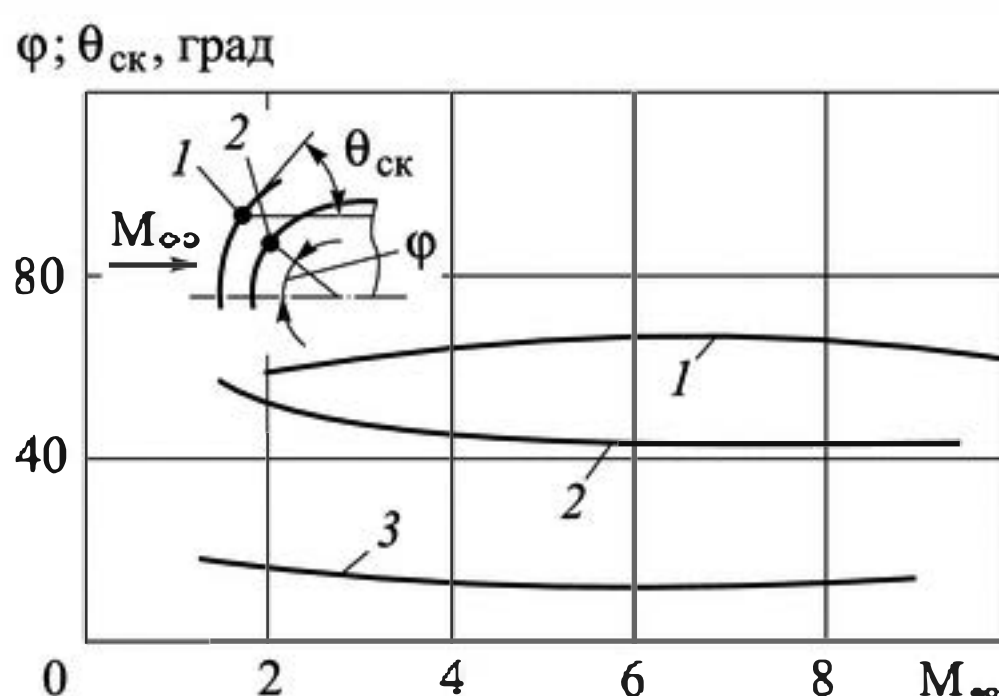


Рис. 9.19. Положение «звуковых точек» на ударной волне (1) и на сфере (2), а также угловое расстояние (3) от оси до границы несжимаемой области на сфере (до точки, в которой местное число $M = 0,3$)

Относительный отход ударной волны от сферического носка можно определить для значений $\bar{p} < 0,5$ по эмпирической зависимости

$$\bar{s}_0 = \frac{2}{3} \frac{\bar{p}}{1 - \bar{p}},$$

где $\bar{S}_0 = \frac{S_0}{R_T}$; $\bar{\rho} = \frac{\rho_\infty}{\rho_{ск}} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)M_\infty^2}$; $\rho_{ск}$ — плотность газа за прямым скачком уплотнения.

Для построения фронта ударной волны перед затупленным носком кроме расстояния S_0 необходимо задать ее форму. С достаточным приближением можно принять, что волна имеет форму параболы:

$$x = -S_0 + 0,5 \left(r^2 / R_{S0} \right),$$

или гиперболы:

$$(x+a)^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1.$$

где R_{S0} — радиус кривизны скачка вблизи точки полного торможения; a, b — полуоси гиперболы, определяемые из условий

$$R_{S0} = b^2 / a, \quad b/a = 1 / \sqrt{M_\infty^2 - 1}.$$

Построенная таким образом образующая ударной волны близка к экспериментальной практически при любых значениях M_∞ , причем совпадение кривых улучшается по мере увеличения числа M_∞ .

Радиус кривизны волны на оси при очень больших скоростях обтекания

$$R_{S0} = (0,935 + 1,05\bar{\rho})R_T,$$

где $0,065 \leq \bar{\rho} \leq 0,2$.

Коэффициент продольной силы от давления для сферического носка можно рассчитать по формуле

$$c_{xрсф} = 0,5\bar{p}_0,$$

где $\bar{p}_0$ — коэффициент давления в точке полного торможения.

Результаты теоретического и экспериментального исследования распределения давления по *плоскому торцу* приведены на рис. 9.20. Анализ их позволяет установить общую закономерность для изменения коэффициента давления в виде $\bar{p} = \bar{p}_0 f(\bar{r})$, где $\bar{r} = r/R_T$ — безразмерный радиус.

В соответствии с этим коэффициент продольной силы торца

$$c_{xр тор} = \bar{p}_0 \int_0^1 f(\bar{r}) d\bar{r}^2. \quad (9.30)$$

Полагая, что функция $f(\bar{r})$, приведенная на рис. 9.20, пригодна для любых сверхзвуковых скоростей, интеграл в формуле (9.30) можно вычислить и получить зависимость

$$c_{xp \text{ тор}} = 0,915 \bar{p}_0.$$

В соответствии с экспериментальными данными, отход ударной волны от плоского торца больше, чем от сферы:

$$\bar{S}_0 = \frac{S_0}{R_T} = 1,03 \sqrt{\frac{\bar{p}}{1 - \bar{p}}}.$$

Радиус кривизны волны на оси, определяющий ее форму вблизи торца, также пропорционален радиусу плоского затупления:

$$\bar{R}_{S0} = \frac{R_{S0}}{R_T} = 0,52(3 - \bar{p}) \sqrt{\frac{1 - \bar{p}}{\bar{p}}}.$$

Нетрудно заметить, что при $\bar{p} \rightarrow 0$ радиус $R_{S0} \rightarrow \infty$, поскольку в предельном случае волна соприкасается с плоской поверхностью торца.

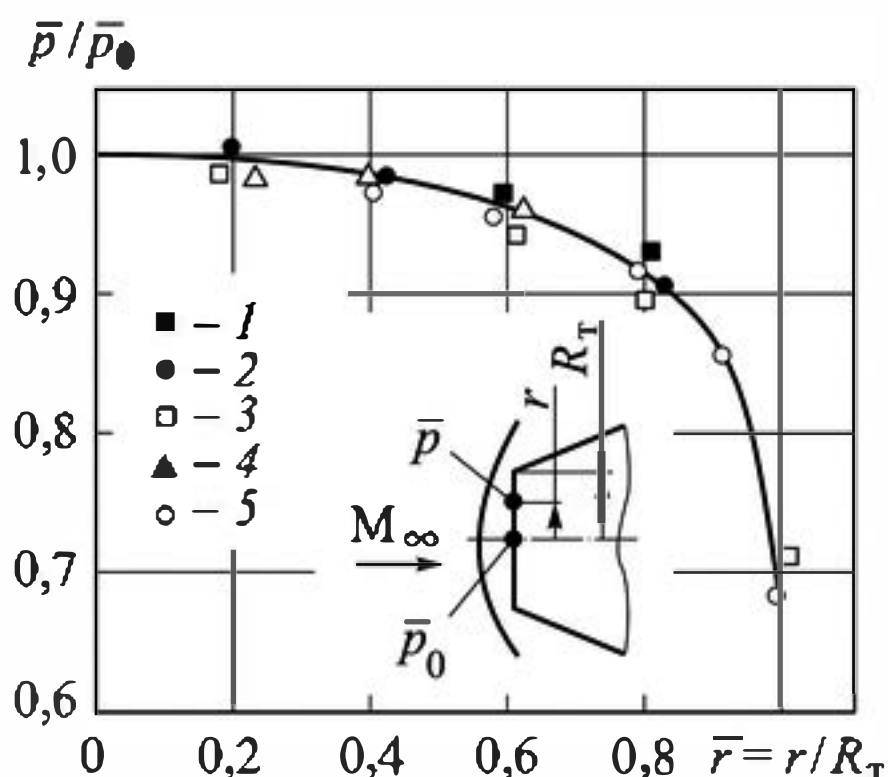


Рис. 9.20. Распределение давления по плоскому торцу при $M_\infty = 6,0$ (1), 4,1 (2), 2,95 (3), 2,46 (4) и 1,83 (5)

9.6. Применение метода Ньютона к расчету аэродинамических коэффициентов тел вращения

Метод Ньютона широко применяют для расчета аэродинамических характеристик ЛА, движущихся с большими сверхзвуковыми и гиперзвуковыми скоростями. Несмотря на ряд недостатков и приближенный характер этого метода, его преимущество заключается в простоте и возможности определения аэродинамических характеристик тел сложной формы в полном диапазоне углов атаки (от 0 до 180°).

В произвольной точке $A(x, y, z)$ (рис. 9.21) поверхности тела коэффициент давления

$$\bar{p}(x, y, z) = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2 / 2} = 2 \cos^2 \varphi(x, y, z). \quad (9.31)$$

Данное соотношение есть основная формула метода Ньютона, согласно которой давление на элемент поверхности тела зависит только от его ориентации по отношению к набегающему потоку.

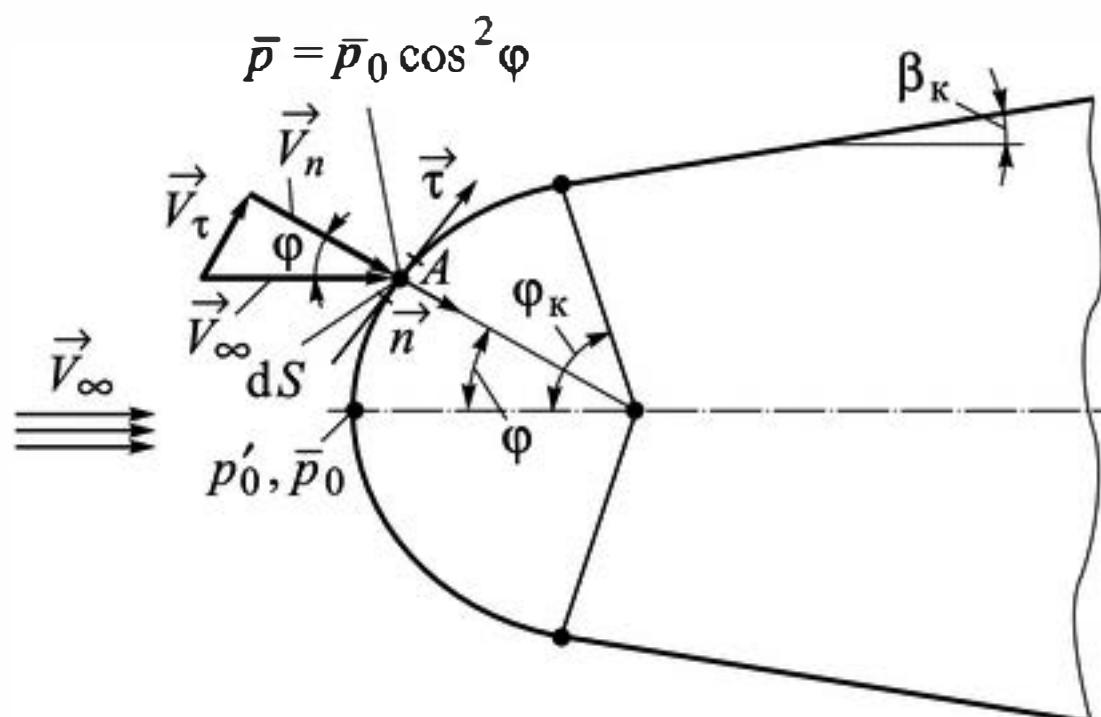


Рис. 9.21. К определению параметров течения у затупленного носка по методу Ньютона

Формула (9.31) дает приемлемое согласование с экспериментом для больших чисел Маха.

По формуле Ньютона можно определить коэффициент давления только для той части поверхности ЛА, где выполняется условие $-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$. Остальная часть поверхности обтекаемого тела оказывается в так называемой области аэродинамической тени, где коэффициент давления принимают равным нулю. Кроме того, формула Ньютона будет давать заведомо неверные результаты в областях отрыва потока, в частности в местах «изломов» поверхности ЛА, а также с ее помощью нельзя определить такую важнейшую характеристику, как донное сопротивление.

Согласно выражению (9.31), в точке полного торможения угол $\varphi = 0$, поэтому коэффициент давления здесь $\bar{p}_0 = 2$. Таким образом, можно записать

$$\bar{p}(x, y, z) = \bar{p}_0 \cos^2 \varphi(x, y, z), \quad (9.32)$$

где $\bar{p}_0(k, M) = (p'_0 - p_\infty) / q_\infty$; $p'_0 = p_{0\infty} \sigma(k, M)$ — давление торможения за прямым скачком уплотнения.

Экспериментальные исследования показывают, что если вместо постоянного значения $\bar{p}_0 = 2$ подставлять значение $\bar{p}_0(k, M)$, полученное либо опытным путем, либо точными теоретическими расчетами, то вычисленные по формуле (9.32) значения будут ближе к действительным. Это особенно справедливо при расчете обтекания затупленных головных частей.

Рассмотрим соотношения, которые можно получить с использованием формулы Ньютона для расчета скорости возле затуплен-

ного тела. Преобразовав выражение (9.32), получим отношение давления в некоторой точке к давлению в точке полного торможения:

$$p/p'_0 = \cos^2\varphi + p_\infty/p'_0 \sin^2\varphi. \quad (9.33)$$

Вблизи точки полного торможения течение можно с известным приближением рассматривать как несжимаемое и применять для его расчета уравнение Бернулли:

$$p + \rho V_x^2/2 = p'_0, \quad (9.34)$$

где ρ — плотность газа в окрестности точки полного торможения, которую принимают равной плотности газа в этой точке, т. е. $\rho = \rho'_0$. После подстановки выражения (9.33) в (9.34) имеем

$$\frac{V_x^2}{2} = \frac{p'_0}{\rho'_0} - \frac{p}{\rho'_0} = \frac{p'_0}{\rho'_0} \left(1 - \frac{p}{p'_0} \right) = \frac{p'_0}{\rho'_0} \left[1 - \left(\cos^2\varphi + \frac{p_\infty}{p'_0} \sin^2\varphi \right) \right].$$

Вычислив производную по x :

$$\begin{aligned} V_x \frac{dV_x}{dx} &= \frac{p'_0}{\rho'_0} \left(2\cos\varphi \sin\varphi \frac{d\varphi}{dx} - \frac{p_\infty}{p'_0} 2\sin\varphi \cos\varphi \frac{d\varphi}{dx} \right) = \\ &= \frac{p'_0}{\rho'_0} \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dx} \left(1 - \frac{p_\infty}{p'_0} \right), \end{aligned}$$

и учитывая, что

$$\sin 2\varphi|_{x \rightarrow 0} = 2\varphi = 2x/R_T; \quad \frac{d\varphi}{dx}|_{x \rightarrow 0} = \frac{1}{R_T}; \quad \frac{V_x}{x}|_{x \rightarrow 0} = \frac{dV_x}{dx}|_{x \rightarrow 0} = \xi,$$

найдем зависимость для начального градиента скорости:

$$V_x \frac{dV_x}{dx} \Big|_{x \rightarrow 0} = \frac{2x}{R_T} \frac{1}{R_T} \frac{p'_0 - p_\infty}{\rho'_0},$$

или

$$\xi^2 = \frac{V_x}{x} \frac{dV_x}{dx} \Big|_{x \rightarrow 0} = \frac{2}{R_T^2} \frac{p'_0 - p_\infty}{\rho'_0}.$$

В соответствии с этой зависимостью для определения начального градиента скорости необходимо знать давление p'_0 и плотность ρ'_0 в точке полного торможения. Если принять линейный закон изменения скорости в окрестности точки полного торможения, то ее распределение можно представить в виде

$$V_x = \xi x = \xi \phi R_T = \phi \sqrt{2(p'_0 - p_\infty)/\rho'_0}. \quad (9.35)$$

Наряду с этой формулой для расчета скорости можно использовать соотношение (4.33), полученное с учетом газодинамической функции давления в изозэнтропическом течении. Положим в этом уравнении $p_0 = p'_0$, $V = V_x$, а $k = \tilde{k}$, т. е. значение k для точки полного торможения с учетом возможной диссоциации газа. Решая уравнение (4.33) относительно скорости V_x находим

$$V_x = V_{\max} \sqrt{1 - (p/p'_0)^{(\tilde{k}-1)/\tilde{k}}}.$$

Максимальную скорость определяем по параметрам набегающего невозмущенного потока:

$$V_{\max}^2 = \frac{2}{k-1} a_\infty^2 + V_\infty^2 = V_\infty^2 \left(\frac{2}{k-1} \frac{1}{M_\infty^2} + 1 \right).$$

В соответствии с этим выражением расчетная зависимость для скорости примет вид

$$V_x = V_\infty \sqrt{\frac{2}{k-1} \frac{1}{M_\infty^2} + 1} \cdot \sqrt{1 - (p/p'_0)^{(\tilde{k}-1)/\tilde{k}}}, \quad (9.36)$$

где p/p'_0 определяется соотношением (9.33).

Параметры газа на периферийной конической поверхности, сопрягающейся со сферическим носком, можно с известным приближением принять такими, как на линии сопряжения, т. е. в конце носка. В частности, скорость на конусе можно вычислить по формуле (9.35), принимая $\phi_k = \pi/2 - \beta_k$:

$$V_k = (\pi/2 - \beta_k) \sqrt{2(p'_0 - p_\infty)/\rho'_0},$$

либо с помощью выражения (9.36):

$$\frac{V_k}{V_\infty} = \sqrt{\frac{2}{k_\infty - 1} \frac{1}{M_\infty^2} + 1} \cdot \sqrt{1 - (p_k/p'_0)^{(\tilde{k}-1)/\tilde{k}}},$$

считая в соответствии с (9.33)

$$\frac{p_k}{p'_0} = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta_k \right) + \frac{p_\infty}{p'_0} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta_k \right) = \sin^2 \beta_k + \frac{p_\infty}{p'_0} \cos^2 \beta_k.$$

Рассчитанная таким образом скорость считается постоянной на всей поверхности конуса. Экспериментальные исследования пока-

зывают, что реальная скорость несколько отличается от вычисленной, а ее распределение носит характер, показанный на рис. 9.22. По мере удаления от точки полного торможения и на некотором удалении от места сопряжения носка с конусом скорость возрастает и достигает максимального значения, далее вниз по течению она снижается, приближаясь на удаленных периферийных участках к значениям, полученным при обтекании заостренного конуса.

В соответствии с методом Ньютона коэффициент давления в произвольной точке тела вращения, обтекаемого под нулевым углом атаки, определяют по формуле

$$\bar{p} = \bar{p}^* \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta_0},$$

где $\bar{p}^* = f(M_\infty, k)$ — коэффициент давления на коническом носке с углом β_0 , рассчитываемый по теории сверхзвукового обтекания конуса; β — угол наклона образующей в данной точке.

В случае *неосесимметричного обтекания* тела вращения в соответствии с методом местных конусов

$$\bar{p} = \bar{p}^* \frac{(\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma)^2}{(\sin \beta_0 \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta_0 \cos \gamma)^2}, \quad (9.37)$$

где $\bar{p}^* = f(M_\infty, k, \alpha, \gamma)$; γ — меридиональный угол текущей образующей тела, отсчитываемый от подветренной образующей.

Если скорости настолько велики, что давление практически перестает зависеть от числа M_∞ , то вместо формулы (9.37) можно воспользоваться соотношением

$$\bar{p} = F(k)(\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma)^2,$$

в котором $F(k) = 2(k+1)(k+7)/(k+3)^2$.

Подставляя выражение (9.37) в (9.1), (9.3), (9.5), получаем следующие зависимости для расчета коэффициентов осевой и нормальной сил, а также продольного момента:

$$c_{xp} = \frac{4\lambda_T}{\pi} \int_0^{\bar{x}_T'} A(\gamma_T) \bar{r} \operatorname{tg} \beta d\bar{x};$$

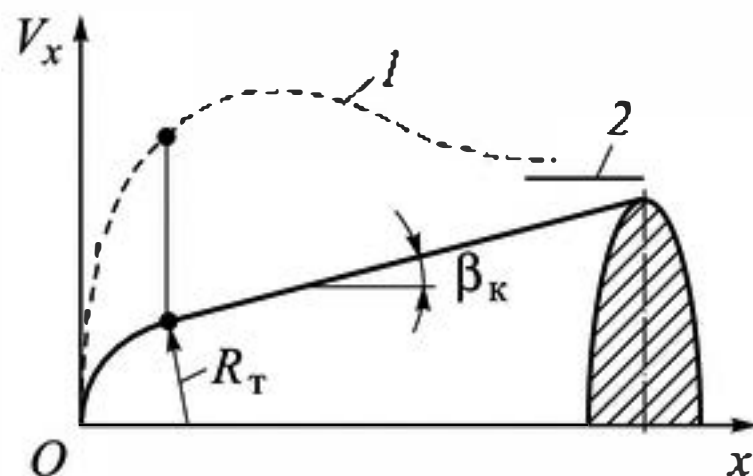


Рис. 9.22. Распределение скорости на затупленном (1) и заостренном (2) конусах в сверхзвуковом потоке:
1 — эксперимент; 2 — расчет

$$c_{yp} = -\frac{4\lambda_T}{\pi} \int_0^{\bar{x}_T'} B(\gamma_T) \bar{r} d\bar{x};$$

$$m_{zp} = -\frac{4\lambda_T}{\pi} \left(\int_0^{\bar{x}_T'} \bar{x} \bar{r} B(\gamma_T) d\bar{x} + \frac{1}{2\lambda_T} \int_0^{\bar{x}_T'} \bar{r}^2 \operatorname{tg} \beta B(\gamma_T) d\bar{x} \right),$$

где $\lambda_T = x_T / (2r_{\text{мид}})$; $\bar{x}_T' = x_T' / x_T$; $\bar{r} = r / r_{\text{мид}}$; $\bar{x} = x / x_T$;

$$A(\gamma_T) = \int_{\gamma_T}^{\pi} \bar{p}^* \frac{(\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma)^2}{(\sin \beta_0 \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta_0 \cos \gamma)^2} d\gamma;$$

$$B(\gamma_T) = \int_{\gamma_T}^{\pi} \bar{p}^* \frac{(\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma)^2 \cos \gamma}{(\sin \beta_0 \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta_0 \cos \gamma)^2} d\gamma.$$

Пределы интегрирования γ_T и $\bar{x}_T'$ (или в размерной форме x_T') зависят от геометрической формы тела и угла атаки. Установить их можно, исходя из особенности обтекания ньютоновским потоком, когда на поверхности тела создается некоторая затененная область, в которой частицы газа с ней не соударяются. Граница этой области (рис. 9.23, а) определяется кривой, на которой, как и всюду за ней, давление $p = p_\infty$, а коэффициент давления $\bar{p} = 0$. Поэтому значения γ_T и x_T' (или r_T), зависящие от положения границы затененной области, находим из условия $\operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \alpha = \cos \gamma_T$ или $\beta / \alpha = \cos \gamma_T$ при малых α и β .

При расчете расстояния x_T' от острия до наиболее удаленной точки, в которой коэффициент давления $\bar{p} = 0$, исходим из условия $\beta = -\alpha$. Тогда уравнение для определения x_T' (или r_T) принимает вид

$$\left. \frac{dr}{dx} \right|_{x=x_T'} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

При вычислении пределов интегрирования следует иметь в виду два случая обтекания. В первом случае ($\alpha < \beta_0$) (см. рис. 9.23, а), пока местный угол $\beta \geq \alpha$ значение $\gamma_T = 0$, когда же $\beta < \alpha$, угол $\gamma_T > 0$. В частности, $\gamma_T = \pi/2$ при $\beta = 0$ и $\gamma_T = \pi$ при $\beta = -\alpha$. Для цилиндра при любом угле атаки $\gamma_T = \pi/2$, поскольку $\beta = 0$.

Во втором случае ($\alpha \geq \beta_0$) (рис. 9.23, б) при $\alpha = \beta_0$ угол $\gamma_T = 0$ соответствует месту у острия конуса. Непосредственно за ним на-

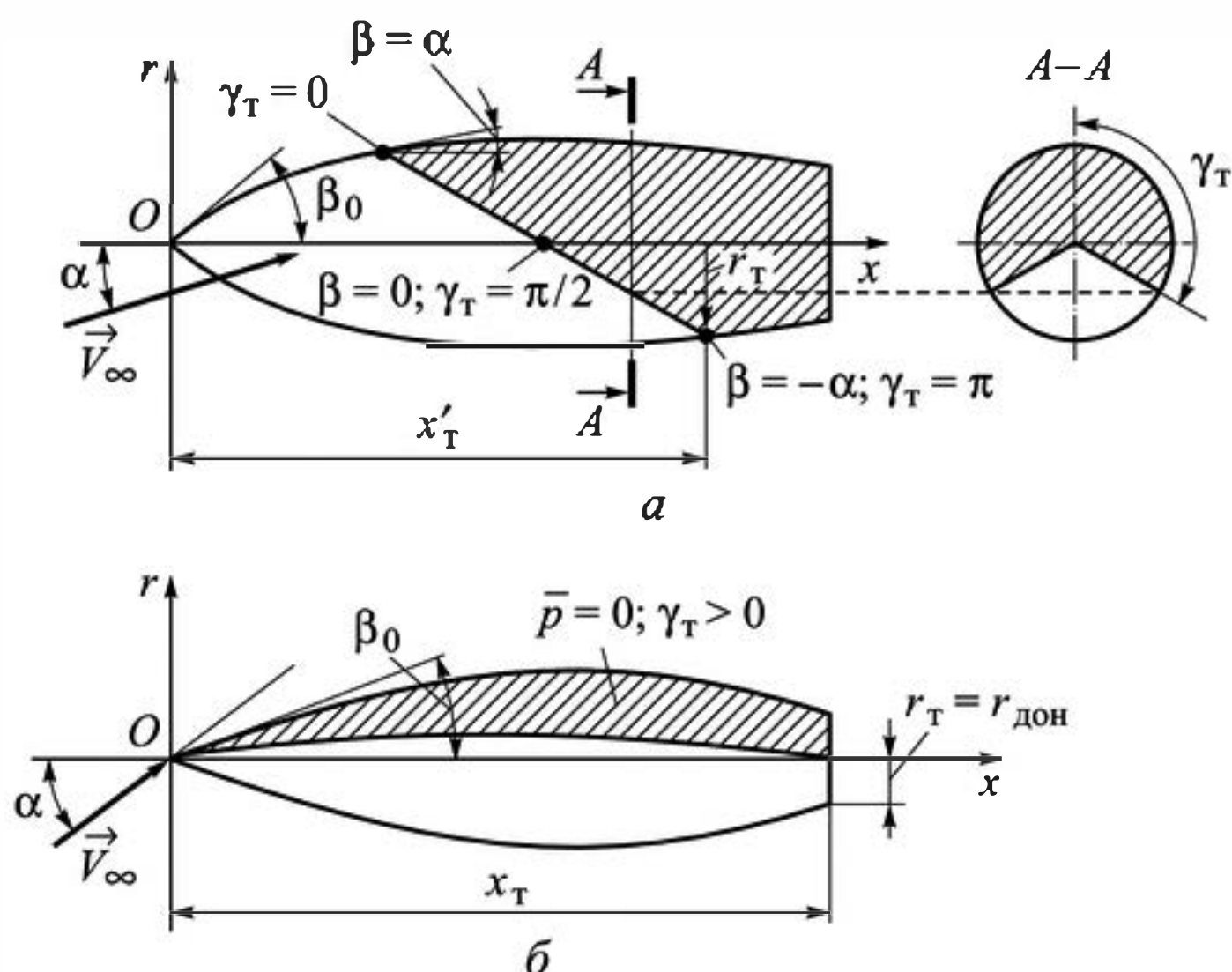


Рис. 9.23. Образование затененной области (заштрихована) на теле вращения при обтекании под углом $\alpha < \beta_0$ (а) и $\alpha \geq \beta_0$ (б)

чинается затененная область, в которой $\gamma_T > 0$. Эта область, как показано на рис. 9.23, б, простирается до донного среза, а следовательно, координата $x'_T = x_T$.

Коэффициент давления $\bar{p}^*$ в носке тела вращения как в первом, так и во втором случаях можно определить методом местных конусов.

С помощью формулы Ньютона можно получить аналитические выражения для коэффициента продольной силы простейших тел вращения, например сферического носка. При этом расчетные значения коэффициента давления хорошо согласуются с экспериментальными данными, за исключением небольшой области в конце закругленного носка, где расчетные значения меньше действительных.

В результате интегрирования по поверхности сферы в соответствии с зависимостью $\bar{p} = \bar{p}_0 \cos^2 \varphi$ было получено следующее выражение для коэффициента продольной силы от давления для сферического носка:

$$c_{xp} = \bar{p}_0 \sin^2 \varphi (1 - 0,5 \sin^2 \varphi).$$

В частности, для полусферы ($\varphi = \pi/2$) оно принимает вид

$$c_{xp} = 0,5 \bar{p}_0.$$

Для сферы необходимо также учитывать влияние давления на задней части поверхности, которое, как видно из экспериментальных данных (рис. 9.24), существенно при небольших скоростях. При $M_\infty \geq 5$ этим влиянием можно пренебречь, считая $c_{xp} = 0,5 \bar{p}_0$.

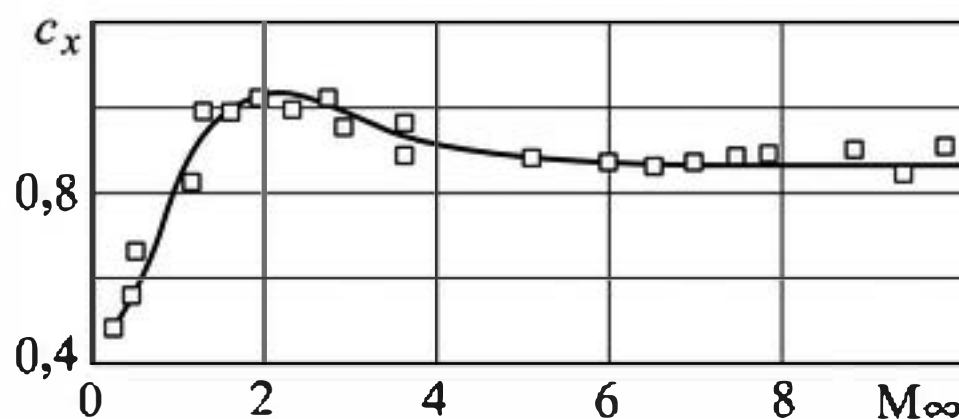


Рис. 9.24. Изменение коэффициента продольной силы для сферического носка

Оптимальная форма тела вращения, обтекаемого сверхзвуковым потоком, пока не найдена. Одним из способов приближенного решения такой задачи является использование модифицированной формулы Ньютона.

Преобразуем интеграл (9.2), отнеся все линейные размеры к радиусу миделевого сечения:

$$c_{xp} = 2 \int_0^{\tilde{x}_T} \bar{p} \bar{r} \operatorname{tg} \beta d\tilde{x},$$

где $\tilde{x}_T = x_T/r_{\text{мид}}$; $\tilde{x} = x/r_{\text{мид}}$

Учитывая, что $\bar{p} = K \cos^2 \varphi = K \sin^2 \beta$ (где $\beta = \pi/2 - \varphi$ — угол наклона касательной к поверхности тела в данной точке), а $\operatorname{tg} \beta = dr/dx = r'$, получаем

$$c_{xp} = 2K \int_0^{\tilde{x}_T} \bar{r} \sin^2 \beta \operatorname{tg} \beta d\tilde{x} = 2K \int_0^{\tilde{x}_T} \frac{\bar{r} \bar{r}'^3}{1 + \bar{r}'^2} d\tilde{x}. \quad (9.38)$$

При этом минимум сопротивления определяем из условия постоянства площади боковой поверхности и объема тела вращения.

Вычисление экстремума интеграла (9.38) для тонких тел вращения показывает, что для заданного удлинения $\lambda_T = x_T/d_{\text{мид}}$ без учета трения наименьший коэффициент лобового сопротивления имеет тело с образующей, описываемой степенной функцией $\bar{r} = \bar{x}^m$ с показателем $m = 0,75$. Поправка с учетом толщины приводит к уменьшению показателя m . Так, при удлинении тела $\lambda_T = 2$ оптимальный контур имеет образующую с показателем $m = 0,625$.

Таким образом, при одинаковом удлинении тело, образующая которого описывается степенной функцией $\bar{r} = \bar{x}^m$ с показателем степени $m = 0,60 \dots 0,75$, при большем объеме должно обладать значительно меньшим лобовым сопротивлением, чем конус или заостренное тело типа параболы или оживала. Кроме того, у такого тела низкий коэффициент теплопередачи, что особенно важно при гиперзвуковых скоростях*.

Отношение коэффициентов лобового сопротивления оптимального тела и конуса того же удлинения составляет $\sim 0,84$. При этом объем такого тела на 25...30 % больше, а теплопередача значительно меньше, чем у конуса.

9.7. Донное давление за телом вращения. Влияние формы кормовой части летательного аппарата на его аэродинамические характеристики

Создаваемое за кормовой частью ЛА разрежение влияет на сопротивление тела вращения, поэтому важной задачей является расчет донного давления и исследование возможностей его увеличения в целях снижения донного сопротивления.

Величина разрежения за донным срезом определяется характером взаимодействия между пограничным слоем, отрывающимся у дна, внешним потоком и газом в застойной зоне (рис. 9.25). Внешний поток создает эжектирующий эффект и, следовательно, донное

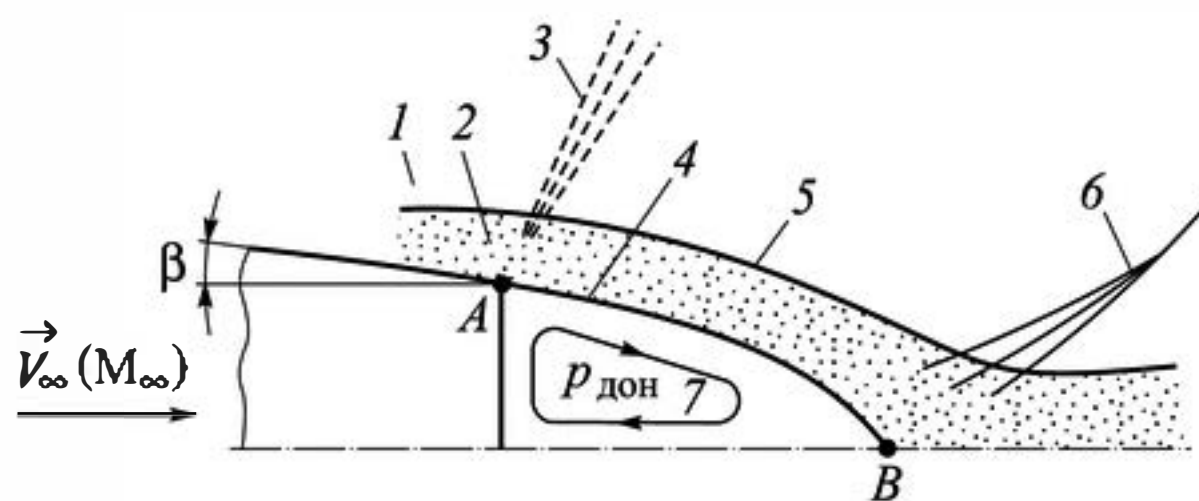


Рис. 9.25. Структура течения в окрестности кормы для расчета донного сопротивления тела вращения:

1 – область внешнего потока; 2 – пограничный слой; 3 – область расширения; 4 – нижняя граница пограничного слоя; 5 – верхняя граница пограничного слоя; 6 – область сжатия; 7 – застойная зона

* Более подробно об этом см.: Аэродинамика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы. М.: Машиностроение, 1975.

давление $p_{\text{дон}}$ зависит от того, каким является пограничный слой в области между точкой отрыва A и точкой присоединения B , расположенной на оси потока, — ламинарным, смешанным или турбулентным. Кроме того, донное давление определяется такими факторами, как угол атаки, форма тела и его конфигурация у основания, числа Маха и Рейнольдса, температура стенки.

Зависимость донного давления от формы тела обусловлена влиянием конфигурации поверхности перед точкой отрыва. Например, увеличение угла конусности кормы приводит к росту донного давления и, следовательно, к уменьшению коэффициента донного сопротивления. С увеличением числа Маха M_∞ эжектирующие свойства внешнего потока возрастают, поэтому снижается донное давление.

Рассмотрим некоторые соотношения, используемые при до- и сверхзвуковых скоростях течения для расчета коэффициента донного давления $\bar{p}_{\text{дон}}$, а следовательно, и донного сопротивления в целом.

При дозвуковых скоростях ($M_\infty < 1$) донное разрежение зависит от состояния поверхности тела, его длины и донного сужения, т. е. от тех же факторов, которыми определяются свойства пограничного слоя. Следовательно, должна быть связь между донным давлением (донным сопротивлением) и трением. В первом приближении, если отсутствует истечение газа из сопла двигателя, в качестве параметров, характеризующих донное давление, можно ввести коэффициент трения c_{xf} , рассчитанный по боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ корпуса, и сужение $\bar{S}_{\text{дон}} = S_{\text{дон}} / S_{\text{бок}}$, вычисленное по площади $S_{\text{бок}}$. Экспериментальные исследования позволили установить следующие зависимости для коэффициента донного давления и соответственно коэффициента донного сопротивления:

$$\bar{p}_{\text{дон}} = -0,029 \sqrt{\tilde{S}_{\text{дон}} / c_{xf}}, \quad (9.39)$$

$$c_{x\text{дон}} = -\bar{p}_{\text{дон}} \bar{S}_{\text{дон}} = 0,029 \sqrt{\tilde{S}_{\text{дон}} / c_{xf}} \cdot \bar{S}_{\text{дон}}, \quad (9.40)$$

где $\bar{S}_{\text{дон}} = S_{\text{дон}} / S_{\text{мид}} = d_{\text{дон}}^2 / d_{\text{мид}}^2$.

Учитывая приближенный характер вычислений, величину c_{xf} в (9.40) можно определять так же, как и коэффициент сопротивления трения плоской пластинки, длина которой равна длине корпуса x_T .

Имеющиеся экспериментальные данные указывают на возможность использования формул (9.39) и (9.40) для приближенных рас-

четов коэффициентов донного давления и сопротивления в трансзвуковой области обтекания, т. е. для чисел $M_\infty \approx 1$.

При сверхзвуковых скоростях для расчета донного давления можно воспользоваться одним из методов теории отрывных течений (метод разделяющей линии тока с использованием критериев присоединения Корста или Нэша, двухслойная модель течения, энтропийный метод) либо использовать приближенные зависимости. Одна из них связывает коэффициент донного давления с коэффициентом трения на боковой поверхности корпуса и похожа на соотношение (9.39):

$$\bar{p}_{\text{дон}} = -\frac{4,29}{M_\infty^2} \left(0,029 \sqrt{\frac{\tilde{S}_{\text{дон}}}{c_{xf}}} \right) \left[1 + 10 \left(0,029 \sqrt{\frac{\tilde{S}_{\text{дон}}}{c_{xf}}} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Другое соотношение установлено из условия абсолютного вакуума за донным срезом, при котором $\bar{p}_{\text{дон}}$ минимально. Поскольку

$$\bar{p}_{\text{дон}} = \frac{p_{\text{дон}} - p_\infty}{0,5k p_\infty M_\infty^2},$$

в случае $p_{\text{дон}} = 0$ для воздуха ($k = 1,4$) нетрудно получить

$$\bar{p}_{\text{дон min}} = -\frac{2}{kM_\infty^2} = -1,43M_\infty^{-2}; \quad c_{x\text{дон min}} = 1,43M_\infty^{-2} \tilde{S}_{\text{дон}}.$$

Таким образом,

$$\bar{p}_{\text{дон}} = -k_{\text{дон}} |\bar{p}_{\text{дон min}}|,$$

где $k_{\text{дон}}$ — некоторый поправочный коэффициент, зависящий от M_∞ , формы тела, его удлинения $\lambda_T = x_T / (2r_{\text{мид}})$, числа Re и состояния пограничного слоя.

Для расчета коэффициента $k_{\text{дон}}$ можно рекомендовать зависимость

$$k_{\text{дон}} = 0,8K_1(2 - K_1),$$

где $K_1 = M_\infty / \lambda_{\text{эф}}$; $\lambda_{\text{эф}} = \lambda_T / \tilde{S}_{\text{дон}}$ — эффективное удлинение тела. При этом необходимо убедиться, что $K_1 \leq 1$; в случае $K_1 > 1$ полагают $\bar{p}_{\text{дон}} = -|\bar{p}_{\text{дон min}}|$.

Если пренебречь влиянием трения, то в первом приближении для расчета донного давления можно использовать соотношение

$$p_{\text{дон}} / p_\infty = 1/M_\infty^2 - 0,1,$$

которое, несмотря на его простоту, хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Для определения донного давления при сверхзвуковых скоростях течения также используют теорию отрывных течений (см. гл. 6). В основу методики расчета коэффициента донного сопротивления положена физическая модель квазиплоского течения, изображенная на рис. 9.26. Сверхзвуковой поток с числом M_k у донного среза тела вращения в точке S расширяется в волне разрежения, разворачивается на угол $\beta_{дон}$ и достигает скорости, характеризуемой числом $M_{дон} > M_k$. В окрестности задней критической точки R , где потоки встречаются, формируется скачок уплотнения с углом $\theta_{ск}$. В пространстве от волны разрежения до скачка уплотнения распространяется область смешения внешнего потока с циркуляционным течением в зоне отрыва.

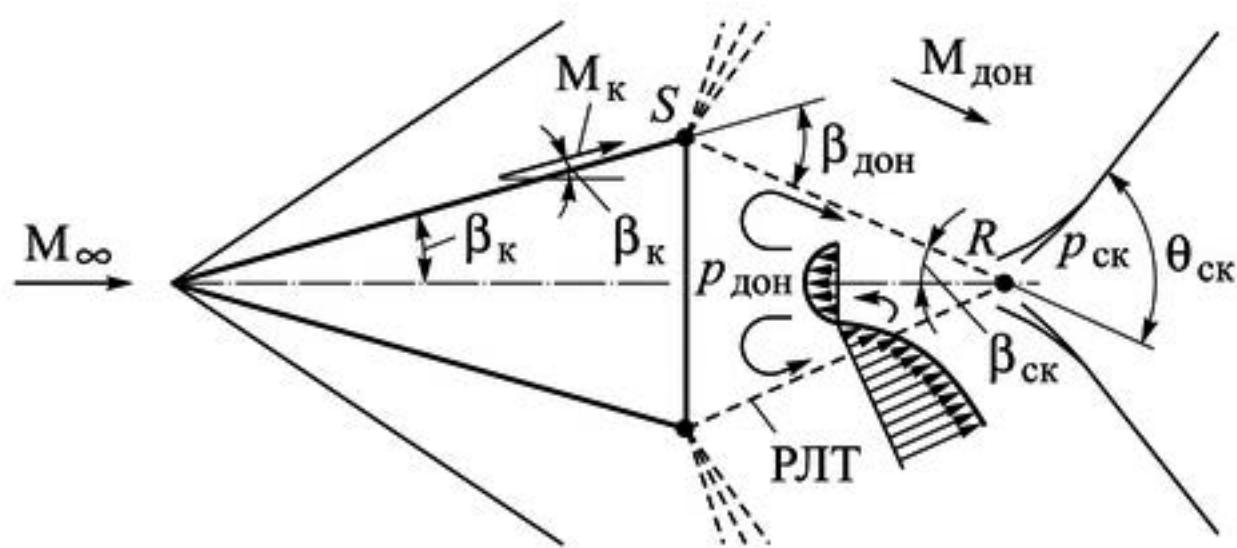


Рис. 9.26. Структура течения в области кормового следа

Для построения математической модели используют гипотезу плоских сечений, согласно которой предполагают, что течение является плоским, без теплообмена и установившимся; в зоне отрыва циркулирует постоянная масса газа и отсутствуют продольные и поперечные градиенты давления, а угол атаки практически не влияет на параметры течения в донном следе.

Донное давление $p_{дон}$ рассчитывают итерационным путем при условии выполнения в области присоединения гипотезы Корста: давление торможения на разделяющей линии тока области смешения равно давлению за скачком уплотнения в области присоединения:

$$p_{0рлт} = p_{ск}.$$

Задав произвольно значение $p_{дон} < p_{\infty}$, определяют углы $\beta_{дон}$ и $\beta_{ск}$ соответственно разворота потока в волне разрежения и присоединения (см. рис. 9.26) по формулам

$$M_{\text{дон}} = \sqrt{\left[\left(p'_{0к} / p_{\text{дон}} \right)^{(k-1)/k} - 1 \right] \frac{2}{k-1}};$$

$$\beta_{\text{дон}} = \omega(M_{\text{дон}}) - \omega(M_k);$$

$$\omega(M) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \arctg \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (M^2 - 1) - \arctg \sqrt{M^2 - 1};$$

$$\beta_{\text{ск}} = \beta_{\text{дон}} - \beta_k,$$

где $p'_{0к}$ и M_k — соответственно давление торможения и число Маха перед донным срезом; β_k — угол, характеризующий направление потока перед волной разрежения.

Решая систему уравнений

$$\frac{\tg \theta_{\text{ск}}}{\tg(\theta_{\text{ск}} - \beta_{\text{ск}})} = \frac{(k+1)M_{\text{дон}}^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}{2 + (k-1)M_{\text{дон}}^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}};$$

$$\frac{p_{\text{ск}}}{p_{\text{дон}}} = \frac{2k}{k+1} M_{\text{дон}}^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}} \frac{k-1}{k+1},$$

находят давление за скачком уплотнения в области присоединения.

Положение разделяющей линии тока определяют из уравнения (см. гл. 6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^2}{1 - Cr_{\text{дон}}^2 \varphi^2} d\eta = \int_{\eta_{\text{рлт}}}^{+\infty} \frac{\varphi}{1 - Cr_{\text{дон}}^2 \varphi^2} d\eta,$$

где $\varphi = 0,5(1 + \operatorname{erf} \eta)$; $\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$; $\eta = \sigma y/x$ — безразмерная координата; $\sigma = 12 + 2,758 M_{\text{дон}}$ — коэффициент смещения; $Cr_{\text{дон}} = V_{\text{дон}}/V_{\text{мах}} = \left\{ 1 + 2/\left[(k-1)M_{\text{дон}}^2 \right] \right\}^{-0.5}$.

Решая данное интегральное уравнение, вычисляют безразмерную координату $\eta_{\text{рлт}}$, соответствующие ей скорость $\varphi_{\text{рлт}}$ и число Крокко $Cr_{\text{рлт}} = \varphi_{\text{рлт}} Cr_{\text{дон}}$, по значению которого определяют число $M_{\text{рлт}}$ на разделяющей линии тока и давление торможения $p_{0\text{рлт}}$:

$$M_{\text{рлт}} = \sqrt{\frac{2Cr_{\text{рлт}}^2}{(k-1)(1 - Cr_{\text{рлт}}^2)}}; \quad p_{0\text{рлт}} = \frac{p_{\text{дон}}}{\pi(M_{\text{рлт}}, k)}.$$

При условии, что $p_{\text{рлт}} = p_{\text{ск}}$ с заданной точностью, процесс итераций прекращают и получают значение осредненного донного давления $p_{\text{дон}}$.

Для снижения донного сопротивления за счет уменьшения площади донного среза кормовую часть тела вращения часто выполняют сужающейся. Однако угол $\beta_{\text{корм}}$ обратного конуса кормы не должен превышать 15° для обеспечения ее безотрывного обтекания.

Для придания ЛА большей статической устойчивости используют расширяющуюся кормовую часть.

Если кормовая часть ЛА выполнена сужающейся, то коэффициент осевой силы

$$c_{x\text{корм}} = \left(2,09 \sin^2 \beta_{\text{корм}} + \frac{0,19 \sin^2 \beta_{\text{корм}}}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right) \sqrt{1 - \bar{S}_{\text{дон}}}.$$

В случае расширяющейся кормовой части для ориентировочной оценки ее сопротивления можно воспользоваться методом местных конусов, полагая, что скорость перед кормой равна V_∞ , и соотношением (9.23). Тогда

$$c_{x\text{корм}} = (0,0016 + 0,002/M_\infty^2)(\beta_{\text{корм}})^{1,7} (\bar{S}_{\text{дон}} - 1),$$

где $\beta_{\text{корм}}$ — в град.

Под нормальной силой суживающейся кормовой части тела будем понимать дополнительную отрицательную силу, возникающую на ней при ненулевом угле атаки. В основе большинства приближенных методов расчета аэродинамических коэффициентов суживающихся кормовых частей тел вращения лежат формулы теории тонкого тела. Так, для коэффициента нормальной силы можно использовать зависимость

$$c_{y\text{корм}} = k_{\text{корм}} \left(\frac{r_{\text{дон}}^2}{r_{\text{ми}}^2} - 1 \right) \sin 2\alpha.$$

Здесь

$$k_{\text{корм}} = \begin{cases} 0,7 - 0,001875(\alpha - 16^\circ) & \text{при } M_\infty < 1; \\ 0,7 \left(\frac{2 + (k-1)M_{\text{корм}}^2}{2 + (k-1)M_\infty^2} \right)^{-k/(k-1)} & \text{при } M_\infty \geq 1, \end{cases}$$

а число $M_{\text{корм}}$ можно рассчитать, например, по теории Прандтля — Майера.

Для расширяющейся кормовой части можно использовать зависимость (9.25), применяемую для расчета острого конуса:

$$c_{\text{укорм}}^{\alpha} = 0,035 \frac{4\lambda_{\text{корм}}^2}{1 + 4\lambda_{\text{корм}}^2},$$

где $\lambda_{\text{корм}} = x_{\text{корм}} / (2r_{\text{мид}})$.

9.8. Расчет аэродинамических характеристик корпусов, составленных из различных элементов

Как было указано ранее, геометрически фюзеляж любого ЛА, представляющего собой тело вращения, можно разбить на четыре части: головную, среднюю (обычно цилиндрическую), кормовую и донный срез, некоторые из которых могут отсутствовать. Поэтому общий коэффициент продольной силы тела вращения можно представить так:

$$c_x = c_{x\text{гол}} + c_{x\text{цил}} + c_{x\text{корм}} + c_{x\text{дон}} + c_{xf},$$

где $c_{x\text{гол}}$, $c_{x\text{цил}}$, $c_{x\text{корм}}$, $c_{x\text{дон}}$, c_{xf} — соответственно составляющие коэффициента, обусловленные сопротивлением головной, цилиндрической и кормовой частей ЛА, а также донным давлением и поверхностным трением, причем методы расчета указанных составляющих различаются в зависимости от скорости полета.

Расчет коэффициента продольной силы при различных скоростях

Дозвуковые скорости. Основную долю сопротивления тела вращения при дозвуковых скоростях составляют трение и донное сопротивление.

При упрощенных расчетах сопротивления трения корпуса ЛА можно использовать зависимости, полученные для плоской пластинки. Однако результаты таких расчетов следует считать приближенными, поскольку они не учитывают пространственный характер течения и форму обтекаемой поверхности. Сила сопротивления трения пластинки длиной, равной длине корпуса x_T ,

$$X_f = c_f q_{\infty} S_{\text{бок}},$$

где c_f — коэффициент трения плоской пластины; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности корпуса ЛА.

В реальных условиях пограничный слой около корпуса оказывается смешанным: на передней части он ламинарный, на остальной — турбулентный. Длина ламинарного участка в общем случае зависит от формы корпуса, числа M_∞ , температуры стенки и шероховатости ее поверхности. В наиболее простом случае абсолютно гладкой поверхности, обтекаемой несжимаемым потоком, при наличии отрицательного градиента давления для продолговатого корпуса критическое число Рейнольдса $Re_{кр} \approx 10^6$.

При дозвуковых скоростях распределение давления может быть найдено достаточно надежно лишь экспериментальным путем. Для удлиненных корпусов различие между давлением в несжимаемом и сжимаемом дозвуковых потоках невелико, поэтому при докритических числах Маха $M_\infty < M_{\infty кр}$ можно воспользоваться формулой Прандтля — Глауэрга:

$$\bar{p} = \bar{p}_{нс} (1 - M_\infty^2)^{-0,5}.$$

Коэффициент продольной силы при $\alpha = 0$, обусловленный давлением и трением на передней части корпуса (профильное сопротивление),

$$c_{хпр} = k_\phi c_f,$$

где $k_\phi = 1,86 - 0,175\lambda_\phi + 0,01\lambda_\phi^2$; $\lambda_\phi = \lambda_T \sqrt{1 - M_\infty^2}$ — приведенное удлинение. При этом коэффициент трения c_f рассчитывают по миделеву сечению с учетом сжимаемости в зависимости от характера течения в пограничном слое.

Тогда полное сопротивление следует рассматривать как сумму головного (профильного) и донного сопротивлений, т. е.

$$c_x = c_{хпр} + c_{хдон}.$$

Экспериментальные данные для некоторых тел вращения, обтекаемых дозвуковым потоком, показаны на рис. 9.27. Видно, что у тела вращения произвольной формы $c_{хф} = 0,014x_T / d_{мид}$, а $c_{хдон}$ можно рассчитать по формуле (9.40).

Сопротивление корпуса существенно зависит от формы носовой части (рис. 9.28). Кривой 1 (тело 1) на этом рисунке соответствует эмпирическая зависимость для коэффициента лобового сопротивления продолговатого тела вращения с плоским передним носком:

$$c_{ха} = 0,5 + 0,645(1 + 0,25M_\infty^2).$$

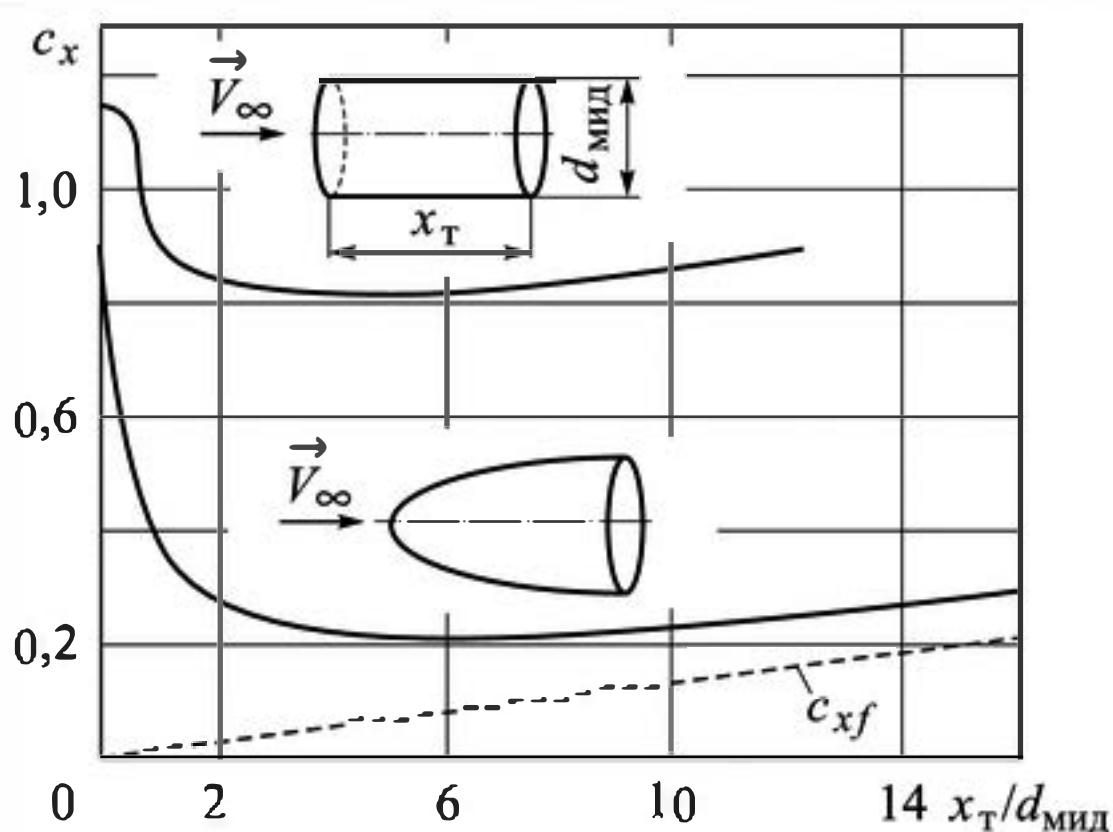


Рис. 9.27. Зависимость коэффициента продольной силы тел вращения от удлинения

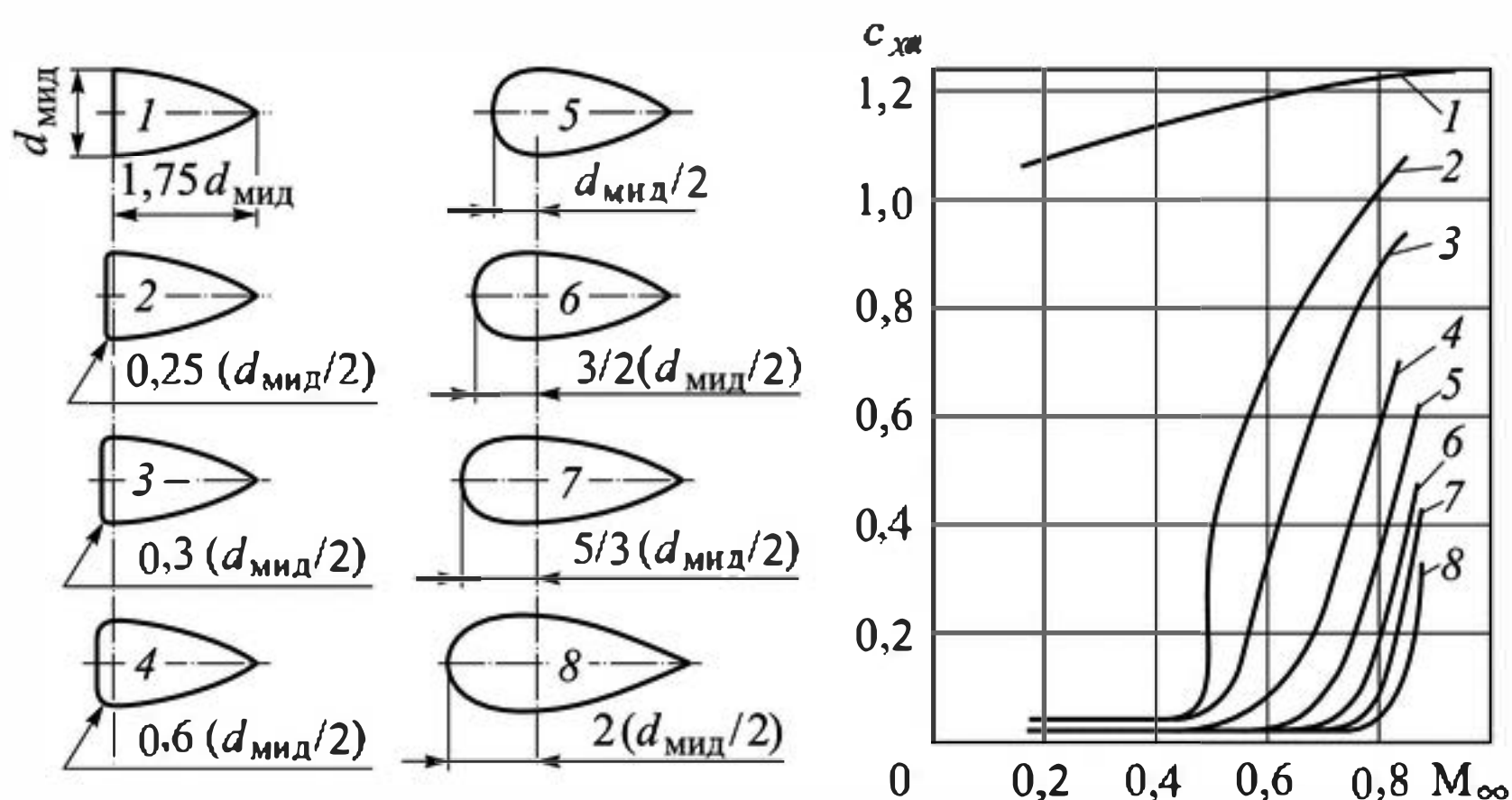


Рис. 9.28. Влияние формы носовой части тела вращения на коэффициент лобового сопротивления

Наличие скругления носовой части корпуса (тела 2–8 на рис. 9.28) приводит к существенному снижению коэффициента c_{xa} при дозвуковых скоростях.

Околозвуковые скорости. Затупление носовой части приводит к возрастанию сопротивления в до- и сверхзвуковой зонах, однако увеличение сопротивления при переходе трансзвуковой области оказывается менее интенсивным у затупленных тел вращения, чем у заостренных. Для сферы сопротивление возрастает в два раза, для цилиндра — в два-три раза, в то время как для заостренного корпу-

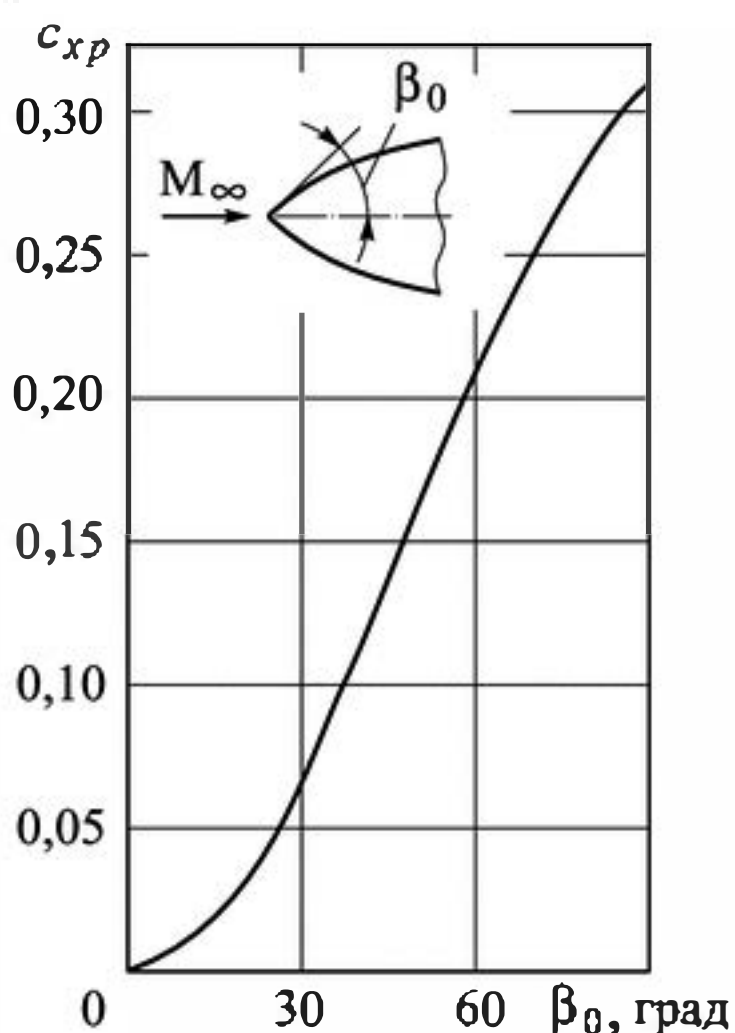


Рис. 9.29. Зависимость коэффициента продольной силы от давления для оживальных головных частей при $M_\infty = 1$

са этот коэффициент может увеличиться более чем в семь-восемь раз.

Данные о сопротивлении заостренных конических и оживальных головок при звуковой скорости полета ($M_\infty = 1$), полученные в аэродинамических трубах, приведены соответственно на рис. 9.11 и 9.29.

Из приведенных графиков следует, что с увеличением угла β конической или β_0 оживальной головной части коэффициент продольной силы возрастает, причем более существенно в случае конической головной части, что обусловлено переменным значением угла β наклона образующей оживальной головки.

Экспериментально установлено, что при околосвуковых скоростях коэффициент лобового сопротивления c_{xa} максимален при $1,1 \leq M_\infty \leq 1,5$, а доминирующее влияние на его значение оказывает форма головной части тела (рис. 9.30).

Зависимость коэффициента $c_{xa \max}$ от удлинения $\lambda_{\text{мид}}$ головной части можно представить интерполяционным соотношением

$$c_{xa \max} = 0,8/\lambda_{\text{мид}} + 0,014\lambda_{\text{мид}}, \quad (9.41)$$

в котором второй член определяет коэффициент трения. Удлинение головной части, соответствующее наименьшему значению коэффициента $c_{xa \max}$, равно 7,56. Таким удлинением обладает весьма тонкое тело, у которого поверхностное трение в общем сопротивлении оказывается наибольшим.

При обтекании полусферы потоками с различными скоростями, в том числе и околосвуковыми, коэффициент лобового сопротивления от давления и коэффициент давления в критической точке сферы можно вычислить соответственно по формулам

$$c_{xap} = 0,46 - (1/\pi) \arctg [1,61(1,2 - M_\infty)]; \quad (9.42)$$

$$\bar{p}_0 = 1,35 - (1/\pi) \arctg [1,96(1 - M_\infty)]. \quad (9.43)$$

При этом удовлетворительные результаты получаются для широкого диапазона чисел Маха: $0 \leq M_\infty \leq 7 \dots 8$.

Если число M_∞ набегающего потока проходит через единицу, то в соответствии с принципом стационарности местного числа Маха оно остается постоянным. Диапазон чисел M_∞ , в котором распределение местных чисел Маха постоянно, сравнительно узок. Так, для конуса с углом $\beta_k = 25^\circ$ он определяется значениями $M_\infty = 0,9 \dots 1,1$, а для угла $\beta_k = 7^\circ$ — значениями $M_\infty = 0,99 \dots 1,01$.

Используя принцип стационарности местного числа Маха, получим зависимость, которая позволяла бы рассчитывать сопротивление заостренной головки при околосвуковых скоростях. Предположим, что распределение значений M известно. Тогда, исходя из газодинамической функции температуры, при условии $T_0 = \text{const}$ скорость можно вычислить по формуле

$$\frac{V^2}{V_\infty^2} = \left(\frac{M}{M_\infty} \right)^2 \frac{2 + (k-1)M_\infty^2}{2 + (k-1)M^2}, \quad (9.44)$$

а коэффициент давления при $p_0 = \text{const}$ — согласно выражению

$$\bar{p} = \frac{2}{kM_\infty^2} \left\{ \left[\left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right) \left(1 - \frac{V^2}{V_{\text{max}}^2} \right) \right]^{k/(k-1)} - 1 \right\}, \quad (9.45)$$

где $V_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2kRT}{k-1}}$.

Используя эти зависимости, можно рассчитать коэффициент $c_{\text{хар}}$ конической головки при малых значениях разности $M_\infty - 1$:

$$c_{\text{хар}} = \left[\frac{k M_\infty^2 + 1}{(k+1)M_\infty^2} (c_{\text{хар}})_{M_\infty=1} + \frac{2(M_\infty^2 - 1)}{(k+1)M_\infty^2} \right]. \quad (9.46)$$

Значение $(c_{\text{хар}})_{M_\infty=1}$ можно определить для конических (оживальных) головок по экспериментальным кривым, приведенным на рис. 9.11 и 9.29.

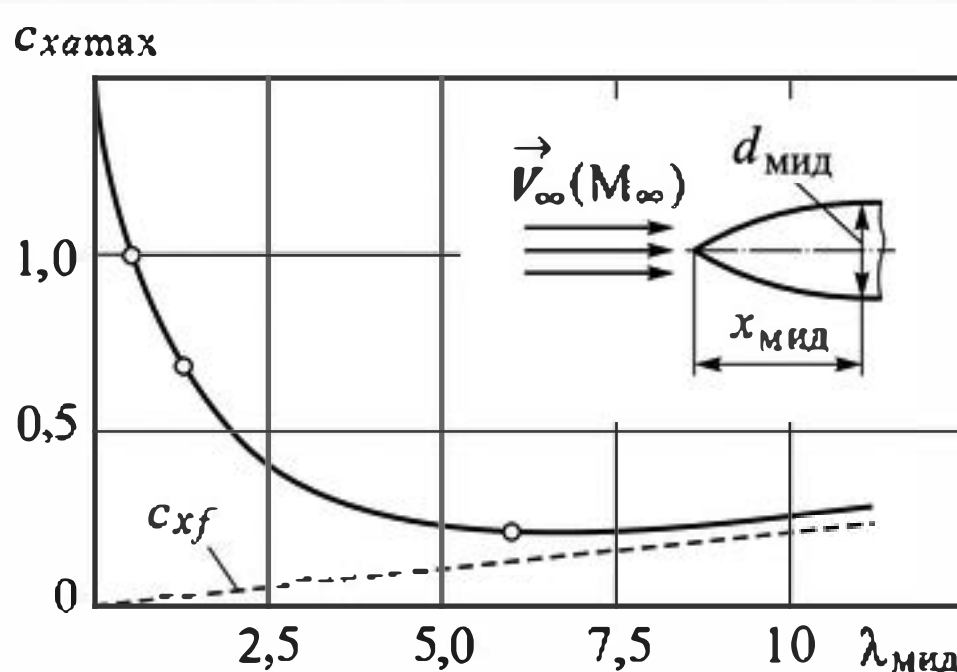


Рис. 9.30. Зависимость $c_{x\alpha \text{ max}}$ от удлинения для тел вращения ($1,1 < M_\infty < 1,5$)

Дифференцируя уравнение (9.46) по M_∞ и полагая $M_\infty = 1$, находим наклон кривой $c_{хар}(M_\infty)$ в точке $M_\infty = 1$:

$$\left(\frac{\partial c_{хар}}{\partial M_\infty} \right)_{M_\infty=1} = \frac{4}{k+1} \left[1 - 0,5(c_{хар})_{M_\infty=1} \right].$$

Приведенные на рис. 9.31 экспериментальные данные для конической и оживальной головок при околозвуковых скоростях удовлетворительно согласуются с результатами расчета коэффициента $c_{хар}$ в околозвуковой области и наклона кривой $c_{хар}(M_\infty)$ в точке $M_\infty = 1$.

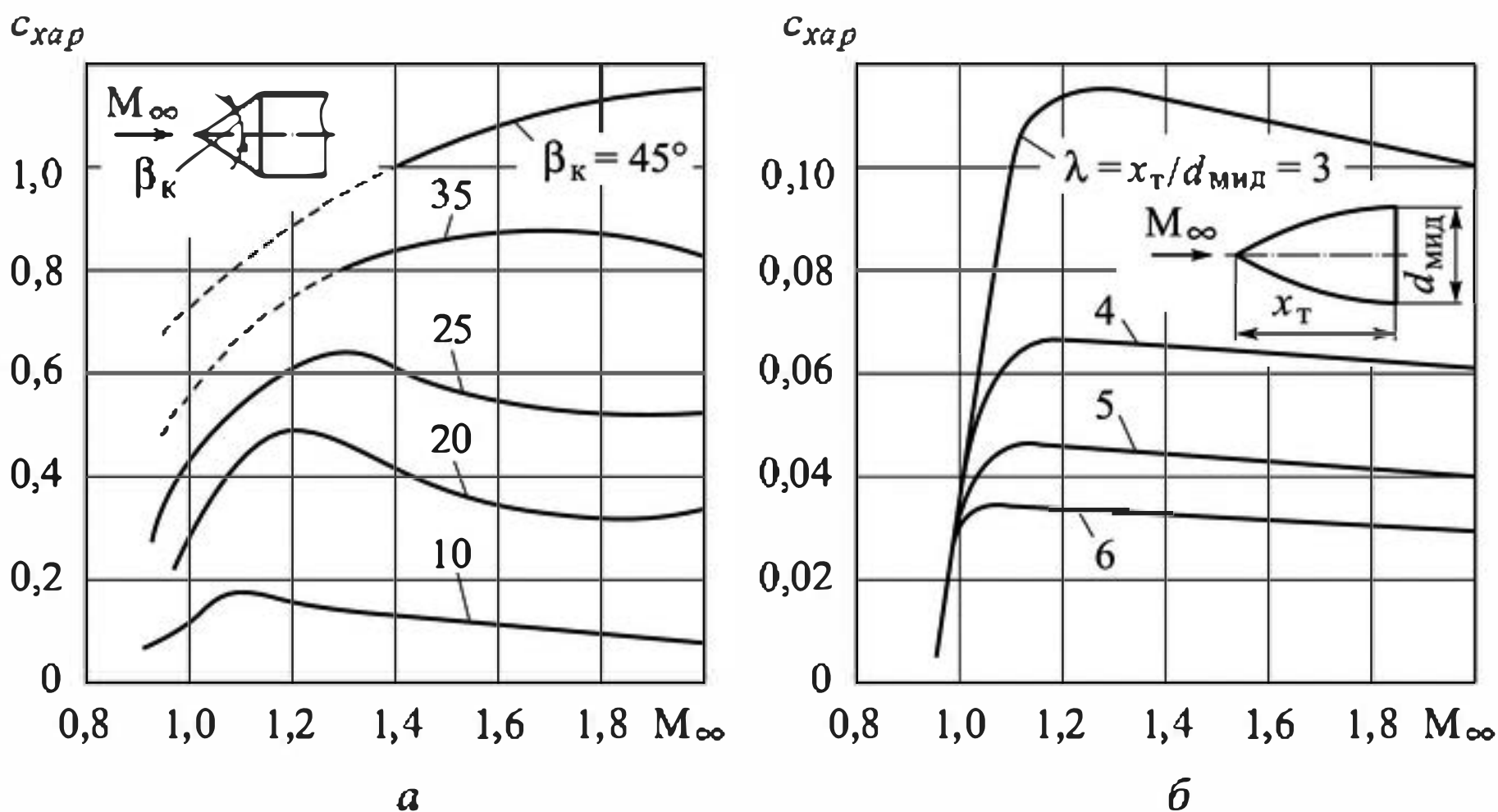


Рис. 9.31. Изменение коэффициента лобового сопротивления от давления для тел вращения с конической (а) и оживальной (б) головными частями в зависимости от числа M_∞

Сверхзвуковые скорости. Аэродинамические характеристики тел вращения при сверхзвуковых скоростях ($M_\infty > 1$) можно определить, например, методом местных конусов или методом Ньютона (см. § 9.3, 9.6). Поскольку головная часть корпуса ЛА может иметь коническую, параболическую или оживальную формы с различными формами затуплений: плоский торец, сферический касательный или секущий носок, эллиптическое затупление и т. д. (см. рис. 9.15), приведем эмпирические соотношения для некоторых характерных ее форм.

В случае параболической головной части при $\lambda_T = x_T/d_{мид} > 2,5$ в интервале $1,5 < M_\infty < 6$

$$c_{хар} = \bar{p}_k \frac{0,08(15,5 + M_\infty)}{3 + M_\infty}.$$

Коэффициент $\bar{p}_k$ здесь вычисляют по местному углу β_0 в носке, например, по формуле (9.23) или (9.24), причем $\operatorname{tg} \beta_0 = 1/\lambda_T$.

Для оживальной головной части при $5^\circ < \beta_0 < 20^\circ$ и $M_\infty = 1,5 \dots 3,5$ получено соотношение

$$c_{x\text{ож}} = \bar{p}_k \left(1 - \frac{14 - 1,143\lambda_T^{-2}}{M_\infty + 18} \right),$$

где $\bar{p}_k$ также рассчитывают по местному углу β_0 в носке, причем

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{\lambda_T}{\bar{R}} \left[1 - \left(\frac{\lambda_T}{\bar{R}} \right)^2 \right]^{-1/2};$$

$\bar{R} = R/d_{\text{мид}}$ — безразмерный радиус дуги окружности, образующей оживальную головную часть.

Приводя выражения для аэродинамического коэффициента к единой характерной площади — площади миделя, — для различных комбинаций тел вращения получаем:

1) конус со сферическим затуплением:

$$c_x = c_{xk} (1 - \bar{r}^2 \cos^2 \beta_k) + c_{xcф} \bar{r}^2;$$

2) конус с торцевым затуплением:

$$c_x = c_{xk} (1 - \bar{r}^2) + c_{x\text{тор}} \bar{r}^2;$$

3) параболу со сферическим носком:

$$c_x = c_{x\text{пар}} \left[1 - \bar{r}^2 \cos^2 \beta (3,1 - 1,4\bar{r} \cos \beta - 0,7\bar{r}^2 \cos^2 \beta) \right] + c_{xcф} \bar{r}^2;$$

4) параболу с плоским торцем:

$$c_x = c_{x\text{пар}} \left[1 - \bar{r}^2 (3,1 - 1,4\bar{r} - 0,7\bar{r}^2) \right] + c_{x\text{тор}} \bar{r}^2,$$

где $\bar{r} = R_T/r_{\text{мид}}$; R_T — радиус затупления; β — угол наклона касательной в точке сопряжения.

Расчет коэффициентов нормальной силы и центра давления

Для тонких тел вращения коэффициент нормальной силы c_y при околосвуковых скоростях при прочих равных условиях может быть на 25...35 % больше, чем при дозвуковых скоростях. Так, согласно приведенным на рис. 9.32 данным, отношение c_y/α достигает максимального значения при $M_\infty = 1$, причем оно примерно на 35 % больше соответствующего значения при $M_\infty = 0,4$.

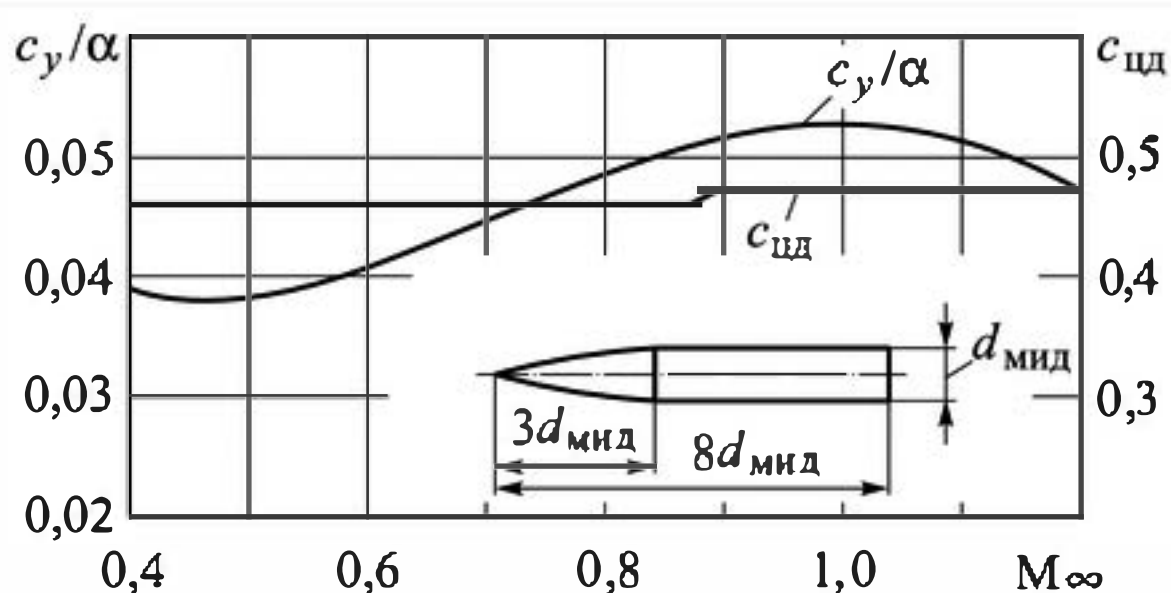


Рис. 9.32. Изменение отношения c_y/α и коэффициента $c_{цд}$ для тела вращения с параболической головной частью

С увеличением нормальной силы возрастает и момент тангажа, в результате чего положение центра давления, а следовательно, и $c_{цд}$ практически не меняется (см. рис. 9.32). Зафиксированное изменение коэффициента $c_{цд}$ при переходе через скорость звука составляет примерно 2 %.

Подобная картина наблюдалась при исследовании обтекания конических тел вращения. Так, у тонкого конуса при сверхзвуковых скоростях $c_{цд} \approx 0,667$. При дозвуковых скоростях у конуса с углом при вершине $\beta_k = 15^\circ$ коэффициент $c_{цд}$ на 4 % меньше, чем при сверхзвуковых скоростях, т. е. центр давления расположен ближе к острию головки. При переходе через скорость звука коэффициент центра давления незначительно увеличивается, достигая при $M_\infty = 1$ значения $c_{цд} = 0,65$.

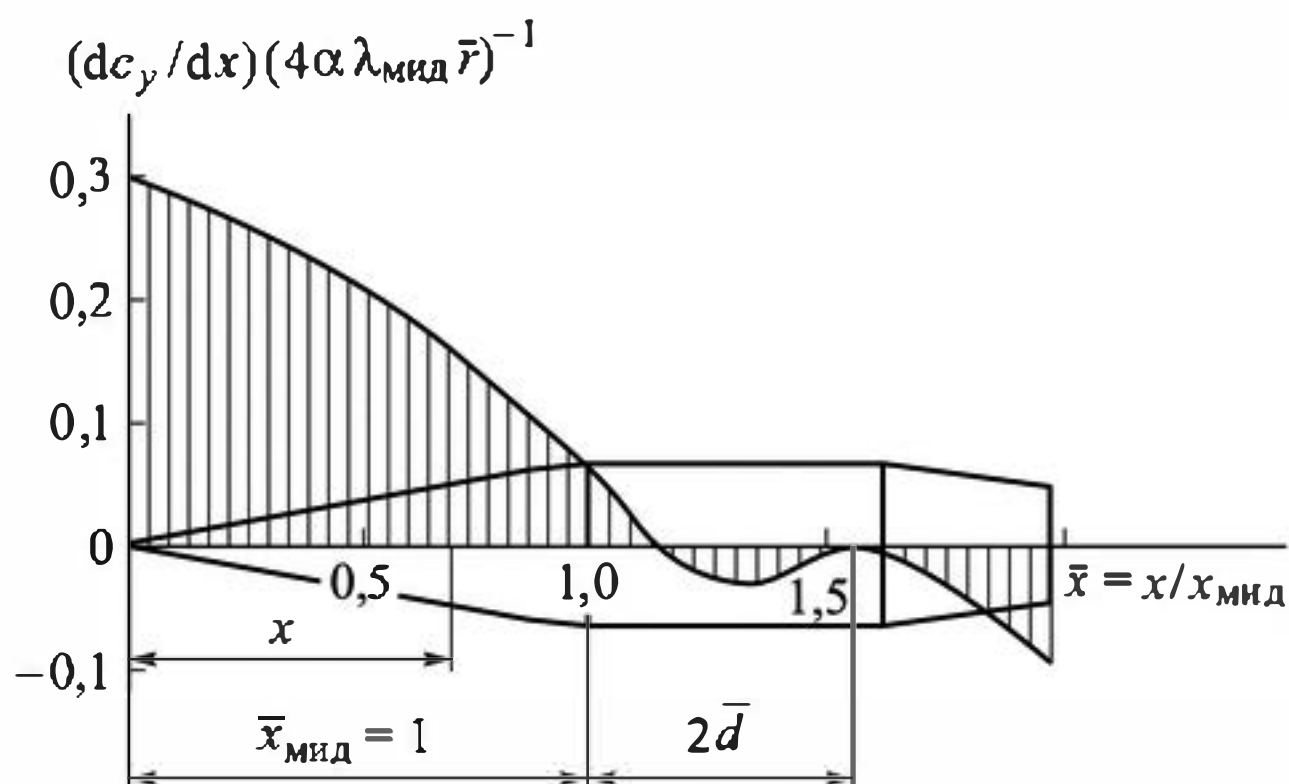


Рис. 9.33. Распределение величины, характеризующей производную коэффициента нормальной силы, вдоль тонкого тела вращения

У тел, представляющих собой комбинацию конической головной части с цилиндрическим хвостовым участком, наблюдается сдвиг центра давления ко дну конуса. Происходит это как при до-, так и при околозвуковых скоростях. Величина сдвига зависит от длины примыкающего к конусу цилиндрического участка.

У тонких конических головок в интервале чисел $M_\infty = 0,7 \dots 1,2$ коэффициент центра давления возрастает примерно на $5 \dots 7 \%$ при длине цилиндрического участка $0,5d_{\text{мид}}$ и на $7 \dots 13 \%$ при длине цилиндрического участка $0,75d_{\text{мид}}$.

При исследовании несущей способности корпуса ЛА практический интерес представляют данные о распределении нормальной силы вдоль его длины (рис. 9.33). Видно, что на цилиндрической поверхности корпуса коэффициент c_y интегрально близок к нулю, а значит, влияние цилиндрического среднего участка тела на нормальную силу незначительно. В хвостовой части коэффициент c_y принимает отрицательные значения, увеличиваясь к донному срезу, поэтому влияние кормы существенно в тех случаях, когда ее длина и сужение достаточно велики.

При небольших углах атаки коэффициент c_y у тонких тел мало зависит от числа M_∞ и удлинения, а его зависимость от угла атаки близка к линейной:

$$c_y = 2\alpha.$$

9.9. Расчет коэффициентов трения на телах вращения

При расчете коэффициента трения форму реального ЛА упрощают и представляют ее состоящей из конуса и цилиндра:

$$c_f = \frac{X_f}{q_\infty S_{\text{мид}}} = A c_{f_k}^{\text{пл}} \frac{\rho_k V_k^2}{\rho_\infty V_\infty^2} \frac{S_{\text{бок}}^k}{S_{\text{мид}}} + c_{f_{\text{цил}}}^{\text{пл}} \frac{S_{\text{бок}}^{\text{цил}}}{S_{\text{мид}}},$$

где A — коэффициент, учитывающий переход от пластины к конусу; $S_{\text{бок}}^k$, $S_{\text{бок}}^{\text{цил}}$ — площади боковой поверхности конуса и цилиндра (индекс «пл» означает, что коэффициенты рассчитаны по формулам для плоской пластины).

Рассмотрим основные соотношения для расчета трения на конусе.

Сверхзвуковой поток около заостренного конуса обладает тем свойством, что вдоль образующей конической поверхности скорость

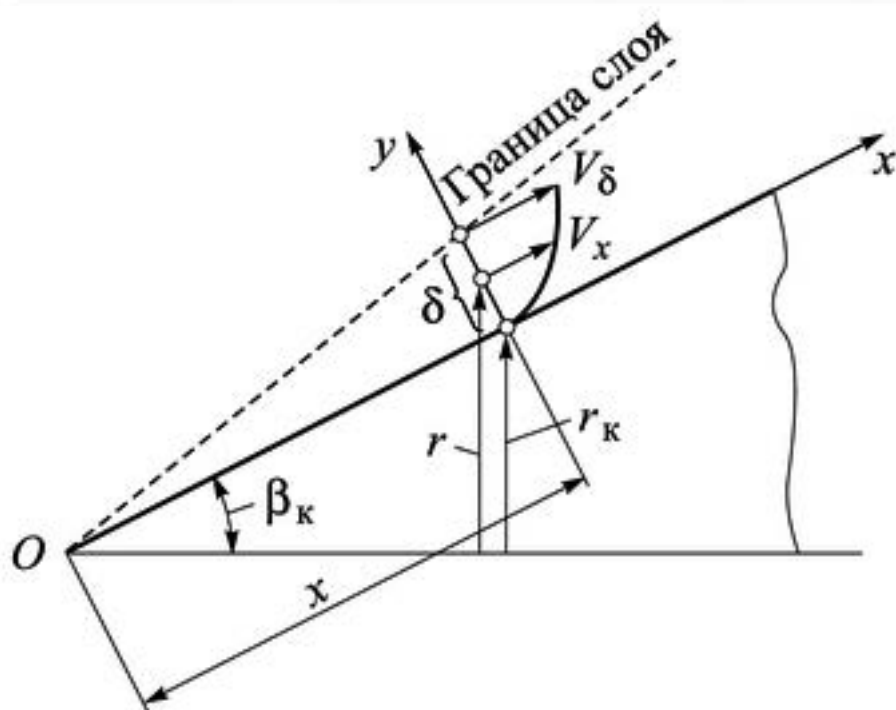


Рис. 9.34. Схема пограничного слоя на конусе

постоянна и, следовательно, продольный градиент давления равен нулю. Таким же свойством обладает невязкое течение около плоской пластины, вдоль которой параметры на внешней границе пограничного слоя постоянны. Это сходство обтекания позволяет использовать результаты расчета пограничного слоя на плоской пластине для определения соответствующих параметров вязкого потока около конической поверхности.

Воспользуемся для этой цели интегральным соотношением (5.1), записанным для условий обтекания криволинейной поверхности (рис. 9.34):

$$-\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho r_k V_x^2 dy + V_\delta \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho r_k V_x dy - r_k \delta \frac{dp_\delta}{dx} = r_k \tau_{ст}, \quad (9.47)$$

где r_k — расстояние от оси до точки на поверхности конуса с координатой x (при $r_k \approx r$); $\tau_{ст}$ — напряжение трения в этой точке.

Учитывая, что параметры газа на внешней границе пограничного слоя на конусе одинаковые ($V_\delta = V_k = \text{const}$; $p_\delta = p_k = \text{const}$ и т. д.) и продольный градиент давления равен нулю ($dp_\delta/dx = 0$), соотношение (9.47) представим в виде

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho r_k V_x (V_x - V_k) dy = -r_k \tau_{ст}. \quad (9.48)$$

Рассмотрим расчет *ламинарного пограничного слоя*. В произвольной точке какого-либо его сечения, расположенного от острия конуса на расстоянии x , напряжение трения $\tau = \mu(\partial V_x / \partial y)$. Тогда в уравнении (9.48) можно заменить $dy = (\mu/\tau) dV_x$. Разделив обе части полученного уравнения на $\rho_k V_k^3 \mu_k$, где ρ_k , μ_k — соответственно плотность ($\rho_k = \rho_\delta$) и динамическая вязкость ($\mu_k = \mu_\delta$) на внешней границе пограничного слоя конуса, получим следующее интегральное соотношение:

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{\rho V_x}{\rho_k V_k} \frac{\mu}{\mu_k} \frac{r_k}{\tau} \left(1 - \frac{V_x}{V_k}\right) d\left(\frac{V_x}{V_k}\right) = \frac{r_k \tau_{ст}}{\rho_k V_k^3 \mu_k}. \quad (9.49)$$

Для рассматриваемого случая отношение скоростей $V_x/V_k = f_1(y/\delta)$ является функцией только относительной координаты y/δ и не зависит от x . Следовательно, в соответствии с формулами $\tau = \mu(\partial V_x/\partial y)$ и $\tau_{ст} = \mu_k(dV_x/dy)_k$ отношение касательных напряжений в слое будет также зависеть от относительной координаты y/δ , т. е. $\tau/\tau_{ст} = f_2(y/\delta)$. Внесем функции f_1, f_2 в уравнение (9.49) и введем обозначение

$$J = \int_0^1 \frac{\rho V_x}{\rho_k V_k} \frac{\mu}{\mu_k} \frac{1-f_1}{f_2} df_1.$$

Принимая во внимание, что в случае постоянной температуры на всей поверхности конуса отношение μ/μ_k не зависит от координаты x и что от этой координаты не зависит также отношение плотностей ρ/ρ_k , являющееся функцией V_x/V_k , получаем зависимость

$$J \frac{r_k}{\tau_{ст}} \frac{d}{dx} \left(\frac{r_k}{\tau_{ст}} \right) = \frac{r_k^2}{\rho_k V_k^3 \mu_k}. \quad (9.50)$$

Заменив в правой части этого уравнения r_k на $x \sin \beta_k$ и разделив переменные, находим

$$\frac{J}{2} d \left(\frac{r_k}{\tau_{ст}} \right)^2 = \frac{\sin^2 \beta_k}{\rho_k V_k^3 \mu_k} x^2 dx$$

или после интегрирования

$$\frac{J}{2} \frac{r_k^2}{\tau_{ст}^2} = \frac{1}{3} \frac{x^3 \sin^2 \beta_k}{\rho_k V_k^3 \mu_k} + C. \quad (9.51)$$

Пусть в начальной точке (при $x = 0$) отношение $r_k^2/\tau_{ст}^2 = 0$, а значит, в правой части уравнения (9.51) $C = 0$. Тогда, выполнив обратную замену $x \sin \beta_k = r_k$ и обозначив напряжение трения на конусе $\tau_{стк}$, получим

$$\tau_{стк} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{J}{2} \frac{\rho_k V_k^3 \mu_k}{x}}. \quad (9.52)$$

Аналогичное выражение можно получить для напряжения трения $\tau_{стпл}$ на плоской пластине. При этом будем исходить из предположения, что пластина обтекается гипотетическим сверхзвуко-

вым потоком с такими же параметрами, как на конусе. Тогда после интегрирования уравнения (9.50) имеем

$$\tau_{стпл} = \sqrt{\frac{J}{2} \frac{\rho_k V_k^3 \mu_k}{x}}. \quad (9.53)$$

Из формул (9.52) и (9.53) вытекает важное соотношение:

$$\tau_{стк} = \sqrt{3} \cdot \tau_{стпл} \approx 1,73 \tau_{стпл}, \quad (9.54)$$

в соответствии с которым напряжение трения на конусе в $\sqrt{3}$ раз больше, чем напряжение трения на пластине, вычисленное по параметрам на конусе. Аналогично для местного и среднего коэффициентов трения, рассчитанных по скоростному напору $q_k = \rho_k V_k^2 / 2$ возмущенного потока, получаем

$$c_{fxk} = \sqrt{3} \cdot c_{fxпл}; \quad c_{fk} = \sqrt{3} \cdot c_{fпл}.$$

Коэффициенты трения, вычисленные по параметрам невозмущенного течения, определяются зависимостями

$$c_{fx\infty k} = c_{fxk} \frac{q_k}{q_\infty} = \sqrt{3} \cdot c_{fxпл} \frac{\rho_k V_k^2}{\rho_\infty V_\infty^2}; \quad (9.55)$$

$$c_{f\infty k} = c_{fk} \frac{q_k}{q_\infty} = \sqrt{3} \cdot c_{fпл} \frac{\rho_k V_k^2}{\rho_\infty V_\infty^2}. \quad (9.56)$$

Продольную силу от трения можно рассчитать по коэффициенту трения $c_{f\infty k}$ и боковой поверхности $S_{бокк}$ конуса:

$$X_f = c_{f\infty k} q_\infty S_{бокк} = \sqrt{3} \cdot c_{fпл} (\rho_k V_k^2 / 2) S_{бокк}.$$

Соотношения для напряжения и коэффициента трения для плоской пластины приведены в гл. 5.

Можно установить приближенную зависимость также и между толщинами пограничного слоя на конусе и пластине. Воспользовавшись методом Польгаузена для расчета распределения скорости по сечению пограничного слоя в несжимаемой среде, запишем

$$\delta_{пл} / \delta_k = \tau_{стк} / \tau_{стпл},$$

откуда, согласно (9.54),

$$\delta_k = (\tau_{стпл} / \tau_{стк}) \delta_{пл} = \delta_{пл} / \sqrt{3} = 0,578 \delta_{пл}. \quad (9.57)$$

Таким образом, в соответствии с формулой (9.57) толщина ламинарного пограничного слоя на конусе в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем на пластине.

Воспользовавшись тем же интегральным соотношением (5.1), можно получить аналогичные зависимости для *турбулентного пограничного слоя*. Связь между толщинами турбулентного пограничного слоя на конусе и пластинке для воздуха ($k = 1,4$) имеет вид

$$\delta_k = (4/9)^{4/5} \delta_{пл} = 0,523 \delta_{пл}. \quad (9.58)$$

Для напряжения трения справедливо соотношение

$$\tau_{стк} / \tau_{стпл} = (\delta_{пл} / \delta_k)^{1/4}$$

или с учетом (9.58)

$$\tau_{стк} = (9/4)^{1/5} \tau_{стпл} = 1,17 \tau_{стпл}. \quad (9.59)$$

Сопоставляя выражения (9.54) и (9.59), можно сделать вывод, что в случае турбулентного пограничного слоя напряжение трения на конусе меньше отличается от соответствующего напряжения на пластине, чем при ламинарном слое. Это объясняется более сильным влиянием перемешивания потока на силу трения в турбулентном пограничном слое по сравнению с воздействием формы поверхности. Что касается толщин (см. выражения (9.57) и (9.58)), то их значения на конусе для турбулентного и ламинарного пограничного слоев отличаются примерно на 10 %. Такое небольшое различие свидетельствует о более сильном влиянии на толщину слоя формы обтекаемых поверхностей, чем перемешивания.

По известному напряжению трения можно вычислить местный и средний коэффициенты трения для возмущенного потока:

$$c_{fxk} = 1,17 c_{fxпл}; \quad c_{fk} = 1,17 c_{fпл}.$$

Чтобы пересчитать их на скоростной напор невозмущенного потока, необходимо применить формулы, аналогичные (9.55) и (9.56).

Продольная сила от трения при турбулентном пограничном слое определяется выражением

$$X_f = 1,17 c_{fпл} (\rho_k V_k^2 / 2) S_{бокк}. \quad (9.60)$$

Коэффициент трения на цилиндре рассчитывают по формулам для плоской пластины с учетом характера пограничного слоя и предыстории его развития (начальная толщина пограничного слоя на цилиндре не равна нулю).

10. АЭРОДИНАМИКА КРЫЛЬЕВ

Важнейшим элементом ЛА является крыло, которое в основном определяет его аэродинамические характеристики. Исследование этих характеристик непосредственно связано с аэродинамическим расчетом изолированных крыльев. Аэродинамические свойства крыла при заданных условиях движения зависят от его формы в плане и вида профиля. Расчет обтекания крыла сводится главным образом к определению количественной зависимости между его аэродинамическими силами и моментами и геометрическими параметрами, характеризующими форму крыла в плане и вид профиля.

В главе рассмотрены вопросы, связанные с расчетом обтекания профиля и крыла дозвуковым потоком. Полученные результаты, имеющие самостоятельное значение в аэродинамике малых скоростей, применимы и для аэродинамических исследований при больших дозвуковых скоростях. Кроме того, изложены методы аэродинамического расчета профиля и крыла при сверхзвуковых скоростях.

10.1. Силы и моменты, действующие на крыло

Рассмотрим элемент $\Delta S_{\text{крыло}}$ поверхности крыла, единичную внешнюю нормаль к которой обозначим $\vec{n}$ (рис. 10.1). Нормальная сила от давления, действующая на крыло, определяется выражением

$$Y = - \iint_{\Sigma} p \cos(n, y) dS_{\text{крыло}}, \quad (10.1)$$

где Σ — площадь поверхности крыла, а знак «—» поставлен потому, что давление действует в направлении, противоположном $\vec{n}$. Поскольку трение практически не влияет на нормальную силу, можно считать, что записанная формула ее полностью определяет.

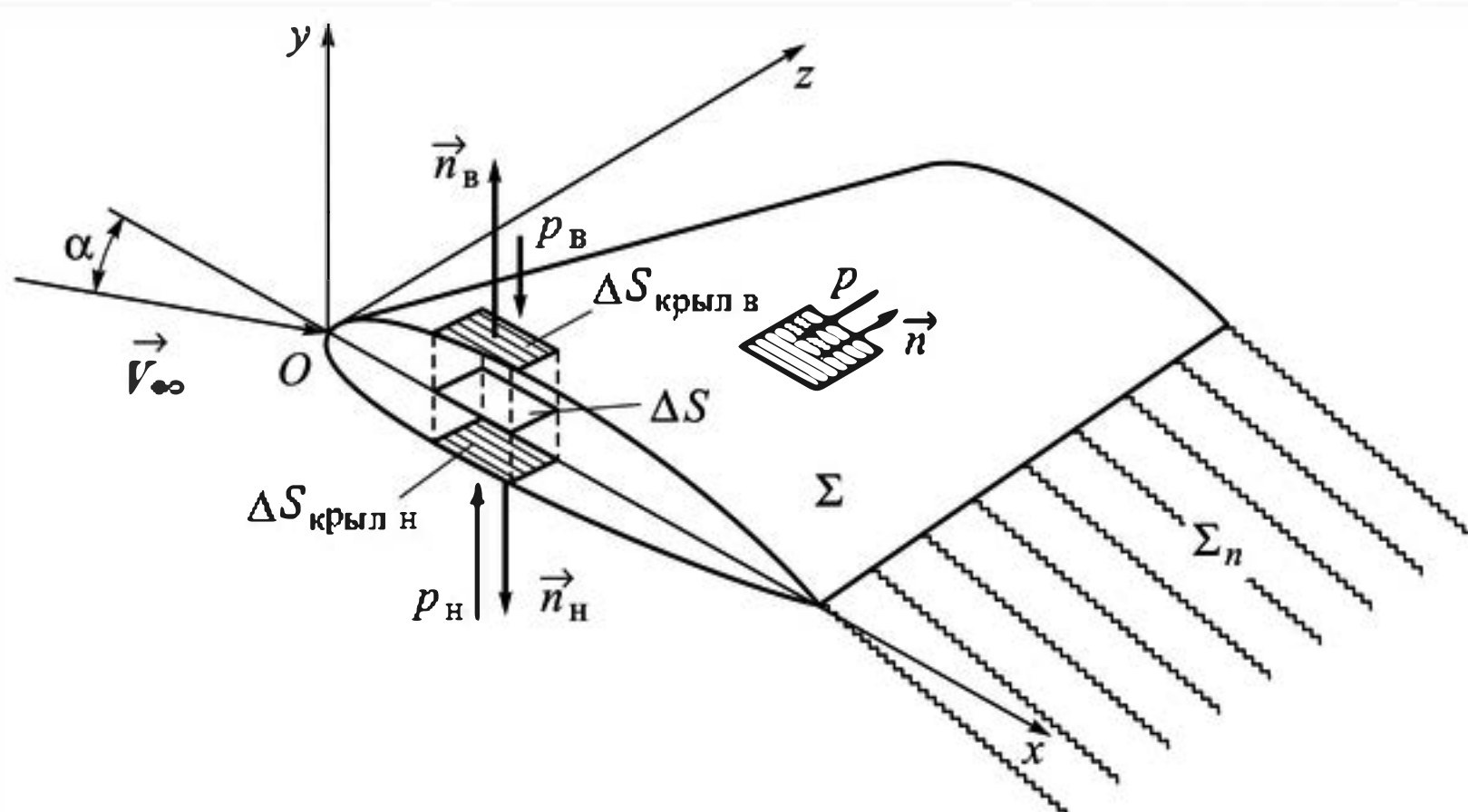


Рис. 10.1. Определение сил и моментов, действующих на крыло

Условимся часть поверхности крыла, где угол между внешней нормалью $\vec{n}$ и осью Oy острый, т. е. $\cos(n, y) > 0$, считать верхней, а часть, где он тупой, т. е. $\cos(n, y) < 0$, — нижней. Обозначим давление на верхней поверхности p_v , а на нижней — p_n . Учитывая, что

$$\cos(n_v, y)dS_{\text{крыл } v} = dS; \quad \cos(n_n, y)dS_{\text{крыл } n} = -dS,$$

где n_v и n_n — внешние нормали к верхней и нижней поверхностям соответственно, из выражения (10.1) находим

$$Y = \iint_S (p_n - p_v) dS,$$

где S — площадь крыла в плане.

Выражая p_n и p_v через коэффициенты давлений $\bar{p}_n$ и $\bar{p}_v$ и переходя к коэффициенту нормальной силы, получаем

$$c_{y \text{ крыл}} = \frac{Y}{\rho_{\infty} S} = \frac{1}{S} \iint_S (\bar{p}_n - \bar{p}_v) dS, \quad (10.2)$$

причем при малых углах атаки $c_{y^* \text{ крыл}} \cong c_{y \text{ крыл}}$.

При расчете коэффициента нормальной силы для профиля крыла надо в формуле (10.2) принять $dS = dx dz$, $S = b \Delta z$ и интегрировать по x от 0 до b , а по z — от z до $z + \Delta z$. В результате получаем*

* Здесь и далее в этой главе для упрощения набора индекс «пр», характерный для профиля крыла, у аэродинамических коэффициентов опущен, а индекс «крыл» для крыла сохранен.

$$c_y = \frac{1}{b} \int_0^b (\bar{p}_n - \bar{p}_v) dx = \int_0^1 (\bar{p}_n - \bar{p}_v) d\bar{x}, \quad (10.3)$$

где $\bar{x} = x/b$.

По этим же формулам можно рассчитать коэффициент нормальной силы $c_{y \text{ сеч}}$ для сечения крыла. При малых углах атаки $c_{ya} \cong c_y$, $c_{ya \text{ сеч}} \cong c_{y \text{ сеч}}$.

Определим теперь коэффициент c_{xp} продольной силы X_p от давления. Суммируя силы от давления, действующие на поверхность Σ вдоль оси Ox (см. рис. 10.1), получаем

$$X_p = - \iint_{\Sigma} p \cos(n, x) dS_{\text{крыл}}.$$

Переходя от интегрирования по Σ к интегрированию по S и используя введенные выше обозначения и соотношения, находим

$$c_{xp \text{ крыл}} = \frac{1}{S} \iint_S \left(\bar{p}_n \frac{\cos(n_n, x)}{\cos(n_n, y)} - \bar{p}_v \frac{\cos(n_v, x)}{\cos(n_v, y)} \right) dS. \quad (10.4)$$

Эта формула определяет коэффициент $c_{xp \text{ крыл}}$ в общем случае. Из курса аналитической геометрии известно:

$$\cos(n_n, x) = \frac{1}{\Delta_n} \frac{\partial y_n}{\partial x}; \quad \cos(n_n, y) = -\frac{1}{\Delta_n};$$

$$\cos(n_v, x) = -\frac{1}{\Delta_v} \frac{\partial y_v}{\partial x}; \quad \cos(n_v, y) = \frac{1}{\Delta_v},$$

$$\text{где } \Delta_n = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_n}{\partial z} \right)^2}; \quad \Delta_v = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_v}{\partial z} \right)^2}.$$

Следовательно, уравнение (10.4) можно представить в виде

$$c_{xp \text{ крыл}} = \frac{1}{S} \iint_S \left(\bar{p}_v \frac{\partial y_v}{\partial x} - \bar{p}_n \frac{\partial y_n}{\partial x} \right) dS. \quad (10.5)$$

Полагая $S = b \Delta z$, $dS = dx dz$ и интегрируя (10.5) по x от 0 до b , а по z от z до $z + \Delta z$, получаем следующую формулу для расчета коэффициента продольной силы от давления для профиля крыла:

$$c_{xp} = \frac{1}{b} \int_0^b \left(\bar{p}_v \frac{dy_v}{dx} - \bar{p}_n \frac{dy_n}{dx} \right) dx = \int_0^1 \left(\bar{p}_v \frac{dy_v}{d\bar{x}} - \bar{p}_n \frac{dy_n}{d\bar{x}} \right) d\bar{x}. \quad (10.6)$$

Создаваемый давлением момент тангажа относительно оси Oz определяется соотношением

$$M_z = - \iint_{\Sigma} p x \cos(n, y) dS_{\text{крыл}} + \iint_{\Sigma} p y \cos(n, x) dS_{\text{крыл}}, \quad (10.7)$$

где x, y — координаты точки на поверхности Σ .

Поскольку трение, как правило, мало сказывается на моменте M_z , можно считать, что соотношение (10.7) определяет полный момент тангажа. Продольная сила от давления создает относительно малый момент, которым обычно пренебрегают. Таким образом, формула для вычисления полного момента тангажа имеет вид

$$M_{z \text{ крыл}} = - \iint_{\Sigma} p x \cos(n, y) dS_{\text{крыл}}.$$

Переходя от интегрирования по Σ к интегрированию по S , получаем следующее соотношение для расчета коэффициента момента тангажа:

$$m_{z \text{ крыл}} = \frac{M_{z \text{ крыл}}}{q_{\infty} S b} = - \frac{1}{S b} \iint_S (\bar{p}_n - \bar{p}_v) x dS, \quad (10.8)$$

где b — длина хорды крыла, обычно САХ.

Коэффициент момента тангажа для профиля (сечения) крыла

$$m_z = - \frac{1}{b^2} \int_0^b (\bar{p}_n - \bar{p}_v) x dx. \quad (10.9)$$

Отметим, что момент, создаваемый продольной силой, необходимо учитывать, если ось Oz находится на значительном расстоянии от базовой плоскости крыла.

10.2. Аэродинамические характеристики профиля и крыла в несжимаемом потоке

Физическая картина обтекания профиля и крыла при малом угле атаки

Вначале рассмотрим обтекание профиля. Будем считать, что хвостовая часть профиля заострена и угол заострения $2\tau > 0$. Примем также, что угол атаки небольшой и профиль обтекается без отрыва потока.

Вблизи передней кромки набегающий поток разделяется на два: один обтекает верхнюю поверхность, другой — нижнюю. На задней кромке потоки сливаются (рис. 10.2, *а*). Опыт показывает, что течения, при которых поток огибает заднюю кромку (рис. 10.2, *б* и *в*), не реализуются. Это соответствует гипотезе Чаплыгина — Жуковского, согласно которой при безотрывном обтекании крыла идеальным газом скорость потока на острой задней кромке должна быть конечной. По этой гипотезе поток не может огибать острую кромку, поскольку теоретически доказано, что в этом случае его скорость на кромке должна быть бесконечно большой, а это физически невозможно.

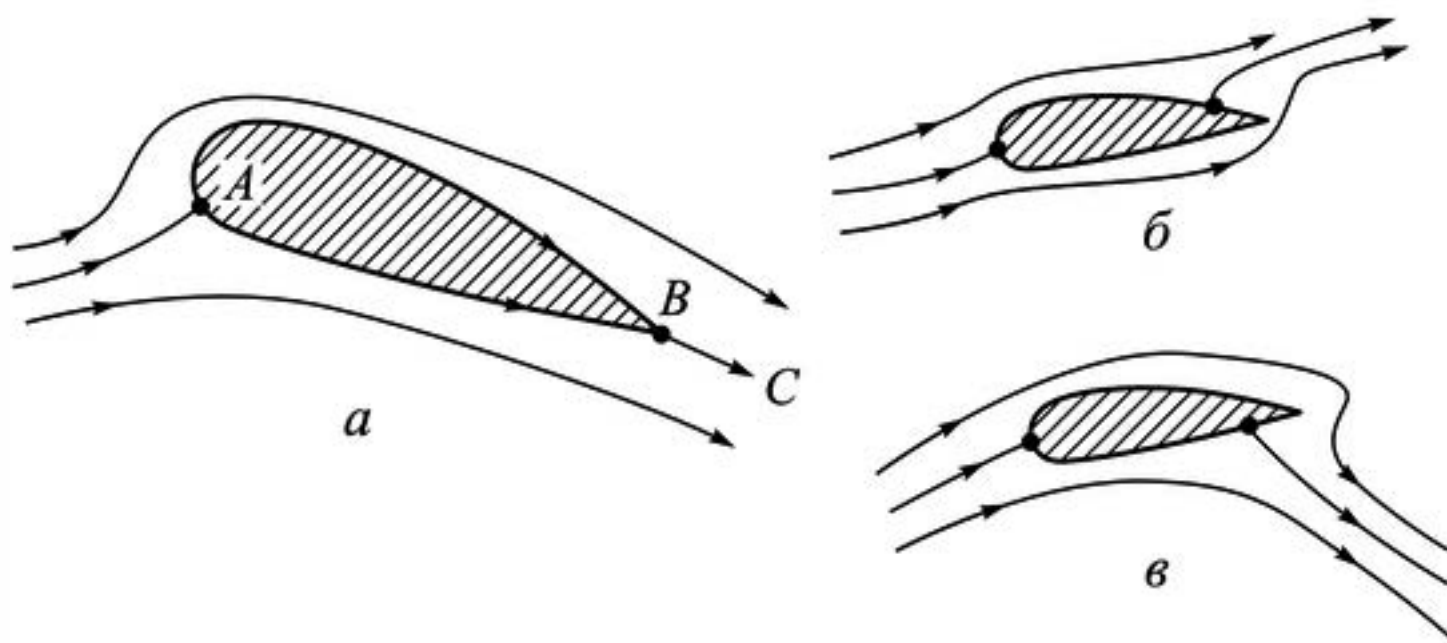


Рис. 10.2. Схемы обтекания задней острой кромки крыла

При обтекании профиля идеальным несжимаемым газом (см. рис. 10.2, *а*) точка *A*, где поток разделяется, является *критической*. Здесь скорость $V = 0$, давление равно давлению торможения $p = p_0$ и коэффициент $\bar{p} = (p - p_\infty)/q_\infty = 1$. Критической является и точка *B* на задней кромке. К этой точке подходят линии тока, идущие по верхней и нижней поверхностям профиля, и от нее отходит линия тока *BC*.

В каждой точке линии тока скорость направлена по касательной. В точке *B* пересекаются три линии тока. Поэтому скорость здесь равна нулю, поскольку частица газа не может одновременно двигаться по разным направлениям.

Изменение газодинамических переменных при переходе от передней критической точки к задней определяется формой струек газа у поверхности. Схематически они изображены на рис. 10.2, *а*.

Струйки у верхней и нижней поверхностей имеют максимальные площади поперечных сечений у передней и задней критических точек. При движении от передней критической точки к зад-

ней площади поперечных сечений струек сначала уменьшаются, а затем увеличиваются. Соответственно сначала скорость растет, давление и коэффициент $\bar{p}$ уменьшаются, а затем скорость падает, давление и $\bar{p}$ увеличиваются. При положительном угле атаки верхняя струйка имеет большее сужение, чем нижняя. Поэтому на верхней поверхности возникает большее разрежение (рис. 10.3).

Реальный воздух вязкий. Вязкость создает сопротивление трения. Но этим ее роль не ограничивается. Она влияет еще на распределение давления. В результате появляется дополнительное сопротивление, изменяется подъемная сила, смещается аэродинамический фокус по углу атаки.

При обтекании профиля у его поверхности возникает тонкий заторможенный слой, называемый *пограничным*. Замедление течения в пограничном слое оказывает вытесняющее действие на поток. Это влияние оценивают толщиной вытеснения на верхней δ_v^* и нижней δ_n^* поверхностях (на рисунке толщины вытеснения для наглядности намного увеличены по сравнению с реальными).

Чтобы найти давления, действующие на профиль в вязком газе, надо построить полубесконечное фиктивное тело. Его получают, смещая точки контура профиля в направлении внешней нормали на толщину вытеснения δ^* и присоединяя к деформированному профилю след (рис. 10.4). Поверхность построенного тела называют *поверхностью вытеснения*. Затем следует рассчитать давления, действующие на построенное фиктивное тело при его обтекании идеальным газом. Эти давления практически совпадают с давлениями, действующими на рассматриваемый профиль в вязком газе.

Поэтому для того чтобы оценить влияние вязкости на аэродинамические характеристики, надо рассмотреть, как изменяется рас-

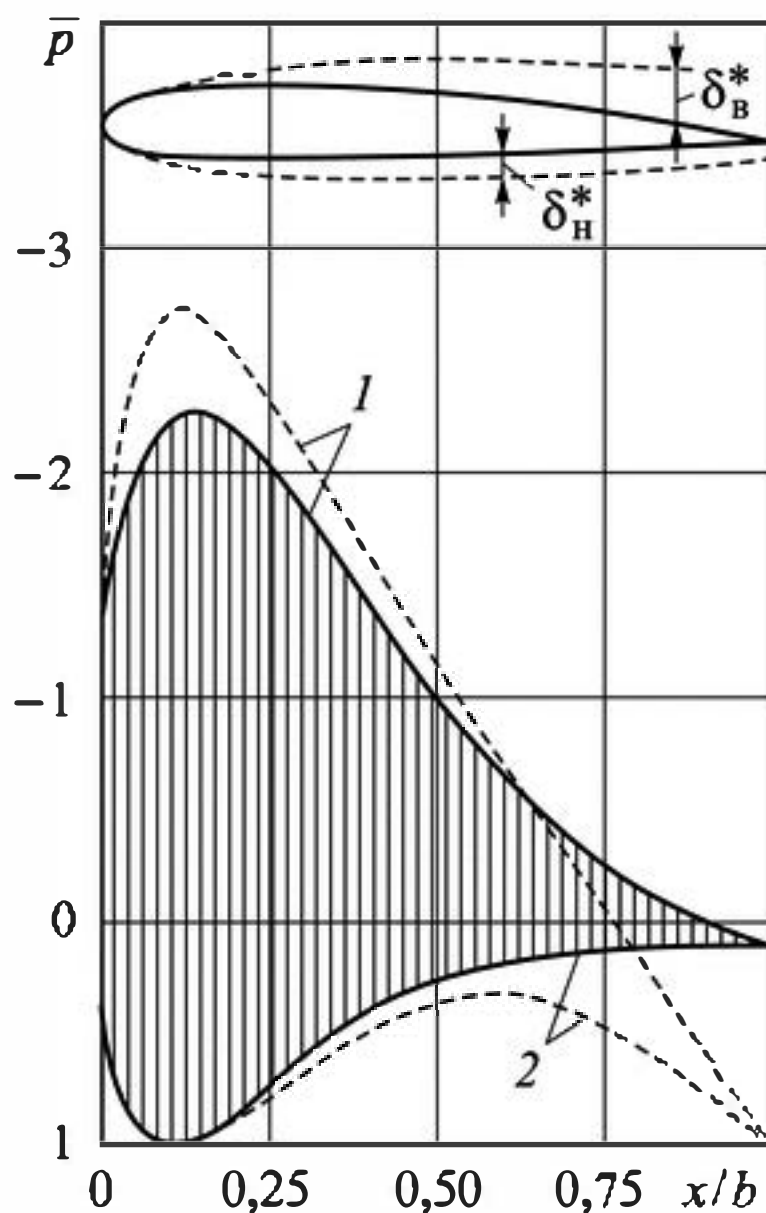


Рис. 10.3. Эпюры коэффициента давления, действующего на верхнюю (1) и нижнюю (2) поверхности профиля (сплошная линия – вязкий газ; штриховая – идеальный газ)

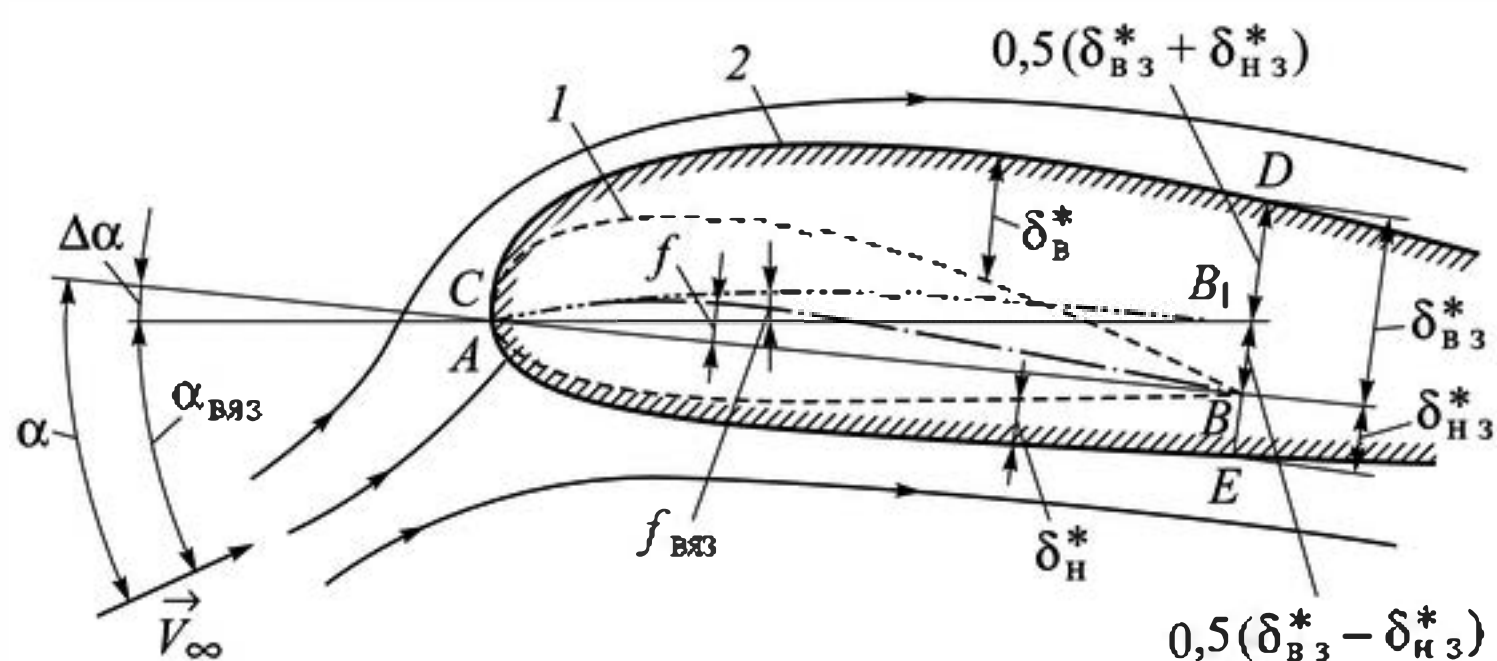


Рис. 10.4. Схема обтекания профиля вязким газом:

1 – профиль; 2 – поверхность вытеснения

пределение давлений при переходе от профиля к полубесконечному телу.

В идеальном газе задняя кромка профиля является критической точкой, в которой скорость обращается в нуль, а давление достигает максимально возможного значения, равного давлению торможения. При обтекании полубесконечного тела в сечении, соответствующем задней кромке профиля, струйки расширяются меньше, скорость не обращается в нуль и на профиль действуют давления, меньшие давления торможения. Здесь возможно даже разрежение. Уменьшаются давления и на некотором участке поверхности профиля вблизи задней кромки. В результате возникает вызванное вязкостью сопротивление, которое возрастает с увеличением c_{ya} .

Даже при малых углах атаки влияние вязкости приводит к отрыву потока, что несколько увеличивает сопротивление. На углах атаки, близких к критическим, это сопротивление возрастает уже значительно.

Рассмотрим влияние вязкости на коэффициент c_{ya} . При $c_{ya} > 0$ в любом сечении $x = \text{const}$ толщина вытеснения на верхней поверхности больше, чем на нижней: $\delta_v^* > \delta_n^*$, и на задней кромке $\delta_{v3}^* > \delta_{n3}^*$ (см. рис. 10.4). Во-первых, это объясняется тем, что при $c_{ya} > 0$ на верхней поверхности расстояние по контуру профиля от передней критической точки до рассматриваемого сечения больше, чем на нижней, а δ^* растет с увеличением этого расстояния. Во-вторых, при $c_{ya} > 0$ на верхней поверхности точка перехода ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное (она находится вблизи точки минимума давления) располагается ближе к носу профиля. Поэтому здесь турбулентный пограничный слой более протяжен-

ный, а толщина вытеснения при турбулентном течении растет по потоку быстрее, чем при ламинарном.

Таким образом, средняя линия полубесконечного тела находится на $0,5(\delta_v^* - \delta_n^*)$ выше средней линии профиля. Ее вогнутость меньше вогнутости средней линии профиля: $f_{\text{вяз}} < f$, и точка B_1 , соответствующая задней кромке профиля, выше последней на $0,5(\delta_{v3}^* - \delta_{n3}^*)$.

Часть полубесконечного тела, ограниченную поверхностью вытеснения и плоскостью DE , можно рассматривать как профиль с вогнутостью $f_{\text{вяз}}$, установленный под углом атаки $\alpha_{\text{вяз}} = \alpha - \Delta\alpha$, где $\Delta\alpha$ — угол между CB и CB_1 (см. рис. 10.4).

Распределение давлений на профиле в вязком газе практически совпадает с распределением давлений на поверхности вытеснения в идеальном газе. Поэтому коэффициент подъемной силы профиля с вогнутостью f , установленного под углом атаки α в вязком газе, равен коэффициенту подъемной силы профиля с вогнутостью $f_{\text{вяз}}$ при угле атаки $\alpha_{\text{вяз}} = \alpha - \Delta\alpha$ в идеальном газе.

Таким образом, при $c_{ya} > 0$ верхняя поверхность полубесконечного тела получается менее искривленной, чем у профиля. Прилегающая к ней струйка суживается меньше. В связи с этим на верхней поверхности полубесконечного тела возникает меньшее разрежение, чем на верхней поверхности профиля. Следовательно, вязкость уменьшает разрежение на большей части верхней поверхности профиля (см. рис. 10.3). На нижней поверхности при переходе от профиля к полубесконечному телу расширение струйки после минимального сечения уменьшается, поэтому давление здесь падает. Следовательно, вязкость снижает давление на нижней поверхности.

В результате уменьшается коэффициент подъемной силы профиля. Возникающее вследствие влияния вязкости перераспределение давлений (см. рис. 10.3) приводит к смещению фокуса по углу атаки вперед.

Рассмотрим теперь безотрывное обтекание крыла конечного размаха идеальным несжимаемым газом. Для простоты возьмем прямоугольное крыло (рис. 10.5). При положительной подъемной силе снизу на крыло действует повышенное давление, а сверху — пониженное. К концам крыла давление на нижней его поверхности уменьшается, а на верхней увеличивается. В результате частицы воздуха под крылом перемещаются к его концам, а над ним — к плоскости симметрии. На концах крыла они перетекают с нижней поверхности на верхнюю, огибая боковую кромку. Уносимые набе-

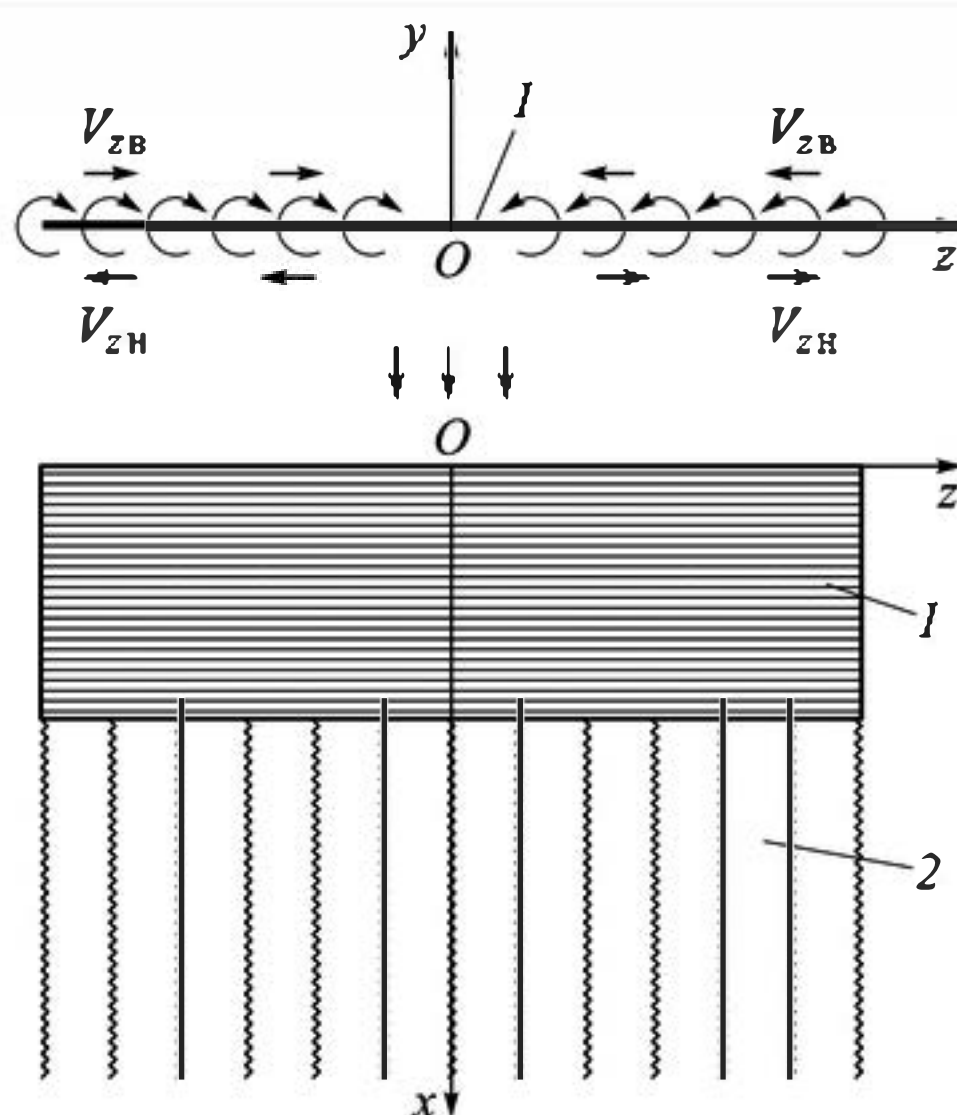


Рис. 10.5. Схема обтекания крыла конечного размаха:
 I – крыло; 2 – вихревая пелена

гающим потоком частицы воздуха продолжают за крылом поперечное движение в противоположных направлениях. Так возникает поверхность разрыва поперечных скоростей за крылом. Известно, что поверхность разрыва касательных скоростей является вихревой поверхностью. Поэтому за крылом конечного размаха при его движении возникает вихревая поверхность, которую часто называют *вихревой пеленой*. Вихревые линии этой поверхности совпадают с линиями тока.

В полете крыло, передвигаясь вперед, закручивает все новые и новые массы воздуха, что приводит к возрастанию кинетической энергии воздуха. Работу, увеличивающую кинетическую энергию, совершает крыло. При этом оно испытывает со стороны воздуха дополнительное лобовое сопротивление X_{ai} , называемое *индуктивным* (вихревым).

***Расчет обтекания тонкого профиля в несжимаемом потоке.
 Теорема Жуковского «в малом»***

Рассмотрим расчет обтекания установившимся несжимаемым потоком тонкого слабоизогнутого профиля под малым углом атаки (рис. 10.6). Получаемые в результате аэродинамические характеристики профиля могут быть непосредственно использованы для случа-

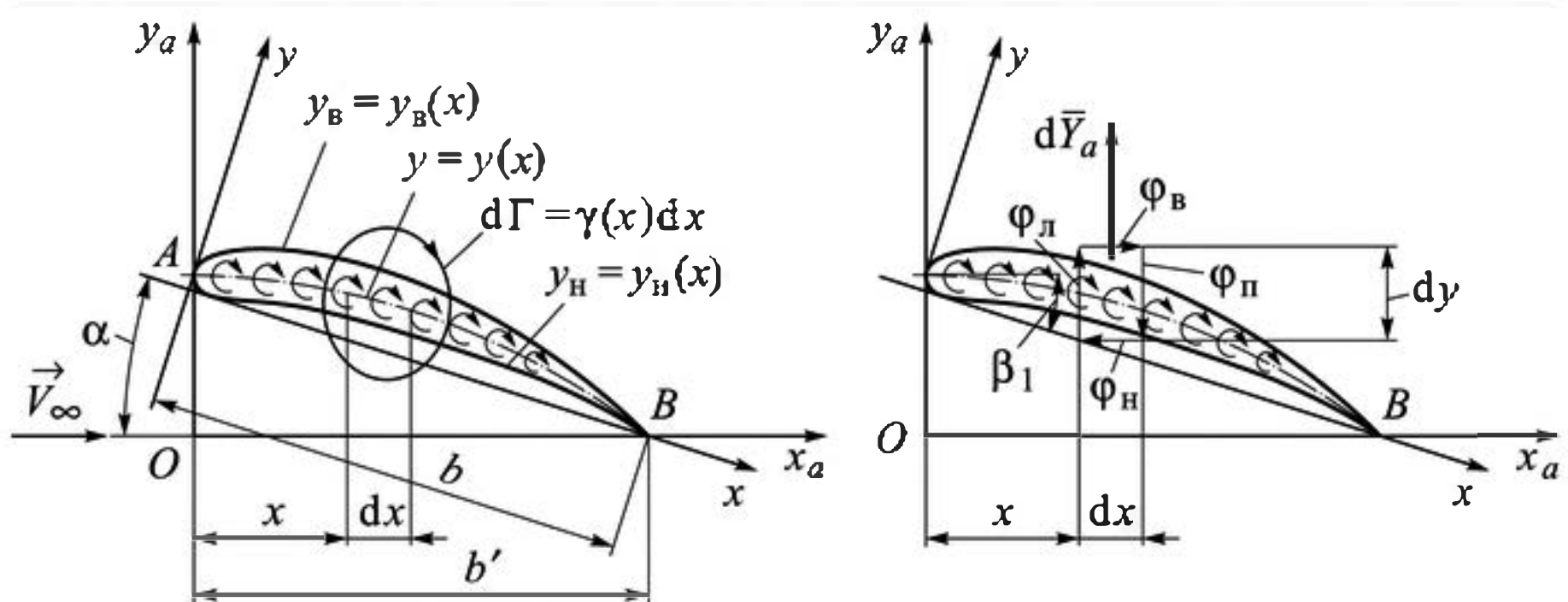


Рис. 10.6. Схемы расчета тонкого профиля в несжимаемом потоке

ев движения с небольшими дозвуковыми скоростями ($M_\infty < 0,3 \dots 0,4$), когда газ можно считать несжимаемой средой, а также применены как исходные данные при проведении аэродинамических расчетов профилей заданной формы в дозвуковом сжимаемом потоке.

Поскольку профиль тонкий, а угол атаки невелик, то скорость потока около него будет мало отличаться от скорости невозмущенного течения. Такой поток называется *маловозмущенным*.

Для скорости маловозмущенного течения можно написать условие

$$V_x = V_\infty + V'_x \quad (V'_x \ll V_\infty); \quad V_y = V'_y \quad (V'_y \ll V_\infty),$$

где V'_x и V'_y — составляющие скорости малых возмущений.

В соответствии с этим условием

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 = (V_\infty + V'_x)^2 + V_y'^2 \approx V_\infty^2 + 2V_\infty V'_x. \quad (10.10)$$

Теперь определим давление в маловозмущенном потоке. Из уравнения Бернулли для несжимаемого потока ($\rho = \rho_\infty = \text{const}$), записанного для параметров невозмущенного потока и для произвольной точки в окрестности профиля, получим избыточное давление:

$$p - p_\infty = \rho_\infty \left(V_\infty^2 / 2 - V^2 / 2 \right) = -\rho_\infty V_\infty V'_x.$$

Выразив составляющую V'_x через потенциал скоростей: $V'_x = \partial \phi / \partial x$, находим

$$p - p_\infty = -\rho_\infty V_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (10.11)$$

Отсюда коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = -2 \frac{V'_x}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (10.12)$$

Согласно уравнению (10.11), избыточное давление на нижнюю и верхнюю стороны профиля будет соответственно

$$p_H - p_\infty = -\frac{\partial \varphi_H}{\partial x} V_\infty \rho_\infty; \quad p_B - p_\infty = -\frac{\partial \varphi_B}{\partial x} V_\infty \rho_\infty,$$

где φ_H, φ_B — потенциалы скоростей на нижней и верхней сторонах.

Следовательно, подъемная сила, действующая на элемент поверхности профиля,

$$dY_a = (p_H - p_B) dx = -V_\infty \rho_\infty \left(\frac{\partial \varphi_H}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_B}{\partial x} \right) dx, \quad (10.13)$$

а для всего профиля с хордой длиной b

$$Y_a = -V_\infty \rho_\infty \int_0^{b'} \left(\frac{\partial \varphi_H}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_B}{\partial x} \right) dx.$$

Полагая верхний предел b' интеграла равным длине b хорды (ввиду малости угла атаки), найдем коэффициент подъемной силы

$$c_{ya} = \frac{Y_a}{q_\infty b} = -\frac{2}{V_\infty b} \int_0^b \left(\frac{\partial \varphi_H}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_B}{\partial x} \right) dx. \quad (10.14)$$

Циркуляция скорости по контуру, имеющему форму прямоугольника со сторонами dx, dy и охватывающему элемент профиля (см. рис. 10.6),

$$d\Gamma = \left(V_\infty + \frac{\partial \varphi_B}{\partial x} \right) dx - \left(V_\infty + \frac{\partial \varphi_H}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \varphi_L}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_P}{\partial y} \right) dy.$$

Интенсивность циркуляции (вихря) $d\Gamma/dx = \gamma_z(x)$ определяется выражением

$$\gamma_z(x) = \frac{\partial \varphi_B}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_H}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_L}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_P}{\partial y} \right).$$

Поскольку для тонкого профиля угловой коэффициент dy/dx мал, то произведение этого коэффициента и разности вертикальных составляющих скоростей будет величиной второго порядка малости, а значит,

$$\gamma_z(x) \approx \frac{\partial \varphi_B}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_H}{\partial x}. \quad (10.15)$$

Таким образом, выражение (10.14) можно записать в виде

$$c_{ya} = \frac{2}{V_{\infty} b} \int_0^b \gamma_z(x) dx. \quad (10.16)$$

Аналогично для коэффициента момента тангажа имеем

$$m_z = -\frac{2}{V_{\infty} b^2} \int_0^b \gamma_z(x) x dx. \quad (10.17)$$

Для разности давлений на нижней и верхней поверхностях профиля из выражения (10.13) для несжимаемого потока получаем

$$p_n - p_v = V_{\infty} \rho_{\infty} \left(\frac{\partial \phi_v}{\partial x} - \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right) = V_{\infty} \rho_{\infty} \gamma_z(x). \quad (10.18)$$

Нетрудно записать формулу, связывающую p_n и p_v , когда газ сжимаем, скорости дозвуковые или сверхзвуковые и течение изотропическое. Используя для этого случая уравнение Бернулли:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_v}{\rho_v} + \frac{V_v^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_n}{\rho_n} + \frac{V_n^2}{2},$$

и соотношение (10.10) для скоростей V_v и V_n , получаем выражение, представляющее собой математическую запись *теоремы Жуковского «в малом»*:

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_n}{\rho_n} - \frac{p_v}{\rho_v} \right) = V_{\infty} \left(\frac{\partial \phi_v}{\partial x} - \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right) = V_{\infty} \gamma_z(x).$$

В соответствии с формулами (10.16) и (10.17) коэффициенты подъемной силы и момента тангажа зависят от распределения вдоль профиля интенсивности циркуляции. Это означает, что обтекание профиля можно рассчитать, заменив его системой непрерывно распределенных вихрей (см. гл. 7).

Рассмотрим элемент цилиндрического крыла бесконечного размаха, на которое поток набегаёт перпендикулярно передней кромке. В этом случае воздух в поперечном направлении не движется. Поэтому вихревая модель состоит только из непрерывного слоя бесконечных прямых вихрей, лежащих в плоскости хорд и параллельных передней кромке. Обозначим их погонную интенсивность $\gamma_z(x)$ (рис. 10.7). Введем переменную θ , связанную с координатой x соотношением

$$x = 0,5b(1 + \cos\theta), \quad (10.19)$$

и представим γ_z в виде ряда Фурье:

$$\gamma_z = 2V_\infty \left[A_0 \operatorname{tg}(\theta/2) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right]. \quad (10.20)$$

Нетрудно заметить, что задав γ_z таким образом, мы обеспечим выполнение гипотезы Чаплыгина – Жуковского о конечности скорости. Действительно, на задней кромке $x = b$, $\theta = \gamma_z = 0$ и, согласно выражению (10.15),

$$\frac{\partial \varphi_{\text{в}}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{\text{н}}}{\partial x} = 0.$$

Поскольку для тонкого профиля

$$\left| \frac{\partial \varphi_{\text{н}}}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial \varphi_{\text{в}}}{\partial x} \right| = \frac{\gamma_z(x)}{2},$$

то на задней кромке

$$\frac{\partial \varphi_{\text{н}}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{\text{в}}}{\partial x} = 0.$$

Кроме того, согласно соотношениям (10.19) и (10.20), при $x \rightarrow 0$

угол $\theta \rightarrow \pi$ и $\gamma_z \rightarrow \infty$. Следовательно, возмущенная скорость на передней кромке бесконечно большая, что обеспечивает обтекание острой передней кромки.

В расчетах также должно выполняться условие плавного безотрывного обтекания, в соответствии с которым нормальная к поверхности профиля составляющая скорости равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \bar{V}_\infty \bar{n} = 0.$$

Это уравнение часто называют *условием непротекания*. Пусть $y = f(x)$ — уравнение средней линии профиля, тогда в соответствии с рис. 10.7 это условие можно записать так:

$$\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\alpha + \frac{df(x)}{dx}. \quad (10.21)$$

Определив скорость возмущений $V'_y = \partial \varphi / \partial y$, индуцируемую вихревым слоем на хорде, и подставив ее в граничное условие (10.21), получим выражение

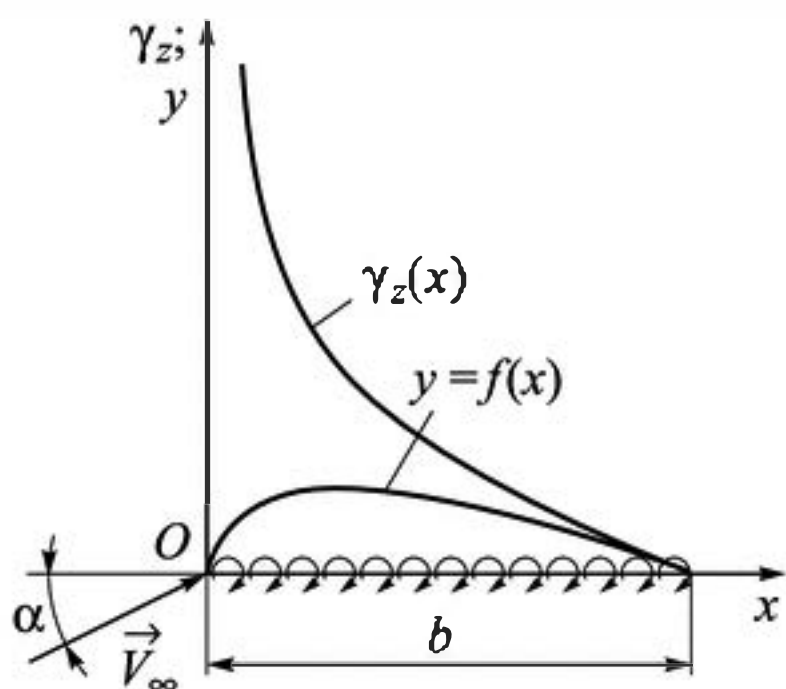


Рис. 10.7. Схема расчета аэродинамических характеристик профиля с помощью непрерывного вихревого слоя

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) = \alpha - \frac{df(x)}{dx},$$

в котором

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{df(x)}{dx} d\theta;$$

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{df(x)}{dx} \cos(n\theta) d\theta. \quad (10.22)$$

С учетом соотношений (10.22) по формуле (10.20) вычисляем интенсивность вихрей γ_z

Аэродинамические коэффициенты определяем с учетом выражения (10.18) по формулам (10.3), (10.9):

$$c_{ya} = 2\pi \left[\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{df(x)}{dx} (1 + \cos \theta) d\theta \right]; \quad (10.23)$$

$$m_z = -\frac{1}{4} c_{ya} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{df(x)}{dx} [\cos \theta + \cos (2\theta)] d\theta, \quad (10.24)$$

где m_z — коэффициент момента тангажа профиля относительно передней кромки.

Аэродинамические характеристики профиля

Рассмотрим аэродинамические характеристики тонкого слабо-изогнутого профиля при малых углах атаки, когда коэффициенты подъемной силы и момента тангажа зависят от α линейно.

При установившемся поступательном движении коэффициент подъемной силы профиля определяется соотношением

$$c_{ya} = c_{ya}^{\alpha} (\alpha - \alpha_0), \quad (10.25)$$

где $c_{ya}^{\alpha} = dc_{ya}/d\alpha = \tan \theta$; θ — угол наклона кривой $c_{ya}(\alpha)$ на линейном участке (рис. 10.8); α_0 — угол атаки, при котором $c_{ya} = 0$.

Сравнивая выражения (10.25) и (10.23), находим, что в идеальном несжимаемом газе

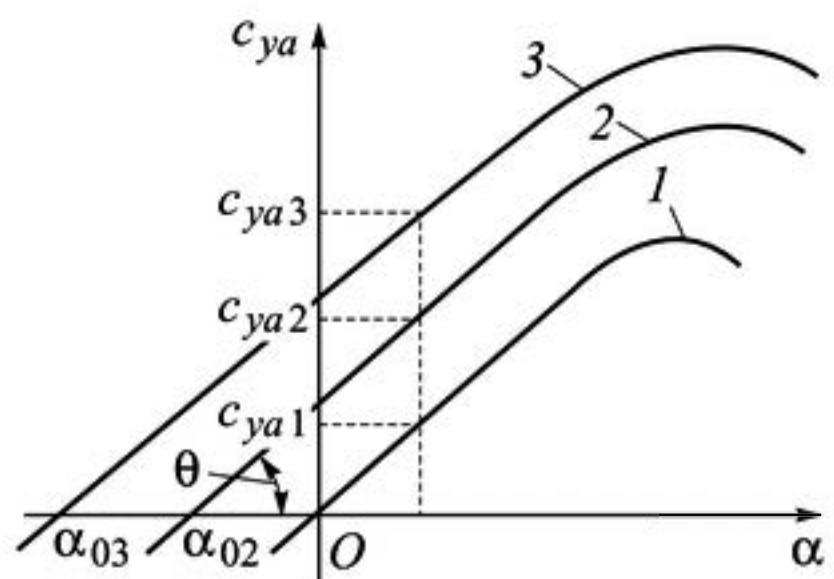


Рис. 10.8. Изменение коэффициента подъемной силы профиля в зависимости от угла атаки:

$$1 - \bar{f}_1 = 0; \quad 2 - \bar{f}_2 > 0; \quad 3 - \bar{f}_3 > \bar{f}_2$$

$$c_{ya}^\alpha = 2\pi; \quad \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{df(x)}{dx} (1 + \cos \theta) d\theta. \quad (10.26)$$

Следовательно, производная c_{ya}^α профиля не зависит от его формы. Более точный анализ показывает, что c_{ya}^α возрастает с увеличением относительной толщины, кривизны профиля и угла 2τ его заострения у задней кромки. Так, для изогнутых профилей можно рекомендовать зависимость

$$c_{ya}^\alpha = 2\pi(1 + 0,77\bar{c})\sqrt{1 + (\bar{f}/2)^2},$$

где $\bar{c} = c/b$ — максимальная относительная толщина профиля; $\bar{f} = f/b$ — его максимальная относительная кривизна (для симметричного профиля $\bar{f} = 0$, для пластины $\bar{c} = 0$).

При больших углах заострения задней кромки

$$c_{ya}^\alpha = 2\pi + 4,7\bar{c}(1 + 0,00375\tau), \quad (10.27)$$

где τ — в град.

Несмотря на то что формула (10.27) дает более точное значение c_{ya}^α в идеальном газе, при ориентировочной оценке реальных несущих свойств профиля целесообразно полагать $c_{ya}^\alpha = 2\pi$, поскольку в результате влияния вязкости эта производная не только не достигает значения, определяемого соотношением (10.27), но оказывается даже меньше 2π .

Выше было показано, что эффект вязкости проявляется в уменьшении c_{ya}^α вследствие вытесняющего влияния пограничного слоя. Чем больше угол 2τ , тем значительнее снижение c_{ya}^α . Особенно это заметно, когда поверхность шероховатая.

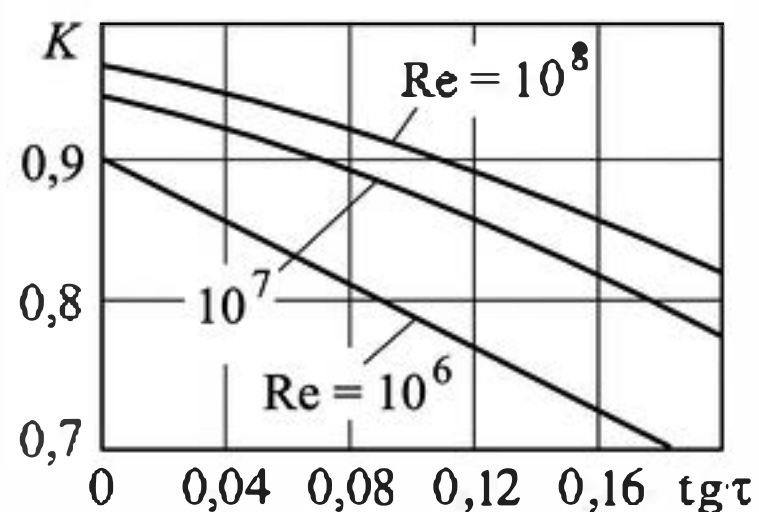


Рис. 10.9. Влияние угла заострения профиля у задней кромки и числа Re на параметр K

На основании экспериментальных данных (рис. 10.9) было получено соотношение для расчета производной коэффициента подъемной силы профиля в вязком газе:

$$c_{ya\text{вяз}}^\alpha = 1,05Kc_{ya}^\alpha, \quad (10.28)$$

где $K = c_{ya\text{вяз}}^\alpha / c_{ya}^\alpha$; c_{ya}^α — производная, определяемая по формуле (10.27).

Согласно данным, приведенным на рис. 10.9, и формуле (10.28), производная $c_{ya\text{вяз}}^\alpha$ увеличивается с рос-

том числа Re . Это объясняется тем, что с увеличением Re уменьшаются толщина пограничного слоя δ и толщина вытеснения δ^* , а значит, влияние вязкости снижается. При увеличении числа Re его рост все в меньшей степени влияет на c_{ya}^α .

Угол α_0 зависит от формы средней линии профиля и практически не зависит от его толщины. Если профиль симметричный, то $f(x) \equiv 0$ и, согласно второму уравнению (10.26), $\alpha_0 = 0$. В этом случае кривая $c_{ya}(\alpha)$ (см. рис. 10.8) проходит через начало координат.

Для определения α_0 в первом приближении можно рекомендовать зависимость

$$\alpha_0 = -2\bar{f}.$$

При линейной зависимости коэффициента момента тангажа относительно передней кромки от угла атаки его можно определить по одной из следующих формул:

$$m_z = m_z^\alpha (\alpha - \alpha_{0m}); \quad m_z = m_{z0\alpha} + m_z^\alpha \alpha; \quad m_z = m_{z0} + m_z^{c_{ya}} c_{ya}, \quad (10.29)$$

где $m_z^\alpha = dm_z/d\alpha$; α_{0m} — угол атаки, при котором $m_z = 0$; $m_{z0\alpha}$ — коэффициент момента тангажа при $\alpha = 0$ ($m_{z0\alpha} = -m_z^\alpha \alpha_{0m}$); m_{z0} — коэффициент момента тангажа при $c_{ya} = 0$ (совпадает с коэффициентом момента тангажа относительно аэродинамического фокуса по углу атаки); $m_z^{c_{ya}} = dm_z/dc_{ya}$.

Сравнивая выражения (10.29) с (10.23) и (10.24), находим

$$m_z^\alpha = -\frac{\pi}{2}; \quad m_{z0} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{df(x)}{dx} [\cos \theta + \cos(2\theta)] d\theta, \quad (10.30)$$

т. е. m_{z0} зависит от формы профиля. Следовательно, искривлением средней линии профиля можно получить необходимое значение m_{z0} . Для расчета m_{z0} можно рекомендовать соотношение

$$m_{z0} = -\pi\bar{f}.$$

При изменении угла атаки положение аэродинамического фокуса на хорде профиля не меняется. Его безразмерная координата относительно носка профиля определяется выражением

$$\bar{x}_{F\alpha} = -m_z^\alpha / c_{ya}^\alpha. \quad (10.31)$$

С учетом соотношений (10.26), (10.30) получаем

$$\bar{x}_{F\alpha} = 0,25.$$

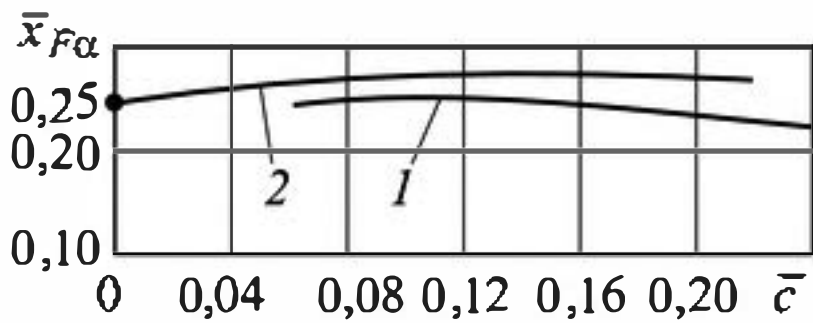


Рис. 10.10. Зависимость положения фокуса профиля по углу атаки от его относительной толщины: 1 — профиль с большим углом заострения у задней кромки; 2 — то же с малым углом заострения

Таким образом, теоретически фокус профиля при малой дозвуковой скорости независимо от его толщины и вогнутости находится на расстоянии, равном 0,25 длины хорды от передней кромки. При используемых на практике значениях $\bar{c}$ и $\bar{f}$ действительное положение фокуса мало отличается от теоретического (рис. 10.10).

Безударным является такой режим обтекания, при котором поток, набегающий на моделирующую профиль среднюю поверхность, не огибает переднюю кромку, а разделяется на ней на верхний и нижний. Угол атаки и коэффициент подъемной силы, при которых обтекание является безударным, называют оптимальными и обозначают $\alpha_{\text{опт}}$, $c_{ya \text{ опт}}$.

Вычисляя аэродинамические характеристики профиля, погонную интенсивность вихрей представляют в виде ряда Фурье (см. выражение (10.20)). В этом случае скорость возмущений на передней кромке средней поверхности, моделирующей профиль, определяется слагаемым $2V_{\infty}A_0 \tan(\theta/2)$, где $A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{df(x)}{dx} d\theta$. Если

$A_0 \neq 0$, скорость возмущений стремится к бесконечности и поток огибает переднюю кромку. Следовательно, безударное обтекание профиля реализуется только в случае, когда $A_0 = 0$, т. е. при угле атаки

$$\alpha_{\text{опт}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{df(x)}{dx} d\theta. \quad (10.32)$$

Подставляя $\alpha_{\text{опт}}$ в соотношение (10.25) и учитывая формулу (10.26), находим коэффициент подъемной силы, при котором обтекание профиля является безударным:

$$c_{ya \text{ опт}} = -2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{df(x)}{dx} \cos \theta d\theta. \quad (10.33)$$

При безударном обтекании профиль имеет минимальное лобовое сопротивление, поэтому стремятся, чтобы $\alpha_{\text{опт}}$, $c_{ya \text{ опт}}$ соответствовали расчетному режиму полета.

Соотношения (10.32) и (10.33) интегрально характеризуют форму средней линии. Поэтому расчетные значения $\alpha_{\text{опт}}$ и $c_{ya \text{ опт}}$ можно получить, деформируя среднюю линию различными способами, например отклоняя носки или закрылки. Для многих профилей $c_{ya \text{ опт}} = 0,1 \bar{f}$, где $\bar{f}$ — в %.

Рассмотрим безотрывное обтекание идеальным газом элемента цилиндрического крыла бесконечного размаха. Согласно теореме Жуковского, на него действует только подъемная сила ΔY_a (рис. 10.11). Разложим ее на составляющие ΔT и ΔY , действующие соответственно вдоль хорды вперед и перпендикулярно к ней. Составляющую ΔT назовем подсасывающей силой. Считая газ идеальным, принимаем, что подсасывающая сила является силой давления.

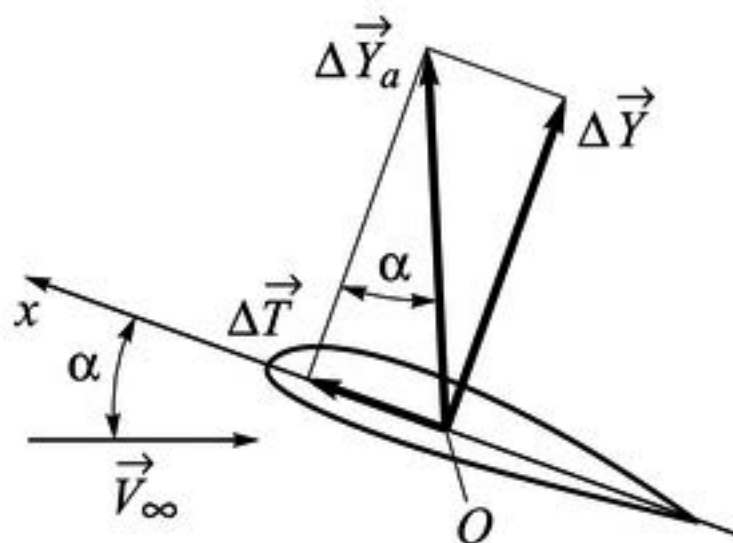


Рис. 10.11. Определение подсасывающей силы, действующей на профиль

Таким образом, *подсасывающая сила* — это направленная вдоль хорды вперед сила давления, действующая на элемент крыла бесконечного размаха при его безотрывном обтекании идеальным газом.

Коэффициент

$$c_T = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\rho_\infty b \Delta z}$$

назовем *коэффициентом подсасывающей силы* (здесь Δz — элементарное изменение координаты). Нетрудно заметить (см. рис. 10.11), что при малом α

$$\Delta T = \Delta Y_a \alpha; \quad c_T = c_{ya} \alpha = c_{ya}^2 / c_{ya}^\alpha.$$

Различают подсасывающую силу разрежения и изгиба. Последняя возникает в результате вогнутости профиля и создается разностью давлений, действующих на его верхнюю и нижнюю поверхности. Подсасывающая сила разрежения обусловлена скруглением передней части профиля, на которой создается область пониженного давления, т. е. она возникает вследствие разности давлений, действующих на кормовую часть профиля и область вблизи передней кромки. Подсасывающая сила разрежения отсутствует только на режиме безударного обтекания.

При безотрывном обтекании профиля идеальным несжимаемым газом его коэффициент лобового сопротивления $c_{xa} = 0$. В реаль-

ном вязком газе возникают сопротивление трения и вызванное вязкостью сопротивление от давления. Поэтому в действительности (рис. 10.12, а), когда угол атаки небольшой ($\cos \alpha \cong 1$),

$$c_{xa} = c_{xf} + \Delta c_{x0} + \Delta c_{xi},$$

где c_{xf} — коэффициент трения профиля; Δc_{x0} — составляющая коэффициента лобового сопротивления от давления, не связанная с c_{ya} ; Δc_{xi} — составляющая коэффициента, зависящая от $(c_{ya} - c_{ya \text{ опт}})$.

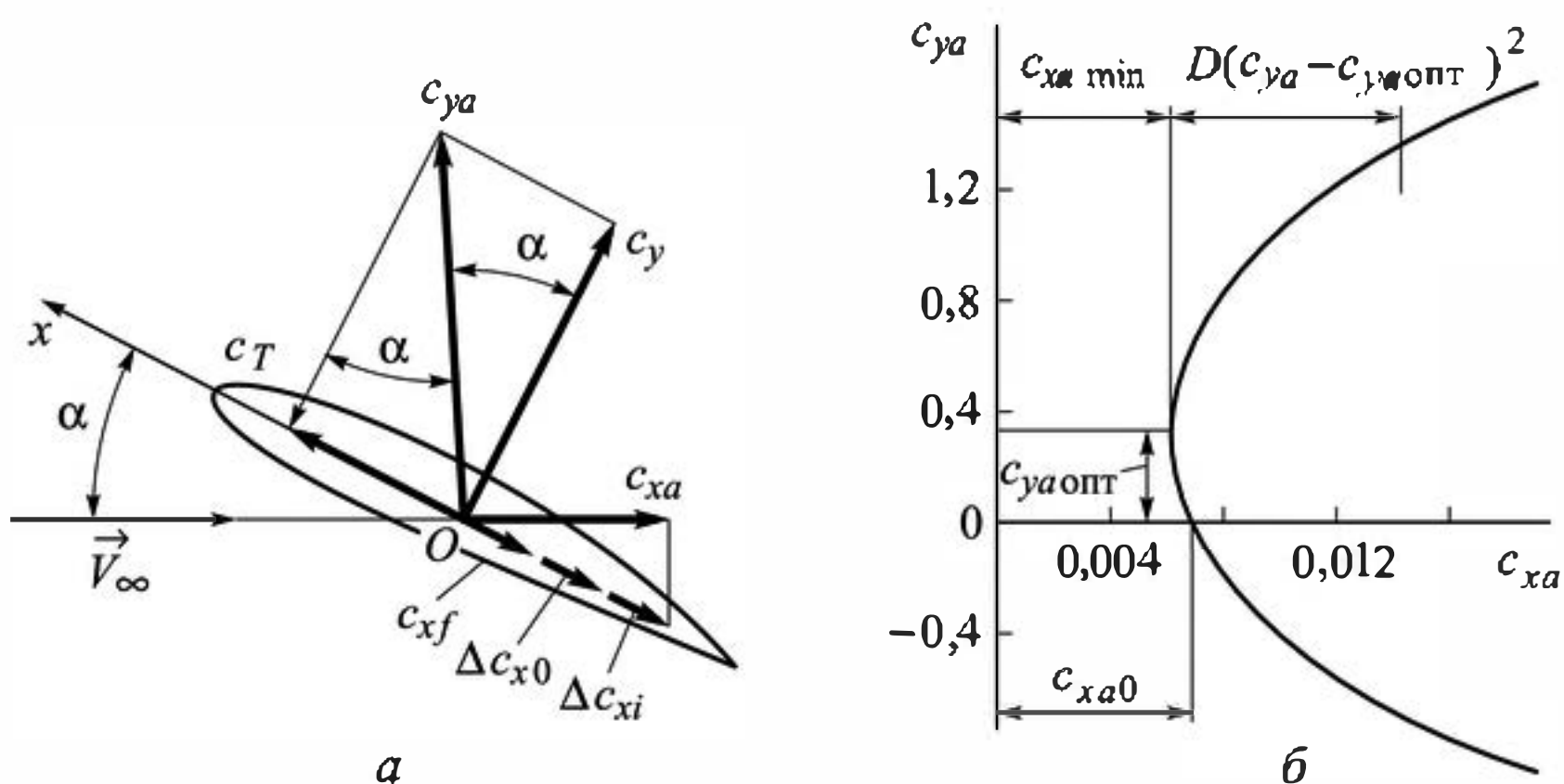


Рис. 10.12. Схема действующих сил (а) и поляра первого рода для профиля (б) при расчете коэффициента лобового сопротивления

Представим выражение для определения коэффициента лобового сопротивления профиля следующим образом:

$$c_{xa} = c_{xa \text{ min}} + D(c_{ya} - c_{ya \text{ опт}})^2, \quad (10.34)$$

где $c_{xa \text{ min}}$ — минимальный коэффициент лобового сопротивления, $c_{xa \text{ min}} = c_{xf} + \Delta c_{x0}$; D — коэффициент, зависящий от формы профиля (определяют экспериментально).

Типичная зависимость коэффициента c_{xa} от c_{ya} приведена на рис. 10.12, б.

Коэффициент $c_{xa \text{ min}}$ определяется в основном силой трения. В первом приближении он равен коэффициенту двухстороннего трения пластинки единичного размаха $2c_{xf \text{ пл}}$ с длиной, равной хорде b . Но сопротивление трения профиля отличается от сопротивления двухстороннего трения пластинки, так как, во-первых, у пластинки и профиля разные характеристики пограничных слоев, а во-вторых, — разные площади поверхностей. Кроме того, профиль испы-

тывает еще вызванное вязкостью сопротивление давления. Эти факторы учитывают, вводя коэффициент η_c и полагая

$$c_{x\alpha \min} = 2 c_{xf \text{ пл}} \eta_c,$$

где $c_{xf \text{ пл}}$ — коэффициент одностороннего трения пластинки в несжимаемом потоке, равный для ламинарного пограничного слоя $c_{xf \text{ пл}}^{\text{лам}} = 1,3/\sqrt{\text{Re}_\infty}$, для турбулентного — $c_{xf \text{ пл}}^{\text{тур}} = 0,075/\sqrt[5]{\text{Re}_\infty}$; $\text{Re}_\infty = V_\infty b_A / \nu_\infty$; b_A — средняя аэродинамическая хорда профиля; η_c — коэффициент, зависящий от относительной толщины $\bar{c}$ профиля и положения точки перехода $x_{\text{т.п}}$ (рис. 10.13) и практически не зависящий от $\bar{f}$. Приблизительно можно полагать, что для ламинарного пограничного слоя ($\bar{x}_{\text{т.п}} = 1$) коэффициент $\eta_c = 1$, а для турбулентного ($\bar{x}_{\text{т.п}} = 0$) определяется зависимостью

$$\eta_c = 1 + 2,7 \bar{c} + 100 \bar{c}^4,$$

где $\bar{c} < 0,21$.

При гладкой поверхности точка перехода лежит вблизи минимума давления. Поэтому $c_{x\alpha \min}$ можно уменьшить, сместив назад сечения, где толщина и вогнутость максимальные (увеличив $\bar{x}_c$ и $\bar{x}_f$). Такие профили называют *ламинаризованными*.

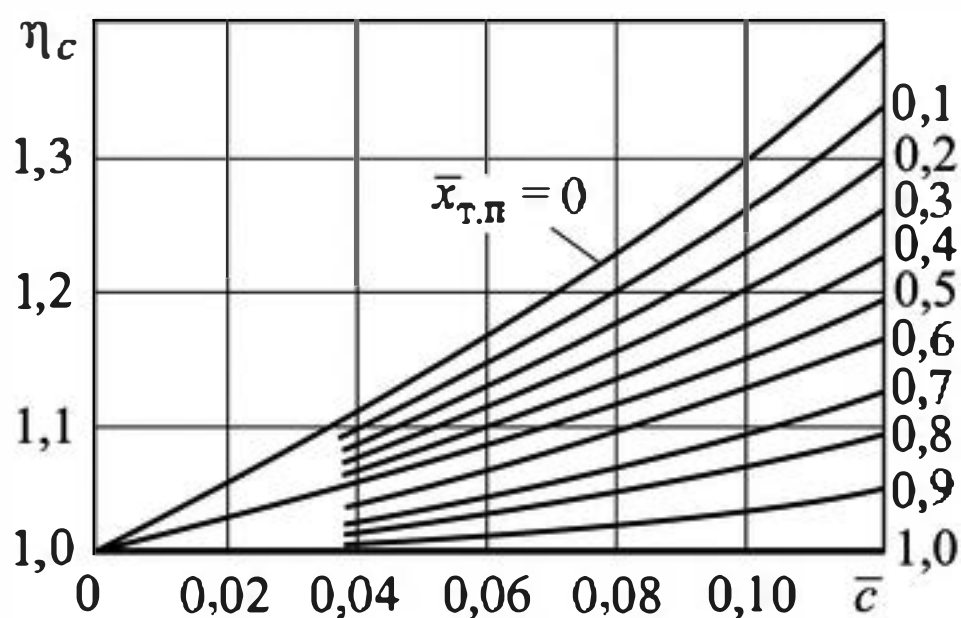


Рис. 10.13. Зависимость коэффициента η_c от относительной толщины и положения точки перехода $\bar{x}_{\text{т.п}}$

Согласно формуле (10.34), минимальное значение коэффициента лобового сопротивления профиля достигается при безударном обтекании, когда $c_{ya} = c_{ya \text{ опт}}$. Учитывая это, профили проектируют таким образом, чтобы на основном режиме обтекание было безударным.

Физическая картина обтекания крыла конечного размаха. Аэродинамические характеристики крыла

При малой дозвуковой скорости и небольшом угле атаки коэффициент подъемной силы крыла любой формы можно весьма точно рассчитать по линейной теории, пользуясь, например, методом дискретных вихрей. Однако на начальной стадии проектирования, при выборе формы крыла в плане, вида профиля и их основных геометрических характеристик удобно использовать упрощенные модели, позволяющие получать простые расчетные соотношения. В соответствии с линейной теорией $c_{y\text{акрыл}} = c_{y\text{акрыл}}^{\alpha} (\alpha - \alpha_0)$. Покажем, как изменяются величины $c_{y\text{акрыл}}^{\alpha}$ и α_0 для крыла конечного размаха по сравнению с соответствующими величинами для профиля. Рассмотрим сначала незакрученное прямоугольное крыло большого удлинения с одним и тем же симметричным профилем во всех сечениях (рис. 10.14).

Согласно теореме Жуковского, подъемная сила участка крыла единичного ($\Delta z = 1$) размаха $Y_{\text{ж}} = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$ (см. рис. 10.14, а). Следо-

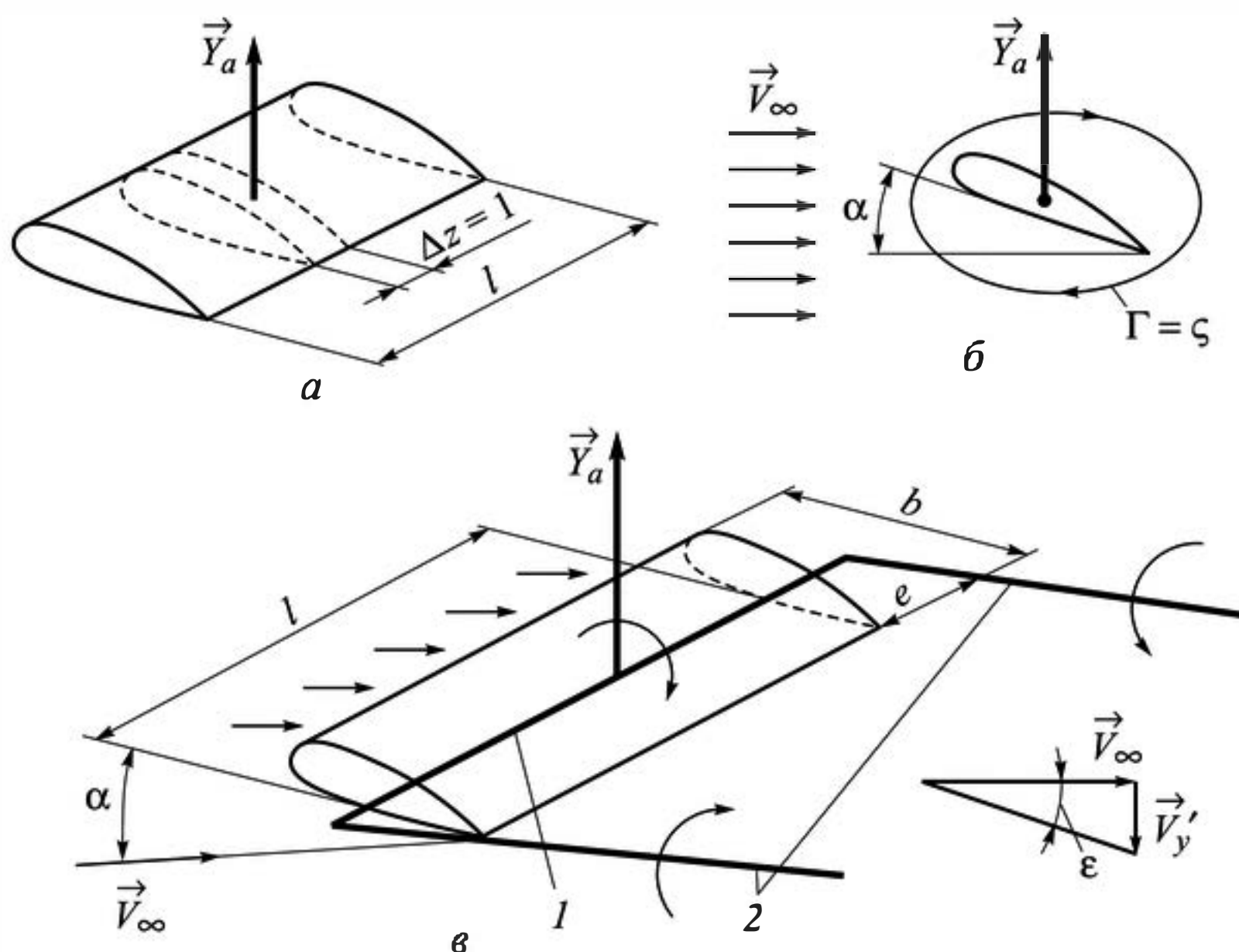


Рис. 10.14. Представление прямоугольного крыла конечного размаха системой эквивалентных вихрей:

а – схема участка крыла; б – замена участка крыла присоединенным вихрем; в – П-образная схема Чаплыгина: 1 – присоединенный вихрь; 2 – свободные вихри

вательно, вокруг профиля имеет место циркуляционный поток с циркуляцией скорости Γ . Если циркуляция происходит по направлению движения часовой стрелки, то на верхней стороне профиля скорости будут больше (на набегающий поток накладывается циркуляционный поток с таким же направлением), а на нижней — меньше (направления циркуляционного и набегающего потоков не совпадают). Поэтому в соответствии с уравнением Бернулли давление на верхней поверхности профиля меньше, чем на нижней, и подъемная сила Y_* направлена вверх, как показано на рис. 10.14, б.

Выше было показано, что участок крыла можно заменить проходящим вдоль его размаха эквивалентным вихрем с напряженностью ζ . Этот вихрь назван Н.Е. Жуковским присоединенным. Таким образом, в гидродинамическом смысле крыло бесконечного размаха эквивалентно присоединенному вихрю.

Рассмотрим теперь приближенную схему обтекания крыла конечного размаха прямоугольной формы в плане. Как установил С.А. Чаплыгин, присоединенный вихрь вблизи боковых кромок поворачивается и в виде пары вихревых жгутов уходит за крыло, приблизительно совпадая с направлением скорости набегающего потока. Расстояние e (см. рис. 10.14, в) от вихревого жгута до боковой кромки зависит от геометрических размеров крыла. Таким образом, гидродинамический эффект крыла конечного размаха может быть получен путем замены его присоединенным и парой свободных вихрей, напоминающих букву П. Эта схема крыла называется *П-образной схемой Чаплыгина*.

Вихревая система, эквивалентная крылу конечного размаха, индуцирует в несжимаемом потоке дополнительные скорости и этим вызывает скос потока, свойственный обтеканию крыла конечного размаха. В основе вычислений индуцированных скоростей и угла скоса потока, вызванных свободными вихрями, лежат три теоремы Гельмгольца.

1. Напряжение вдоль вихря не меняется по величине, и, как следствие, вихрь не может внезапно оборваться или окончиться острием.
2. Напряжение вихря не зависит от времени.
3. Вихрь в идеальной жидкости не разрушается.

В приведенной на рис. 10.14, в схеме прямоугольного крыла циркуляция вдоль размаха принята постоянной в соответствии с предположением, что подъемная сила каждого элементарного участка крыла одинакова. В действительности подъемная сила вдоль размаха крыла изменяется. Это изменение невелико в средней час-

ти крыла и более заметно у боковых кромок. Для крыла произвольной формы в плане изменение циркуляции носит ярко выраженный характер и обусловлено неодинаковыми размерами участков, а следовательно, различными значениями подъемной силы.

Вихревую схему обтекания крыла с формой в плане, отличной от прямоугольной, можно получить, если заменить крыло не одним П-образным вихрем, а их системой, образующей вихревую пелену (рис. 10.15). Вдоль каждого вихря циркуляция постоянна, но при переходе от одного вихря к другому изменяется. Для сечения, расположенного в середине крыла (корневое сечение), подъемная сила наибольшая, поэтому будут максимальными напряжение соответствующего вихря и циркуляция.

Теперь посмотрим, какие изменения вносит скос потока, создаваемый вихревой пеленой, в картину обтекания крыла, расположенного под углом атаки α (называемом также установочным углом) в потоке со скоростью $\vec{V}_\infty$. Появление скоса потока за крылом на угол ϵ приводит к тому, что его обтекание в рассматриваемом сечении будет характеризоваться скоростью $\vec{V}_{\infty и}$ и углом атаки $\alpha_{и}$, отличающимися от соответствующих величин $\vec{V}_\infty$ и α , которые определяют течение около крыла бесконечного размаха. Истинный угол атаки $\alpha_{и}$ сечения крыла конечного размаха будет меньше установочного на угол скоса, т. е. $\alpha_{и} = \alpha - \epsilon_{сеч}$.

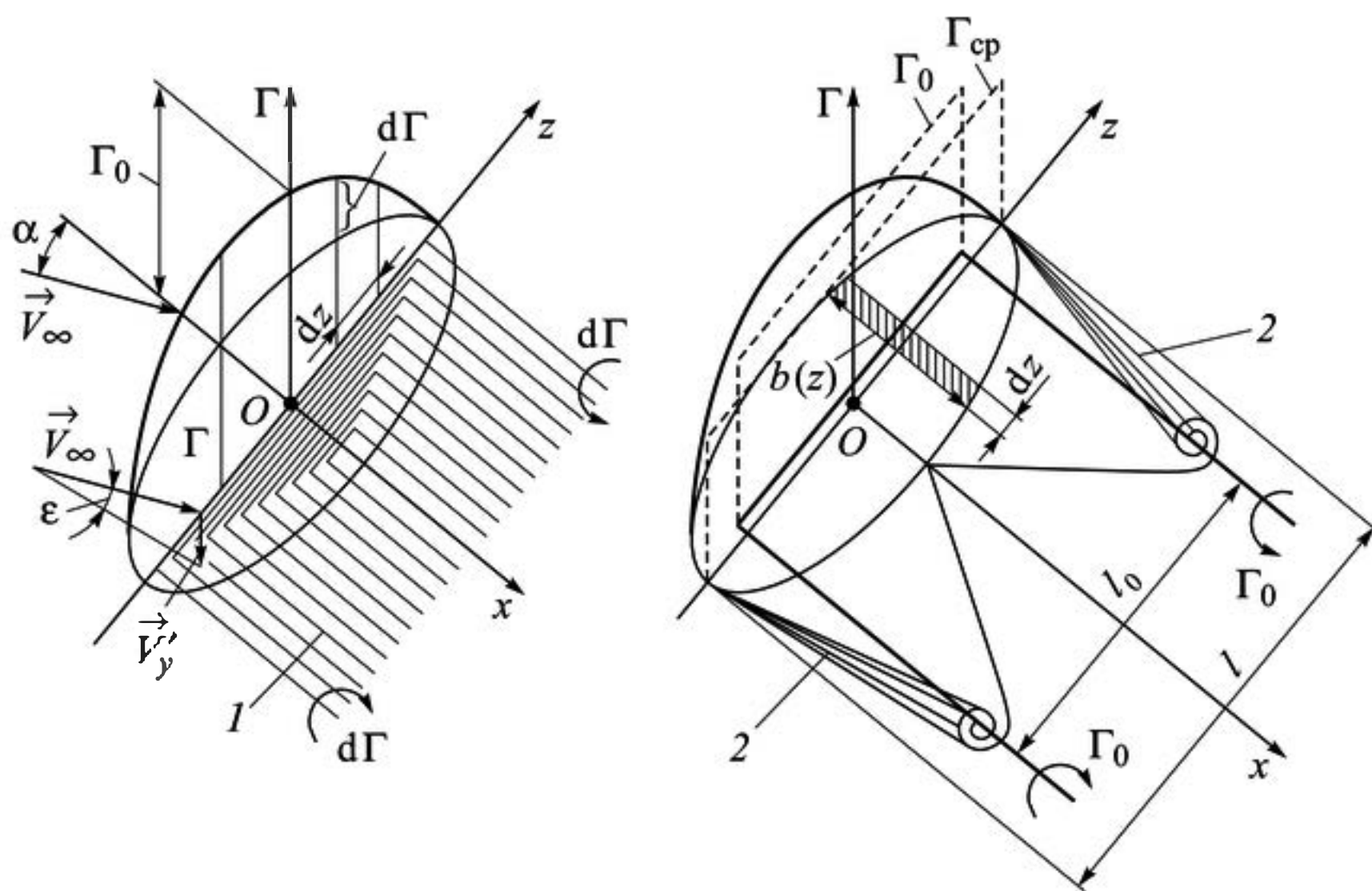


Рис. 10.15. Вихревая пелена (1) и свертывающиеся вихри (2) за крылом

Скорость V_y' (см. рис. 10.14, в), индуцируемая вихревой пеленой, изменяется вдоль хорды, что затрудняет расчет крыла. Однако на крыльях большого удлинения эта скорость изменяется мало, поэтому при их расчете используют *гипотезу плоских сечений*. В соответствии с этой гипотезой, во-первых, принимают, что скорость, индуцируемая вихревой пеленой, по хорде не меняется, а во-вторых, считают, что коэффициент подъемной силы сечения равен коэффициенту подъемной силы профиля, на который поток набегаает под углом атаки $\alpha - \epsilon_{\text{сеч}}$.

Применив гипотезу плоских сечений, получим

$$c_{y\text{ сеч}} = c_{ya}^{\alpha} (\alpha - \epsilon_{\text{сеч}})$$

или после интегрирования по размаху крыла

$$c_{y\text{ крыл}} = c_{ya}^{\alpha} (\alpha - \epsilon_{\text{ср}}), \quad (10.35)$$

где $\epsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{S} \int_{-l/2}^{l/2} \epsilon_{\text{сеч}} b_{\text{сеч}} dz$ — средний угол скоса; l — размах крыла;

S — его площадь в плане; $b_{\text{сеч}}$ — хорда в текущем сечении.

Наличие угла скоса приводит к изменению силового воздействия среды на обтекаемое тело. Если бы скос потока отсутствовал, то вектор аэродинамической силы был бы перпендикулярен направлению скорости $\vec{V}_{\infty}$ невозмущенного потока. При наличии скоса вектор результирующей аэродинамической силы $\vec{R}$ будет ориентирован по нормали к направлению истинной скорости $\vec{V}_{\infty\text{и}}$ (рис. 10.16). В результате такого отклонения результирующей силы на угол $\epsilon_{\text{ср}}$ появится составляющая X_i по направлению невозмущенного потока, которая называется *индуктивным (вихревым) сопротивлением*. Физически возникновение индуктивного сопротив-

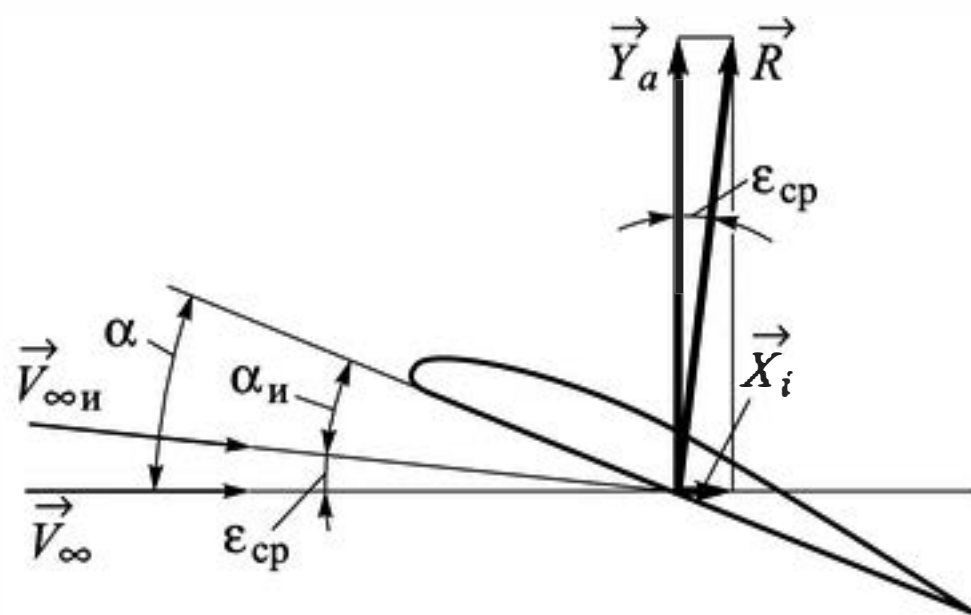


Рис. 10.16. Скос потока у крыла и возникновение индуктивного сопротивления

ления обусловлено потерями части кинетической энергии движущегося крыла, затрачиваемой на образование сходящих с его кромок вихрей. Для малых углов $\varepsilon_{\text{ср}}$ это сопротивление определяется согласно выражению (см. рис. 10.16)

$$X_i = Y_a \varepsilon_{\text{ср}}.$$

Соответствующий коэффициент индуктивного сопротивления

$$c_{xi \text{ крыл}} = 2X_i / (\rho_{\infty} V_{\infty}^2 S) = c_{ya \text{ крыл}} \varepsilon_{\text{ср}},$$

а из треугольника скоростей $\vec{V}_{\infty}$, $\vec{V}_{\infty i}$, $V'_{y \text{ ср}}$ получаем

$$\operatorname{tg} \varepsilon_{\text{ср}} \approx \varepsilon_{\text{ср}} = \frac{V'_{y \text{ ср}}}{V_{\infty}}. \quad (10.36)$$

В теоретической аэродинамике для крыльев с эллиптическим распределением циркуляции Γ по размаху (в этом случае скос потока по размаху постоянен) определено выражение для средней индуцированной дополнительной скорости за крылом конечного размаха l :

$$V'_{y \text{ ср}} = 2\Gamma / (\pi l).$$

Поскольку

$$Y_a = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma l = c_{ya \text{ крыл}} \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2 S}{2},$$

то циркуляция

$$\Gamma = \frac{c_{ya \text{ крыл}} V_{\infty} S}{2l}. \quad (10.37)$$

Тогда в соответствии с формулами (10.36) и (10.37) имеем

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{2\Gamma}{\pi l V_{\infty}} = \frac{2c_{ya \text{ крыл}} V_{\infty} S}{2\pi l^2 V_{\infty}} = \frac{c_{ya \text{ крыл}}}{\pi \lambda}, \quad (10.38)$$

где $\lambda = l^2 / S$ — удлинение крыла.

Таким образом, коэффициент индуктивного сопротивления

$$c_{xi \text{ крыл}} = c_{ya \text{ крыл}}^2 / (\pi \lambda). \quad (10.39)$$

Найдем теперь производную $c_{ya \text{ крыл}}^{\alpha}$ для прямоугольного крыла конечного размаха, подставив в выражение (10.35) средний угол скоса потока, определяемый соотношением (10.38):

$$c_{ya \text{ крыл}} = c_{ya}^{\alpha} (\alpha - \varepsilon_{\text{ср}}) = c_{ya}^{\alpha} \alpha - c_{ya}^{\alpha} \frac{c_{ya \text{ крыл}}}{\pi \lambda},$$

или

$$c_{ya \text{ крыл}} \left[1 + c_{ya}^{\alpha} / (\pi \lambda) \right] = c_{ya}^{\alpha} \alpha.$$

С учетом того, что $c_{ya \text{ крыл}} = c_{ya \text{ крыл}}^{\alpha} \alpha$, окончательно имеем

$$c_{ya \text{ крыл}}^{\alpha} = \frac{c_{ya}^{\alpha}}{1 + c_{ya}^{\alpha} / (\pi \lambda)}. \quad (10.40)$$

Это соотношение справедливо для нестреловидных крыльев большого удлинения. Заменяв в нем в соответствии с теорией скольжения c_{ya}^{α} на $c_{ya}^{\alpha} \cos \chi_{0,5}$, получаем формулу для расчета $c_{ya \text{ крыл}}^{\alpha}$ стреловидного крыла большого удлинения:

$$c_{ya \text{ крыл}}^{\alpha} = \frac{c_{ya}^{\alpha} \cos \chi_{0,5}}{1 + c_{ya}^{\alpha} \cos \chi_{0,5} / (\pi \lambda)}, \quad (10.41)$$

где $\chi_{0,5}$ — угол стреловидности по линии 0,5 хорд.

Для треугольных крыльев малого удлинения ($\lambda < 1$) Р. Джонс предложил использовать формулу

$$c_{ya \text{ крыл}}^{\alpha} = \pi \lambda / 2, \quad (10.42)$$

которая справедлива и для прямоугольных крыльев малого удлинения.

Для трапециевидных крыльев больших и малых удлинений Д. Кюхеманом получено следующее выражение:

$$c_{ya \text{ крыл}}^{\alpha} = \frac{c_{ya}^{\alpha}}{c_{ya}^{\alpha} / (\pi \lambda) + \sqrt{1 / \cos^2 \chi_{0,5} + [c_{ya}^{\alpha} / (\pi \lambda)]^2}}. \quad (10.43)$$

Для того чтобы учесть влияние формы крыла на скос потока и индуктивное сопротивление, зависимости (10.38)–(10.40) представляют в следующем виде:

$$\epsilon_{\text{ср}} = \frac{c_{ya \text{ крыл}}}{\pi \lambda} (1 + \tau); \quad (10.44)$$

$$c_{xi \text{ крыл}} = \frac{c_{ya \text{ крыл}}^2}{\pi \lambda} (1 + \delta); \quad (10.45)$$

$$c_{ya \text{ крыл}}^{\alpha} = \frac{c_{ya}^{\alpha}}{1 + c_{ya}^{\alpha} (1 + \tau) / (\pi \lambda)}, \quad (10.46)$$

где $\tau = 5,88\tau_1(m)\tau_2(\eta)$; $\delta = 20,41\delta_1(m)\delta_2(\eta)$; $m = \lambda/a_0$; $a_0 = c_{ya}^\alpha$; $\eta = b_0/b_k$ — сужение крыла; b_0, b_k — корневая и концевая хорды.

В общем случае для крыла, составленного из несимметричных профилей, имеем

$$c_{ya\text{крыл}} = \frac{a_0(\alpha - \alpha_0)}{1 + a_0(1 + \tau)/(\pi\lambda)}.$$

(10.47)

Значения τ и δ для прямоугольных ($\eta = 1$) и трапециевидных крыльев приведены ниже:

Прямоугольные крылья ($\eta = 1$)						
m	1/2	3/4	1	1,25	1,5	1,75
δ	0,019	0,034	0,049	0,063	0,076	0,088
τ	0,10	0,14	0,17	0,20	0,22	0,24
Трапециевидные крылья*						
η	1	4/3	2	4	∞	
δ	0,049	0,026	0,011	0,016	0,141	
τ	0,17	0,10	0,03	0,01	0,17	

* Данные получены при условии, что $m = 1$.

Для крыла эллиптической формы $\tau = 0, \delta = 0$.

Из формулы (10.47) следует, что для вычисления $c_{ya\text{крыл}}$ надо кроме c_{ya}^α знать еще α_0 . Простых формул для расчета этого угла нет. Поэтому α_0 находят с применением, например, метода дискретных вихрей. В случае плоского крыла $\alpha_0 = 0$.

Рассмотрим теперь, как зависит производная $c_{ya\text{крыл}}^\alpha$ трапециевидного крыла от его формы в плане. Расчеты и эксперимент показывают, что значение c_{ya}^α от η практически не зависит и определяется в основном удлинением и углом стреловидности.

С увеличением λ значение $c_{ya\text{крыл}}^\alpha$ возрастает, поскольку при этом уменьшается роль перетекания через боковые кромки. Это следует и из формул (10.40)–(10.43). В то же время рост угла стреловидности приводит к снижению $c_{ya\text{крыл}}^\alpha$. Это связано с увеличением эффекта скольжения, который заметно проявляется при больших удлинениях и незначительно — при малых. Поэтому стреловидность существенно снижает $c_{ya\text{крыл}}^\alpha$ крыльев больших удлинений и практически не влияет на $c_{ya\text{крыл}}^\alpha$ крыльев малых удлинений.

Производная $c_{ya\text{крыл}}^\alpha$ крыла обратной стреловидности равна производной того же крыла при обратном движении.

Лобовое сопротивление крыла конечного размаха складывается из профильного и вихревого (индуктивного) сопротивлений:

$$C_{x\text{а крыл}} = C_{x\text{а}} + C_{xi}$$

(здесь $C_{x\text{а}}$ — коэффициент лобового сопротивления профиля).

Профильное сопротивление представляет собой сумму сопротивлений от трения и давления, вызванных вязкостью и отрывом потока. Для расчета $C_{x\text{а}}$ можно рекомендовать следующую зависимость:

$$C_{x\text{а}} = 2C_{xf} (0,93 + 2,8\bar{c}) (1 + 5\bar{c} M_\infty^4).$$

Вихревое, или индуктивное, сопротивление является сопротивлением от давления. Оно возникает в результате образования вихревой пелены за крылом и может быть определено, например, по формуле (10.45).

10.3. Аэродинамика крыла в сжимаемом дозвуковом потоке. Учет сжимаемости среды при докритических скоростях

Расчет аэродинамических характеристик

Для исследования обтекания тонкого профиля, расположенного под малым углом атаки в сжимаемом дозвуковом потоке, используют уравнение (7.45), в котором $M_\infty < 1$ (в данном параграфе индекс «а», характерный для поточной системы координат, опущен). Запишем это уравнение в новой системе координат Ox_0y_0 , в которой

$$x_0 = x; \quad y_0 = y\sqrt{1 - M_\infty^2}; \quad \phi'_0 = \phi' \gamma V_{\infty 0} / V_\infty, \quad (10.48)$$

где γ — некоторый произвольный параметр; $V_{\infty 0}$ — скорость условного потока (фиктивная скорость), в общем случае отличающаяся от скорости V_∞ заданного течения.

В результате получим уравнение Лапласа для определения потенциала скоростей ϕ'_0 несжимаемого потока в плоскости Ox_0y_0 :

$$\frac{\partial^2 \phi'_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \phi'_0}{\partial y_0^2} = 0.$$

Таким образом, задачу об обтекании заданного профиля сжимаемым потоком можно решить, используя результаты решения задачи об обтекании некоторого видоизмененного профиля несжимаемым потоком с фиктивной скоростью $V_{\infty 0}$. Установим соотно-

шения между соответствующими параметрами обтекания профилей сжимаемым и несжимаемым потоками, а также их геометрическими характеристиками. Согласно (10.48), скорости возмущения V'_{x0} в несжимаемом и V'_x в сжимаемом потоках связаны между собой следующим образом:

$$V'_{x0} = \frac{\partial \Phi'_0}{\partial x_0} = \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \gamma \frac{V_{\infty 0}}{V_{\infty}} = V'_x \gamma \frac{V_{\infty 0}}{V_{\infty}}. \quad (10.49)$$

Из выражения (10.12) находим коэффициенты давления в несжимаемом и в сжимаемом потоках соответственно:

$$\bar{p}_{\text{нс}} = -2V'_{x0}/V_{\infty 0}; \quad \bar{p} = -2V'_x/V_{\infty}.$$

Следовательно, с учетом (10.49)

$$\bar{p}_{\text{нс}} = \gamma \bar{p}. \quad (10.50)$$

Поскольку

$$c_{ya \text{ нс}} = \oint \bar{p}_{\text{нс}} d\bar{x}_0; \quad m_{z \text{ нс}} = \oint \bar{p}_{\text{нс}} \bar{x}_0 d\bar{x}_0,$$

а также с учетом выражения (10.50) для коэффициентов подъемной силы и момента тангажа получаем

$$c_{ya \text{ нс}} = \gamma \oint \bar{p} d\bar{x} = \gamma c_{ya}; \quad m_{z \text{ нс}} = \gamma \oint \bar{p} \bar{x} d\bar{x} = \gamma m_z,$$

где $\bar{x}_0 = x_0/b$; $\bar{x} = x/b$.

Для определения соотношений между формами профилей и углами атаки установим вначале связь между вертикальными составляющими скорости. Согласно выражениям (10.48),

$$V'_{y0} = \frac{\partial \Phi'_0}{\partial y_0} = \frac{\partial \Phi'}{\partial y} \frac{\gamma}{\sqrt{1-M_{\infty}^2}} \frac{V_{\infty 0}}{V_{\infty}} = V'_y \frac{\gamma}{\sqrt{1-M_{\infty}^2}} \frac{V_{\infty 0}}{V_{\infty}}. \quad (10.51)$$

В несжимаемом потоке при условии, что $y_0 = f_0(x_0)$, для профиля можно записать

$$\frac{V'_{y0}}{V_{\infty 0} + V'_{x0}} = \frac{dy_0}{dx_0}$$

или, учитывая, что $V'_{x0} \ll V_{\infty 0}$,

$$V'_{y0}/V_{\infty 0} = dy_0/dx_0.$$

Аналогично для профиля в сжимаемом газе имеем

$$V_y'/V_\infty = dy/dx.$$

Следовательно,

$$\frac{V_{y0}'}{V_y'} \frac{V_\infty}{V_{\infty 0}} = \frac{dy_0}{dy} \frac{dx}{dx_0}.$$

Принимая во внимание выражения (10.48) и (10.51), находим

$$dy_0/dy = \gamma / \sqrt{1 - M_\infty^2}.$$

При условии, что для $y = 0$ величина $y_0 = 0$, после интегрирования получаем уравнение, связывающее вертикальные координаты фиктивного и заданного профилей:

$$y_0 = y\gamma / \sqrt{1 - M_\infty^2}. \quad (10.52)$$

В то же время, поскольку горизонтальные координаты профилей не меняются (см. выражение (10.48)), углы атаки можно представить так:

$$\alpha_{нс} = y_0/(b' - x) \text{ и } \alpha = y/(b' - x),$$

где b' — расстояние до задней кромки профиля вдоль оси Ox ; x — горизонтальная координата точки (рис. 10.17).

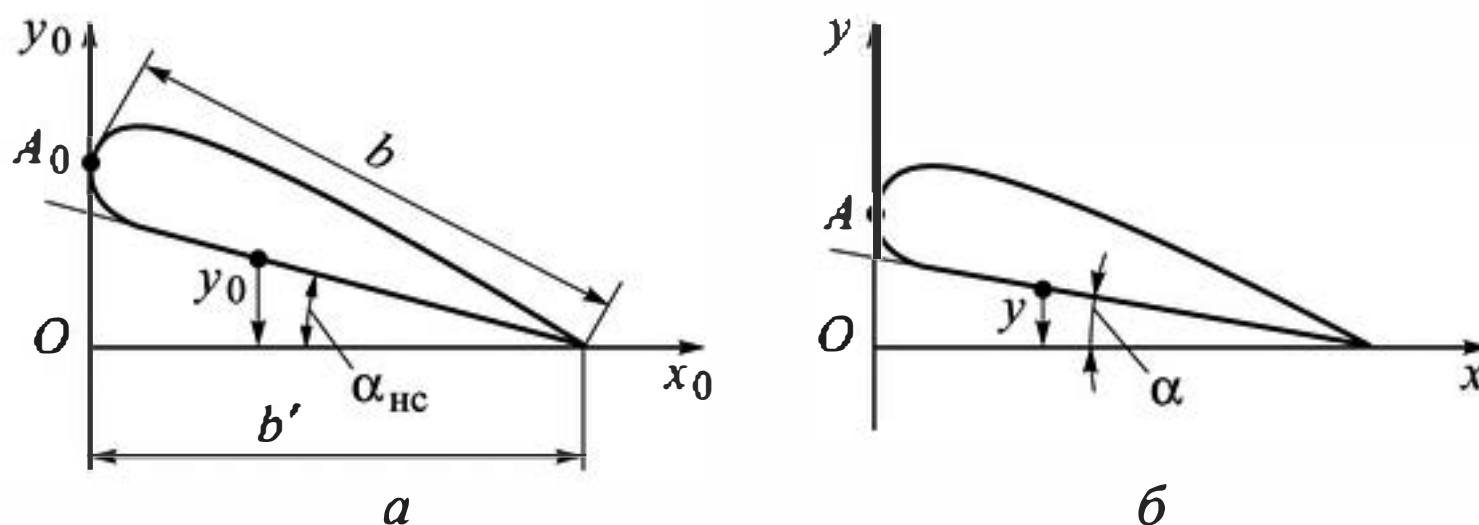


Рис. 10.17. Профили в маловозмущенных несжимаемом (а) и сжимаемом (б) потоках (A, A_0 — точки полного торможения)

Следовательно, в соответствии с (10.52)

$$\alpha_{нс} = \alpha\gamma / \sqrt{1 - M_\infty^2}.$$

Предположим, что произвольный параметр $\gamma = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \bar{p}_{\text{нс}}; \quad y = y_0 \sqrt{1 - M_\infty^2}; \quad \alpha = \alpha_{\text{нс}} \sqrt{1 - M_\infty^2}; \\ c_{ya} &= c_{ya \text{нс}}; \quad m_z = m_{z \text{нс}}.\end{aligned}\tag{10.53}$$

Таким образом, если коэффициенты давления в соответствующих точках тонких профилей, расположенных в сжимаемом и несжимаемом потоках, равны, то в сжимаемом потоке профиль должен быть тоньше, чем в несжимаемом, в $\sqrt{1 - M_\infty^2}$ раз и во столько же раз меньше угол атаки.

Рассмотрим случай, когда $\gamma = \sqrt{1 - M_\infty^2}$, а значит,

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \bar{p}_{\text{нс}} / \sqrt{1 - M_\infty^2}; \quad y = y_0; \quad \alpha = \alpha_{\text{нс}}; \\ c_{ya} &= c_{ya \text{нс}} / \sqrt{1 - M_\infty^2}; \quad m_z = m_{z \text{нс}} / \sqrt{1 - M_\infty^2}.\end{aligned}\tag{10.54}$$

В соответствии с полученными результатами у двух одинаковых профилей, расположенных под одним и тем же углом атаки, коэффициенты давления в соответствующих точках профилей, а также коэффициенты подъемной силы и момента в сжимаемом потоке будут больше, чем в несжимаемом, в $1/\sqrt{1 - M_\infty^2}$ раз. Следовательно, сжимаемость приводит к увеличению давления и подъемной силы. Коэффициент $1/\sqrt{1 - M_\infty^2}$ называется *поправкой на сжимаемость Прандтля – Глауэрта*, а зависимость

$$\bar{p} = \bar{p}_{\text{нс}} / \sqrt{1 - M_\infty^2}\tag{10.55}$$

известна как *формула Прандтля – Глауэрта*. Ее можно рассматривать в качестве первого приближения при расчете коэффициента давления в сжимаемом потоке по соответствующему значению $\bar{p}_{\text{нс}}$. Более точные результаты, относящиеся к утолщенным профилям и увеличенным углам атаки, получаются при использовании формулы Кармана – Тзяна:

$$\bar{p} = \bar{p}_{\text{нс}} \left(\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{M_\infty^2}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\bar{p}_{\text{нс}}}{2} \right)^{-1}.\tag{10.56}$$

Применение формул (10.55) и (10.56) для $\bar{p}$ приводит к весьма большой погрешности при определении коэффициента давления в

точке полного торможения, где скорости и, следовательно, местное число Маха равны нулю. Например, для этой точки, где $\bar{p}_{0\text{нс}} = 1$, расчет по формуле (10.55) дает при $M_\infty = 0,8$ значение $\bar{p}_0 = 1,67$, а по формуле (10.56) — $\bar{p}_0 = 1,26$ вместо действительного значения 1,17.

В точке полного торможения коэффициент давления $\bar{p}_0 = 2(p_0 - p_\infty)/(k p_\infty M_\infty^2)$ для произвольных чисел $M_\infty < 1$ вычисляют по соотношению

$$\bar{p}_0 = \frac{2}{k M_\infty^2} \left[\left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right)^{k/(k-1)} - 1 \right].$$

При $M_\infty < 1$ выражение в круглых скобках можно представить в виде ряда, в котором сохранены первые три члена:

$$\bar{p}_0 = 1 + \frac{M_\infty^2}{4} + \frac{2-k}{24} M_\infty^4.$$

Полученная зависимость пригодна для достаточно широкого диапазона значений $0 \leq M_\infty \leq 1$.

Для расчета аэродинамических характеристик профиля при докритических скоростях $M_\infty < M_{\text{кр}}$ можно рекомендовать выражения, полученные С.А. Христиановичем:

$$c_{ya} = \frac{c_{ya\text{нс}} L}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}; \quad m_z = \frac{m_{z\text{нс}} L^2}{\sqrt{1 - M_\infty^2}},$$

где $L = 1 + 0,05 M_\infty^2 / M_{\text{кр}}^2$.

Коэффициент лобового сопротивления тонкой пластинки ($\bar{c} = 0$) в сжимаемом потоке можно рассчитать по формуле Федяевского:

$$c_{xa} = \frac{c_{xa\text{нс}}}{\sqrt{1 + 0,2 M_\infty^2}}.$$

Расчет аэродинамических характеристик крыла

Рассмотрим безотрывное обтекание установившимся равномерным дозвуковым потоком невязкого газа тонкого слабоизогнутого крыла конечного размаха. Угол атаки α полагаем малым, поскольку в этом случае возмущения, создаваемые крылом в потоке, малы и задачу можно решать в линейной постановке.

Пусть $y = f(x, z)$ — уравнение средней поверхности крыла (рис. 10.18); S — проекция крыла на его базовую плоскость; $S_{\text{пел}}$ — проекция вихревой пелены на ту же плоскость.

В линейной постановке в сжимаемом газе потенциал φ скоростей возмущения удовлетворяет уравнению

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (10.57)$$

которое должно выполняться всюду вне крыла и вихревой пелены, образующейся за ним.

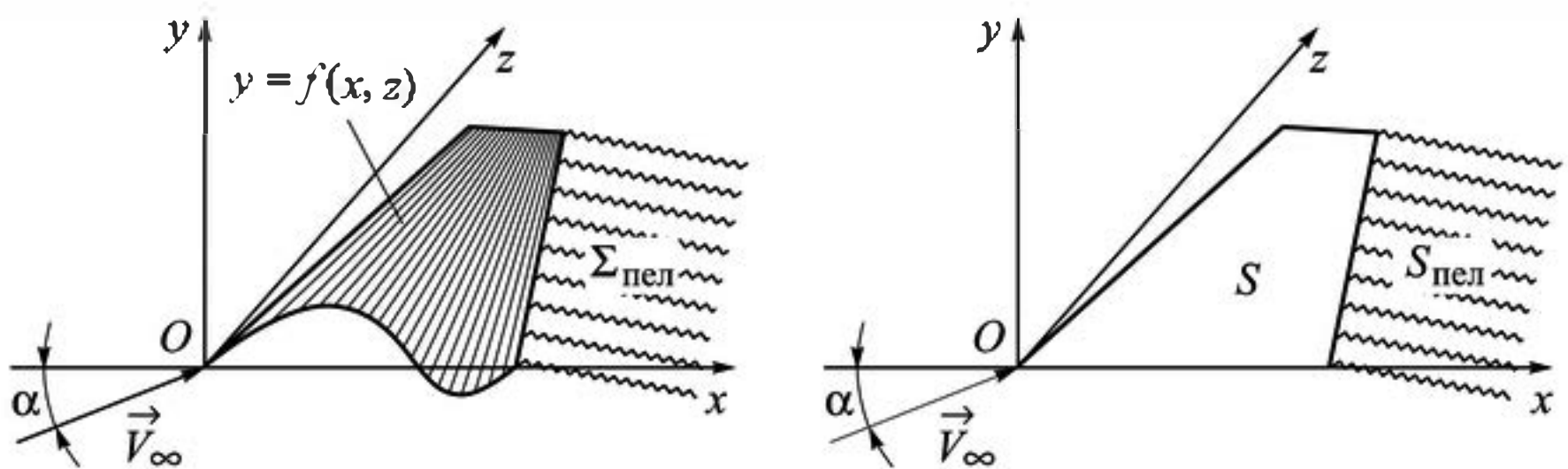


Рис. 10.18. Моделирование обтекания крыла в линейной постановке

Чтобы найти потенциал φ , необходимо наряду с уравнением (10.57) рассмотреть четыре граничных условия.

1. Нормальная к поверхности крыла составляющая относительной скорости равна нулю (условие непротекания):

$$\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\alpha + \frac{\partial f(x, z)}{\partial x}. \quad (10.58)$$

2. На острой задней кромке крыла скорость конечна (гипотеза Чаплыгина – Жуковского):

$$\frac{\partial \varphi_{\text{н}}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{\text{в}}}{\partial x} = 0.$$

3. Свободные вихри, образующие вихревую пелену за крылом, расположены по потоку, поскольку только в этом случае на них не действуют аэродинамические силы и они не меняют свою форму с течением времени. При решении задачи в линейной постановке свободные вихри имеют вид прямых, параллельных вектору скорости $\vec{V}_\infty$ или составляющих с ним небольшой угол α .

4. На большом удалении от крыла и вихревой пелены возмущения должны исчезать:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

где R — минимальное расстояние от рассматриваемой точки до крыла или вихревой пелены.

Введем новые координаты и потенциал возмущенных скоростей:

$$x_{\text{нс}} = x / \sqrt{1 - M_{\infty}^2}; \quad y_{\text{нс}} = y; \quad z_{\text{нс}} = z; \quad \varphi = \gamma \varphi_{\text{нс}}, \quad (10.59)$$

где γ — некоторая константа.

Перейдя в соотношениях (10.57), (10.58) к новым переменным, получим вне поверхности $S + S_{\text{пел}}$ и на поверхности S соответственно

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\text{нс}}}{\partial x_{\text{нс}}^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{\text{нс}}}{\partial y_{\text{нс}}^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{\text{нс}}}{\partial z_{\text{нс}}^2} = 0; \quad (10.60)$$

$$\frac{\gamma}{V_{\infty}} \frac{\partial \varphi_{\text{нс}}}{\partial y_{\text{нс}}} = -\alpha + \frac{1}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \frac{\partial f(x, z)}{\partial x_{\text{нс}}}. \quad (10.61)$$

Остальные граничные условия имеют такой же вид, как и в исходной системе координат.

Из уравнения (10.60) и граничных условий следует, что в новой системе координат потенциал возмущенных скоростей определяется так же, как в несжимаемой среде. Следовательно, задачу определения аэродинамических характеристик крыла при больших дозвуковых скоростях можно свести к задаче расчета этих характеристик в несжимаемой среде. При этом необходимо рассмотреть новое деформированное крыло. Согласно (10.59), линейные размеры крыла в направлении осей Oy и Oz не изменяются. Крыло деформируется только в направлении оси Ox . Размах и толщина крыла при этом постоянны (рис. 10.19). С учетом приведенных на рис. 10.19 размеров, а также выражений (10.59) можно записать

$$\begin{aligned} b_{0\text{нс}} &= b_0 / \sqrt{1 - M_{\infty}^2}; \quad b_{\text{кнс}} = b_{\text{к}} / \sqrt{1 - M_{\infty}^2}; \\ l_{\text{нс}} &= l; \quad S_{\text{нс}} = S / \sqrt{1 - M_{\infty}^2}. \end{aligned} \quad (10.62)$$

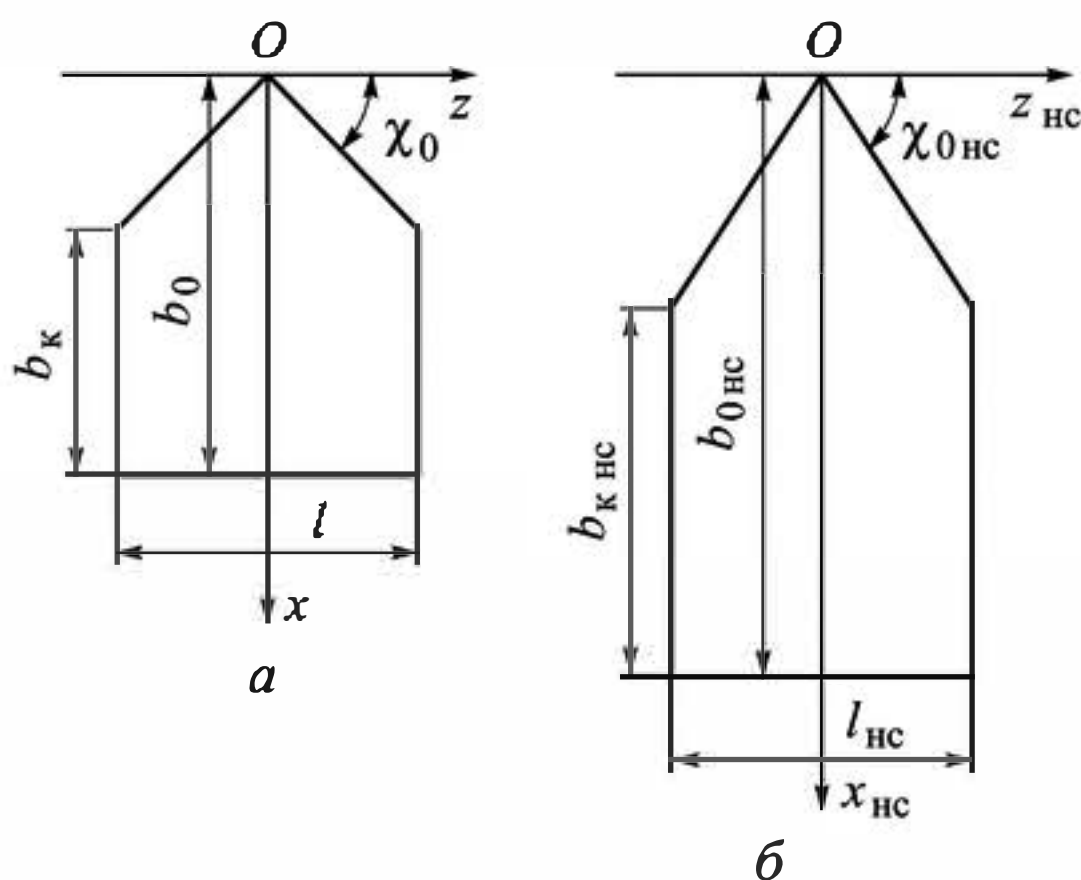


Рис. 10.19. Линейные размеры исходного (а) и деформированного (б) крыльев при расчете аэродинамических характеристик крыла в сжимаемом дозвуковом потоке

Отсюда заключаем, что безразмерные геометрические параметры трапецевидного исходного и деформированного крыльев связаны между собой следующим образом:

$$\lambda_{нс} = \lambda \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad \eta_{нс} = \eta, \quad \operatorname{tg} \chi_{0\text{ нс}} = \operatorname{tg} \chi_0 / \sqrt{1 - M_\infty^2}. \quad (10.63)$$

Найденные соотношения являются критериями подобия при обтекании тонких крыльев простой формы в плане дозвуковым потоком газа ($M_\infty < M_{кр}$). В случае крыльев сложной формы (например, с изломом по передней кромке) для расчетов параметров деформированного крыла следует использовать выражения (10.59).

Связь между коэффициентами давления в соответствующих точках исходного и деформированного крыльев оказывается такой же, как и у профиля:

$$\bar{p} = \bar{p}_{нс} / \sqrt{1 - M_\infty^2}. \quad (10.64)$$

На основании формул (10.2), (10.8) и (10.31) получаем

$$\begin{aligned} c_{y\text{акрыл}} &= c_{y\text{акрылнс}} / \sqrt{1 - M_\infty^2}; \\ m_{z\text{крыл}} &= m_{z\text{крылнс}} / \sqrt{1 - M_\infty^2}; \quad \bar{x}_{F\alpha} = \bar{x}_{F\alpha\text{нс}}. \end{aligned} \quad (10.65)$$

Выражения (10.64) и (10.65) связывают аэродинамические коэффициенты исходного крыла в сжимаемой среде и деформированного крыла в несжимаемой среде и применимы при $M_\infty < M_{кр}$.

Порядок определения аэродинамических характеристик крыла при больших дозвуковых скоростях следующий. Сначала по геометрическим параметрам исходного крыла и соотношениям (10.63) рассчитывают геометрические параметры деформированного крыла. Затем вычисляют аэродинамические характеристики этого крыла в несжимаемом газе. После этого, используя выражения (10.65), определяют аэродинамические характеристики исходного крыла.

10.4. Аэродинамика профиля и крыла при околосвуковых скоростях

Картина обтекания

Известно, что околосвуковыми принято называть скорости, соответствующие $0,8 \leq M_\infty \leq 1,2$. Однако чтобы связать аэродинамику крыла при до- и околосвуковых скоростях, рассмотрим особенности обтекания и аэродинамические характеристики крыла в более широком диапазоне $0,3 \leq M_\infty \leq 1,2$.

Пусть имеет место безотрывное обтекание профиля крыла дозвуковым потоком ($M_\infty < 1$) при угле атаки $\alpha \neq 0$. Покажем, как меняется физическая картина обтекания, а следовательно, и аэродинамические характеристики профиля при возрастании числа M_∞ . Чтобы понять физическую сущность влияния числа M_∞ на аэродинамические характеристики, надо помнить, что при обтекании любого тела, в том числе и профиля (см. рис. 10.2, а), воздушный поток вынужден проходить сужающе-расширяющийся канал, подобный соплу Лаваля, стенками которого являются, с одной стороны, поверхность тела, а с другой — условные границы вдали от тела, где его влияние практически уже не ощущается. Минимальное сечение канала (струйки), которое называется критическим, приходится на место максимальной толщины профиля. Это сечение разделяет профиль на две части: носовую, на которой снижение давления (разрежение) способствует уменьшению сопротивления за счет подсасывающей силы, и хвостовую, где падение давления (разрежение) приводит к увеличению сопротивления. Распределение давления по передней и задней частям профиля формирует основные аэродинамические силы: подъемную (практически полностью) и силу лобового сопротивления (без учета трения).

Следует заметить, что сжимаемость воздуха на силу трения влияет слабо во всем диапазоне чисел M_∞ , приводя лишь к монотонно-

му незначительному уменьшению коэффициента c_{xf} при увеличении M_∞ . Напротив, сила от давления весьма существенно зависит от M_∞ , особенно в трансзвуковом диапазоне при переходе от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым, чем и определяется в основном влияние числа M_∞ как на подъемную силу, так и особенно на лобовое сопротивление (вследствие волновой составляющей).

При весьма малых числах $M_\infty < 0,3 \dots 0,4$ ($V \ll a$) сжимаемость воздуха проявляется слабо и основные уравнения аэродинамики можно анализировать, полагая плотность воздуха постоянной. Тогда в сужающемся канале в соответствии с уравнением расхода скорость будет возрастать, а давление, в соответствии с уравнением Бернулли, падать. На переднюю часть профиля за исключением небольшой области вблизи критической точки будет действовать пониженное давление (подсасывающая сила), способствующее уменьшению лобового сопротивления. В расширяющемся канале на хвостовой части происходит обратная картина: скорость уменьшается, а давление возрастает. Распределение давления по всему профилю таково, что результирующая сила практически не дает составляющую лобового сопротивления. В рассмотренном диапазоне малых чисел Маха, пока не сказывается сжимаемость воздуха, картина распределения коэффициента давления по профилю качественно и количественно сохраняется неизменной, отчего все аэродинамические характеристики в указанном диапазоне чисел M_∞ постоянны (рис. 10.20, 10.21).

Заметное влияние сжимаемости начинается с $M_\infty \approx 0,4 \dots 0,5$. Суть его состоит в том, что вместе с давлением начинает изменяться и

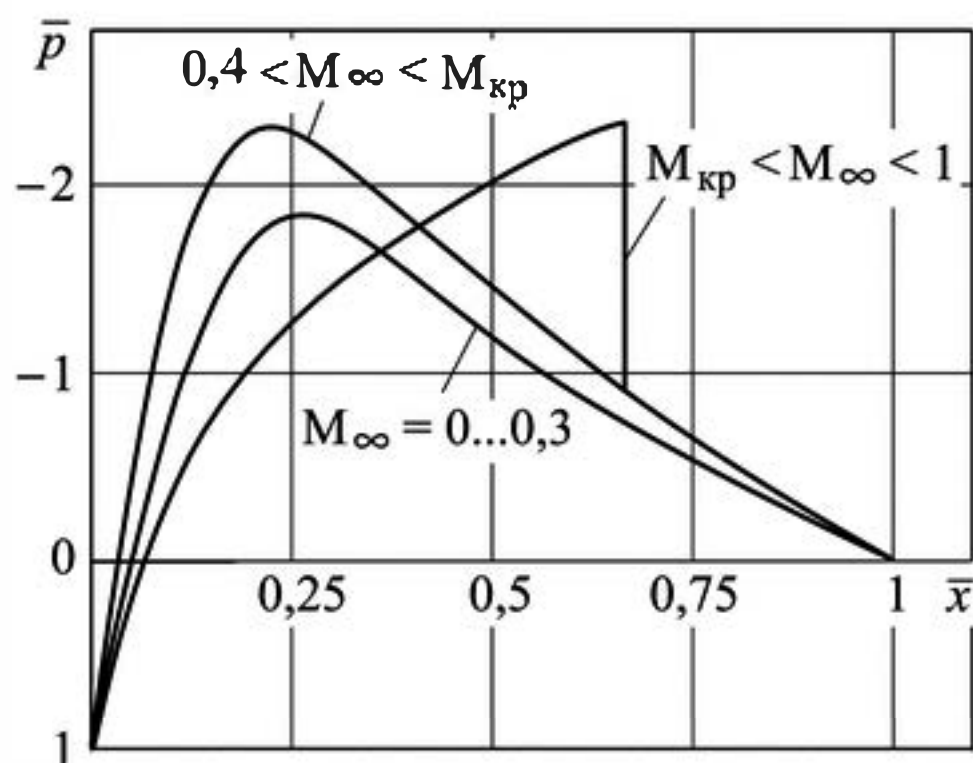


Рис. 10.20. Влияние сжимаемости на распределение коэффициента давления при обтекании профиля

плотность воздуха, что приводит к дополнительному росту скорости и снижению давления. В результате на большей части верхней поверхности профиля растет разрежение, возрастают подъемная сила, а следовательно, и производная c_{ya}^α (см. участок 1–1' на рис. 10.21, а). Однако такое изменение давления влияния на сопротивление практически не оказывает (см. рис. 10.21, б), так как действует в основном перпендикулярно продольной оси профиля.

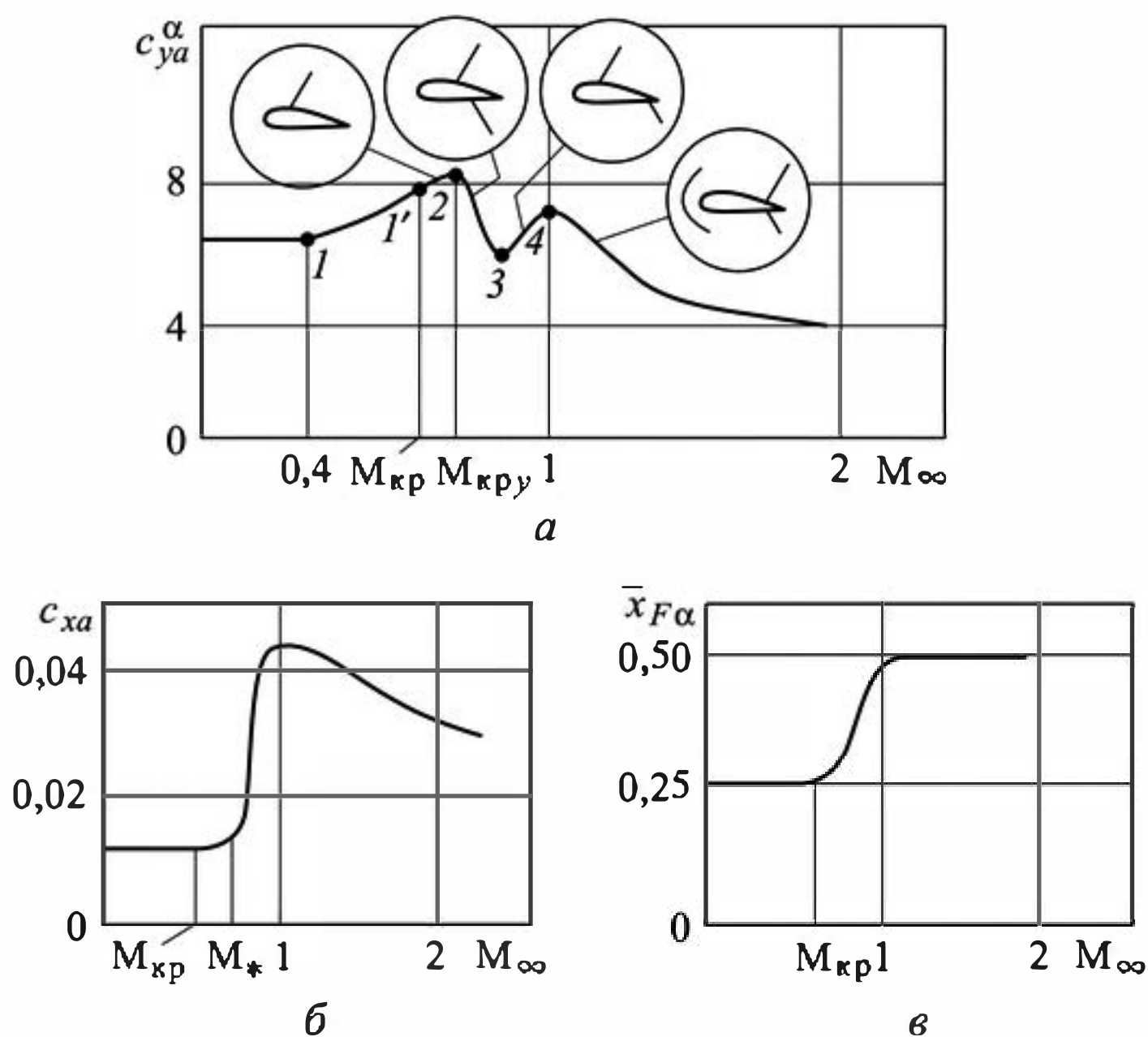


Рис. 10.21. Влияние числа M_∞ на аэродинамические характеристики профиля

Поскольку в рассмотренном диапазоне чисел M_∞ распределение давления по профилю практически не меняется качественно, а лишь количественно, то координата аэродинамического фокуса также не изменяется и фокус находится там, где в соответствии с распределением давления расположен пик нагрузки, т. е. вблизи максимальной толщины профиля. Следовательно, у большинства крыловых профилей фокус при дозвуковых скоростях находится на расстоянии примерно четверти хорды от носка (см. рис. 10.21, в).

Качественное изменение распределения давления и всех аэродинамических характеристик начинается с момента, когда в наиболее узком сечении струйки местная скорость обтекания V стано-

вится равной местной скорости звука. Соответствующие этому моменту скорость невозмущенного набегающего потока и число Маха называются критическими и обозначаются $V_{кр}$ и $M_{кр}$.

Дальнейшее увеличение скорости перед профилем ($M_\infty > M_{кр}$) приводит к тому, что в расширяющейся части струйки газ начинает двигаться со сверхзвуковой скоростью, а вблизи профиля образуется зона местных сверхзвуковых скоростей со значительным разрежением.

Поскольку за профилем скорость потока дозвуковая, местная сверхзвуковая область замыкается скачком уплотнения, близким к прямому (рис. 10.22, *а*). За скачком поток снова становится дозвуковым. У симметричного профиля при $\alpha = 0$ местные сверхзвуковые зоны возникают в области максимальной толщины профиля как над верхней, так и под нижней его поверхностями. При положительном угле атаки обычно вблизи верхней поверхности профиля индуцируются большие скорости, чем у нижней. Там раньше проявляется влияние сжимаемости и более интенсивно растет разрежение. Поэтому при $\alpha > 0$ местная сверхзвуковая зона возникает сначала вблизи верхней поверхности. (При $\alpha = 0$ несимметрия потока, обтекающего верхнюю и нижнюю поверхности, обусловлена несимметрией самого профиля.)

С ростом числа M_∞ сверхзвуковая область расширяется и замыкающий ее скачок смещается к задней кромке. Поскольку в этой области разрежение увеличивается, это приводит к росту коэффициента c_{ya} (см. участок кривой $I'-2$ на рис. 10.21, *а*). При некото-

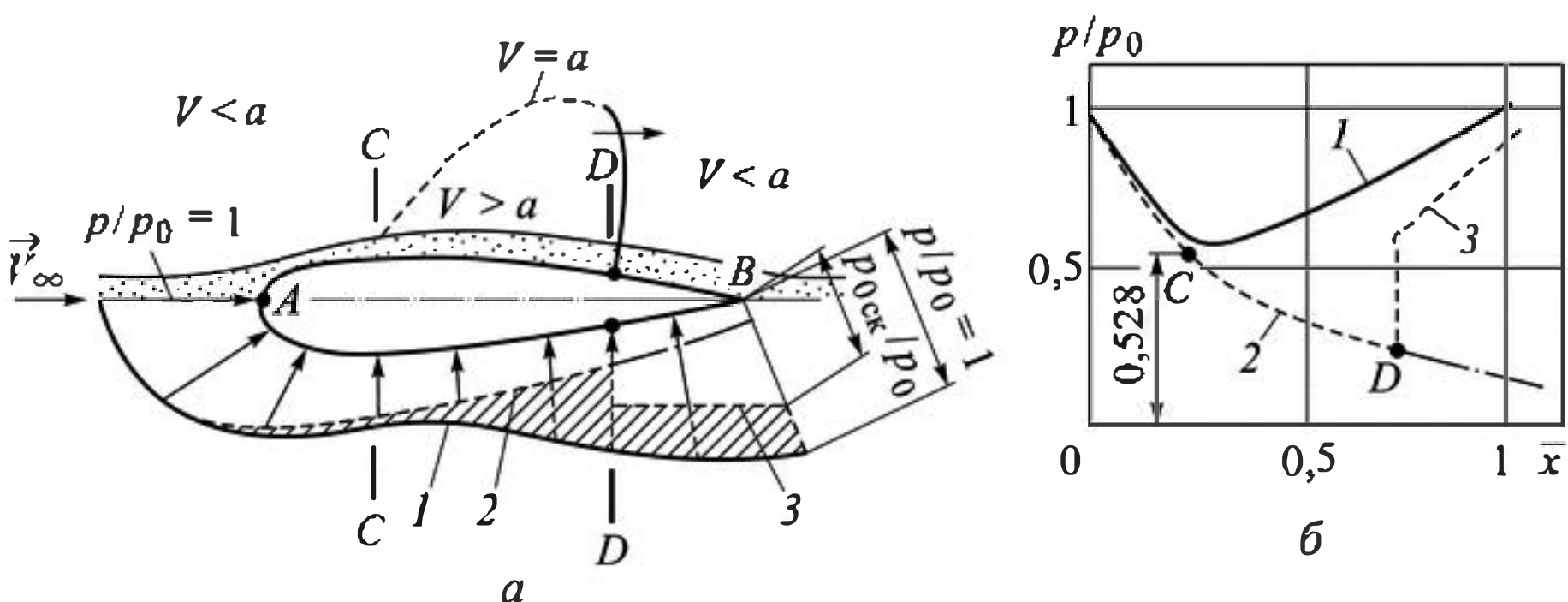


Рис. 10.22. Картина обтекания идеальным газом симметричного профиля и соответствующая эпюра давления (*а*), а также изменение относительного давления по хорде профиля (*б*) при околосвуковой скорости в случае $\alpha = 0$: 1 – распределение давления в случае, когда в сечении C–C $V_\infty \approx a$; 2 – то же при $V_\infty > a$; 3 – то же на скачке и за ним

ром числе Маха сверхзвуковая область возникает и у нижней поверхности. С увеличением M_∞ эта область расширяется, замыкающий ее скачок смещается к задней кромке, но движется к ней быстрее, чем скачок на верхней поверхности. Поэтому зона разрежения растет снизу быстрее, чем сверху, и коэффициент c_{ya} уменьшается (см. участок 2–3 на рис. 10.21, а).

Число M_∞ , при котором коэффициент c_{ya} достигает максимума, а производная dc_{ya}/dM_∞ становится отрицательной, называют критическим числом Маха по c_{ya} и обозначают $M_{кр.у}$. Отметим, что в случае ЛА нормальной схемы снижение c_{ya} профиля крыла с ростом M_∞ приводит к пикированию аппарата.

После того как нижний скачок достигает задней кромки, дальнейшее увеличение числа M_∞ сопровождается расширением сверхзвуковой зоны только на верхней поверхности. При этом коэффициент c_{ya} растет (см. участок 3–4 на рис. 10.21, а). При $M_\infty = 1$ оба скачка стабилизируются на задней кромке.

Процесс возникновения и развития местных сверхзвуковых зон, начиная от $M_{кр}$ и до $M_\infty = 1$, когда заканчивается формирование головной и хвостовой ударных волн, называется *волновым кризисом*. При волновом кризисе происходит качественное изменение распределения давления, заключающееся в том, что вместе с расширением сверхзвуковых зон и перемещением местных скачков уплотнения к задней кромке профиля смещается назад и пик аэродинамической нагрузки (см. рис. 10.20). Рассмотрим, как это отражается на основных аэродинамических характеристиках.

Аэродинамический фокус $\bar{x}_{F\alpha}$ на профиле после $M_{кр}$ сильно смещается назад. Это происходит в диапазоне $1/4 \dots 1/2$ хорды (см. рис. 10.21, в). Затем, после $M_\infty = 1$, когда устанавливаются головной и хвостовой скачки уплотнения и распределение давления стабилизируется, координата аэродинамического фокуса остается примерно постоянной.

Смещение аэродинамического фокуса назад при переходе на сверхзвуковую скорость характерно не только для профиля, но и для любых ЛА и их отдельных частей. Этот факт явился еще одной, не менее серьезной причиной наличия звукового барьера, поскольку смещение аэродинамического фокуса назад вызывает пикирующий момент.

Образование местных сверхзвуковых областей и скачков уплотнения приводит к появлению волнового сопротивления. Чтобы понять, как оно возникает, рассмотрим простейший случай безотрыв-

ного обтекания идеальным газом симметричного профиля при $\alpha = 0$ (см. рис. 10.22).

До тех пор, пока поток всюду дозвуковой, профиль в идеальном газе не испытывает сопротивления. В передней критической точке A давление равно давлению торможения p_0 . В сужающейся части струйки (на участке AC) поток разгоняется, давление падает, а в расширяющейся части на участке CB скорость уменьшается, давление растет и на задней кромке становится равным давлению торможения p_0 . В итоге давление, действующее на лобовую часть профиля, уравнивается давлением, действующим на кормовую часть, и лобовое сопротивление не возникает. Кривая I на рис. 10.22, б иллюстрирует распределение давления в предельном случае, когда в сечении $C-C$ скорость движения газа почти равна местной скорости звука и лобового сопротивления еще нет.

С увеличением M_∞ в сечении $C-C$ устанавливается постоянная скорость, равная скорости звука, а давление равно критическому $p/p_0 = 0,528$ (для $k = 1,4$). За этим сечением поток становится сверхзвуковым, что кардинально меняет распределение давления. На участке CD давление уже не растет, а падает, так как в расширяющейся сверхзвуковой струйке скорость возрастает. Давление снижается вплоть до скачка, где оно возрастает, но не достигает значения, наблюдаемого в случае, когда скачка нет.

При переходе через скачок скорость становится дозвуковой, поскольку он практически прямой. Поэтому на участке DB , где струйка расширяется, давление растет. На задней кромке (B — задняя критическая точка) оно становится равным давлению $p_{0\text{ск}}$ за скачком, которое меньше давления торможения невозмущенного потока p_0 . Уменьшение давления на кормовой части профиля (см. заштрихованную область на рис. 10.22, а) и создает *волновое сопротивление*. С ростом M_∞ скачок смещается назад, давление на кормовой части уменьшается и волновое сопротивление возрастает. Волновое сопротивление повышается и при увеличении угла α .

На сверхзвуковых скоростях ($M_\infty > 1$) коэффициенты $C_{y\alpha}^*$ и $C_{x\alpha}$, как правило, монотонно убывают (см. рис. 10.21, а, б), а координата фокуса $\bar{x}_{F\alpha}$ остается постоянной (см. рис. 10.21, в).

При обтекании крыла ЛА реальным вязким воздухом у его поверхности возникает пограничный слой, в котором частицы воздуха сильно заторможены. Вблизи стенки их скорость меньше скорости звука, а на поверхности — равна нулю. Поэтому в реальных условиях скачок не доходит до стенки (рис. 10.23). Повышение дав-

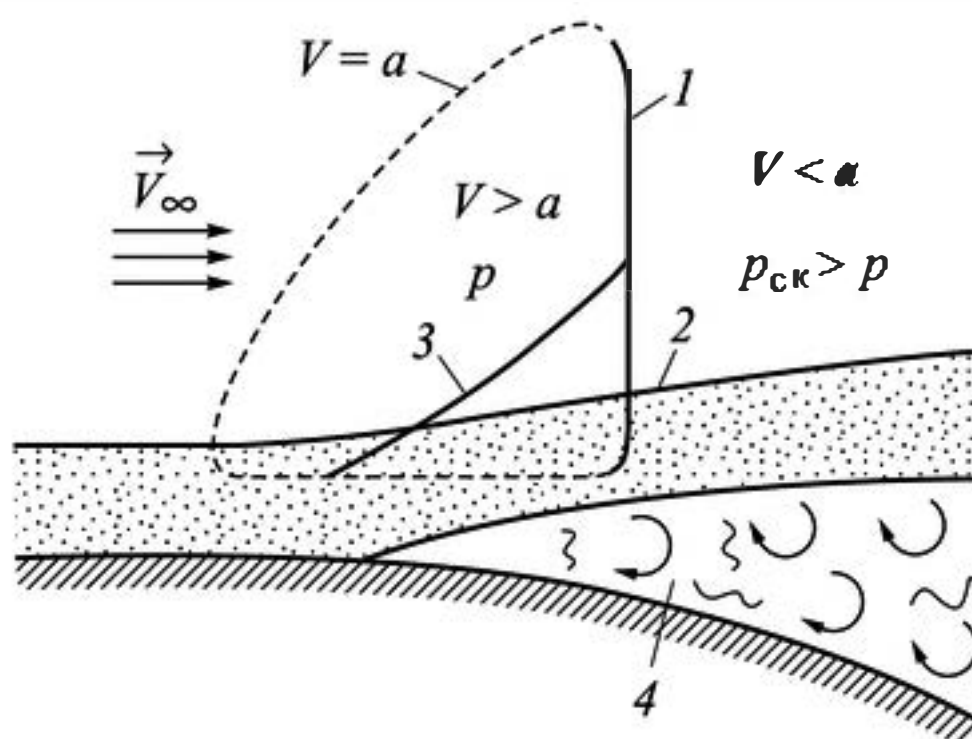


Рис. 10.23. Образование λ -образного скачка:

1 — основной скачок; 2 — условная граница пограничного слоя; 3 — дополнительный косой скачок; 4 — область оторвавшегося потока за скачком

ления за скачком приводит к возникновению в дозвуковой части пограничного слоя течения навстречу основному потоку. Пограничный слой перед скачком «вспухает», а за скачком при определенных (критических) перепадах давления на скачке отрывается от поверхности. Отклонение невязкого течения на внешней границе пограничного слоя перед скачком вызывает торможение сверхзвукового потока, которое может сопровождаться появлением дополнительного косого скачка. Вместе с основным косой скачок образует так называемый λ -образный скачок (см. рис. 10.23). В области отрыва потока, расположенной между скачком и кормовой точкой профиля, давление не растет. Оно оказывается еще меньше, чем при обтекании профиля невязким потоком со скачком уплотнения. Это вызывает появление дополнительного *сопротивления отрыва*, являющегося также сопротивлением от давления.

Критическое число Маха

Число Маха набегающего на профиль невозмущенного потока, при котором в некоторой точке местная скорость впервые становится равной местной скорости звука, называют *критическим числом Маха профиля* и обозначают $M_{кр}$.

Местная скорость потока достигает скорости звука там, где она при малых скоростях набегающего потока была максимальной, а давление — минимальным, поэтому число $M_{кр}$ профиля связывают с минимальным коэффициентом давления p_{min} на его поверхности при малых скоростях. Значение $M_{кр}$ профиля можно найти по

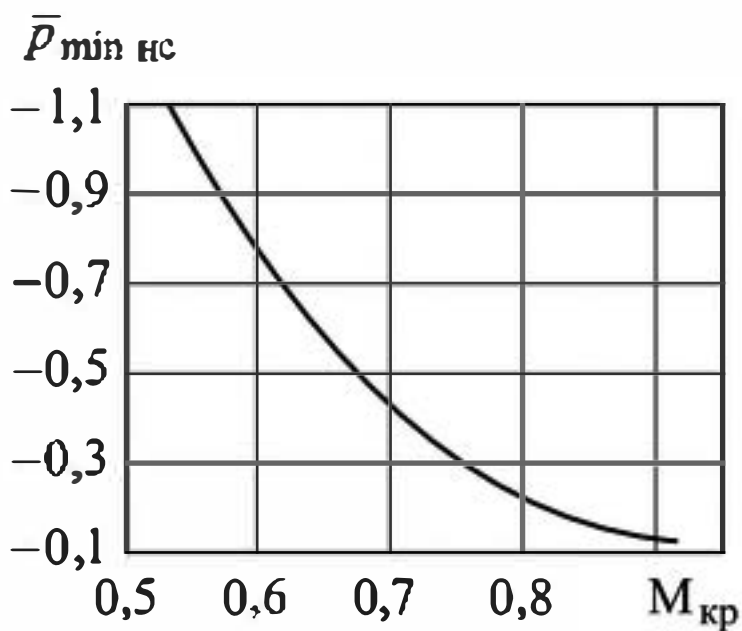


Рис. 10.24. Зависимость критического числа $M_{кр}$ профиля от минимального коэффициента давления в несжимаемом потоке

теоретической кривой Христиановича (рис. 10.24), зная распределение коэффициента давления $\bar{p}$ по контуру профиля в потоке малых скоростей.

Только при $M_{\infty} > M_{кр}$ у поверхности профиля появляется область течения, в которой скорость превышает скорость звука и возникает волновое сопротивление. Однако пока $M_{кр} < M_{\infty} < M_*$ скачок очень слаб и не оказывает заметного влияния на распределения скоростей, давлений и лобовое сопротивление. При $M_{\infty} > M_*$ волновое сопротивление профиля резко растет. Число M_* (второе по Христиановичу критическое число Маха) оп-

ределяют как число M_{∞} начала нарастания лобового сопротивления (см. рис. 10.21, б), для которого

$$\Delta c_{xa} = 0,002$$

или

$$dc_{xa}/dM_{\infty} \cong 0,1.$$

Для профилей различных форм значение M_* при $c_{ya} = 0$ можно найти из формулы

$$\bar{c} = 0,3 \left\{ \left[1 - \left(\frac{5 + M_*^2}{5 + M_{экр}^2} \right)^{3,5} \right] \frac{\sqrt{1 - M_*^2}}{M_*^2} \right\}^{2/3}, \quad (10.66)$$

где $\bar{c}$ — относительная толщина профиля средней хорды крыла; $M_{экр}$ — эквивалентное число Маха, $M_{экр} = 1 \dots 1,15$.

Число $M_{экр}$ зависит от формы профиля и характеризует протяженность области сверхзвукового потока в условиях, соответствующих началу повышения лобового сопротивления. С увеличением c_{ya} число M_* уменьшается. Для расчета M_* при $c_{ya} \neq 0$ можно также применить формулу (10.66), но значение $M_{экр}$ при этом следует уменьшить на $0,25c_{ya}$. Этот прием следует использовать при $c_{ya} < 0,7$.

Числа $M_{кр}$ и M_* крыла конечного размаха зависят от его формы в плане. Уменьшение удлинения крыла вызывает падение скоростей и разрежения на его верхней поверхности. Поэтому чем меньше удлинение крыла, тем больше $M_{кр}$ и M_* .

На эти числа сильно влияет стреловидность крыла. Как будет показано в § 10.6, относительная толщина и угол атаки профиля в сечении, перпендикулярном передней кромке скользящего крыла, больше соответствующих величин профиля в сечении по потоку в $1/\cos \beta$ раз (где β — угол скольжения). Поскольку скорости в перпендикулярном сечении определяются числом $M_{n\infty} = M_\infty \cos \beta$, то местная скорость на скользящем крыле достигнет местной скорости звука, когда $M_{n\infty} = M_{n\text{кр}}$. Поэтому критическое число Маха скользящего крыла $M_{\text{кр}} = M_{n\text{кр}}/\cos \beta$, где $M_{n\text{кр}}$ — критическое число Маха нескользящего крыла (профиля) при $\alpha_n = \alpha/\cos \beta$ и $\bar{c}_n = \bar{c}/\cos \beta$. Следовательно, вследствие эффекта скольжения у стреловидных крыльев $M_{\text{кр}}$ должно быть больше, чем у нестреловидных, но значительно меньше, чем у скользящих (при $\beta = \chi_0$). Это связано с нарушением эффекта скольжения в корневых и концевых сечениях крыла, а также искажением характера обтекания стреловидного крыла, вызванным фюзеляжем. Для реального крыла всегда $M_{\text{кр}} < 1$.

Для приближенного расчета числа M_* стреловидного крыла при $c_{y\alpha} = 0$ можно использовать формулу

$$\bar{c} = \frac{0,3}{M_*} \left(\frac{1}{M_* \cos \chi} - M_* \cos \chi \right)^{1/3} \left\{ 1 - \left[\frac{5 + (M_* \cos \chi)^2}{5 + M_{\text{экв}}^2} \right]^{3,5} \right\}^{2/3}, \quad (10.67)$$

где χ — угол стреловидности по линии 1/4 хорд. Чтобы учесть влияние подъемной силы на значение M_* , параметр $M_{\text{экв}}$ в формуле (10.67) нужно уменьшить на $0,25c_{y\alpha}/\cos^2 \chi$.

10.5. Аэродинамика профиля и крыла при сверхзвуковых скоростях

Линеаризованная теория сверхзвукового обтекания

Общие подходы к расчету аэродинамических характеристик профиля и крыла, рассчитываемые параметры, уравнения, граничные и начальные условия при сверхзвуковом обтекании в целом остаются такими же, как и при дозвуковом. Решение задач сверхзвукового обтекания упрощает тот факт, что граничные условия с бесконечности смещаются на первый по потоку скачок уплотнения или первую линию слабого возмущения при реализации течения расширения над носовой частью тела (возмущения от тела в простран-

ство перед этими линиями в сверхзвуковом потоке не распространяются), т. е. существенно сужается пространство, в котором следует исследовать поведение функций газодинамических переменных. Облегчает расчеты и применение модели Прандтля, в соответствии с которой поток возле тела делится на две части: пограничный слой, в котором учитывается влияние вязкости, и поток вне этого слоя, где среда принимается идеальной. Определив для идеального газа во всем пространстве возле тела распределение давления по поверхности тела (принятое постоянным по толщине пограничного слоя), вычисляют газодинамические переменные в пограничном слое с использованием уравнений для вязкого газа.

При расчете аэродинамических характеристик крыла, обтекаемого идеальным газом, наибольшее распространение получили методы, основанные на линейной теории. Они дают приемлемые результаты и не требуют больших затрат машинного времени. Как и при дозвуковых скоростях, в линейной постановке потенциал φ скорости возмущения удовлетворяет уравнению (10.57). С учетом, что $M_\infty > 1$, можно записать

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Методы определения аэродинамических характеристик крыла можно подразделить на три группы:

- 1) аналитические (метод характеристик, сочетание теории скачков уплотнения и волн разрежения, метод местных пластин);
- 2) эмпирические, основанные на результатах обработки аэродинамических характеристик крыльев разной геометрии с использованием параметров подобия;
- 3) численные.

Рассмотрим применение линеаризованной теории сверхзвукового обтекания к расчету аэродинамических характеристик профиля крыла.

Расчет тонкой пластинки в сверхзвуковом потоке при отсутствии физико-химических превращений

Рассмотрим простейший профиль крыла в виде тонкой пластинки, установленной в сверхзвуковом потоке под углом атаки α (рис. 10.25). У ее передней кромки сверхзвуковой поток разделяется на две не влияющие одна на другую части: верхнюю (над пластинкой) и нижнюю (под нею). Поэтому сверхзвуковое обтекание каждой стороны можно исследовать независимо.

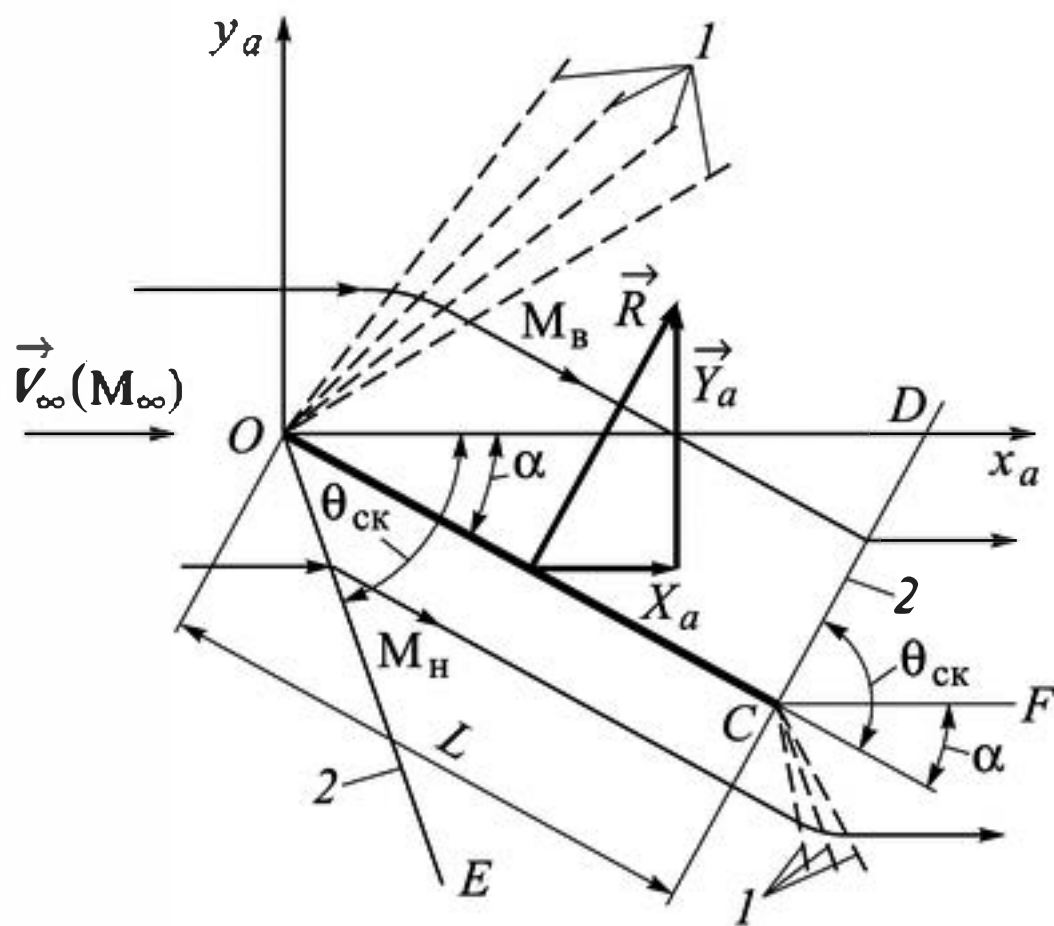


Рис. 10.25. Схема сверхзвукового обтекания тонкой пластинки:
1 — веер волн разрежения; 2 — скачки уплотнения

Рассмотрим верхнюю сторону пластинки. Течение здесь представляет собой плоский сверхзвуковой поток, обтекающий поверхность, которая образует с направлением невозмущенного течения угол, больший 180° . Такой поток впервые был исследован Л. Прандтлем и Т. Майером и носит название течения Прандтля – Майера.

Это течение является изэнтропическим, поэтому давление торможения не меняется, т. е. $p_{0в} = p_{0\infty}$. Угол поворота потока известен и равен α , в связи с чем из выражения

$$\omega(M_в) = \omega(M_\infty) + \alpha$$

находим число Маха $M_в$ на верхней стороне пластинки, а давление рассчитываем по газодинамической функции $\pi(M_в, k)$:

$$p_в = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_в^2 \right)^{-\frac{k}{k-1}} p_{0\infty}.$$

Здесь

$$\omega(M) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \arctg \sqrt{\frac{k-1}{k+1} (M^2 - 1)} - \arctg \sqrt{M^2 - 1}.$$

На нижней стороне пластинки образуется присоединенный скачок уплотнения 2 (см. рис. 10.25), поэтому расчет можно вести с

использованием теории скачков уплотнения. Угол скачка определяем из соотношения

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_{\text{ск}}}{\operatorname{tg}(\theta_{\text{ск}} - \alpha)} = \frac{(k+1)M_{\infty}^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}}{2 + (k-1)M_{\infty}^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}}},$$

а давление и число Маха — по формулам

$$\frac{p_{\text{н}}}{p_{\infty}} = \frac{2k}{k+1} M_{\infty}^2 \sin^2 \theta_{\text{ск}} - \frac{k-1}{k+1};$$

$$M_{\text{н}} = \sqrt{\frac{(k-1)M_{\infty}^2 + 2}{(p_{\text{н}}/p_{\infty})(k+1)} + 2 \frac{2kM_{\infty}^2 - (p_{\text{н}}/p_{\infty})(k+1) - k+1}{(k^2-1)(p_{\text{н}}/p_{\infty}) + (k+1)^2}}.$$

В случае малого угла атаки α течение в окрестности пластинки будет маловозмущенным, и для расчета можно воспользоваться результатами линейной теории. Как было показано в § 10.2 и 10.3, коэффициент давления можно рассчитать, зная приращение скорости течения вдоль оси Ox_{α} :

$$\bar{p} = -2V'_x/V_{\infty}.$$

Для малых углов поворота потока при замене веера волн разрежения и скачка уплотнения линией Маха (характеристикой) с углом

$$\mu_{\infty} = \arcsin \frac{1}{M_{\infty}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

эта скорость может быть получена из соотношения для характеристик в плоскости годографа скорости, взятого в конечных разностях (см. гл. 7):

$$\Delta V/V \mp \operatorname{tg} \mu \Delta \beta = 0.$$

Принимая для маловозмущенного потока

$$\Delta V = V'_x, \quad V = V_{\infty}, \quad \Delta \beta = \alpha, \quad \operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \mu_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}},$$

находим

$$V'_x/V_{\infty} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}.$$

Подставляя V'_x , для коэффициента давления получаем следующее выражение:

$$\bar{p} = \mp \frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}.$$

В случае течения разрежения $V'_x > 0$, $\bar{p} < 0$, а для течения сжатия $V'_x < 0$, $\bar{p} > 0$. В соответствии с этим на верхней стороне пластинки, наклоненной под малым углом атаки α , коэффициент давления

$$\bar{p}_в = -\frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad (10.68)$$

а на нижней —

$$\bar{p}_н = \frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \quad (10.69)$$

Если длина пластинки L , а ее ширина принята за единицу, то сила от давления $R = L(p_н - p_в)$. Следовательно, подъемная сила $Y_a = R \cos \alpha$, сила лобового сопротивления $X_{ар} = R \sin \alpha$, а соответствующие коэффициенты $c_{ya} = Y_a / (q_\infty L)$ и $c_{хар} = X_{ар} / (q_\infty L)$. Вводя коэффициенты давления на верхней $\bar{p}_в = (p_в - p_\infty) / q_\infty$ и на нижней $\bar{p}_н = (p_н - p_\infty) / q_\infty$ сторонах пластинки, получаем

$$c_{ya} = (\bar{p}_н - \bar{p}_в) \cos \alpha; \quad c_{хар} = (\bar{p}_н - \bar{p}_в) \sin \alpha. \quad (10.70)$$

Составляющая $X_{ар}$ силы лобового сопротивления от давления, возникающая при сверхзвуковом обтекании пластинки и вызванная образованием ударных и простых волн возмущения, называется *волновым сопротивлением*, а ее коэффициент $c_{хар} = c_{хвол}$ — *коэффициентом волнового сопротивления*. Это сопротивление не равно нулю даже в случае идеальной (невязкой) среды.

Аэродинамическое качество $K = c_{ya} / c_{хар} = \operatorname{ctg} \alpha$ пластинки является функцией только угла атаки. Ввиду равномерного распределения давления по поверхности пластинки центр давления расположен на ее середине. Следовательно, относительно передней кромки момент силы от давления $M_z = -RL/2$, а соответствующий коэффициент момента тангажа

$$m_z = M_z / (q_\infty L^2) = -(\bar{p}_н - \bar{p}_в) / 2. \quad (10.71)$$

Для пластинки, расположенной в маловозмущенном (линеаризованном) потоке, коэффициенты давления на верхней и нижней поверхностях определяются выражениями (10.68) и (10.69). В соответствии с этим разность коэффициентов давлений

$$\bar{p}_H - \bar{p}_B = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \quad (10.72)$$

Подставив (10.72) в формулы (10.70) и (10.71), для малых α получим

$$c_{ya} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}; \quad c_{xap} = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}; \quad m_z = \frac{-2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \quad (10.73)$$

Расчет тонкого профиля в маловозмущенном сверхзвуковом потоке

Численные методы позволяют весьма точно рассчитать аэродинамические характеристики профиля. Но на предварительной стадии проектирования ЛА важно иметь простые формулы, связывающие аэродинамические характеристики с геометрическими параметрами профиля и режимом полета. Такие формулы можно получить, применяя методы, основанные на упрощенных моделях. Одним из них является *метод местных пластин*.

Рассмотрим тонкий слабоизогнутый профиль с острыми кромками, установленный под малым углом атаки. Воздух будем считать идеальным.

В соответствии с методом местных пластин коэффициент давления на поверхности профиля принимают равным коэффициенту давления на пластине, касающейся поверхности профиля в рассматриваемой точке и обтекаемой невозмущенным потоком. Согласно рис. 10.26, угол между направлением набегающего потока и пластиной 1 — вогнутый, а пластиной 2 — выпуклый. Поэтому на верхней поверхности профиля реализуется течение разрежения, а на нижней — уплотнения. Для верхней и нижней поверхностей коэффициент давления можно рассчитать по формулам (10.68) и (10.69) соответственно.

На рис. 10.26 видно, что $\theta_H = \alpha + \Delta\theta_H$, $\theta_B = \alpha + \Delta\theta_B$. В рамках линейной теории можно считать, что $\Delta\theta_H = -dy_H/dx$; $\Delta\theta_B = -dy_B/dx$, где $y_H = y_H(x)$; $y_B = y_B(x)$ — уравнения нижнего и верхнего контуров профиля. С учетом этого находим

$$\bar{p}_H = \frac{2(\alpha - dy_H/dx)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}; \quad \bar{p}_B = \frac{2(dy_B/dx - \alpha)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \quad (10.74)$$

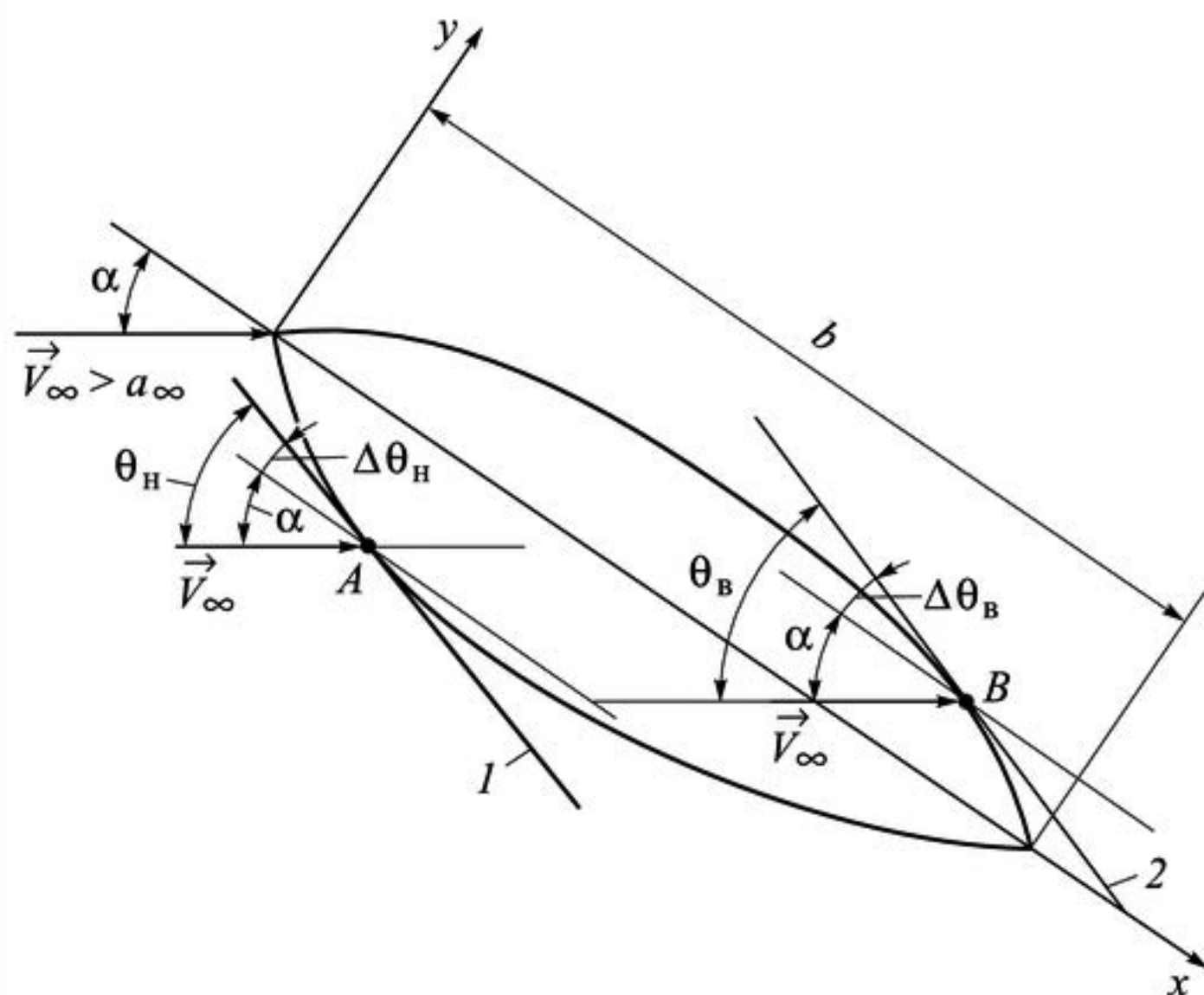


Рис. 10.26. Расчет аэродинамических характеристик профиля методом местных пластин:

1, 2 – пластины, касающиеся нижнего и верхнего контуров профиля соответственно; θ_H , θ_B – углы поворота потоков, набегающих на пластины 1 и 2 соответственно

В соответствии с (10.3) коэффициент нормальной силы профиля

$$c_y = \frac{1}{b} \int_0^b (\bar{p}_H - \bar{p}_B) dx.$$

После подстановки выражений (10.74) с учетом, что

$$\int_0^b \frac{dy_H}{dx} dx = \int_0^b \frac{dy_B}{dx} dx = 0,$$

получаем

$$c_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}; \quad c_y^\alpha = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \quad (10.75)$$

При малых значениях угла α

$$c_{ya} \cong c_y; \quad c_{ya}^\alpha \cong c_y^\alpha.$$

Следовательно, в рамках принятых допущений для симметричного профиля коэффициенты c_y , c_{ya} , c_y^α , c_{ya}^α не зависят от формы профиля. Кроме того, при $\alpha = 0$ коэффициенты $c_y = c_{ya} = 0$, т. е. $\alpha_0 = 0$.

В случае профиля с закругленной передней кромкой этот вывод, строго говоря, не обоснован, но отступления от указанной закономерности незначительны и во многих случаях ими можно пренебречь.

Коэффициент лобового сопротивления содержит две составляющие: коэффициент профильного сопротивления $c_{xa \text{ пр}}$ и коэффициент волнового сопротивления $c_{xa \text{ вол}}$:

$$c_{xa} = c_{xa \text{ пр}} + c_{xa \text{ вол}}.$$

Коэффициент профильного сопротивления определяется влиянием вязкости и в первом приближении может быть принят равным коэффициенту трения профиля $c_{xa \text{ пр}} = c_{xf} = 2 c_{xaf} \eta_M$, где c_{xaf} — коэффициент одностороннего трения пластинки при $M_\infty = 0$ (рис. 10.27); η_M — коэффициент, учитывающий влияние числа M_∞ на сопротивление трения (рис. 10.28).

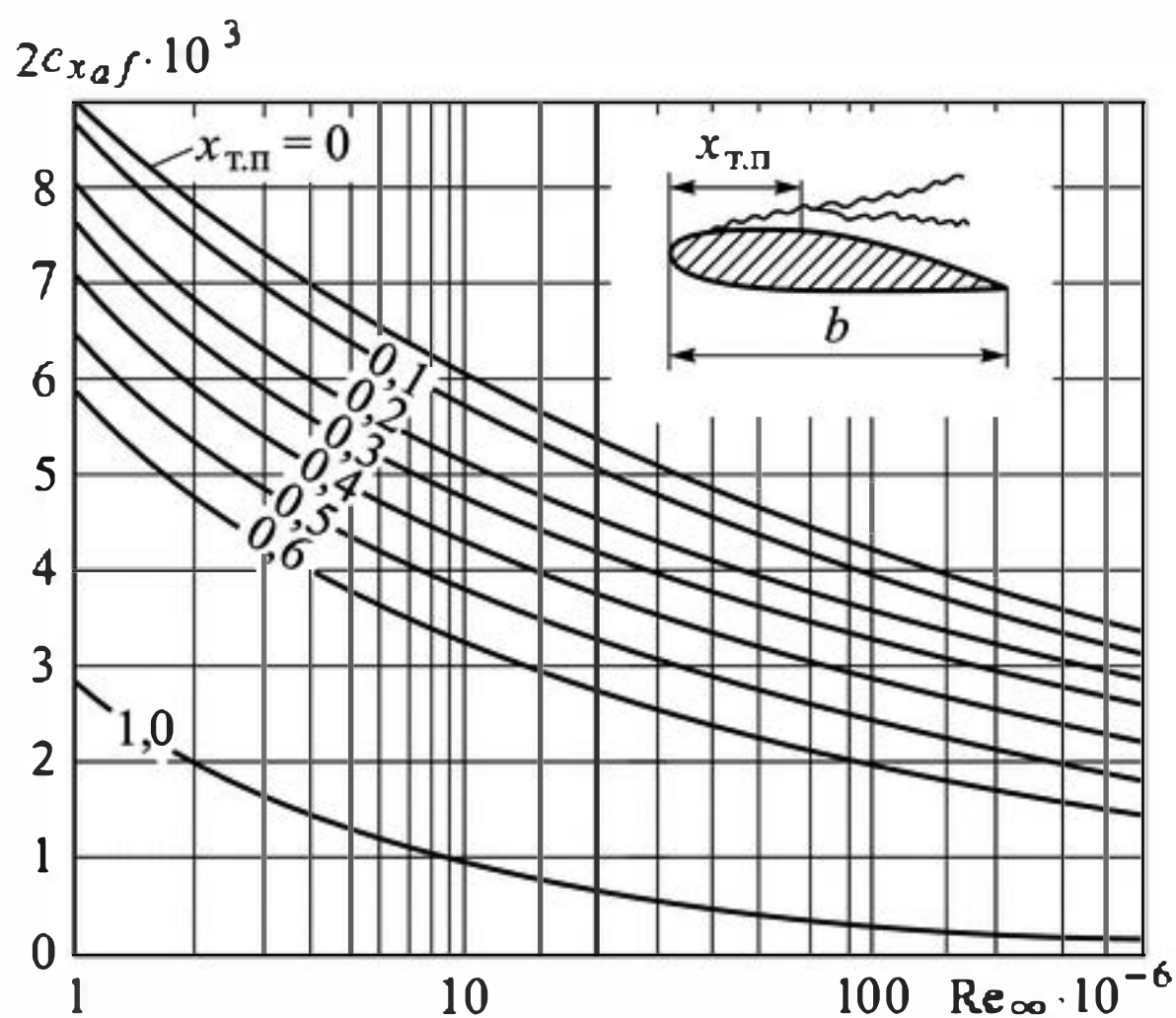


Рис. 10.27. Зависимость удвоенного коэффициента сопротивления трения пластины от числа Re_∞ и координаты точки перехода $x_{т.п}$ при $M_\infty = 0$

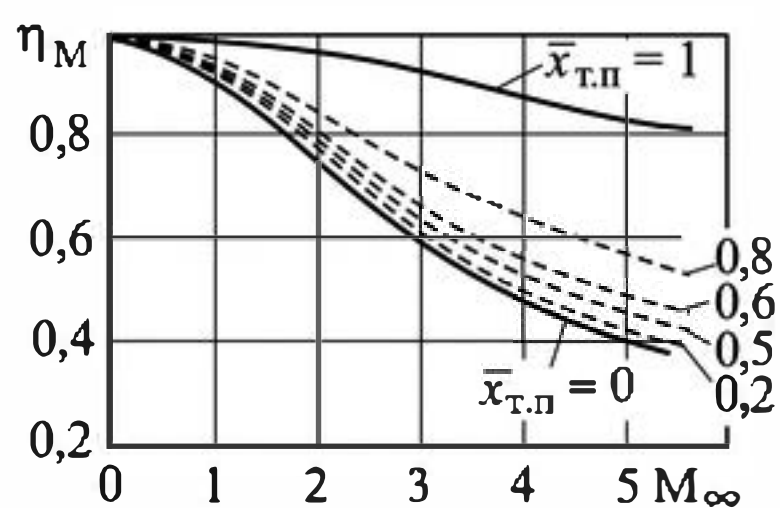


Рис. 10.28. Зависимость коэффициента η_M от числа M_∞ и координаты точки перехода $x_{т.п}$

В соответствии с формулой (10.6) коэффициент продольной силы от давления, действующей на профиль,

$$c_{xp} = \frac{1}{b} \int_0^b \left(\bar{p}_v \frac{dy_v}{dx} - \bar{p}_n \frac{dy_n}{dx} \right) dx.$$

Подставив в нее выражения для $\bar{p}_n$, $\bar{p}_v$, определенные по методу местных пластин, получим

$$c_{xp} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{1}{b} \int_0^b \left[\left(\frac{dy_v}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dy_n}{dx} \right)^2 \right] dx.$$

В поточной системе координат для идеального газа $c_{xa \text{ вол}} = c_{xa} + c_y \alpha$. Полагая для малых α $c_y = c_{ya}$, перепишем эту формулу в следующем виде:

$$c_{xa \text{ вол}} = c_{x0 \text{ вол}} + c_{ya} \alpha, \quad (10.76)$$

где $c_{x0 \text{ вол}}$ — коэффициент волнового сопротивления при $c_{ya} = 0$,

$$c_{x0 \text{ вол}} = c_{xp} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{1}{b} \int_0^b \left[\left(\frac{dy_n}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dy_v}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (10.77)$$

Сложив коэффициенты трения и волнового сопротивления с учетом соотношений (10.75), найдем коэффициент лобового сопротивления профиля

$$c_{xa} = c_{xa0} + D c_{ya}^2,$$

где $c_{xa0} = c_{xa \text{ пр}} + c_{x0 \text{ вол}}$; $D = 0,25 \sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

Рассмотрим подробнее коэффициент $c_{x0 \text{ вол}}$. Учитывая, что $y_v = y_{cp} + c/2$, а $y_n = y_{cp} - c/2$, из выражения (10.77) находим

$$c_{x0 \text{ вол}} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^1 \left[\left(\frac{dy_{cp}}{d\bar{x}} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dc}{d\bar{x}} \right)^2 \right] d\bar{x}, \quad (10.78)$$

где c — текущая толщина профиля; $\bar{x} = x/b$ — относительная координата.

Из соотношения (10.78) следует, что $c_{x0 \text{ вол}}$ зависит как от кривизны профиля, так и от его относительной толщины. Волновое сопротивление профиля, не зависящее от подъемной силы, будет минимальным, когда профиль симметричный, а его толщина минимальная.

Если носок профиля затуплен, то коэффициент давления в носовой части можно найти, например, по методу Ньютона (см. § 9.6), а на остальной поверхности — методом местных пластин.

Используя безразмерные координаты $\bar{y}_H = y_H/c$ и $\bar{y}_B = y_B/c$, соотношение (10.77) можно представить в следующем виде:

$$c_{x0_{\text{вол}}} = \frac{2\bar{c}^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^1 \left[\left(\frac{d\bar{y}_H}{d\bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}_B}{d\bar{x}} \right)^2 \right] d\bar{x} = \frac{4K\bar{c}^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad (10.79)$$

где K — коэффициент, зависящий от формы профиля. Отметим, что формула (10.79) справедлива для всех профилей, в том числе и с затупленным носком.

Коэффициент момента тангажа относительно носка профиля можно найти с помощью соотношения (10.9), подставив в него выражения (10.74) для $\bar{p}_B$ и $\bar{p}_H$. После преобразований получаем

$$m_z = -\frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\alpha + \frac{1}{b^2} \int_0^b x \frac{dy_H}{dx} dx + \int_0^b x \frac{dy_B}{dx} dx \right) = m_{z0} - \frac{1}{2} c_{ya},$$

где m_{z0} — коэффициент момента тангажа при нулевой подъемной силе.

Отсюда

$$m_z^\alpha = -\frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \quad (10.80)$$

Координата аэродинамического фокуса по углу атаки определяется соотношением

$$\bar{x}_{F\alpha} = -m_z^\alpha / c_y^\alpha.$$

Используя формулы (10.75), (10.80), находим безразмерную координату аэродинамического фокуса по углу атаки относительно носка профиля:

$$\bar{x}_{F\alpha} = 1/2.$$

Таким образом, во всех случаях при сверхзвуковой скорости аэродинамический фокус профиля располагается на середине хорды, при этом для симметричного профиля координаты центра давления и фокуса совпадают ($m_{z0} = 0$).

10.6. Влияние стреловидности на аэродинамические характеристики крыльев

Прямоугольное крыло бесконечного размаха, передняя кромка которого не перпендикулярна направлению скорости набегающего потока, называется *скользящим* (стреловидным), а угол между вектором скорости $\vec{V}_\infty$ и его нормальной к передней кромке составляющей $\vec{V}_{n\infty}$ — *углом скольжения* (стреловидности) χ (рис. 10.29). Такая передняя кромка называется также *скользящей* (стреловидной).

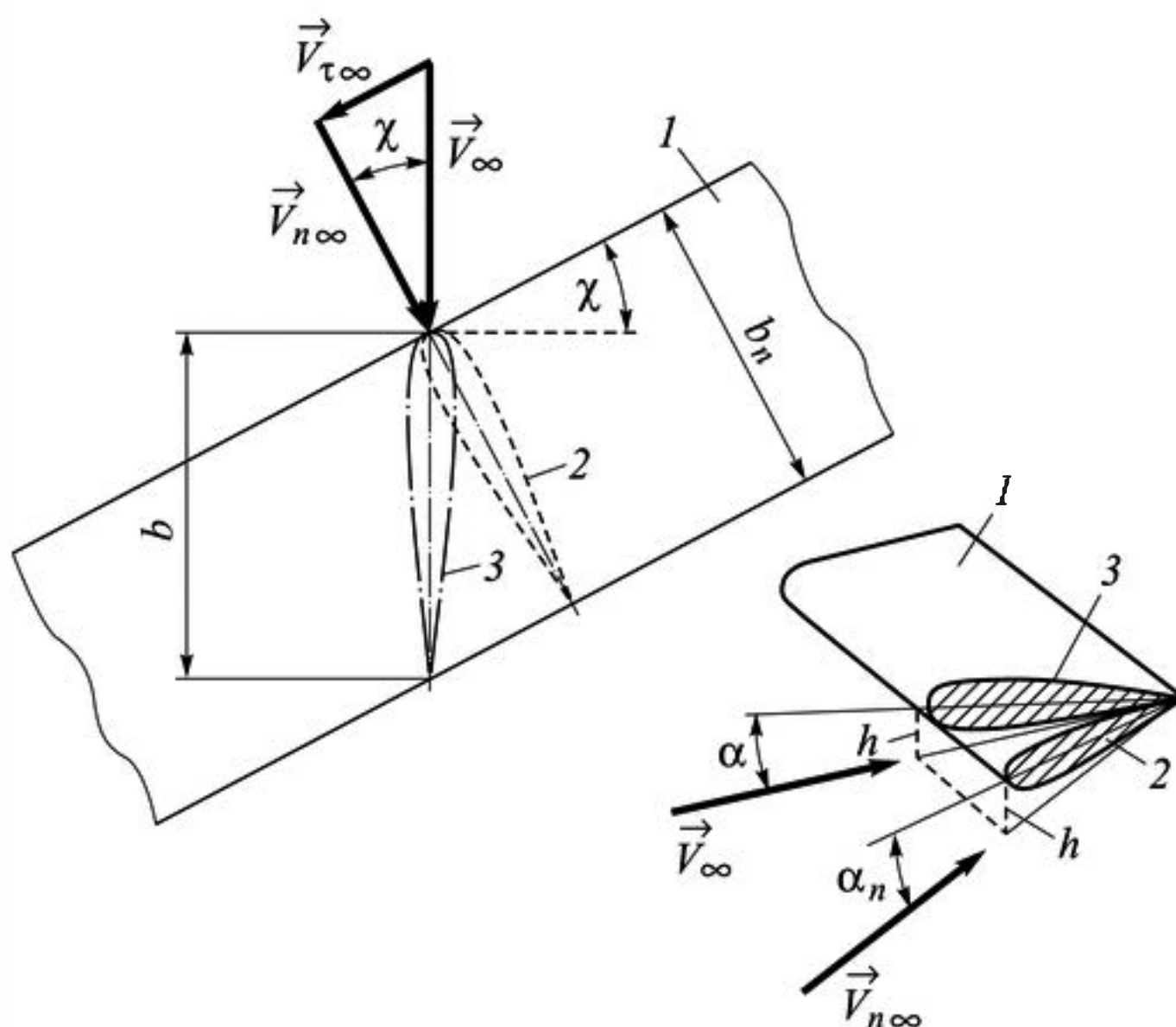


Рис. 10.29. Скользящее крыло:

I — поверхность крыла; 2 — профиль в сечении по нормали; 3 — профиль в сечении по потоку

Рассмотрим некоторые особенности обтекания скользящих крыльев. Найдем линии тока у поверхности скользящего крыла бесконечного размаха, движущегося в идеальной среде (рис. 10.30). Для простоты примем, что профиль симметричный и угол атаки $\alpha = 0$.

Поток около таких крыльев можно разделить на два течения: продольное (вдоль размаха крыла), характеризующееся скоростью $V_{\tau\infty} = V_\infty \sin \chi$, параллельной передней кромке, и поперечное, зависящее от нормальной к этой кромке составляющей $V_{n\infty} = V_\infty \cos \chi$.

Крыло возмущает поток. Обозначим касательную и нормальную составляющие скорости возмущенного потока у поверхности

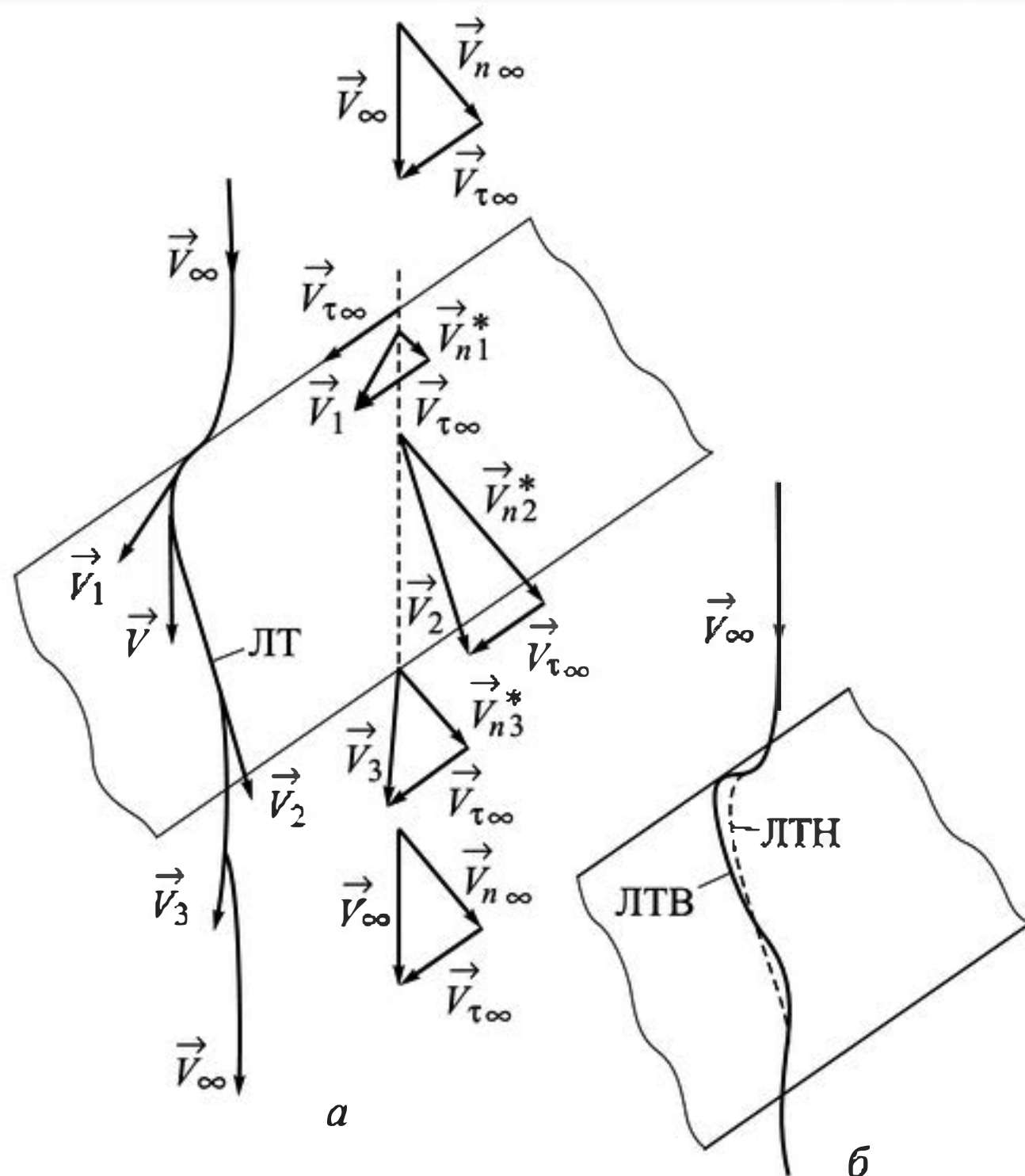


Рис. 10.30. Линии тока на скользящем крыле:

$a - \alpha = 0$; $b - \alpha > 0$; ЛТ – линия тока; ЛТВ, ЛТН – линии тока на верхней и нижней поверхностях соответственно

крыла V_τ^* и V_n^* и будем считать, что V_n^* нигде не достигает скорости звука. Касательная составляющая постоянна: $V_\tau^* = V_{\tau\infty} = \text{const}$, а V_n^* в нормальном сечении меняется по потоку так же, как при обтекании профиля в этом сечении. Складывая текущие $\vec{V}_\tau^*$ и $\vec{V}_n^*$, получаем суммарную скорость и находим линии тока (см. рис. 10.30).

Распределение скоростей и давлений по крылу не зависит от продольного течения, а обусловлено лишь поперечным обтеканием со скоростью $V_{n\infty} = V_\infty \cos \chi$. Характер этого обтекания, а значит, и распределение давления изменяются в зависимости от формы профиля в сечении, перпендикулярном передней кромке крыла, и угла атаки α_n , измеряемого в этом сечении. Следовательно, аэродинамические характеристики профиля будут такими же, как у профиля, принадлежащего прямому (нестреловидному) крылу, обтекаемому со скоростью набегающего потока $V_{n\infty}$ под углом атаки α_n .

Таким образом, аэродинамические характеристики скользящего крыла можно определить, если известны соответствующие характеристики прямого крыла. При этом скользящее крыло нужно рассматривать как прямое, повернутое на угол скольжения χ . В этом случае, очевидно, у скользящего крыла в нормальном сечении профиль такой же, как у прямого.

Профиль и угол атаки в плоскости, перпендикулярной передней кромке, отличаются от профиля и угла атаки в сечении по потоку (см. рис. 10.29). Хорда b_n в нормальном сечении и хорда b вдоль потока связаны соотношением $b_n = b \cos \chi$, поэтому относительные толщина и кривизна профиля в нормальном сечении будут больше соответствующих параметров в плоскости набегающего потока:

$$\bar{c}_n = c/b_n = \bar{c}/\cos \chi; \quad \bar{f}_n = \bar{f}/\cos \chi. \quad (10.81)$$

Угол атаки α_n определяется из выражения

$$\sin \alpha_n = h/b_n = h/(b \cos \chi) = \sin \alpha / \cos \chi,$$

где α — угол атаки в плоскости потока. Очевидно, при малых углах атаки

$$\alpha_n = \alpha / \cos \chi. \quad (10.82)$$

Если в некоторой точке на профиле крыла при прямом обтекании (без скольжения) со скоростью V_∞ коэффициент давления равен $\bar{p}$, то при повороте крыла на угол χ коэффициент давления $\bar{p}_n$ в соответствующей точке будет таким же (в идеальном газе при перемещении крыла вдоль образующей действующие на него силы не изменяются), т. е.

$$\frac{2(p_n - p_\infty)}{\rho_\infty V_\infty^2 \cos^2 \chi} = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho_\infty V_\infty^2}.$$

В соответствии с этим на профиле скользящего крыла коэффициент давления, вычисленный по скоростному напору $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2 / 2$ набегающего потока,

$$\bar{p}_\chi = \bar{p}_n = 2(p_n - p_\infty) / (\rho_\infty V_\infty^2) = \bar{p} \cos^2 \chi. \quad (10.83)$$

Аэродинамические коэффициенты в связанной системе координат (ось Ox направлена по хорде b_n) в соответствии с (10.2), (10.5), (10.8) зависят от коэффициента давления на профиле, поэтому с учетом (10.83) для профиля тонкого стреловидного крыла

$$c_{x\chi} = c_x \cos^2 \chi; \quad c_{y\chi} = c_y \cos^2 \chi; \quad m_{z\chi} = m_z \cos^2 \chi. \quad (10.84)$$

При малых α в поточной системе координат

$$c_{xa} = c_x + c_y \alpha; \quad c_{ya} = c_y,$$

поэтому

$$c'_{xa\chi} = c_{xa} \cos^2 \chi; \quad c_{ya\chi} = c_{y\chi}.$$

Поскольку силу лобового сопротивления определяем не в направлении составляющей $V_\infty \cos \chi$, а в направлении скорости V_∞ набегающего потока, то ее коэффициент

$$c_{xa\chi} = c'_{xa\chi} \cos \chi = c_{xa} \cos^3 \chi.$$

Окончательно получаем

$$c_{ya\chi} = c_{ya} \cos^2 \chi; \quad c_{xa\chi} = c_{xa} \cos^3 \chi; \quad m_{z\chi} = m_z \cos^2 \chi. \quad (10.85)$$

Из формул (10.84) для $c_{y\chi}$ и $m_{z\chi}$ следует, что коэффициент центра давления $c_{цд} = -m_{z\chi} / c_{y\chi}$ при малых углах атаки не зависит от угла скольжения, т. е.

$$c_{цд} = -m_z / c_y.$$

Представим $c_{ya\chi}$ и c_{ya} в виде

$$c_{ya\chi} = c_{ya}^\alpha (\alpha - \alpha_0); \quad c_{ya} = c_{ya}^{\alpha_n} (\alpha_n - \alpha_{n0}). \quad (10.86)$$

Продифференцировав первое соотношение (10.85) по α и используя выражения (10.82) и (10.86), находим

$$c_{ya\chi}^\alpha = c_{ya}^{\alpha_n} \cos \chi; \quad \alpha_0 = \alpha_{n0} \cos \chi. \quad (10.87)$$

Выведенные формулы справедливы при любых числах Маха (никакие ограничения по числу M не накладывали). Но аэродинамические коэффициенты c_{xa} , c_{ya} и $c_{ya}^{\alpha_n}$ зависят от $M_n = M \cos \chi$, поэтому степень влияния скольжения на коэффициенты $c_{xa\chi}$ и $c_{ya\chi}$ также связана с числом Маха.

Рассмотрим скользящее крыло с заданным профилем (b , $\bar{c}$, $\bar{f}$ — константы) при постоянном небольшом угле атаки α , но при разных углах скольжения χ и оценим, как влияет скольжение на его аэродинамические характеристики при различных числах Маха.

В случае *несжимаемого потока* лобовое сопротивление определяется в основном трением. Вклад составляющей c_{xap} очень мал, и ею можно пренебречь. В то же время коэффициент трения от скольжения не зависит. Поэтому в первом приближении можно считать, что скольжение не влияет на коэффициент лобового сопротивления крыла бесконечного размаха, а несущие свойства ухуд-

шаются. При малой дозвуковой скорости производная $c_{y\alpha}^{\alpha_n}$ скользящего крыла (профиля) не зависит от числа M_n и, следовательно, от угла χ , т. е. можно считать $c_{y\alpha}^{\alpha_n} = 2\pi$. Из уравнений (10.86) и (10.87) находим, что $c_{y\alpha\chi}^{\alpha} = 2\pi \cos \chi$ и $c_{ya\chi} = 2\pi(\alpha - \alpha_0) \cos \chi$. Видно, что с увеличением χ производная $c_{y\alpha\chi}^{\alpha}$ и коэффициент $c_{ya\chi}$ уменьшаются. Неизменность коэффициента лобового сопротивления и уменьшение коэффициента подъемной силы влекут за собой снижение аэродинамического качества.

Для стреловидного скользящего крыла конечного размаха (угол скольжения $\beta = 0$) будем считать его половины скользящими крыльями бесконечного размаха и полагать $|\beta_l| = |\beta_p| = |\chi_0|$, где β_l , β_p — углы скольжения левой и правой консолей крыла; χ_0 — угол стреловидности по передней кромке. Тогда при расчете его аэродинамических характеристик можно использовать соотношения (10.85) — (10.87), полагая в них $\chi = \chi_0$.

Видно, что при малой дозвуковой скорости увеличение угла стреловидности снижает несущие свойства крыла (уменьшается $c_{y\alpha\chi}^{\alpha}$). Одновременно несколько возрастает лобовое сопротивление (вследствие повышения индуктивного сопротивления). Поэтому увеличение $|\chi_0|$ приводит к снижению аэродинамического качества. Это справедливо в случае крыла как прямой, так и обратной стреловидности. Таким образом, при малых дозвуковых скоростях применять стреловидные крылья нецелесообразно.

При скольжении стреловидного крыла углы скольжения его половин разные:

$$\beta_l = \chi_0 + \beta; \quad \beta_p = -\chi_0 + \beta,$$

где β — угол скольжения стреловидного крыла. Поэтому будут отличаться и коэффициенты подъемных сил. Так, на левой половине

$$c_{ya_l} = c_{ya_l}^{\alpha} (\alpha - \alpha_0); \quad c_{y\alpha_l}^{\alpha} = c_{y\alpha}^{\alpha_n} \cos(\beta + \chi_0),$$

а на правой —

$$c_{ya_p} = c_{ya_p}^{\alpha} (\alpha - \alpha_0); \quad c_{y\alpha_p}^{\alpha} = c_{y\alpha}^{\alpha_n} \cos(\beta - \chi_0).$$

В результате при скольжении стреловидного крыла возникает момент крена, связанный с углом стреловидности:

$$M_{x\chi} = m_{x\chi}^{\beta} \beta q_{\infty} S l.$$

При прямой стреловидности ($\chi_0 > 0$) и $\beta > 0$ он отрицательный, поскольку при этом $c_{ya_p} > c_{ya_l}$, а в случае $\beta < 0$ — положительный

(при этом $c_{ya\text{ п}} < c_{ya\text{ л}}$). Следовательно, при $\chi_0 > 0$ производная $m_{\chi\chi}^\beta < 0$.

Если же стреловидность обратная ($\chi_0 < 0$), знак момента крена меняется: $M_{\chi\chi} > 0$ при $\beta > 0$ и $M_{\chi\chi} < 0$ при $\beta < 0$. Поэтому при $\chi_0 < 0$ производная $m_{\chi\chi}^\beta > 0$.

Из этого следует, что прямая стреловидность способствует созданию поперечной статической устойчивости, а обратная — возникновению поперечной статической неустойчивости.

Согласно линеаризованной теории, коэффициент давления на профиле скользящего крыла в дозвуковом сжимаемом потоке можно получить из соответствующего коэффициента для того же крыла в несжимаемой жидкости по формуле Прандтля — Глауэрта (10.64), заменив в ней M_∞ на $M_\infty \cos \chi$:

$$\bar{p}_\chi = \bar{p}_{\chi\text{нс}} / \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \chi},$$

или с учетом (10.83)

$$\bar{p}_\chi = \bar{p}_{\text{нс}} \cos^2 \chi / \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \chi}.$$

Соответствующие аэродинамические коэффициенты будут определяться соотношениями (10.84), (10.85), в правые части которых нужно подставить величину $1 / \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \chi}$. В частности, для коэффициентов подъемной силы и продольного момента получаем

$$c_{ya\chi} = c_{ya} \cos^2 \chi / \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \chi};$$

$$m_{z\chi} = m_z \cos^2 \chi / \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \chi}.$$

Из этих соотношений следует, что для тонких профилей коэффициент центра давления $c_{\text{нд}}$ не зависит ни от угла стреловидности, ни от сжимаемости (числа M_∞).

Применение скользящего крыла вызывает такой эффект обтекания, который имел бы место при снижении скорости набегающего потока от значения V_∞ до $V_\infty \cos \chi$ (или числа Маха от M_∞ до $M_\infty \cos \chi$). При этом, естественно, уменьшаются и местные скорости на профиле скользящего крыла, что, в свою очередь, приводит к снижению разрежения и, как следствие, к увеличению критического числа Маха. Это число Маха может быть определено по известному его значению $M_{\text{кр}}$ для прямого крыла, имеющего ту же форму и угол атаки, что и профиль скользящего крыла в нормальном сечении:

$$M_{\text{кр}\chi} = M_{\text{кр}} / \cos \chi,$$

поэтому крылья самолетов, летающих при больших дозвуковых скоростях, делают стреловидными.

При изучении аэродинамики крыла, обтекаемого *сверхзвуковым потоком*, важную роль играет характер его кромок. Различают дозвуковые, звуковые и сверхзвуковые кромки.

Кромку крыла называют *дозвуковой*, если нормальная к ней составляющая скорости невозмущенного потока меньше скорости звука $V_n < a$. Легко видеть (рис. 10.31, а), что кромка является дозвуковой в том случае, если она лежит внутри конуса Маха, вершина которого располагается на кромке. Действительно, в этом случае нормальная к кромке составляющая скорости V_n меньше составляющей скорости, нормальной к образующей конуса Маха, которая всегда равна скорости звука a .

Кромку называют *звуковой*, если нормальная к ней составляющая скорости невозмущенного потока равна скорости звука $V_n = a$. В этом случае кромка сливается с образующей конуса Маха, вершина которого располагается на кромке (рис. 10.31, б).

Наконец, кромку считают *сверхзвуковой*, если $V_n > a$. На рис. 10.31, в видно, что кромка будет сверхзвуковой, если она находится вне конуса Маха, вершина которого лежит на кромке.

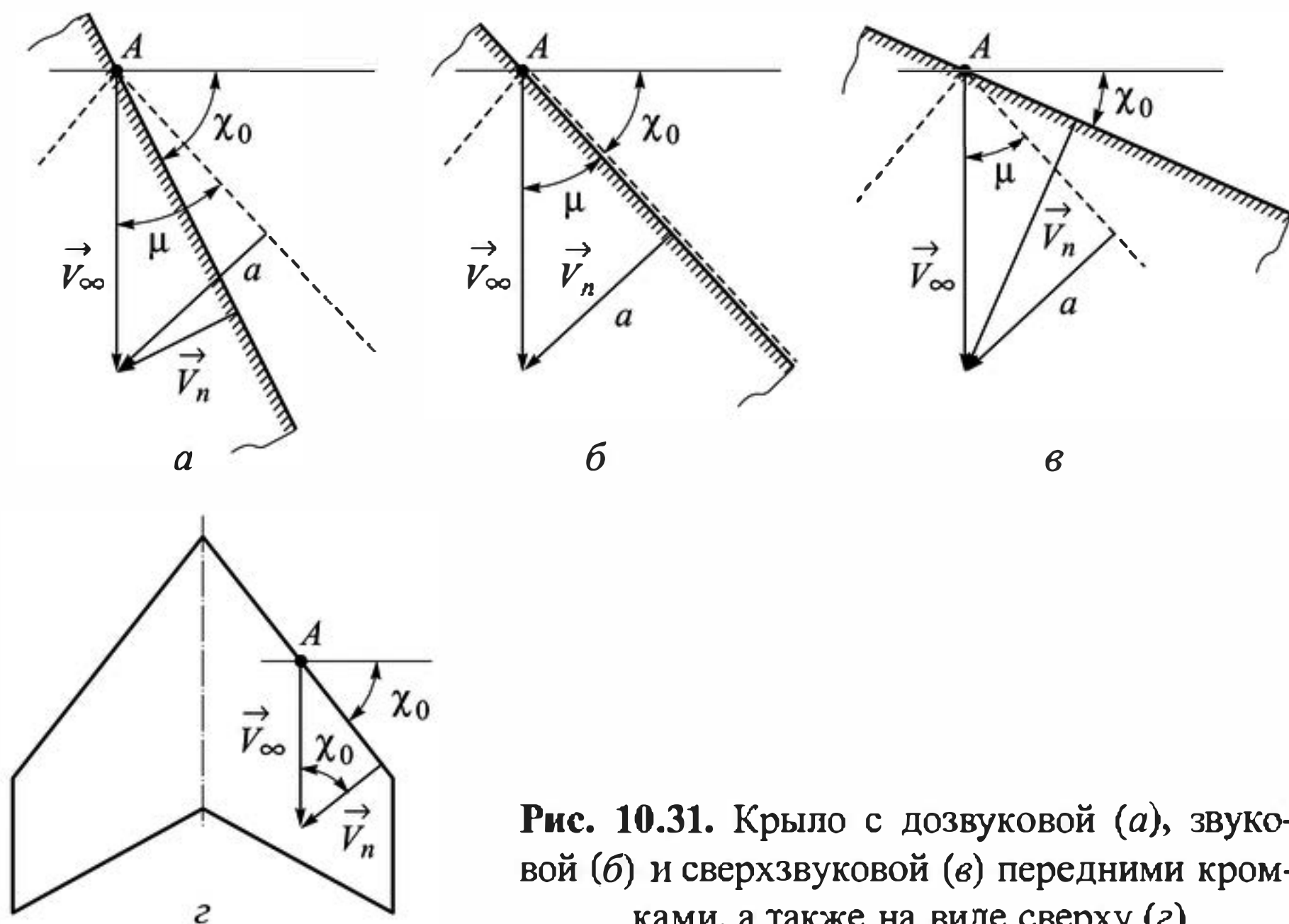


Рис. 10.31. Крыло с дозвуковой (а), звуковой (б) и сверхзвуковой (в) передними кромками, а также на виде сверху (г)

Если крыло движется без скольжения, то характер кромки связан с ее углом стреловидности. Действительно (рис. 10.31, *г*), в этом случае нормальная к передней кромке составляющая скорости невозмущенного потока $V_n = V_\infty \cos \chi_0$. Поэтому передняя кромка является дозвуковой при $V_\infty \cos \chi_0 < a$, т. е. $M_\infty < 1/\cos \chi_0$, звуковой при $M_\infty = 1/\cos \chi_0$ и сверхзвуковой при $M_\infty > 1/\cos \chi_0$.

От вида передней кромки зависят характер обтекания крыла и значения аэродинамических сил, в том числе и лобового сопротивления. Если кромка дозвуковая, то через нее происходит перетекание воздуха с нижней поверхности на верхнюю. При этом у передней кромки возникает разрежение, уменьшающее лобовое сопротивление. В случае сверхзвуковой кромки перетекания через переднюю кромку нет.

Поскольку боковые кромки при отсутствии скольжения всегда дозвуковые, через них происходит перетекание потока с нижней поверхности на верхнюю, приводящее к образованию вихревой пелены за крылом. В результате возникает вихревое сопротивление.

Рассмотрим расчет сверхзвукового обтекания стреловидного крыла в каждом из этих случаев.

Если передняя кромка дозвуковая, то сопротивление и подъемная сила будут определяться законами дозвуковых течений, характеризующимися взаимодействием потоков на верхней и нижней сторонах крыла, которое проявляется в перетекании газа из области высокого давления в зону пониженного давления. При этом волновые потери могут возникать только при сверхкритическом обтекании ($M_{\infty} > M_{\infty \text{кр}}$), когда на поверхности появляются скачки уплотнения. Если $M_{\infty} < M_{\infty \text{кр}}$, то скачки уплотнения и, следовательно, волновое сопротивление отсутствуют. Этот вывод относится, естественно, к крылу бесконечного размаха. У крыла конечного размаха волновые потери всегда имеют место, поскольку на обтекание его боковых кромок оказывает влияние составляющая скорости $V_\infty \sin \chi$, в результате чего проявляются сверхзвуковые свойства течения и возникает волновое сопротивление. Для исследования такого сопротивления следует применять трехмерную теорию сверхзвукового обтекания.

Таким образом, при сверхзвуковой скорости, когда кромка скользящего крыла остается дозвуковой, скольжение уменьшает несущие свойства и волновое сопротивление, составляющее большую часть общего сопротивления. Поэтому крыльям ЛА, лежащих на умеренных сверхзвуковых скоростях, придают большую стреловид-

ность. Но когда передняя кромка скользящего крыла становится сверхзвуковой, картина меняется. В этом случае увеличение угла скольжения приводит к росту производной c_{ya}^α и коэффициента волнового сопротивления $c_{xa \text{ вол}}$.

При сверхзвуковой передней кромке обтекание крыла можно рассчитывать по формулам, полученным с использованием линеаризованной теории сверхзвукового обтекания профиля и крыла.

Согласно выражениям (10.87), при любых скоростях

$$c_{ya}^\alpha = c_{ya}^{\alpha_n} \cos \chi,$$

где c_{ya}^α — производная коэффициента подъемной силы скользящего крыла; $c_{ya}^{\alpha_n}$ — производная коэффициента подъемной силы профиля при M_n .

С учетом соотношений (10.75) и выражения $M_n = M_\infty \cos \chi$ получаем

$$c_{ya}^\alpha = \frac{4}{\sqrt{M_n^2 - 1/\cos^2 \chi}},$$

т. е. с ростом угла стреловидности χ (до тех пор, пока передняя кромка не станет дозвуковой) коэффициент подъемной силы скользящего крыла увеличивается.

В соответствии с формулами (10.75), (10.76), (10.79) коэффициент волнового сопротивления профиля в нормальном сечении

$$c_{xa} = \frac{4\alpha_n^2}{\sqrt{M_n^2 - 1}} + \frac{4K\bar{c}_n^2}{\sqrt{M_n^2 - 1}}.$$

Подставляя зависимости (10.81) и (10.82) для α_n , $\bar{c}_n$, а также $M_n = M_\infty \cos \chi$, получаем

$$c_{xa} = \frac{4}{\cos \chi \sqrt{M_\infty^2 - 1/\cos^2 \chi}} \left(\frac{\alpha^2}{\cos^2 \chi} + \frac{\bar{c}^2}{\cos^2 \chi} \right).$$

Следовательно, коэффициент волнового сопротивления

$$c_{xa\chi} = \frac{4(\alpha^2 + K\bar{c}^2)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1/\cos^2 \chi}}.$$

Легко убедиться, что при $M_\infty = \text{const}$, $\bar{c} = \text{const}$ рост угла χ приводит к увеличению коэффициента волнового сопротивления.

11. АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

При обтекании ЛА, аэродинамическая компоновка которых включает корпус, крыло, оперение, рулевые устройства и т. д., возникает взаимное влияние элементов планера, приводящее к изменению общей структуры течения. Такое явление называется аэродинамической интерференцией. В этом случае сумма аэродинамических сил и моментов, взятых отдельно для крыла и корпуса, оперения и корпуса, корпуса, крыла и оперения или корпуса, крыла, оперения и рулей, не равна полной силе или моменту комбинации, состоящей из этих элементов и представляющей единое целое. В расчетах интерференционное влияние учитывается введением так называемых коэффициентов интерференции, определяющих дополнительные аэродинамические силы и моменты.

В главе рассмотрены физические процессы, связанные со сложным обтеканием ЛА в целом, даны подходы к расчету аэродинамических коэффициентов простейших комбинаций с учетом интерференционных эффектов.

11.1. Природа аэродинамической интерференции

При изучении аэродинамики ЛА в виде комбинаций тел вращения, крыльев, оперения и рулевых устройств возникает сложная проблема учета аэродинамической интерференции между отдельными элементами этих комбинаций. В результате такой интерференции сумма аэродинамических сил и моментов отдельно взятых (изолированных) крыльев и корпуса, оперения и корпуса, крыла и оперения или корпуса, крыла, оперения и рулей не равна полной силе или моменту комбинации, состоящей из соответствующих элементов и представляющей собой единое целое.

Соединенные в единую конструкцию ЛА отдельно взятые его элементы – корпус, крылья, оперение, рули – как бы теряют свои индивидуальные аэродинамические характеристики и приобретают вследствие интерференции новые (рис. 11.1).

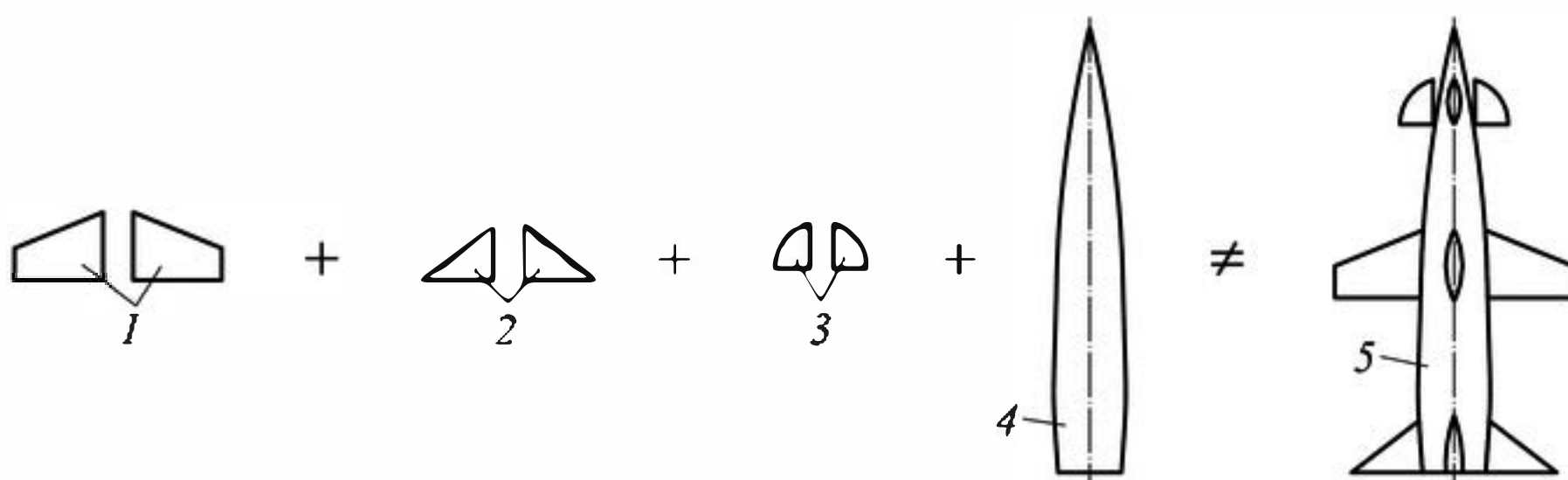


Рис. 11.1. Схема, иллюстрирующая понятие об интерференции между телом вращения и установленными на нем элементами:

1 – крылья; 2 – оперение; 3 – рули; 4 – тело вращения; 5 – ЛА

Как показывают результаты расчетов и экспериментальные исследования, при одном и том же угле атаки нормальная и, следовательно, подъемная силы крыла в присутствии корпуса увеличиваются по сравнению с изолированным крылом. Такое же явление наблюдается и в отношении подъемной силы корпуса, соединенного с крылом и изолированного.

Рассмотрим физическую сущность взаимного влияния тела вращения и крыла, обуславливающего увеличение их подъемной (нормальной) силы, полагая, что крыло расположено на удаленном от носка цилиндрическом участке корпуса по схеме среднеплана. Предположим также, что корпус и крыло тонкие и обтекание происходит под малым углом атаки (рис. 11.2).

Известно, что возмущенный поток около тонкого тела вращения можно получить в результате наложения на поле скоростей, возникающее при продольном осесимметричном обтекании тела невозмущенным потоком со скоростью $V_{x\infty} = V_\infty \cos \alpha \approx V_\infty$, поля скоростей дополнительного возмущенного потока, получающегося при поперечном обтекании этого тела со скоростью $V_{y\infty} = V_\infty \sin \alpha \approx V_\infty \alpha$.

При малых углах атаки поперечный поток является обычно дозвуковым и для приближенного расчета поля скоростей можно воспользоваться теорией потенциального обтекания круглого цилиндра несжимаемым потоком, согласно которой при $y = 0$

$$V_y = \alpha V_\infty \left(1 + R^2/z^2\right).$$

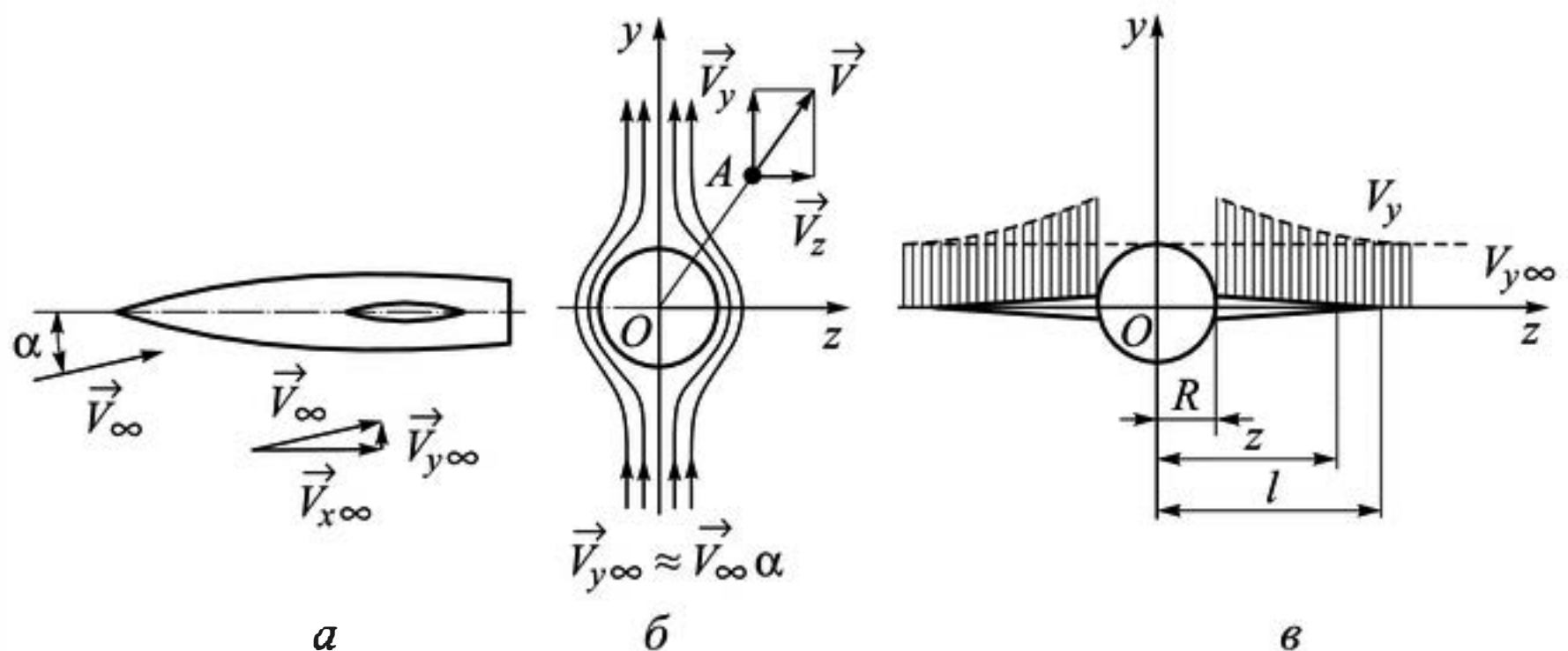


Рис. 11.2. Схема поперечного обтекания (а) и изменение нормальной составляющей скорости вблизи корпуса (б) и крыла (в)

В соответствии с этой формулой скорость поперечного потока изменяется от $V_y = 2\alpha V_\infty$ на поверхности цилиндра ($z = R$) до $V_y = V_{y\infty} = \alpha V_\infty$ вдали от него при $z \rightarrow \infty$ (см. рис. 11.2). Если на цилиндрическом корпусе установлено крыло, то при заданном угле атаки α оно омывается составным потоком, который можно получить путем наложения на невозмущенное течение дополнительного потока, индуцируемого корпусом. Вследствие этого скорость на поверхности крыла

$$V_y = \alpha V_\infty + \alpha V_\infty R^2/z^2,$$

т. е. возникает дополнительная поперечная составляющая

$$V'_y = V_y - \alpha V_\infty = \alpha V_\infty R^2/z^2.$$

На возникновение этой добавочной скорости влияет вызываемый корпусом скос потока, угол которого

$$\varepsilon = V'_y/V_\infty = \alpha R^2/z^2.$$

Скос потока приводит к увеличению местных эффективных углов атаки в сечениях консолей крыла:

$$\alpha_{\text{эф}} = \alpha + \varepsilon = \alpha \left(1 + R^2/z^2\right). \quad (11.1)$$

Из выражения (11.1) следует, что эффективный угол атаки достигает наибольшего значения в бортовом сечении консолей при $z = R$, где $\alpha_{\text{эф}} = 2\alpha$, и постепенно уменьшается при удалении от корпуса. В концевом сечении крыла, где $z = l$, эффективный угол атаки

$$\alpha_{\text{эф}} = \alpha \left(1 + R^2/l^2\right).$$

В результате увеличения местных углов атаки подъемная сила консолей крыла при наличии корпуса больше, чем у изолированного крыла. Крыло, в свою очередь, влияет на обтекание корпуса, поскольку возникающие повышенное давление на нижней поверхности крыла и разрежение на его верхней поверхности распространяются на корпус. Поэтому происходит перераспределение давления и возникает дополнительная подъемная сила корпуса, обусловленная влиянием крыла.

Для ЛА, представляющих собой комбинацию тела вращения, крыла и оперения, следует учитывать интерференцию не только между корпусом и крылом, но и между корпусом и оперением, которая по своей физической природе ей аналогична. Кроме того, необходимо учитывать влияние скоса потока за крылом на оперение (при переднем расположении на корпусе крыла) или за оперением на крыло (при переднем расположении оперения по так называемой схеме «утка»).

Влияние крыла на хвостовое оперение в сверхзвуковом потоке наблюдается в том случае, если оперение располагается внутри конуса Маха (волновой поверхности), построенного для крыла, т. е. если оно попадает в зону скошенного крылом потока (рис. 11.3). Этот скос зависит от формы крыла в плане и положения точки, в которой определяют параметры потока, в том числе угол скоса.

Рассмотрим крыло прямоугольной формы (рис. 11.4). Область возмущенного течения, в которой проявляется влияние боковой кромки на обтекание крыла, ограничена конусом Маха с вершиной

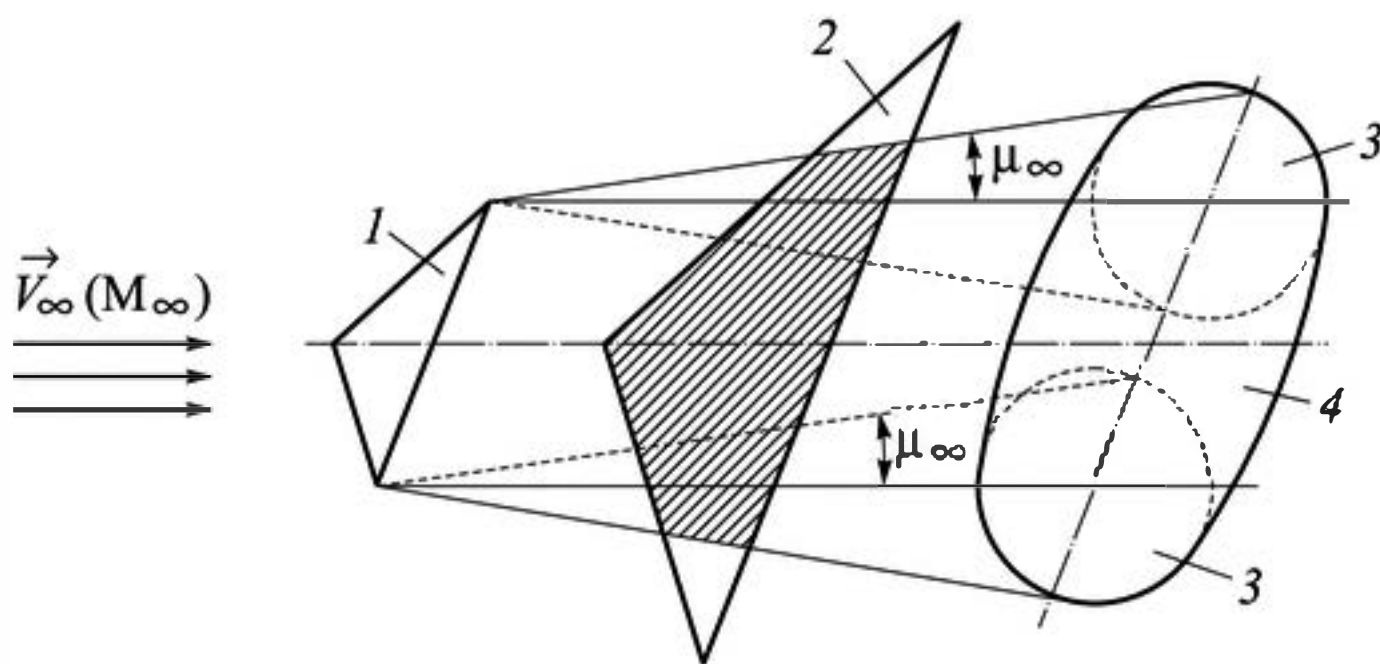


Рис. 11.3. Зона влияния крыла на оперение в сверхзвуковом линейризованном потоке (заштрихованный участок):

1 – крыло; 2 – оперение; 3 – конус Маха; 4 – волновая поверхность, построенная для крыла (огнибающая конусов Маха)

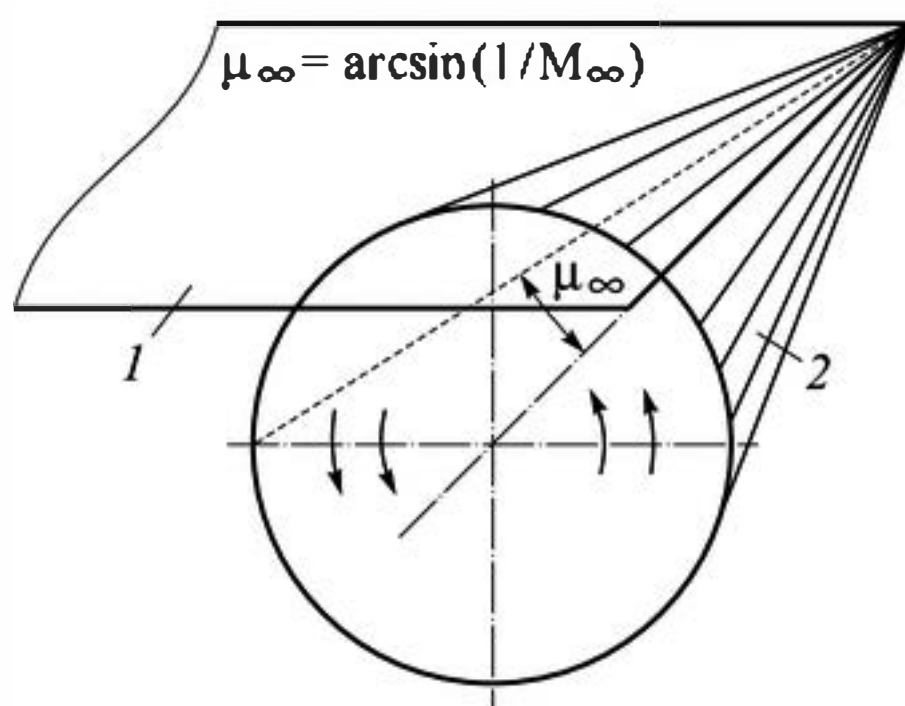


Рис. 11.4. Скос потока за прямоугольным крылом:
1 – крыло; 2 – конус возмущений (конус Маха)

в передней точке боковой кромки. Внутри конуса Маха воздух перетекает из области повышенного давления под крылом в область пониженного давления на его верхней стороне. В результате поток закручивается в вихрь, который и вызывает за крылом скос. Этот скос направлен вниз во внутренней области конуса Маха, захватывающей крыло, и в обратную сторону – в волновой зоне, расположенной вне крыла. В соответствии с этим на боковой кромке скос потока равен нулю (см. рис. 11.4).

Если крыло соединено с телом вращения, то скос потока за крылом иной, чем у изолированного крыла. В этом случае разность давлений под крылом и над ним увеличивается, перетекание воздуха из области повышенного в область пониженного давления становится более интенсивным, а значит, увеличивается скос потока как в наружной области, где он направлен вверх, так и во внутренней области, где он направлен вниз.

Если размах оперения меньше, чем размах расположенного перед ним крыла, то оперение находится в области, где скос потока направлен вниз, и эффективный угол атаки оперения уменьшается. Обозначив для данного сечения консоли оперения угол скоса $\epsilon_{\text{крыл}}$, а установочный угол оперения (угол между хордой оперения и осью корпуса) $\alpha_{\text{оп}}$ (рис. 11.5), получим выражение для эффективного угла атаки консоли

$$\alpha_{\text{эф оп}} = \alpha + \alpha_{\text{оп}} - \epsilon_{\text{крыл}}.$$

Уменьшение эффективного угла атаки приводит к снижению подъемной силы и, как следствие, к уменьшению стабилизирующего момента оперения.

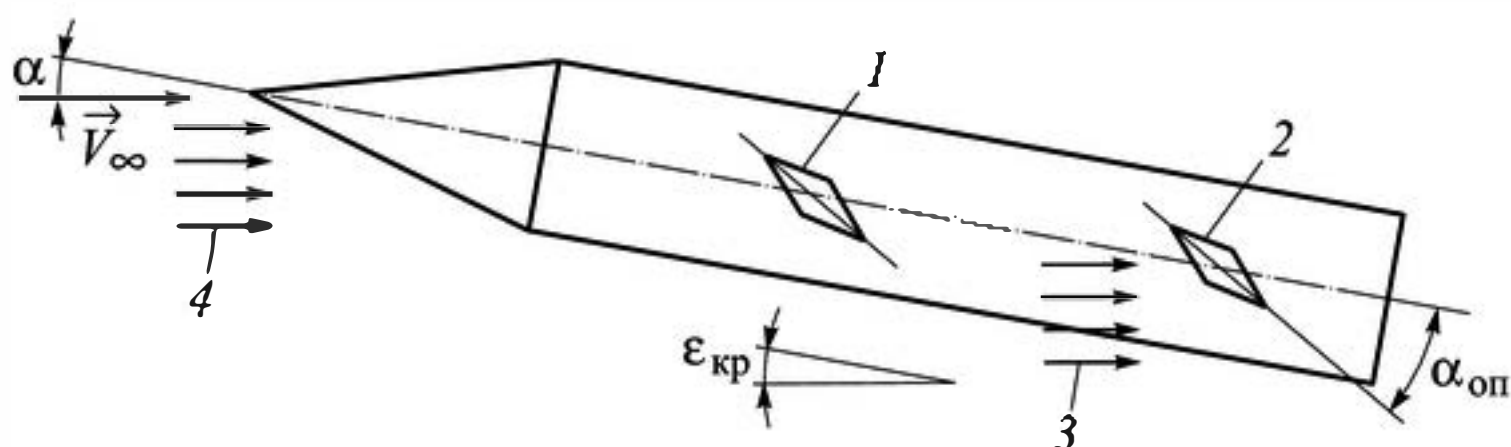


Рис. 11.5. Интерференция между крылом и оперением:
1 — крыло; 2 — оперение; 3 — сходящийся поток; 4 — набегающий поток

В области оперения происходит торможение потока под действием крыла и, как результат, уменьшение скоростного напора по сравнению с невозмущенным течением. Это также необходимо учитывать при определении аэродинамических характеристик обтекания. Если оперение имеет размах больший, чем крыло, то часть поверхности консоли попадает в область скоса потока, направленного вверх, и этим может быть компенсирован отрицательный эффект от скоса потока вниз, выражающийся в уменьшении подъемной силы.

11.2. Нормальная сила для комбинации корпус — плоское оперение

Коэффициенты интерференции

Рассмотрим продольное движение ЛА для случая нулевого угла крена. Согласно аэродинамической теории тонкого тела, нормальная сила оперения в виде пары плоских консолей, расположенных на обтекаемом под малым углом атаки тонком корпусе, определяется выражением

$$\Delta Y_{\text{оп(т)}} = Y_{\text{оп}} + \delta Y_{\text{оп(т)}}, \quad (11.2)$$

где $Y_{\text{оп}}$ — нормальная сила изолированного оперения; $\delta Y_{\text{оп(т)}}$ — дополнительная нормальная сила оперения, обусловленная влиянием корпуса (тела).

Если изменение нормальной силы корпуса вследствие его интерференции с оперением обозначить $\Delta Y_{\text{оп(т)}}$, то суммарная нормальная сила комбинации корпус — двухконсольное оперение

$$Y_{\text{т-оп}} = Y_{\text{т}} + \Delta Y_{\text{т(оп)}} + \Delta Y_{\text{оп(т)}}, \quad (11.3)$$

где $Y_{\text{т}}$ — нормальная сила изолированного корпуса.

Зависимости (11.2) и (11.3) можно отнести также к ЛА с плюсообразным оперением. Обтекание такого аппарата без скольжения аналогично обтеканию двухконсольной комбинации, поскольку верхние консоли, имеющие вид очень тонких пластин, не изменяют характер обтекания. Две последние составляющие в выражении (11.3) можно представить в виде

$$\Delta Y_{\text{т(оп)}} = K_{\text{т}} Y_{\text{оп}}; \quad \Delta Y_{(\text{оп})\text{т}} = K_{\text{оп}} Y_{\text{оп}}, \quad (11.4)$$

где $K_{\text{т}}$, $K_{\text{оп}}$ — коэффициенты интерференции корпуса и неподвижного оперения соответственно.

Рассмотрим аэродинамическую интерференцию применительно к ЛА в виде комбинации корпус (тонкое тело) — оперение треугольной формы, вносящих малые возмущения в обтекающий поток. В современной аэродинамике это наиболее исследованная комбинация и ее рассмотрение дает достаточно удовлетворительные для практики результаты. В частности, для нее получены следующие выражения для коэффициентов интерференции:

$$K_{\text{оп}} = \frac{2}{\pi(\bar{s}_m - 1)^2} \left[\frac{\pi}{4} \frac{(\bar{s}_m^2 - 1)^2}{\bar{s}_m^2} - \frac{\bar{s}_m^2 - 1}{\bar{s}_m} + \frac{(\bar{s}_m^2 + 1)^2}{2\bar{s}_m^2} \arcsin \frac{\bar{s}_m^2 - 1}{\bar{s}_m^2 + 1} \right]; \quad (11.5)$$

$$K_{\text{т}} = (\bar{s}_m + 1)^2 / \bar{s}_m^2 - K_{\text{оп}} \quad \text{или} \quad K_{\text{т}} = (1 + r_m)^2 - K_{\text{оп}}, \quad (11.6)$$

где $\bar{s}_m = s_m / r$, $r_m = r / s_m$ (s_m , r — соответственно размах консолей и радиус корпуса).

Из выражений (11.5) и (11.6) следует, что коэффициенты интерференции являются функциями только отношения s_m / r . Таким образом, этот параметр (или обратная величина $r / s_m = 1 / \bar{s}_m$) представляет собой *основной критерий* при оценке взаимного влияния корпуса и крыла на нормальную силу (табл. 11.1, рис. 11.6).

Приведенные на рис. 11.6 зависимости для коэффициентов $K_{\text{оп}}$ и $K_{\text{т}}$ получены при условии, что нормальная сила пары изолированных консолей $Y_{\text{оп}} = 2\pi\alpha(s_m - r)^2 q$, а коэффициент этой силы $c_{y\text{оп}} = Y_{\text{оп}} / (S_{\text{оп}} q_{\infty})$, где $S_{\text{оп}}$ — площадь консолей оперения.

Если отношение $r / s_m = 0$ (корпус отсутствует), то $K_{\text{оп}} = 1$, а $K_{\text{т}} = 0$. Предположим, что радиус корпуса увеличивается и несущие консоли становятся малыми, т. е. параметр $r / s_m \neq 0$ и возрастает. При $r / s_m \rightarrow 1$ консоли при наличии корпуса развивают нор-

Таблица 11.1. Значения коэффициентов интерференции $K_{оп}$ и K_T для комбинации корпус — неподвижное оперение в зависимости от отношения $r/s_m = 1/\bar{s}_m$

r/s_m	$K_{оп}$	K_T	$C_{уд\alpha_{оп}(T)}$	$C_{уд\alpha_{оп}}$	$Z_{уд\alpha_{оп}(T)}$
0	1,000	0	0,667	0,500	0,424
0,1	1,077	0,133	0,657	0,521	0,421
0,2	1,162	0,278	0,650	0,543	0,419
0,3	1,253	0,437	0,647	0,563	0,418
0,4	1,349	0,611	0,646	0,581	0,417
0,5	1,450	0,800	0,647	0,598	0,417
0,6	1,555	1,005	0,650	0,613	0,416
0,7	1,663	1,227	0,654	0,628	0,418
0,8	1,774	1,467	0,658	0,641	0,420
0,9	1,887	1,725	0,662	0,654	0,422
1,0	2,000	2,000	0,667	0,667	0,424

мальную силу, в два раза большую, чем изолированное оперение, и, следовательно, $K_{оп} = 2$. Чем меньше размеры консоли, тем все большая часть нормальной силы оперения переносится на корпус. Если значение параметра $r/s_m \rightarrow 1$, то на корпусе индуцируется наибольшая подъемная сила и коэффициент $K_T = 2$.

Экспериментально установлено, что полученные по формулам (11.5) и (11.6) теоретические значения коэффициентов интерференции зависят от сужения оперения $\eta_{оп}$, характеристик пограничного слоя, а также места расположения оперения относительно носовой части.

Для уточнения их значений вводят поправочные множители V_η , $V_{п.с}$, V_l соответственно. Коэффициенты интерференции в этом случае целесообразно вычислять с помощью следующих зависимостей:

$$K_{оп} = K_{оп\ теор} V_\eta V_{п.с} V_l; \quad K_T = K_{T\ теор} V_\eta V_{п.с} V_l, \quad (11.7)$$

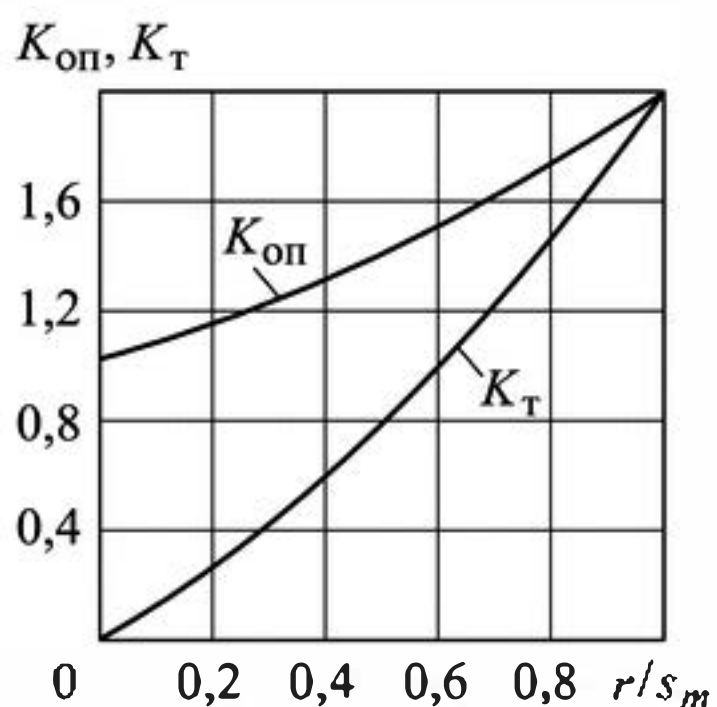


Рис. 11.6. Коэффициенты интерференции для плоской комбинации корпус — крыло при отсутствии крена

где $v_\eta = 1 + \left[r_m(1 - r_m) / (1 + r_m)^2 \right] (1 - 1/\eta_{\text{оп}})$; $v_{\text{п.с}} = 1 - r_m(1 + r_m^2) \times$
 $\times [r_m + \eta_{\text{оп}}(1 + 3r_m) - 1] \bar{\delta}^* / (\eta_{\text{оп}} + 1)$; $v_l = K_T / K_{T \text{ теор}} = K_{\text{оп}} / K_{\text{оп теор}} =$
 $= \left[0,6 + (1 + 0,2\bar{l}_1)^2 \right] / \left[1 + (1 + 0,2\bar{l}_1)^2 \right]$; $\bar{\delta}^* = \delta_1^* / r$; δ_1^* — толщина вы-
 теснения; $\bar{l}_1 = l_1 / r$ (рис. 11.7).

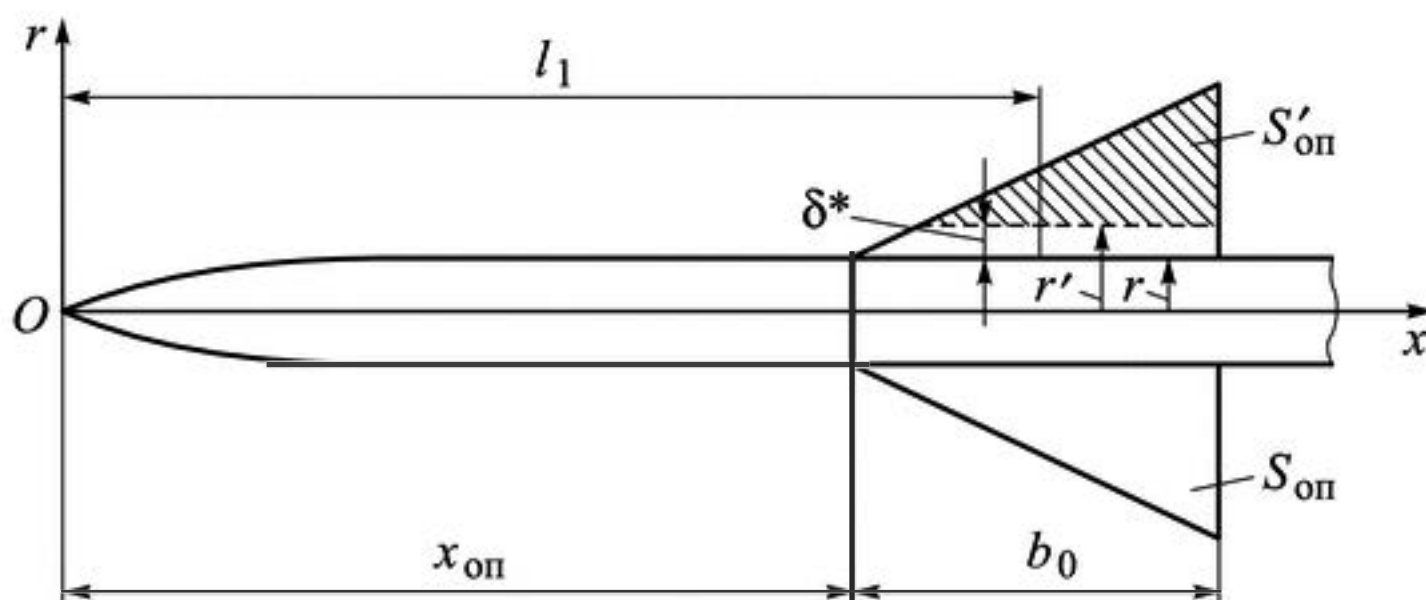


Рис. 11.7. Схема для определения влияния пограничного слоя на интерференцию

Относительную толщину вытеснения $\bar{\delta}^*$ определяют с помощью зависимостей для пограничного слоя, начинающегося от носовой части корпуса. При этом в качестве расчетной принимают толщину δ_1^* в точке с координатой $l_1 = x_{\text{оп}} + 0,5b_0$, т. е. в средней части бортовой хорды оперения.

Аэродинамические характеристики

В соответствии с выражениями (11.4) нормальная сила комбинации корпус — плюсообразное оперение при отсутствии крена

$$Y_{\text{т-оп}} = Y_{\text{т}} + (K_{\text{т}} + K_{\text{оп}}) Y_{\text{оп}},$$

а соответствующий коэффициент нормальной силы

$$c_{y_{\text{т-оп}}} = Y_{\text{т-оп}} / (S_{\text{оп}} q_\infty) = c_{y_{\text{т}}} + (K_{\text{т}} + K_{\text{оп}}) c_{y_{\text{оп}}}. \quad (11.8)$$

Представим нормальную силу корпуса в виде $Y_{\text{т}} = 2\alpha\pi r^2 q_\infty$, а нормальную силу изолированного оперения как $Y_{\text{оп}} = 2\alpha\pi(s_m - r)^2 q_\infty$. Одновременно выразим сумму коэффициентов интерференции зависимостью

$$K_{\text{т}} + K_{\text{оп}} = (1 + r_m)^2 v_\eta v_{\text{п.с}} v_l.$$

Согласно этому, суммарная нормальная сила

$$Y_{\text{т-оп}} = 2\alpha\pi s_m^2 \left[r_m^2 + (1 - r_m^2)^2 v_\eta v_{\text{п.с}} v_l \right] q_\infty,$$

а ее коэффициент

$$c_{y_{\text{т-оп}}} = \frac{Y_{\text{т-оп}}}{q_\infty S_{\text{оп}}} = \frac{c_{y_{\text{оп}}}}{(1 - r_m)^2} \left[r_m^2 + (1 - r_m^2)^2 v_\eta v_{\text{п.с}} v_l \right].$$

При учете влияния на коэффициенты интерференции сужения, пограничного слоя и места расположения оперения суммарная нормальная сила уменьшается. При оценке стабилизирующих свойств ЛА необходимо учитывать смещение под влиянием интерференции центров давления как всей комбинации, так и ее отдельных элементов (консолей оперения и части корпуса под ними). Причем для рассматриваемого ЛА, имеющего симметричную форму, продольная координата центра давления совпадает с соответствующим фокусом по углу атаки.

Координата центра давления нормальной силы оперения (рис. 11.8)

$$x_{\text{цд} \alpha_{\text{оп}}(\tau)} = -\Delta M_{z_{\text{оп}}(\tau)} / \Delta Y_{\text{оп}}(\tau),$$

где $\Delta M_{z_{\text{оп}}(\tau)}$ — момент тангажа относительно носка бортового сечения консоли от сил, действующих на нее и вычисленных с учетом интерференции оперения и корпуса.

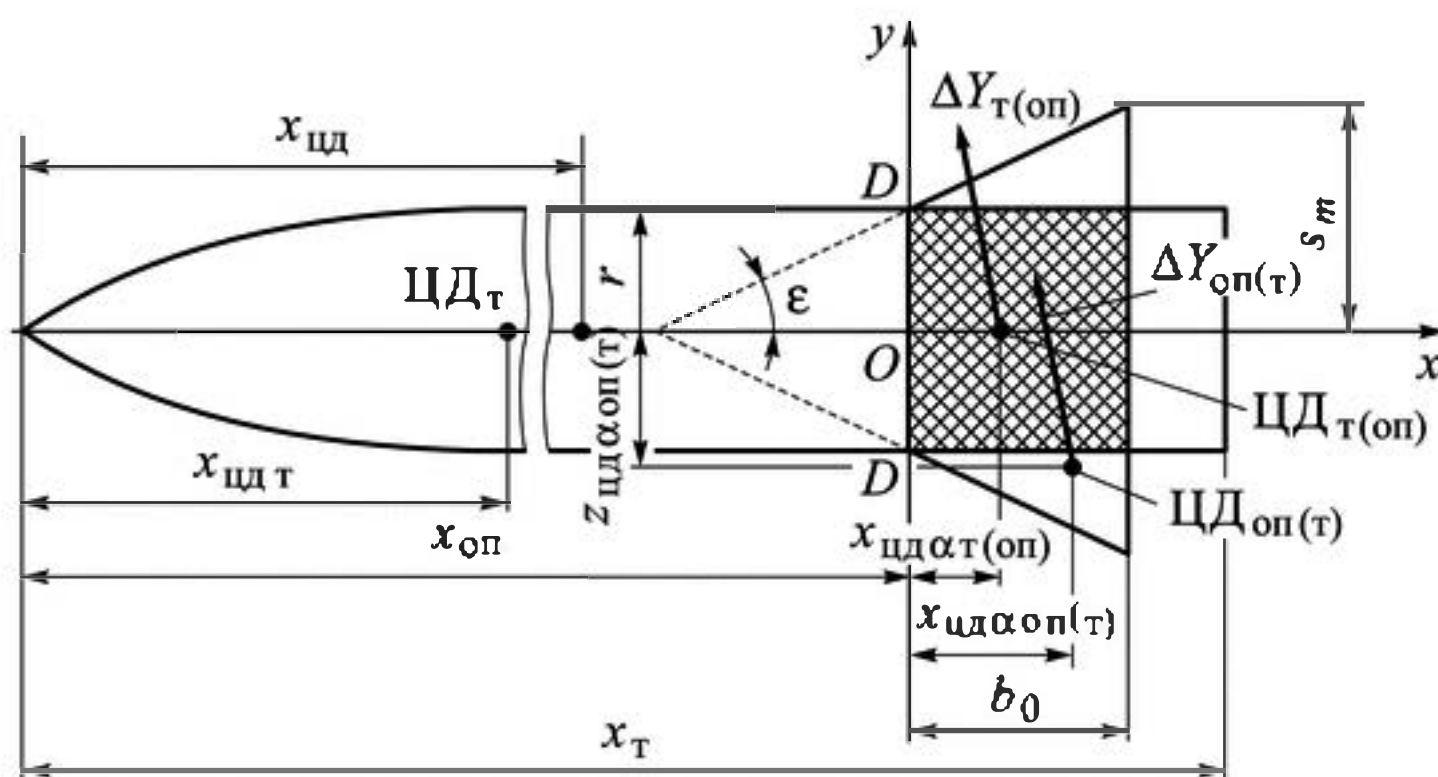


Рис. 11.8. Схема для определения положений центров давления корпуса и оперения с учетом интерференции (площадь, на которую переносится нормальная сила от консоли к корпусу, заштрихована)

Координата центра давления нормальной силы, индуцируемой оперением на корпусе,

$$x_{\text{цд}\alpha_{\text{т(оп)}}} = -\Delta M_{z_{\text{т(оп)}}} / \Delta Y_{\text{т(оп)}},$$

где $\Delta M_{z_{\text{т(оп)}}}$ — момент тангажа относительно носка бортового сечения консоли, обусловленный влиянием оперения. Значение дополнительной нормальной силы $\Delta Y_{\text{т(оп)}}$ в этом выражении можно определять для участка корпуса, расположенного под оперением.

Коэффициенты $c_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}}$ и $c_{\text{цд}\alpha_{\text{т(оп)}}}$, вычисленные с использованием аэродинамической теории тонкого тела для треугольных консолей, приведены в табл. 11.1 в зависимости от отношения r/s_m .

Эти коэффициенты определены в виде отношений

$$c_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}} = x_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}} / b_0, \quad c_{\text{цд}\alpha_{\text{т(оп)}}} = x_{\text{цд}\alpha_{\text{т(оп)}}} / b_0.$$

В соответствии с приведенными значениями коэффициентов давления коэффициент момента тангажа комбинации корпус — оперение относительно носовой части

$$\begin{aligned} m_{z_{\text{т-оп}}} &= M_{z_{\text{т-оп}}} / (q S_{\text{оп}} x_{\text{т}}) = -c_{y_{\text{т-оп}}} c_{\text{цд}} = \\ &= -[c_{y_{\text{т}}} + c_{y_{\text{оп}}}(K_{\text{т}} + K_{\text{оп}})] c_{\text{цд}} = \\ &= -[c_{\text{цд т}} c_{y_{\text{т}}} + c'_{\text{цд}\alpha_{\text{т(оп)}}} \Delta c_{y_{\text{т(оп)}}} + c'_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}} \Delta c_{y_{\text{оп(т)}}}] , \end{aligned}$$

где $c_{\text{цд}} = x_{\text{цд}} / x_{\text{т}}$ — коэффициент центра давления всей комбинации; $c_{\text{цд т}} = x_{\text{цд т}} / x_{\text{т}}$, $c_{y_{\text{т}}}$ — соответственно коэффициенты центра давления и нормальной силы изолированного корпуса (см. рис. 11.8); $c'_{\text{цд}\alpha_{\text{т(оп)}}} = x_{\text{оп}} / x_{\text{т}} + c_{\text{цд}\alpha_{\text{т(оп)}}}(b_0 / x_{\text{т}})$; $c'_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}} = x_{\text{оп}} / x_{\text{т}} + c_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}}(b_0 / x_{\text{т}})$; $\Delta c_{y_{\text{т(оп)}}}$, $\Delta c_{y_{\text{оп(т)}}}$ — коэффициенты нормальных сил $\Delta Y_{\text{т(оп)}}$ и $\Delta Y_{\text{оп(т)}}$.

Боковая координата центра давления для нормальной силы $\Delta Y_{\text{оп(т)}}$ оперения с учетом влияния корпуса (см. рис. 11.8) определяется выражением

$$z_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}} = -\Delta M_{x_{\text{оп(т)}}} / \Delta Y_{\text{оп(т)}},$$

где $\Delta M_{x_{\text{оп(т)}}}$ — момент крена, вызванный действием силы $\Delta Y_{\text{оп(т)}}$ и определяемый относительно продольной оси Ox .

В табл. 11.1 приведены значения $\bar{z}_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}}$, вычисленные по координате центра давления $z_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}}$:

$$\bar{z}_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}} = (z_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}} - r) / (s_m - r).$$

Из этих данных следует, что значения коэффициента $c_{\text{цд}\alpha_{\text{оп(т)}}}$ мало отличаются от числа 0,666, соответствующего изолированной тре-

угольной консоли. Это означает, что интерференция между оперением и корпусом не оказывает существенного влияния на положение центра давления. Поэтому в практических случаях, когда аэродинамические расчеты основаны на применении аэродинамической теории тонкого тела, влиянием интерференции на положение центра давления крыла можно пренебречь. Координата $\bar{z}_{цд\alpha_{оп}(т)}$ также мало зависит от формы оперения в плане, тогда как значение $c_{цд\alpha_{оп}(т)}$ зависит от нее. В частности, расчеты с использованием аэродинамической теории тонкого тела показывают, что центр давления прямоугольного оперения размещается на его передней кромке.

Влияние интерференции на положение центра давления корпуса существенно (см. табл. 11.1). При $r/s_m = 0$, когда корпус превращается в бесконечно тонкое тело, коэффициент $c_{цд\alpha_{оп}(т)} = 0,5$. При очень малых размерах оперения ($r/s_m \rightarrow 1$) на корпус переносится практически вся нормальная сила от консолей и коэффициент центра давления близок к его значению для изолированного оперения, т. е. $c_{цд\alpha_{оп}(т)} \rightarrow 0,666$.

Влияние сжимаемости на интерференцию

Результаты расчета коэффициентов интерференции для тонких комбинаций можно положить в основу определения аэродинамических характеристик ЛА, состоящих из нетонких элементов. При этом аэродинамический коэффициент вычисляют в виде произведения коэффициентов интерференции для тонкого тела и для изолированного оперения. Добавочные коэффициенты нормальной силы консолей нетонкого оперения и корпуса соответственно равны:

$$\Delta c_{y_{оп}(т)} = K_{оп} c_{y_{оп}}; \quad \Delta c_{y_{т(оп)}} = K_{т} c_{y_{оп}},$$

где $c_{y_{оп}}$ — коэффициент, определяемый с учетом влияния числа M_∞ по линеаризованной аэродинамической теории обтекания оперения.

Коэффициенты интерференции можно вычислить до значений $M_\infty \approx 1...1,5$ по приведенным выше соотношениям без учета сжимаемости, но с учетом их изменения в зависимости от сужения консолей оперения, толщины пограничного слоя, а также места расположения консолей на корпусе.

Однако по мере возрастания скоростей обтекания все в большей мере проявляется зависимость коэффициентов интерференции от сжимаемости, которую можно выразить, в частности, через изменение условной толщины $\bar{\delta}^*$ пограничного слоя от числа M_∞ :

$$\bar{\delta}^* = \bar{\delta}_{\text{нс}}^* (1 + 0,14 M_\infty^2)^{0,35},$$

где $\bar{\delta}_{\text{нс}}^*$ — относительная толщина вытеснения несжимаемого пограничного слоя.

Сжимаемость оказывает также непосредственное влияние на значения коэффициентов интерференции. Учесть его можно с помощью поправочного множителя, определяемого из соотношения

$$v_{\text{сж}} = K_{\text{оп}} / K_{\text{оп теор}} = K_{\text{т}} / K_{\text{т теор}} = e^{0,05(1-M_\infty)},$$

которое применимо для $M_\infty \leq 5$. Множитель $v_{\text{м}}$ можно также использовать для вычисления коэффициентов интерференции по формуле (11.7):

$$K_{\text{оп}} = K_{\text{оп теор}} v_\eta v_{\text{п.с}} v_l v_{\text{сж}}; \quad K_{\text{т}} = K_{\text{т теор}} v_\eta v_{\text{п.с}} v_l v_{\text{сж}}. \quad (11.9)$$

Учет торможения потока перед оперением

Рассмотренные выше аэродинамические расчеты комбинации корпус — оперение выполнены в предположении, что оперение находится в условиях обтекания потоком, практически не отличающимся от невозмущенного. Соответствующий скоростной напор вычислен по параметрам этого потока, т. е. $q = q_\infty = 0,5 k p_\infty M_\infty^2$.

Действительное обтекание характеризуется торможением потока перед оперением, которое необходимо учитывать при определении аэродинамических параметров. Степень такого торможения характеризуют средним коэффициентом торможения $k_1 = q / q_\infty$, для которого скоростной напор вычисляют по некоторому усредненному значению числа M_1 возмущенного потока перед оперением: $q = 0,5 k p M_1^2$. Полагая, что давления в возмущенном и невозмущенном потоках одинаковые ($p = p_\infty$), средний коэффициент торможения можно выразить зависимостью $k_1 = M_1^2 / M_\infty^2$. Изменение этого коэффициента пренебрежимо мало при дозвуковых скоростях и оказывается существенным в случае обтекания с большими числами $M_\infty > 1$. При этом значение k_1 зависит от характера и интенсивности скачков уплотнения, возникающих перед головной частью ЛА.

В случае расположения оперения на расстоянии $x_{\text{оп}} > (1,5 \dots 2) x_{\text{мид}}$ от носка головной части, имеющей вид конуса с углом при вершине $\beta_k < \beta_{\text{кр}}$ и длиной $x_{\text{мид}}$ ($\beta_{\text{кр}}$ — критический угол, при котором косой скачок сохраняется прямолинейным и присоединенным), коэффициент k_1 можно определить по формуле

$$k_1 = \frac{M_1^2}{M_\infty^2} = \frac{2}{M_\infty^2 (k-1)} \left[v_0^{(k-1)/k} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right) - 1 \right],$$

где v_0 — отношение давлений торможения после скачка p'_0 и до него p_0 :

$$v_0 = \frac{p'_0}{p_0} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[\frac{x^2}{1+0,5x^2(k-1)} \right]^{\frac{k}{k-1}} \left(kx^2 - \frac{k-1}{2} \right)^{-\frac{1}{k-1}},$$

а

$$x = 1 - \cos^2 \beta_k + \sqrt{1 + 0,5(k-1)M_\infty^2 \sin^2 \beta_k}.$$

Если головная часть отличается от конической, то коэффициент торможения можно рассчитать следующим образом. Для головной части заданной формы найти коэффициент продольной силы c_x . Затем, используя формулу

$$c_x = 0,002(0,8 + M_\infty^{-2})(\beta_k)^{1,7},$$

вычислить угол β_k некоторого условного конуса, которым заменяется заданная головная часть. Далее определить значение $M_\infty \sin \beta_k$, по которому найти параметры x , v_0 и коэффициент k_1 . Этот коэффициент позволяет уточнить аэродинамические коэффициенты, вычисляемые с учетом интерференции, например:

$$c_{y_{т.оп}} = c_{y_{т}} + c_{y_{оп}}(K_{оп} + K_{т})k_1.$$

Значение $c_{y_{оп}}$ здесь целесообразно вычислять по линеаризованной теории, причем не по числу M_∞ , а по уточненному значению M_1 .

В границах применения линеаризованной теории, которым соответствуют тонкие заостренные головные части и сравнительно небольшие числа $M_\infty = 1,5 \dots 2$, значения k_1 близки к единице. При отклонении от этих условий $k_1 < 1$, а значения $c_{y_{т}}$ и $c_{y_{оп}}$ можно вычислить по теории второго приближения при расчете сверхзвукового обтекания заостренного корпуса и оперения.

11.3. Нормальная сила для комбинации корпус — полностью подвижные органы управления

Коэффициенты интерференции

Рассмотрим влияние интерференции на нормальную силу полностью подвижных горизонтальных рулевых поверхностей (поворотного оперения), представляющих собой расположенные на корпусе плоские консоли (рис. 11.9).

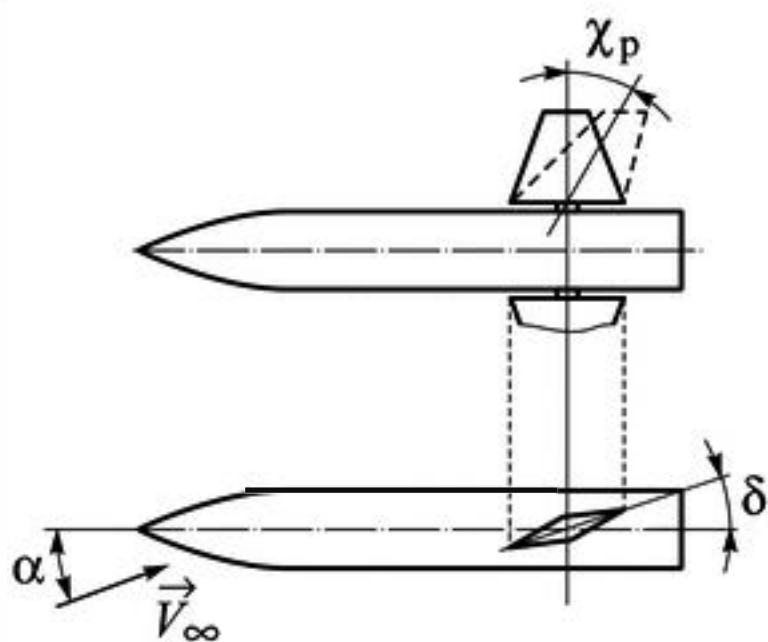


Рис. 11.9. Схема полностью подвижных рулевых поверхностей

Если угол их отклонения $\delta_v \neq 0$, а корпус наклонен под некоторым углом атаки α , то нормальная сила комбинации корпус — поворотное оперение

$$Y = Y_\alpha + Y_\delta,$$

где Y_α — нормальная сила при нулевом отклонении органов управления и некотором угле атаки комбинации $\alpha \neq 0$; Y_δ — нормальная сила, вызванная отклонением рулей ($\delta_v \neq 0, \alpha = 0$).

Методика расчета нормальной силы Y_α комбинации корпус — оперение изложена в § 11.2. Для определения второй составляющей Y_δ можно воспользоваться результатами аэродинамической теории тонкого тела, в соответствии с которой

$$Y_\delta = \Delta Y_{\text{оп(т)}} \delta + \Delta Y_{\text{т(оп)}} \delta,$$

где $\Delta Y_{\text{оп(т)}} \delta$ — нормальная сила оперения, отклоненного на угол δ , вычисленная с учетом влияния корпуса; $\Delta Y_{\text{т(оп)}} \delta$ — нормальная сила корпуса, обусловленная его интерференцией с оперением. При этом

$$\Delta Y_{\text{оп(т)}} \delta = k_{\text{оп}} Y_{\text{оп}}; \quad \Delta Y_{\text{т(оп)}} \delta = k_{\text{т}} Y_{\text{оп}},$$

где $k_{\text{оп}}, k_{\text{т}}$ — коэффициенты интерференции, обусловленные отклонением рулей на угол δ при $\alpha = 0$; $Y_{\text{оп}}$ — нормальная сила изолированного руля.

Таким образом,

$$Y_\delta = (k_{\text{оп}} + k_{\text{т}}) Y_{\text{оп}}. \quad (11.10)$$

В аэродинамической теории тонкого тела коэффициенты $k_{\text{оп}}$ и $k_{\text{т}}$ определяют как функции параметра $r_m = r/s_m$. Согласно данным, приведенным в табл. 11.2, значения $k_{\text{оп}}$ незначительно отличаются от единицы. Это указывает на то, что несущая способность полностью подвижного оперения при его повороте относительно корпуса практически такая же, как и изолированного оперения. Изменение коэффициента $k_{\text{т}}$ оказывается значительным, что свидетельствует о существенном влиянии оперения на несущие свойства корпуса. Согласно данным табл. 11.2, для этого коэффициента можно записать

$$k_{\text{т}} \approx r/s_m.$$

Таблица 11.2. Значения коэффициентов интерференции для комбинации корпус – подвижное оперение

r/s_m	$k_{оп}$	k_T	$c_{цл\delta_{оп}(T)}^*$	r/s_m	$k_{оп}$	k_T	$c_{цл\delta_{оп}(T)}^*$
0	1,000	0	0,667	0,6	0,948	0,607	0,663
0,1	0,963	0,114	0,669	0,7	0,958	0,705	0,664
0,2	0,944	0,218	0,668	0,8	0,971	0,803	0,666
0,3	0,936	0,317	0,666	0,9	0,985	0,902	0,667
0,4	0,935	0,414	0,665	1,0	1,000	1,000	0,667
0,5	0,940	0,510	0,664				

* Для треугольного оперения в виде поворотного руля.

Полный аэродинамический эффект от интерференции между корпусом и подвижным оперением оказывается равным изменению нормальной силы подвижных консолей под воздействием корпуса при его отклонении на угол атаки. В соответствии с этим

$$k_{оп} + k_T = K_{оп}. \tag{11.11}$$

Если же предположить, что оперение передает корпусу часть своей нормальной силы независимо от того, создается ли эта сила под влиянием угла атаки α или угла поворота δ , то в соответствии с этим справедливо равенство

$$k_T/k_{оп} = K_T/K_{оп}. \tag{11.12}$$

Из зависимостей (11.11) и (11.12) можно найти соотношения для коэффициентов интерференции в случае подвижных консолей:

$$k_{оп} = K_{оп}^2 / (K_T + K_{оп});$$

$$k_T = K_T K_{оп} / (K_T + K_{оп}).$$

Эти выражения используют при исследовании интерференции подвижного оперения нетонких комбинаций, для которых аэродинамические характеристики изолированных консолей выбирают в соответствии с данными линеаризованной теории обтекания.

Результаты исследований можно уточнить, если учесть изменение коэффициентов $k_{оп}$, k_T под воздействием сужения консоли, числа M_∞ , длины головной части корпуса и пограничного слоя. При этом исходят из соотношений, аналогичных (11.9):

$$k_{оп} = k_{оп\,т\,с\,op} V_\eta V_{п.с} V_I V_M;$$

$$k_T = k_{T \text{ теор}} V_\eta V_{п.с} V_I V_M,$$

где $k_{оп \text{ теор}}, k_{T \text{ теор}}$ — коэффициенты интерференции, рассчитанные по аэродинамической теории тонкого тела:

$$k_{оп \text{ теор}} = \left(\frac{K_{оп}^2}{K_T + K_{оп}} \right)_{\text{теор}} ;$$

$$k_{T \text{ теор}} = \left(\frac{K_T K_{оп}}{K_T + K_{оп}} \right)_{\text{теор}} .$$

Хвостовой участок корпуса влияет на значение коэффициента k_T , однако значение коэффициента $k_{оп}$ не изменяется.

Аэродинамические характеристики

В соответствии с (11.10) коэффициент нормальной силы, обусловленной отклонением консолей поворотного оперения,

$$c_{y\delta} = Y_\delta / (q_\infty S_{оп}) = c_{y_{оп}}^\alpha (k_{оп} + k_T) \delta k_1. \quad (11.13)$$

Здесь угол поворота руля равен углу атаки консоли.

Когда ось вращения составляет с осью корпуса прямой угол, т. е. угол стреловидности этой оси $\chi_p = 0$, угол $\delta = \delta'$. Если $\chi_p \neq 0$ (см. рис. 11.9), то угол атаки консоли

$$\delta = \delta' \cos \chi_p.$$

Добавив в выражение (11.13) коэффициент $c_{y\alpha} = c_{y_{т(оп)}}$, определенный по значению нормальной силы $Y_\alpha = Y_{т(оп)}$ комбинации при $\alpha \neq 0$, $\delta = 0$, получим суммарный коэффициент нормальной силы, отнесенной к площади консолей оперения:

$$c_y = c_{y\alpha} + c_{y\delta} =$$

$$= c_{y_{т}} S_{мид} / S_{оп} + [(K_T + K_{оп})\alpha + (k_T + k_{оп})\delta] c_{y_{оп}}^\alpha k_1. \quad (11.14)$$

Координату центра давления консолей поворотного оперения при $\alpha = 0$ можно найти по формуле

$$x_{цд\delta_{оп}} = x_{оп} + (x_{цд}/b_0) \delta_{оп(т)} b_0.$$

Отсюда коэффициент центра давления, отсчитываемый от носка корпуса и отнесенный к его длине x_T ,

$$c_{цд\delta_{оп}} = (x_{цд}/x_T) \delta_{оп} = \bar{x}_{оп} + c_{цд\delta_{оп(т)}} \bar{b}_0,$$

где $\bar{x}_{оп} = x_{оп} / x_T$, $\bar{b}_0 = b_\bullet / x_T$.

Значения $c_{\text{цд}\delta\text{оп}(\tau)} = (x_{\text{цд}}/b_0)_{\delta\text{оп}(\tau)}$, рассчитанные по аэродинамической теории тонкой треугольной несущей поверхности, приведены в табл. 11.2.

Координату центра давления для рулей в виде прямоугольных консолей можно определить также по линеаризованной теории, учитывающей воздействие корпуса в условиях обтекания сжимаемым потоком ($M_\infty > 1$) (рис. 11.10).

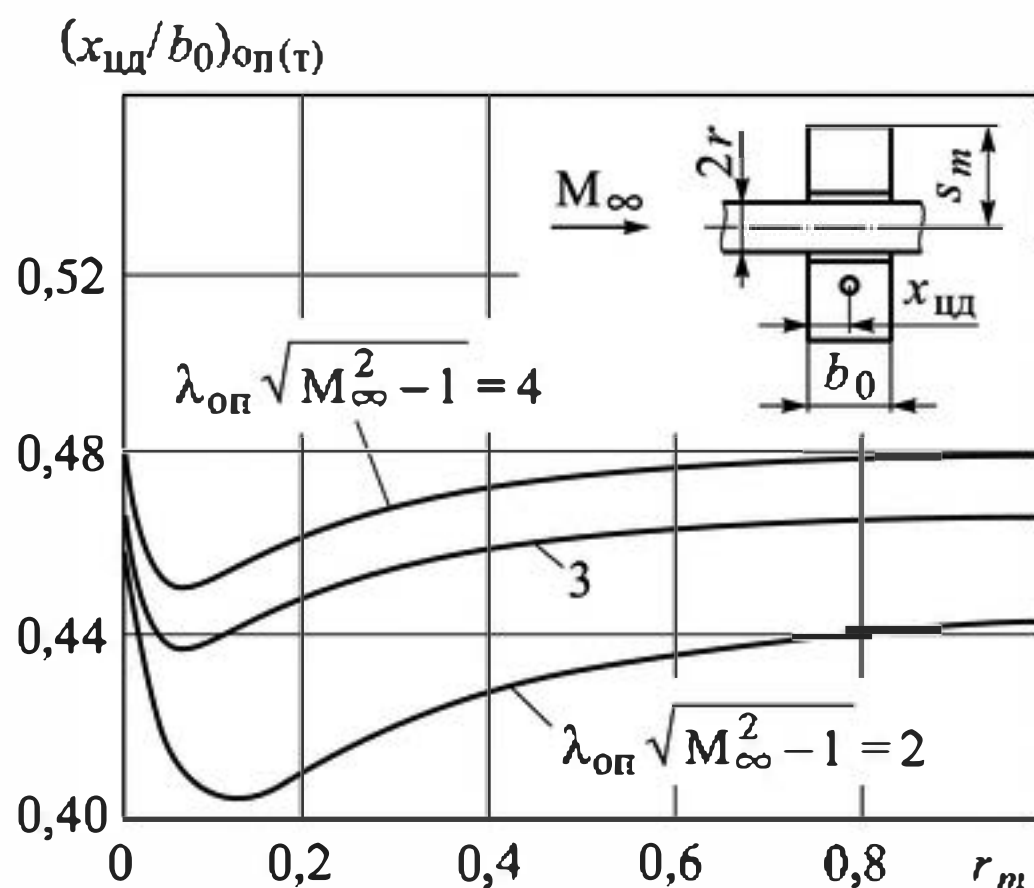


Рис. 11.10. Кривые для расчета смещения центра давления поворотного руля под влиянием корпуса при условии $\delta \neq 0$

Данные, приведенные в табл. 11.2 и на рис. 11.10, свидетельствуют об относительно слабом влиянии интерференции на смещение центра давления. Это дает основание считать, что с достаточным приближением центр давления отклоненной консоли можно принимать таким, как для изолированного оперения, обтекаемого под углом атаки.

Если корпус находится под углом атаки α , а оперение дополнительно отклонено относительно оси корпуса на угол δ , то координата центра давления

$$x_{\text{цд}\text{оп}(\tau)} = x_{\text{оп}} + (x_{\text{цд}}/b_0)_{\text{оп}(\tau)} b_0$$

или в безразмерном виде

$$c_{\text{цд}\text{оп}(\tau)} = (x_{\text{цд}}/x_\tau)_{\text{оп}(\tau)} = \bar{x}_{\text{оп}} + c'_{\text{цд}\text{оп}(\tau)} \bar{b}_0,$$

где

$$c'_{\text{цд}\text{оп}(\tau)} = \left(\frac{x_{\text{цд}}}{b_0} \right)_{\text{оп}(\tau)} = \frac{K_{\text{оп}} \alpha c_{\text{цд}\alpha\text{оп}(\tau)} + k_{\text{оп}} \delta c_{\text{цд}\delta\text{оп}(\tau)}}{K_{\text{оп}} \alpha + k_{\text{оп}} \delta}.$$

При повороте органа управления наряду с изменением положения его центра давления вследствие интерференции с корпусом изменяется координата точки приложения дополнительной нормальной силы корпуса, обусловленной влиянием оперения в виде руля. Если такой поворот сопровождается изменением угла атаки корпуса, то координата центра давления

$$x_{\text{цд т(оп)}} = x_{\text{оп}} + (x_{\text{цд}}/b_0)_{\text{т(оп)}} b_0$$

или в безразмерном виде

$$c_{\text{цд т(оп)}} = (x_{\text{цд}}/x_{\text{т}})_{\text{т(оп)}} = \bar{x}_{\text{оп}} + c'_{\text{цд т(оп)}} \bar{b}_0,$$

где

$$c'_{\text{цд т(оп)}} = \left(\frac{x_{\text{цд}}}{b_0} \right)_{\text{т(оп)}} = \frac{K_{\text{т}} \alpha c_{\text{цд}} \alpha_{\text{т(оп)}} + k_{\text{т}} \delta c_{\text{цд}} \delta_{\text{т(оп)}}}{K_{\text{т}} \alpha + k_{\text{т}} \delta}.$$

При расчете положения центра давления на корпусе с учетом влияния оперения принимают, что центр давления нечувствителен к тому, изменяется ли нормальная сила от угла атаки или угла поворота оперения. В соответствии с этим $x_{\text{цд}} \alpha_{\text{т(оп)}} = x_{\text{цд}} \delta_{\text{т(оп)}}$.

Коэффициент центра давления для комбинации корпус — поворотное оперение

$$\begin{aligned} c_{\text{цд}} &= \frac{x_{\text{цд}}}{x_{\text{т}}} = -\frac{m_z}{c_y} = \\ &= \frac{1}{c_y} \left(c_{\text{цд т}} c_{\text{ут}} \frac{S_{\text{мид}}}{S_{\text{оп}}} + c_{\text{цд оп(т)}} \Delta c_{y \text{оп(т)}} + c_{\text{цд т(оп)}} \Delta c_{y \text{т(оп)}} \right). \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta c_{y \text{оп(т)}} = \Delta c_{y \alpha \text{оп(т)}} + \Delta c_{y \delta \text{оп(т)}} = (K_{\text{оп}} \alpha + k_{\text{оп}} \delta) c_{y \text{оп}}^{\alpha} k_1;$$

$$\Delta c_{y \text{т(оп)}} = \Delta c_{y \alpha \text{т(оп)}} + \Delta c_{y \delta \text{т(оп)}} = (K_{\text{т}} \alpha + k_{\text{т}} \delta) c_{y \text{оп}}^{\alpha} k_1.$$

Эффективность органов управления

Для симметричного отклонения горизонтальных консолей *продольная эффективность* органов управления определяется производной $\partial m_z / \partial \delta = m_z^{\delta}$ при условии, что момент тангажа вычислен относительно центра масс:

$$m_z^{\delta} = -(b_0/x_{\text{т}}) \left[k_{\text{оп}} (c_{\text{цд}} \delta_{\text{оп(т)}} + \bar{x}'_{\text{оп}}) + k_{\text{т}} (c_{\text{цд}} \delta_{\text{т(оп)}} + \bar{x}'_{\text{оп}}) \right] c_{y \text{оп}}^{\alpha} k_1, \quad (11.15)$$

где $\bar{x}'_{оп} = x'_{оп}/b_0$; $x'_{оп}$ — расстояние от центра масс комбинации до вершины оперения на корпусе.

Производная m_z^δ обычно отрицательная для хвостового оперения и положительная для органа управления, выполненного по схеме «утка».

Поперечная эффективность органов управления характеризуется производной $dm_x/d\delta = m_x^\delta$ при дифференциальном отклонении горизонтальных консолей. Эта производная обычно является отрицательной. Как показывают исследования, для оперения треугольной формы

$$m_x^\delta = -\lambda_{оп} f(r_m).$$

Здесь $\lambda_{оп}$ — удлинение изолированных консолей оперения; $f(r_m)$ — функция, которая для весьма тонкого тела определяется линейной зависимостью

$$f_{т.т} = 0,167(1 + 3,71r_m).$$

Пользуясь теорией линеаризованного обтекания, можно уточнить значение $f(r_m)$ для реального тонкого тела и тем самым учесть влияние числа M_∞ :

$$f = f_{т.т} c_{уоп л}^\alpha / c_{уоп т.т}^\alpha,$$

где $c_{уоп л}^\alpha$, $c_{уоп т.т}^\alpha$ — производные для изолированного оперения, вычисленные с использованием линеаризованной теории и теории тонкого тела соответственно.

Одна из причин снижения эффективности рулей и нарушения линейной зависимости их аэродинамических характеристик от угла отклонения связана с образованием щелей между органами управления и корпусом. Такое явление возникает при достаточно больших щелях, размеры которых возрастают по мере отклонения рулей. Снижение их несущей способности и нарушение линейной зависимости $c_{уоп}^\alpha(\alpha)$ обусловлено резким падением перепада давления у корневой хорды, вызванным щелью.

Повысить эффективность органов управления можно уменьшением в конструкции ЛА размеров щелей и одновременно снижением допустимых углов отклонения рулей. При этом в реальных условиях вязкого обтекания пограничный слой как бы перекрывает малые щели, что приводит к уменьшению их отрицательного воздействия на рули.

Влияние щелей, образующихся в производственных и эксплуатационных условиях, на изменение эффективности рулей можно

учесть введением поправочного множителя $k_{\text{ш}}$ в полученные выше значения аэродинамических характеристик органов управления. При дозвуковых скоростях ($M_{\infty} < M_{\text{кр}}$) ориентировочно можно принять $k_{\text{ш}} = 0,80 \dots 0,85$, а при повышенных числах Маха ($M_{\infty} > 1,4$) коэффициент $k_{\text{ш}} = 0,90 \dots 0,95$.

11.4. Аэродинамическое сопротивление комбинации корпус — оперение

Зависимости для определения аэродинамического сопротивления ЛА в виде комбинации корпус — оперение должны учитывать влияние на сопротивление интерференции между отдельными элементами аппарата. Полную силу X_a лобового сопротивления при наличии подъемной силы ($c_{y_a} \neq 0$) можно представить в виде суммы составляющей X_0 при нулевой подъемной силе, а также индуктивных составляющих X_i , создаваемой корпусом и оперением, и ΔX_{α} , включающей неучтенные аэродинамические силы, т. е.

$$X_a = X_0 + X_i + \Delta X_{\alpha}.$$

Соответствующий коэффициент лобового сопротивления, отнесенный к характерной площади $S_{\text{хар}}$, определяется выражением

$$c_{xa} = X_a / (q_{\infty} S_{\text{хар}}) = c_{x0} + c_{xi} + \Delta c_{x\alpha}. \quad (11.16)$$

При отсутствии подъемной силы ($c_{y_a} = 0$) коэффициент

$$c_{x_0} = \Delta c_{x\text{т}} + \Delta c_{x\text{оп}}, \quad (11.17)$$

причем $\Delta c_{x\text{т}} = \Delta c_{x\text{т(оп)}} + c_{x\text{т}}$; $\Delta c_{x\text{оп}} = c_{x\text{оп}} + \Delta c_{x\text{оп(т)}}$.

Здесь $c_{x\text{т}}$, $c_{x\text{оп}}$ — соответственно коэффициенты лобового сопротивления изолированных корпуса и оперения; остальные составляющие в сумме дают поправку на интерференцию (индекс в скобке у каждой составляющей указывает элемент конструкции, интерференция с которым вызывает дополнительное сопротивление корпуса и оперения).

Основной частью сопротивления всего ЛА является сопротивление его изолированных элементов:

$$\Delta c_{x_0} = c_{x\text{т}} + c_{x\text{оп}}. \quad (11.18)$$

Выделив из каждой составляющей сопротивление, вызванное разрежением за донным срезом (донное сопротивление), получим

$$\Delta c_{x0} = c'_{xt} + c'_{xop} + c_{xtдон} + c_{xопдон},$$

где c'_{xt} , $c'_{xоп}$ — коэффициенты сопротивления от давления и трения соответственно на корпусе и оперении; $c_{xtдон}$, $c_{xопдон}$ — соответствующие составляющие коэффициента донного сопротивления.

Полное сопротивление корпуса определяют с учетом его формы, которая в общем случае может отличаться от тела вращения. Если это отличие невелико, то корпус рассматривают как тело вращения с распределением радиусов вдоль продольной оси OX в соответствии с зависимостью $r(x) = \sqrt{S(x)/\pi}$, где $S(x)$ — площадь поперечного сечения корпуса заданной формы. У такого тела вращения подъемная сила и моментные характеристики, как показывают исследования, сохраняются такими же, как у корпуса заданной формы. Различие значений коэффициента лобового сопротивления оказывается более существенным, поэтому его целесообразно учитывать. Отклонение формы корпуса от тела вращения может быть обусловлено различными надстройками, например обтекателями, антенными устройствами и др.

Аэродинамическое сопротивление корпуса зависит от расположения надстроек. Исследования показывают, что вклад надстроек будет наименьшим при их среднем расположении. При выносе надстроек вперед сопротивление корпуса возрастает в результате повышенного давления на носовую часть, а при заднем расположении — вследствие срыва потока и повышения донного разрежения. Сопротивление, обусловленное таким разрежением за донным срезом площадью $S_{дон}$, характеризуется коэффициентом донного давления $\bar{p}_{дон} = (p_{дон} - p_{\infty})/q_{\infty}$, поэтому коэффициент $c_{xtдон}$, отнесенный к какой-либо характерной площади $S_{хар}$ (рис. 11.11), будет

$$c_{xtдон} = \frac{X_{тдон}}{q_{\infty} S_{хар}} = \frac{-(p_{дон} - p_{\infty}) S_{дон}}{q_{\infty} S_{хар}} = -\bar{p}_{дон} \frac{S_{дон}}{S_{хар}}. \quad (11.19)$$

В практических случаях при вычислении аэродинамического коэффициента можно принять, что его составляющая, обусловленная трением, не зависит от интерференции. Тогда следует учитывать изменение только составляющей от давления на корпусе вследствие интерференции с управляющими поверхностями. При этом если оперение расположено на цилиндрической части корпуса, то его сопротивление не изменяется, если же оно находится на сужающихся или расширяющихся участках корпуса, то влияние интер-

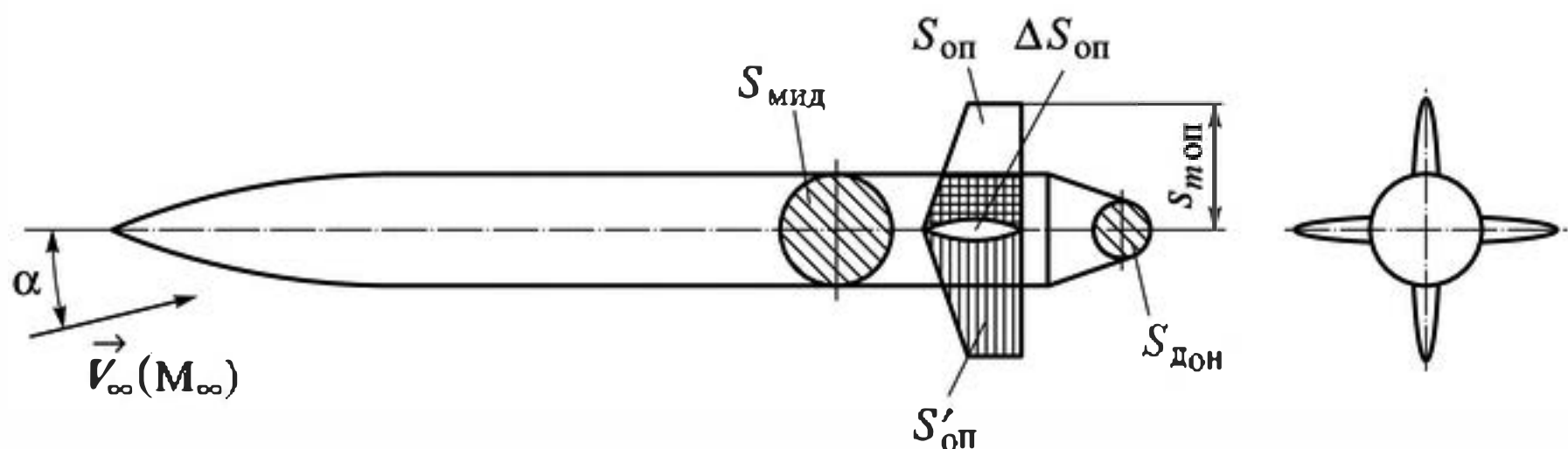


Рис. 11.11. Схема ЛА для расчета аэродинамического сопротивления комбинации корпус – оперение

ференции может оказаться существенным. Приблизенно величину $\Delta c_{xт(оп)}$ можно определить, исходя из предположения, что корпус находится в поле давления изолированной консоли стабилизирующей поверхности, которое можно вычислить с использованием сверхзвуковой теории крыла.

При расчете сопротивления изолированного оперения его форму целесообразно рассматривать в виде консолей, выступающих над корпусом, и фиктивных участков несущей поверхности, расположенных внутри корпуса. У такого оперения сохраняется прежний размах, но увеличивается площадь $S'_{оп}$ (см. рис. 11.11). Значение $c_{хоп}$ в формуле (11.17) не будет учитывать составляющую, которая приходится на фиктивный участок оперения площадью $\Delta S_{оп}$, расположенный под корпусом, т. е.

$$c_{хоп} = c'_{хоп} (1 - \Delta S_{оп} / S'_{оп}),$$

где $c'_{хоп}$ — коэффициент сопротивления пары консолей, рассчитанный для площади $S'_{оп}$, т. е. с учетом площади под корпусом.

Влияние интерференции можно учесть, введя поправку

$$c_{хоп} = c'_{хоп} (1 - k_{оп}^* \Delta S_{оп} / S'_{оп}), \quad (11.20)$$

где $k_{оп}^*$ — коэффициент интерференции, изменяющийся в широких пределах в зависимости от расположения оперения на корпусе и характера их сопряжения, а также формы и удлинения оперения. При небольшой стреловидности и удлинении ($\lambda_{оп} > 2$) консолей, плавно сопряженных с корпусом, значение $k_{оп}^*$ мало отличается от единицы. В случае «отрицательной» интерференции, повышающей сопротивление, коэффициент $k_{оп}^* < 1$. Соответствующим выбором конструктивных элементов и их компоновкой можно в некоторых случаях уменьшить сопротивление. При такой «положительной» интерференции $k_{оп}^* > 1$.

При $c_{ya} = 0$ сумма составляющих коэффициента Δc_{xT} корпуса

$$\Delta c_{xT} = (c'_{xT} + \Delta c'_{xT(оп)})(S_{мид}/S_{хар}), \quad (11.21)$$

где коэффициенты со штрихом рассчитаны по миделеву сечению корпуса, а величина Δc_{xT} отнесена к характерной площади рассматриваемой комбинации. Учитывая (11.20), найдем соотношение для полного коэффициента лобового сопротивления:

$$c_{xa} = (c'_{xT} + \Delta c'_{xT(оп)}) \frac{S_{мид}}{S} + c'_{xоп} \left(1 - k_{оп}^* \frac{\Delta S_{оп}}{S'_{оп}} \right) \Sigma \frac{S_{оп}}{S} k_1. \quad (11.22)$$

Согласно экспериментальным исследованиям, у большей части конструкций влияние интерференции на сопротивление небольшое и его можно учесть путем введения к коэффициенту сопротивления Δc_{x0} (11.18) суммарного коэффициента интерференции k_{Σ} . В соответствии с этим полный

$$c_{xa} = \Delta c_{x0} k_{\Sigma}.$$

Коэффициент k_{Σ} зависит от ряда факторов, в частности от скорости и высоты полета, схемы ЛА, конструкции его отдельных элементов. Значение этого коэффициента мало отличается от единицы, и в приближенных расчетах обычно принимают $k_{\Sigma} \approx 1,05 \dots 1,06$.

Практический интерес представляет также оценка сопротивления комбинации корпус — оперение, основанная на использовании правила площадей. Согласно этому правилу, сопротивление указанной комбинации равно его сопротивлению изолированного корпуса, имеющего то же распределение площадей поперечного сечения, что и комбинация корпус — оперение. Такой изолированный корпус называют *эквивалентным телом*.

При построении эквивалентного тела комбинацию корпус — оперение рассекают поперечными плоскостями, перпендикулярными продольной оси, и в выбранном сечении измеряют площадь. Эта площадь считается принадлежащей эквивалентному телу, которое отличается по внешнему виду от заданного корпуса тем, что, начиная с сечения, где расположены передние кромки, такое тело приобретает выпуклую форму (рис. 11.12). Если форма эквивалентного тела определена, то коэффициент его лобового сопротивления можно найти с помощью известных методов.

В сверхзвуковом диапазоне скоростей изложенный метод применим только для очень тонких конфигураций со стреловидными

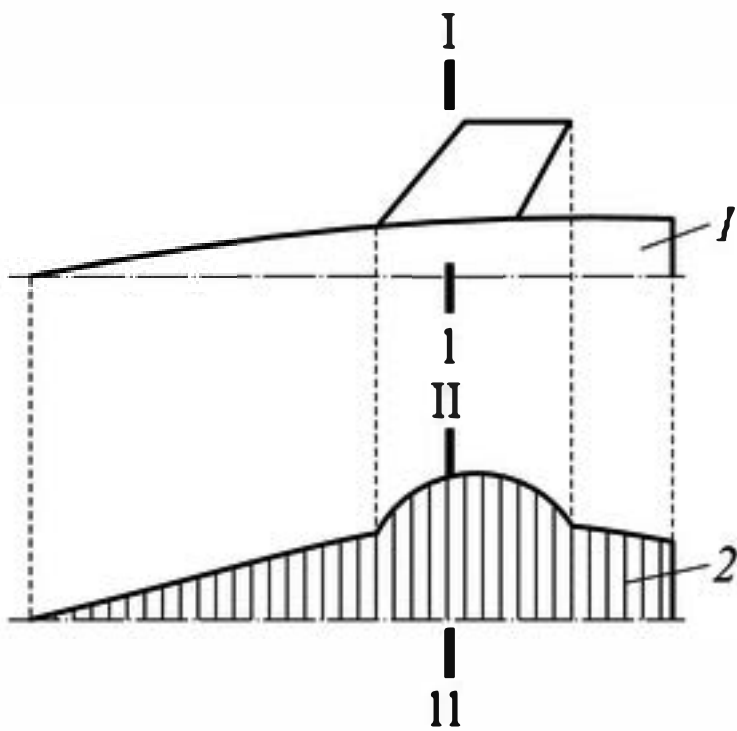


Рис. 11.12. Применение правила площадей для определения формы ЛА с минимальным аэродинамическим сопротивлением:

1 – заданная конфигурация ЛА; 2 – эквивалентное тело вращения с наплывом (в сечениях I–I и II–II площади одинаковы)

крыльями малого удлинения. Метод можно использовать и для нестреловидных крыльев при условии, что $M_\infty \leq 1$.

В случае $c_{y\alpha} \neq 0$ при расчете коэффициента $c_{x\alpha}$ (см. выражение (11.16)) необходимо учитывать дополнительные составляющие c_{xi} и $\Delta c_{x\alpha}$. В свою очередь, индуктивная составляющая c_{xi} для дозвуковых скоростей в основном определяется величиной $c_{xi\text{оп}}$ (при отсутствии скольжения):

$$c_{xi} = c_{xi\text{оп}} = \bar{c}_{xi\text{оп}} \frac{S'_{\text{оп}}}{S} k_1, \quad (11.23)$$

где $\bar{c}_{xi\text{оп}} = c_{y\alpha\text{оп}}^2 / (\pi \lambda_{\text{эфоп}})$.

В этих выражениях коэффициенты $c_{y\alpha\text{оп}}$ находят для изолированных консолей с учетом площади под корпусом, т. е. по их действительному размаху. Для учета интерференции введен эмпирический коэффициент, представляющий собой эффективное удлинение:

$$\lambda_{\text{эфоп}} = \lambda_{\text{оп}} (1 + \Delta S_{\text{оп}} / S'_{\text{оп}}), \quad (11.24)$$

где $\lambda_{\text{оп}} = 4s_{\text{моп}}^2 / S'_{\text{оп}}$.

При сверхзвуковых скоростях индуктивная составляющая $c_{xi} = X_i / (q_\infty S_{\text{хар}}) = c_{y\alpha} \alpha$. Согласно формулам (11.8), (11.14),

$$c_{xi} = c_{y\alpha} \alpha \frac{S_{\text{мид}}}{S_{\text{хар}}} + \left\{ \left[K_{\text{оп}} + K_{\text{т}} + (k_{\text{оп}} + k_{\text{т}}) \frac{\delta}{\alpha} \right] k_1 c_{y\alpha}^\alpha \frac{S_{\text{оп}}}{S_{\text{хар}}} \right\} \alpha^2. \quad (11.25)$$

Рассмотрим составляющую $\Delta c_{x\alpha} = X_\alpha / (q_\infty S_{\text{хар}})$, зависящую от угла атаки. Значение этого коэффициента в значительной мере определяется подсасывающей силой оперения, при вычислении кото-

рой необходимо учесть изменение его подъемной силы вследствие интерференции с корпусом. При дозвуковых скоростях ($M_\infty < 1$) этот коэффициент определяется зависимостью (с учетом отрицательного знака)

$$\Delta c_{x\alpha_{оп}} = -\bar{c}_\alpha \Delta_\alpha c_{y_{оп}}^2,$$

где для треугольного крыла $\bar{c}_\alpha = 0,25\pi\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \chi - M_\infty^2}$; $\Delta_\alpha = (c_{y_{оп}}^\alpha)^{-1} - (\pi\lambda_{оп})^{-1}$.

Для корпуса получаем

$$\Delta c_{x\alpha_T} = \xi \alpha^2 S_{мид} / S_{хар},$$

где ξ — коэффициент, определяемый формой носовой части корпуса, в частности для конической части в дозвуковом потоке

$$\xi \cong -\frac{0,16}{\lambda_{мид}} \sqrt{|M^2 - 1|} - 0,08.$$

Таким образом, дополнительная составляющая

$$\Delta c_{x\alpha} = \Delta c_{x\alpha_T} + \Delta c_{x\alpha_{оп}}.$$

У многих ЛА, предназначенных для полетов с большими скоростями, крылья и оперения выполняют с заостренными передними кромками, поэтому сумма $\Delta c_{x\alpha_{оп}} = 0$. Если принять также во внимание, что подсасывающая сила корпуса определяет незначительную часть полного сопротивления, можно считать $\Delta c_{x\alpha_T} \approx 0$. В соответствии с этим индуктивная составляющая, обусловленная углом атаки, определяется формулой $c_{xi} = c_y \alpha$, т. е. зависимостью (11.25), в которой можно принять $\delta \approx 0$ для тех ЛА, у которых подъемная сила при отклонении рулей изменяется незначительно, а следовательно, пренебрежимо мало индуктивное сопротивление, вызванное этим отклонением.

12. ОСОБЕННОСТИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ РАЗРЕЖЕННОЙ СРЕДОЙ

При движении ЛА на больших высотах важное значение приобретают знания закономерностей обтекания тел разреженной средой. Методы газодинамического описания течений газов, основанные на уравнениях механики сплошной среды, становятся неприменимыми для таких течений. Для разреженной атмосферы гипотеза сплошности недействительна и необходимо пользоваться кинетической теорией, исследующей динамику газа с помощью молекулярной механики. Важнейшие выводы этой теории основываются на принятии дискретной схемы строения среды, согласно которой среда состоит из соударяющихся молекул, пробегающих достаточно большой свободный путь. В главе рассмотрены основные схемы взаимодействия молекул с поверхностью тел в условиях свободномолекулярного потока, на основе которых получены зависимости для расчета давлений и напряжения трения в потоке. Приведены сведения, которые необходимы для понимания физических явлений, а также для осуществления аэродинамических расчетов, связанных с полетами в разреженной среде.

12.1. Границы применимости гипотезы сплошности

Экспериментальные данные обтекания тел в условиях разреженной и сплошной среды существенно отличаются по силовым и моментным характеристикам, а также по трению и теплопередаче. Для разреженного газа нельзя пользоваться гипотезой сплошности, или неразрывности, применяемой для плотных потоков. В этом случае необходимо учитывать молекулярную структуру течения, в которой молекулы движутся в различных направлениях, пробегая достаточ-

но большой свободный путь, сталкиваясь между собой и с поверхностью обтекаемого тела. Чтобы учесть эти особенности, в аэродинамике разреженной среды используют молекулярно-кинетическую теорию газа.

Для установления границ применимости гипотезы сплошности определим длину свободного пробега молекул. Очевидно, чем меньше она будет, тем ближе изучаемая среда к гипотетически сплошной.

Скорости хаотического движения отдельных молекул могут изменяться в широком диапазоне, поэтому обычно рассматривают среднюю длину их свободного пробега. Эта длина l зависит от числа молекул N в единице объема, средней скорости c_{cp} хаотического движения и площади A поперечного сечения молекул.

Из статистической физики известно, что длина свободного пробега молекул

$$l = c_{cp}t,$$

где $t = 1/n$ — время между двумя соударениями молекул; n — число соударений в единицу времени, $n = NA c_{cp}$.

Таким образом, можно записать

$$l = 1/(NA). \quad (12.1)$$

Формула (12.1) неудобна в практическом применении, поскольку площадь поперечного сечения молекул трудно определить непосредственными измерениями. Лучше использовать зависимость для l , полученную из кинетической теории газов, через кинематическую вязкость

$$\nu = 0,499 c_{cp} l \quad (12.2)$$

и скорость звука

$$a = \sqrt{kRT} = c_{cp} \sqrt{\pi k / 8}. \quad (12.3)$$

Подставляя выражение (12.3) в (12.2), получаем

$$l = 1,255 \nu \sqrt{k} / a, \quad (12.4)$$

где k — показатель адиабаты.

Ниже приведены приближенные значения длины l свободного пробега молекулы в зависимости от высоты H полета ЛА, рассчитанные по формуле (12.4) для стандартной атмосферы:

H , км	0	30	62	100	120	150	200
l , м	$8,6 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^{-7}$	$4,9 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-2}$	1,3	20	300

Анализируя эти данные, можно заметить, что длина свободного пробега молекул существенно изменяется с высотой полета и на высотах около 120...150 км становится сопоставимой с размерами ЛА.

Обозначим через $L_{\text{хар}}$ некоторый характерный линейный размер. В зависимости от конкретной задачи это может быть длина тела вращения, хорда крыла и т. п. Как было показано в гл. 1, отношение длины l свободного пробега молекулы к этому размеру называется безразмерным числом Кнудсена:

$$\text{Kn} = l / L_{\text{хар}}.$$

Режим течения газа определяется в зависимости от его степени разреженности, под которой понимают отношение $l/L_{\text{хар}}$, т. е. фактически от числа Кнудсена.

При исследовании пограничного слоя или газовой смазки между движущимися поверхностями в условиях разреженной среды характерным линейным размером является соответственно толщина пограничного слоя, или толщина газовой смазки, обозначаемая через δ . Тогда число Кнудсена

$$\text{Kn} = \frac{l}{\delta} = 1,255 \frac{v\sqrt{k} \cdot V}{v\delta a} = 1,255 \cdot \sqrt{k} \cdot \frac{M}{\text{Re}}. \quad (12.5)$$

Рассмотрим течение газа между двумя пластинками, отстоящими одна от другой на малом расстоянии δ . Одна из пластинок перемещается параллельно другой со скоростью V . Определим возможные режимы течения газа между пластинками.

Если число $\text{Kn} \leq 0,01$, то принято рассматривать газ как плотную среду. В ней вследствие малой длины пробега молекул возмущения от соударений со стенкой практически мгновенно передаются на все молекулы, поэтому при исследовании таких потоков применяют гипотезу сплошности.

При большой степени разреженности среды ($\text{Kn} \geq 10$, т. е. длина свободного пробега молекул значительно больше характерного линейного размера) гипотеза сплошности становится неприемлемой. В такой среде столкновения частиц редки и, следовательно, вязкость практически не проявляется (понятие о числе Re теряет смысл). Вместо обтекания сплошным потоком здесь уже необходимо рассматривать ударное воздействие молекул на тело. Оба рассмотренных случая отражают два характерных режима течения: *сплошное* ($\text{Kn} \leq 0,01$) и *свободномолекулярное* ($\text{Kn} \geq 10$).

В свободномолекулярном потоке принято считать, что, несмотря на сильное разрежение и малое число столкновений в элементарном объеме, число молекул достаточно для того, чтобы определить свойства газа как макроскопические. Например, согласно приведенным выше данным, на высоте 150 км средняя длина свободного пробега молекул равна 3 м, что соответствует сильной разреженности воздуха. Однако число молекул в кубическом сантиметре остается большим (около $1,5 \cdot 10^{12}$). Для такой разреженной среды давление и массовая плотность могут быть рассчитаны как средние в данном объеме. Таким образом, свойства течений подобной среды определяют на основе максвелловского закона распределения скоростей молекул. Применяя этот закон, можно исследовать силы взаимодействия молекул с поверхностью движущегося тела.

Между режимами сплошного и свободномолекулярного течений находятся *переходный режим* ($1 < Kn < 10$) и *режим течения со скольжением* ($0,01 < Kn < 1$). В этом промежутке происходят чрезвычайно сложные явления, когда одинаково важно как соударение молекул с поверхностью тела, так и их взаимодействие между собой. Условия, соответствующие переходному режиму, возникают при полете на высотах около 100 км. В режиме со скольжением, имеющем место на высотах до 100 км, более существенную роль играют уже соударения между молекулами.

Различие между режимами течения проявляются и в неодинаковом профиле скоростей между рассматриваемыми параллельными пластинками. В сплошном потоке, как известно, на поверхности тела выполняется граничное условие «прилипания» элементарных частиц газа, которые после соударения с движущейся верхней пластинкой приобретают ее скорость V и соответствующее количество движения (рис. 12.1, а). По причине трения передаваемое соседними частицами количество движения уменьшается, в результате чего падает их скорость, достигая нуля на поверхности нижней неподвижной пластинки.

В свободномолекулярном потоке (рис. 12.1, б) частицы после соударения со стенкой не изменяют количества движения по толщине слоя δ , поскольку не сталкиваются с другими молекулами. При этом в случае диффузного взаимодействия скорость частиц у верхней движущейся пластинки равна V , а у неподвижной нижней — нулю. Следовательно, средняя скорость частиц между пластинками будет $V/2$. Фактически в свободномолекулярном потоке, обтека-

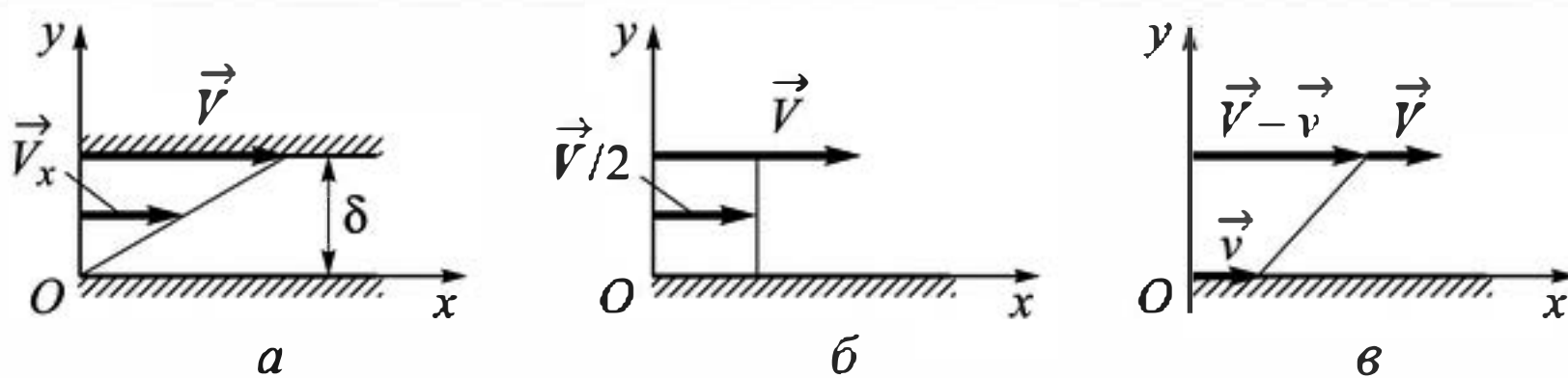


Рис. 12.1. Профили скорости газа между пластинками:
 а – сплошное течение; б – свободномолекулярный поток; в – течение со скольжением

ющем какое-либо тело, теряет смысл понятие пограничного слоя, так как течение у поверхности имеет ту же скорость, что и на некотором удалении от нее.

Профиль скорости при течении со скольжением (рис. 12.1, в) занимает промежуточное положение. Верхняя подвижная пластинка, как и в сплошном потоке, передает элементарным частицам количество движения, соответствующее скорости V своего движения. При этом отраженные от пластинки частицы, не достигая противоположной стенки, сталкиваются с другими частицами, изменяя (уменьшая) их скорость. Это происходит в связи с тем, что средний путь свободного пробега частиц соизмерим с расстоянием δ . Измерение скорости будет непрерывным между пластинками, и профиль скорости по виду оказывается промежуточным между профилями для сплошного и свободномолекулярного потоков. На верхней пластинке скорость потока уменьшается на некоторую величину v и становится $V - v$, а на нижней — частицы как бы проскальзывают со скоростью v . Отсюда объяснимо название «течение со скольжением». Если же тело обтекается внешним потоком, то газ на поверхности тела не «прилипает», а приобретает некоторую скорость, отличную от нуля и меньшую, чем на внешней границе еще существующего пограничного слоя. В этих условиях по-прежнему можно использовать уравнения для вязкого теплопроводного сжимаемого газа при более общих граничных условиях, учитывающих разрыв скорости, температуры и давления на поверхности обтекаемого тела в отличие от типичного течения в пограничном слое при сплошной среде. В соответствии с выражением (12.5) режим течения определяется соотношением местных чисел M и Re . Если расстояние между пластинками будет соизмеримо с толщиной ламинарного пограничного слоя, то от числа $Re = V\delta/\nu$ можно перейти к параметру $Re_L = VL/\nu$:

$$Kn = \frac{l}{\delta} = \frac{l}{L} \frac{L}{\delta} = 0,264 \sqrt{k} \cdot \frac{M}{\sqrt{Re_L}}.$$

По этой зависимости построены приведенные на рис. 12.2 графики, полученные без учета влияния возможных физико-химических превращений воздуха на длину свободного пробега молекул, которые можно использовать для приближенной оценки течения вблизи обтекаемого тела, если исходить из местных значений M и Re .

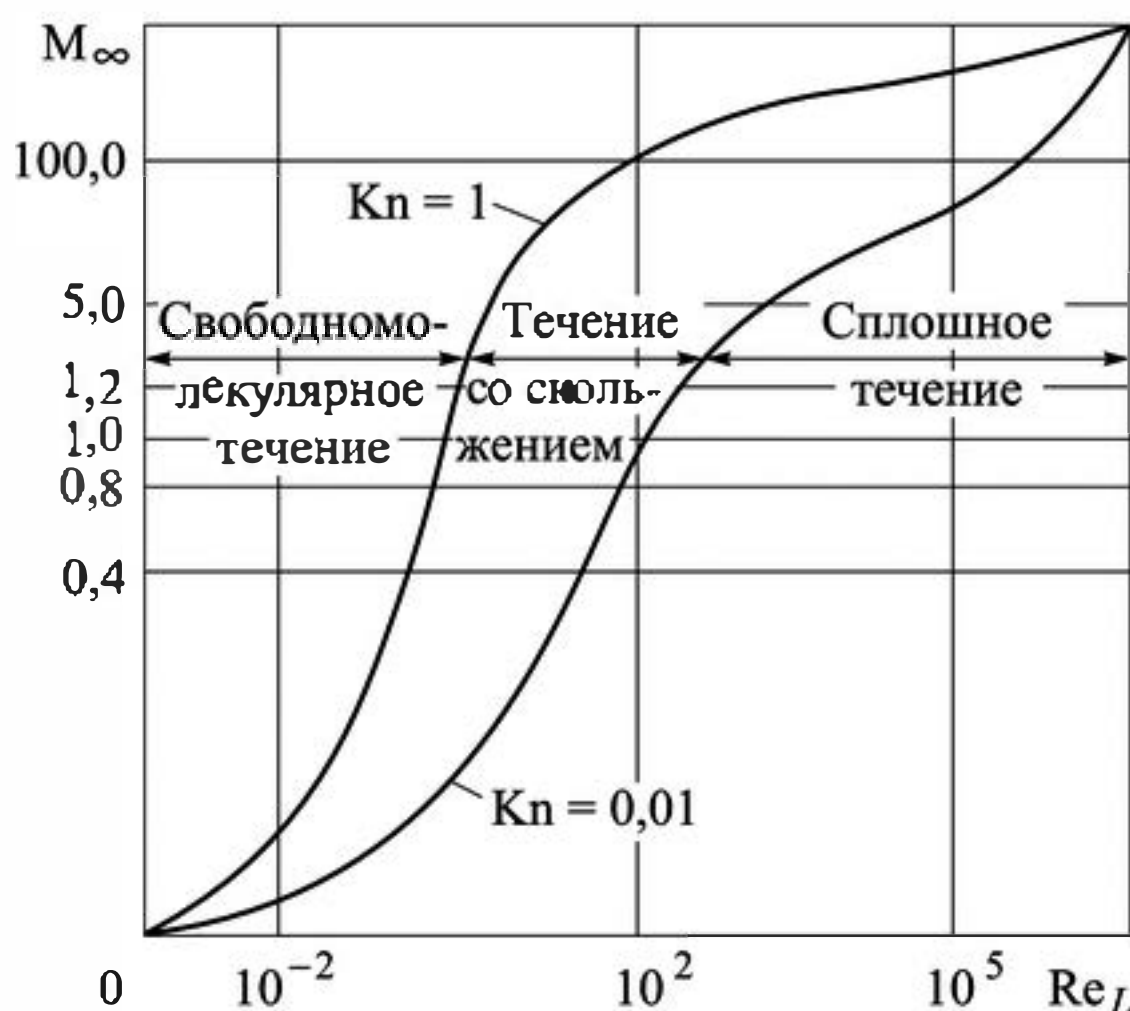


Рис. 12.2. Диапазон изменения чисел M , Kn и Re для различных типов течений

Видно, что при заданном числе M изменение числа Re_L может привести к изменению режима течения от сплошного до свободномолекулярного. Поскольку с увеличением высоты полета коэффициент вязкости возрастает, число Re_L при этом уменьшается. Следовательно, на разных высотах условия полета ЛА будут соответствовать различным областям течения. В то же самое время условия свободномолекулярного течения в окрестности тела можно получить и на малых высотах в условиях значительного уменьшения плотности потока (при гиперзвуковом полете или движении на больших углах атаки). Таким образом, при исследовании течений кроме критериев подобия, учитывающих влияние вязкости (число Re_L) и сжимаемости (число M), необходимо вводить критерий, характеризующий степень разрежения среды (число Kn).

12.2. Давление и трение в свободномолекулярном потоке

В свободномолекулярном потоке параметры течения и аэродинамические характеристики движущихся тел определяют на базе кинетической теории газов, исследующей движение газа с помощью молекулярной механики. Рассмотрим некоторые характеристики и особенности такого течения.

При изучении обтекания поверхности сплошной средой граничным условием являлось безотрывное обтекание. В свободномолекулярном течении механизм взаимодействия тел с потоком более сложный. Рассмотрим предельные виды взаимодействия молекул со стенкой: зеркальное и диффузное отражения.

Схема *зеркального отражения* реализуется в случае, когда обтекаемая поверхность идеально гладкая и молекула подлетает к ней под малым углом β (рис. 12.3, а). При этом молекулы ведут себя как абсолютно упругие шары: после удара отражаются от стенки под углом, равным углу атаки β .

При зеркальном отражении абсолютные значения составляющих скорости частиц не изменяются, тангенциальная составляющая скорости к поверхности стенки сохраняет свой знак, а нормальная — меняет его на обратный. В случае такого взаимодействия частиц со стенкой силы трения в обычном понимании отсутствуют, а значит, равна нулю и теплопередача. Однако даже тщательно отполированные поверхности не являются достаточно гладкими, чтобы в полном объеме реализовалась схема зеркального отражения. Практически по этой схеме со стенкой взаимодействует лишь незначительная часть молекул.

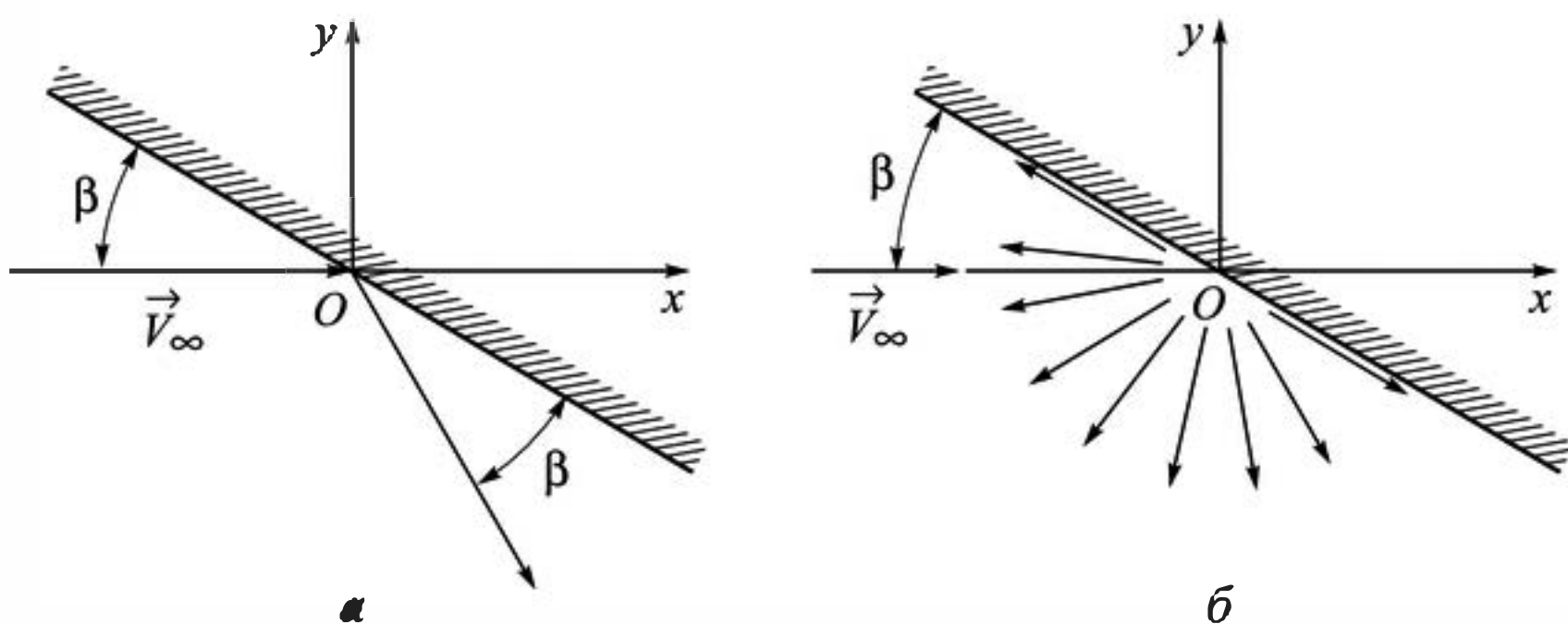


Рис. 12.3. Схемы взаимодействия молекул со стенкой при зеркальном (а) и диффузном (б) отражении

Схема *диффузного отражения* предполагает, что поверхность имеет шероховатости и щели, высота и ширина которых соответственно соизмерима с поперечными размерами молекул. Согласно этой схеме (рис. 12.3, б), молекулы газа передают в результате соударения всю кинетическую энергию телу, диффундируя в стенку на некоторое малое время, в течение которого происходит выравнивание температуры газа и стенки, а затем отражаются в произвольном направлении с некоторой скоростью. Отсутствие какого-либо преобладающего направления диффузно отраженных молекул приводит к тому, что они не создают касательного напряжения. Температура отраженного потока часто близка к температуре стенки, хотя в общем случае может незначительно отличаться. Поскольку реальная поверхность отличается от идеально гладкой, большая часть молекул взаимодействует по схеме диффузного отражения.

Запишем скорость V_∞ массового (упорядоченного) движения молекул газа в виде

$$V_\infty^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Здесь

$$u = \bar{u} + U; \quad v = \bar{v} + V; \quad w = \bar{w} + W,$$

причем первые слагаемые являются компонентами скорости V_∞ относительно поверхности тела, а вторые характеризуют среднюю скорость $c_{\text{ср}}$ теплового (хаотического) движения, т. е.

$$U^2 + V^2 + W^2 = c_{\text{ср}}^2.$$

Рассмотрим сначала перенос молекул к поверхности тела. Примем, что ось Oy , по которой направлена составляющая v , совпадает с нормалью к поверхности тела в данной точке, и будем считать, что молекулы отражаются диффузно, причем температура отраженных молекул $T_{\text{отр}}$ в общем случае отличается от температуры стенки $T_{\text{ст}}$ и первоначальной температуры газа $T_{\text{пад}}$.

Если молекулы движутся со скоростью, составляющие которой находятся в интервалах $u, u + du; v, v + dv; w, w + dw$, то их число равно произведению

$$n_{\text{пад}} F du dv dw,$$

в котором $n_{\text{пад}}$ — концентрация падающих молекул в единице объема (здесь и далее параметрам с индексом «пад» соответствуют параметры невозмущенного потока $V_\infty, p_\infty, \rho_\infty, T_\infty$ и т. д.); F — функция распределения молекул по скоростям, или функция распределения Максвелла.

Согласно кинетической теории газов,

$$F = (\pi c_r^2)^{-1,5} e^{-c^2/c_r^2}, \quad (12.6)$$

где c_r — наиболее вероятная скорость молекул газа, связанная со средней скоростью c_{cp} хаотического движения соотношением

$$c_r = \sqrt{\pi c_{cp}^2 / 4},$$

где $c_{cp} = 2\sqrt{2RT/\pi}$.

Число молекул, которые достигают поверхности тела и располагаются в объеме с единичной площадью основания и высотой, равной вертикальной составляющей скорости v за одну секунду, будет

$$v n_{пад} F du dv dw.$$

Тогда для рассматриваемого объема общее число молекул $N_{пад}$, соударяющихся с поверхностью тела за одну секунду, можно получить интегрированием этого выражения по всем возможным значениям u , v и w :

$$N_{пад} = \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} v dv \int_{-\infty}^{\infty} n_{пад} F dw.$$

(Здесь учтено, что частицы, у которых $v < 0$, не будут достигать площадки.)

С учетом выражения (12.6) получаем

$$N_{пад} = n_{пад} (\pi c_{гпад}^2)^{-1,5} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5H_1^2} du \int_0^{\infty} v e^{-0,5H_2^2} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5H_3^2} dw, \quad (12.7)$$

где $H_1 = \sqrt{2} \cdot U / c_{гпад}$; $H_2 = \sqrt{2} \cdot V / c_{гпад}$; $H_3 = \sqrt{2} \cdot W / c_{гпад}$.

Поскольку $du = dU$, а $dw = dW$, то первый и третий интегралы в уравнении (12.7) будут равны $\sqrt{\pi c_{гпад}^2}$, а второй можно представить в виде

$$\int_0^{\infty} v e^{-0,5H_2^2} dv = 0,5 c_{гпад}^2 \left[e^{-\bar{c}^2} + \bar{c} \sqrt{\pi} (1 + \operatorname{erf} \bar{c}) \right], \quad (12.8)$$

где $\bar{c} = \bar{v} / c_{гпад}$; $\operatorname{erf} \bar{c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{c}} e^{-\bar{c}^2} d\bar{c}$. Значения $\bar{c}$ и $\operatorname{erf} \bar{c}$ приведены в табл. 12.1.

Таблица 12.1. Значения параметров $\bar{c}^2$, $e^{-\bar{c}^2}$ и $\text{erf } \bar{c}$ при различных $\bar{c}$

$\bar{c}$	$\bar{c}^2$	$e^{-\bar{c}^2}$	$\text{erf } \bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}^2$	$e^{-\bar{c}^2}$	$\text{erf } \bar{c}$
0	0	1	0	1,1	1,21	0,2982	0,8802
0,1	0,01	0,9900	0,1125	1,2	1,44	0,2369	0,9103
0,2	0,04	0,9608	0,2227	1,3	1,69	0,1845	0,9340
0,3	0,09	0,9139	0,3286	1,4	1,96	0,1409	0,9523
0,4	0,16	0,8521	0,4284	1,5	2,25	0,1054	0,9661
0,5	0,25	0,7788	0,5205	1,6	2,56	0,0773	0,9763
0,6	0,36	0,6977	0,6039	1,7	2,89	0,0556	0,9838
0,7	0,49	0,6026	0,6778	1,8	3,24	0,0392	0,9891
0,8	0,64	0,5274	0,7421	1,9	3,61	0,0271	0,9928
0,9	0,81	0,4449	0,7961	2,0	4,00	0,0183	0,9953
1,0	1,00	0,3679	0,8427	3,0	9,00	~0	1

Таким образом, для общего числа соударяющихся с поверхностью тела молекул окончательно имеем

$$N_{\text{пад}} = n_{\text{пад}} \sqrt{\frac{RT_{\text{пад}}}{2\pi}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} \pm \bar{c} \sqrt{\pi} (1 \pm \text{erf } \bar{c}) \right]. \tag{12.9}$$

Если в безразмерном параметре $\bar{c}$ выразить $c_{г\text{пад}}$ через скорость звука $a_{\text{пад}} = \sqrt{kRT_{\text{пад}}}$, то получим

$$\bar{c} = \tilde{v}/a_{\text{пад}} \sqrt{k/2}.$$

Учитывая, что β — угол между направлением вектора $\vec{V}_\infty$ и касательной к криволинейной поверхности тела в рассматриваемой точке (рис. 12.4), зависимость для $\bar{c}$ можно представить как

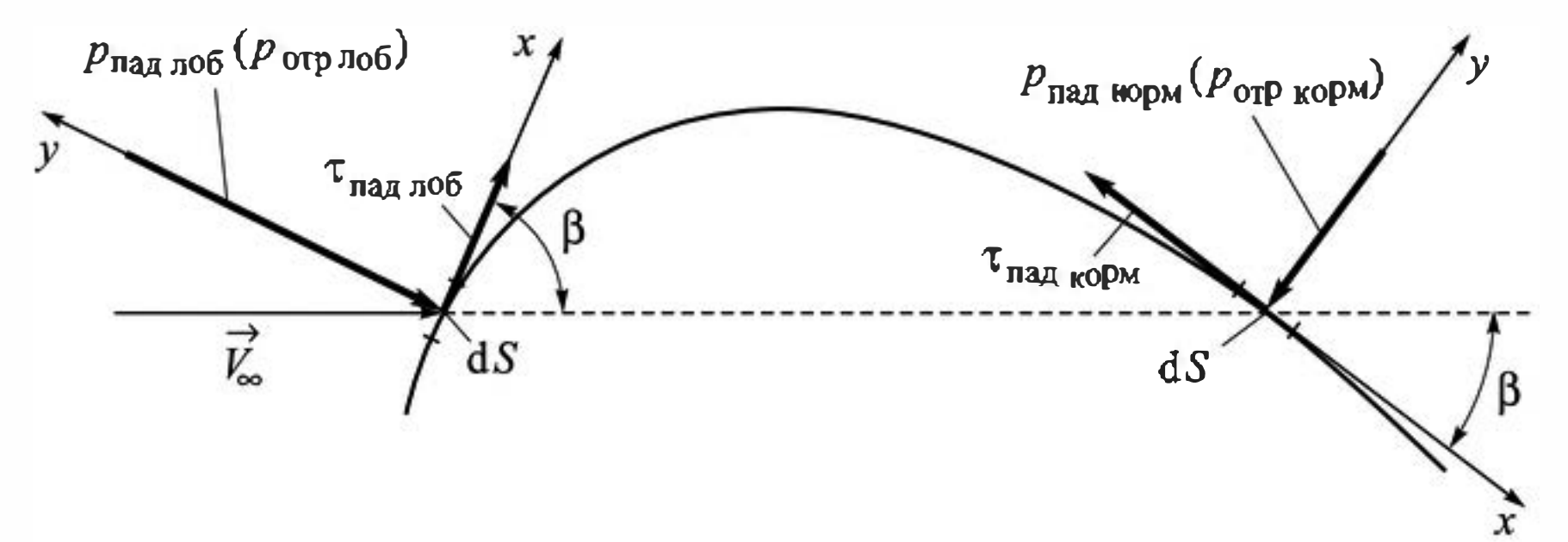


Рис. 12.4. Обтекание криволинейной поверхности

$$\bar{c} = \bar{c}_\infty \sin \beta,$$

где $\bar{c}_\infty = V_\infty / a_{\text{пад}} \sqrt{k/2}$.

Если площадка dS расположена на передней части тела (см. рис. 12.4), где $\beta > 0$, то в формуле (12.9) надо брать верхний знак «+». В кормовой части тела ($\beta < 0$) пределы интегрирования в уравнении (12.8) становятся от $-\infty$ до 0, и в выражении (12.9) необходимо использовать знак «-».

Теперь рассмотрим перенос молекул, отраженных от поверхности тела. Поскольку диффузное отражение подчиняется максвелловскому распределению, можно применить соотношение (12.9), приняв в нем $\bar{c} = 0$ (после соударения массовая составляющая скорости частицы равна 0). Таким образом, общее число отраженных молекул можно найти по формуле

$$N_{\text{отр}} = n_{\text{отр}} \sqrt{\frac{RT_{\text{отр}}}{2\pi}}, \quad (12.10)$$

где $n_{\text{отр}}$ — концентрация отраженных молекул в единичном объеме.

Если принять, что $N_{\text{пад}} = N_{\text{отр}}$, то, приравнявая правые части выражений (12.9) и (12.10), найдем связь между концентрациями $n_{\text{отр}}$ и $n_{\text{пад}}$:

$$n_{\text{отр}} = n_{\text{пад}} \sqrt{T_{\text{пад}}/T_{\text{отр}}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} \pm \bar{c} \sqrt{\pi} (1 \pm \operatorname{erf} \bar{c}) \right]. \quad (12.11)$$

Зависимость (12.9) можно упростить для достаточно больших скоростей. Так, при $\bar{c} \geq 2$ величина $e^{-\bar{c}^2}$ близка к нулю, а интеграл вероятностей $\operatorname{erf} \bar{c}$ — к единице. Неравенству $\bar{c} \geq 2$ соответствует

$$M_\infty \geq \frac{\bar{c}}{\sin \beta} \sqrt{2/k}$$

и, например, при $\sin \beta = 0,2$, $k = 1,4$ число $M_\infty \geq 12$, а при $\sin \beta = 1$ наименьшее значение числа M_∞ снижается до 2,4.

Таким образом, в случае больших скоростей формула (12.9) принимает вид

$$N_{\text{пад лоб}} = \bar{c} n_{\text{пад}} \sqrt{2RT_{\text{пад}}} = n_{\text{пад}} V_\infty \sin \beta. \quad (12.12)$$

Полученное выражение справедливо для лобовой части тела, где $\beta > 0$. Для кормовой части, где $\beta < 0$, $N_{\text{пад}} = 0$, т. е. здесь при больших скоростях полета молекулы газа не достигают поверхности ЛА.

Для определения давления, а в дальнейшем и напряжения трения в свободномолекулярном потоке воспользуемся уравнением движения, согласно которому изменение суммарного количества движения молекул при обтекании поверхности за единицу времени равно импульсу сил от их давления и трения за тот же промежуток времени.

Давление определяется суммарной потерей количества движения молекул в перпендикулярном к поверхности тела направлении в результате их соударения со стенкой. Количество движения молекул, соударяющихся с единичной поверхностью в единицу времени,

$$n_{\text{пад}} m v^2 F du dv dw.$$

Тогда давление, создаваемое всеми падающими на лобовую площадку молекулами,

$$p_{\text{пад}} = \rho_{\text{пад}} (\pi c_{\text{гпад}}^2)^{-1,5} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5H_1^2} du \int_0^{\infty} v^2 e^{-0,5H_2^2} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5H_3^2} dw, \quad (12.13)$$

где $\rho_{\text{пад}}$ — плотность падающих частиц, $\rho_{\text{пад}} = mn_{\text{пад}}$.

При определении давления на кормовую площадку ($\beta < 0$) пределы интегрирования v во втором интеграле (12.13) будут от $-\infty$ до 0. Тогда, выполнив аналогичные случаю переноса молекул преобразования, получим выражение для коэффициента давления:

$$\bar{p}_{\text{пад}} = \frac{2p_{\text{пад}}}{\rho_{\text{пад}} V_{\infty}^2} = \sin^2 \beta \left[\frac{1}{\bar{c} \sqrt{\pi}} e^{-\bar{c}^2} \pm \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}^2} \right) (1 \pm \operatorname{erf} \bar{c}) \right]. \quad (12.14)$$

Отраженные частицы также создают давление, равное количеству движения молекул, покидающих стенку перпендикулярно поверхности. Для его определения воспользуемся уравнением (12.13), в котором примем $\bar{v} = 0$:

$$p_{\text{отр}} = \rho_{\text{отр}} (\pi c_{\text{готр}}^2)^{-1,5} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5H_1^2} dU \int_0^{\infty} v^2 e^{-0,5H_2^2} dV \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5H_3^2} dW.$$

После вычисления интегралов получаем

$$p_{\text{отр}} = 0,5 R \rho_{\text{отр}} T_{\text{отр}}, \quad (12.15)$$

где $\rho_{\text{отр}}$ — плотность отраженных частиц, $\rho_{\text{отр}} = mn_{\text{отр}}$.

Тогда зависимость для коэффициента давления при диффузном отражении будет иметь вид

$$\bar{p}_{отр} = \frac{2p_{отр}}{\rho_{пад} V_{\infty}^2} = \frac{\sin^2 \beta}{2\bar{c}^2} \sqrt{\frac{T_{отр}}{T_{пад}}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} \pm \bar{c} \sqrt{\pi} (1 \pm \operatorname{erf} \bar{c}) \right]. \quad (12.16)$$

Окончательно для коэффициента давления получаем

$$\begin{aligned} \bar{p} = \frac{2(p_{пад} + p_{отр})}{\rho_{пад} V_{\infty}^2} = \sin^2 \beta \left\{ \frac{1}{\bar{c}} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\bar{c}} \sqrt{\frac{T_{отр}}{T_{пад}}} \right] e^{-\bar{c}^2} \pm \right. \\ \left. \pm \left(1 + \frac{2}{2\bar{c}^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\bar{c}} \sqrt{\frac{T_{отр}}{T_{пад}}} \right) (1 \pm \operatorname{erf} \bar{c}) \right\}, \end{aligned} \quad (12.17)$$

где знак «+» соответствует лобовой, а знак «−» — кормовой поверхности тела.

Из выражения (12.17) следует, что коэффициент давления зависит от ориентировки (угла β) рассматриваемой площади, числа M_{∞} и от отношения температур $T_{отр}/T_{пад}$.

При больших скоростях ($\bar{c} \geq 2$) формулы (12.14) и (12.16) принимают вид

$$p_{падлоб} = 2 \sin^2 \beta (1 + 0,5 \bar{c}^2); \quad p_{падкорм} = 0; \quad (12.18)$$

$$p_{отркорм} = \left(\sin^2 \beta / \bar{c} \right) \sqrt{\pi T_{отр} / T_{пад}}; \quad p_{отрлоб} = 0. \quad (12.19)$$

С учетом выражений (12.18) и (12.19) общий коэффициент давления при больших скоростях

$$\bar{p}_{лоб} = \bar{p}_{падлоб} + \bar{p}_{отрлоб} = 2 \sin^2 \beta \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\bar{c}} \sqrt{\frac{T_{отр}}{T_{пад}}} \right); \quad \bar{p}_{корм} = 0.$$

Напряжение трения возникает вследствие полной потери тангенциальной составляющей количества движения молекул при их ударе о стенку. Для одной молекулы эта потеря равна mu , а для числа молекул, которые соударяются с единичной поверхностью в единицу времени, —

$$n_{пад} m F_{uv} du dv dw.$$

Как и в случае с определением давления, напряжение трения, обусловленное всеми падающими на лобовую поверхность молекулами,

$$\tau_{пад} = \rho_{пад} \left(\pi \bar{c}_{гпад}^2 \right)^{-1,5} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-0,5 H_1^2} du \int_0^{\infty} v e^{-0,5 H_2^2} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5 H_3^2} dw.$$

Для кормовой поверхности в этом выражении нужно во втором интеграле принять пределы интегрирования от $-\infty$ до 0.

Учитывая, что $\tilde{y} = V_{\infty} \cos \beta$ (см. рис.12.3), а $\bar{c} = (V_{\infty}/c_{\Gamma \text{ пад}}) \sin \beta$, получаем зависимость для коэффициента трения:

$$c_{f \text{ пад}} = \frac{2\tau_{\text{пад}}}{\rho_{\text{пад}} V_{\infty}^2} = \sin \beta \cos \beta \left[\frac{1}{\bar{c} \sqrt{\pi}} e^{-\bar{c}^2} \pm (1 \pm \operatorname{erf} \bar{c}) \right]. \quad (12.20)$$

Поскольку любые направления диффузно отраженных молекул равновероятны, они не создают напряжения трения и $\tau_{\text{отр}} = 0$. Следовательно, $c_{f \text{ отр}} = 0$.

При $\beta = 0$, согласно (12.20), коэффициент трения

$$c_{f \text{ пад}} = \frac{1}{\bar{c}_{\infty} \sqrt{\pi}} = \frac{1}{M_{\infty}} \sqrt{\frac{2}{k\pi}}.$$

В случае, когда $\bar{c} \geq 2$, зависимости также упрощаются и соответственно для лобовой и кормовой поверхности принимают вид

$$c_{f \text{ пад лоб}} = \sin 2\beta; \quad c_{f \text{ пад корм}} = 0.$$

Для облегчения вычислений в табл. (12.1) приведены значения функций $e^{-\bar{c}^2}$ и $\operatorname{erf} \bar{c}$ для различных значений $\bar{c}$.

Как было показано выше, для определения нормального давления необходимо знать отношение температур $T_{\text{отр}}/T_{\text{пад}}$. Вычисление его связано с нахождением энергии поступательного движения молекул, подводимой при их ударе о стенку и отводимой в результате отражения молекул.

Каждая молекула при ударе передает поверхности тела энергию

$$0,5mc_{\text{ср}}^2 = 0,5m(U^2 + V^2 + W^2).$$

Единицей поверхности тела в единицу времени падающие молекулы сообщают энергию

$$0,5mn_{\text{пад}}c^2 F v du dv dw.$$

Интегрируя это выражение в соответствующих пределах изменения u , v и w с учетом (12.6), получаем

$$E_{\text{пад}} = 0,5mn_{\text{пад}} \left(\pi c_{\Gamma \text{ пад}}^2 \right)^{-0,5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_{\text{Н}}}^{t_{\text{В}}} \int_{-\infty}^{\infty} c_{\text{ср}}^2 e^{-c_{\text{ср}}^2/c_{\Gamma \text{ пад}}^2} v du dv dw. \quad (12.21)$$

Здесь для лобовой поверхности пределы $t_{\text{Н}} = 0$, $t_{\text{В}} = \infty$, а для кормовой — $t_{\text{Н}} = -\infty$, $t_{\text{В}} = 0$.

Находим зависимость для общей энергии, передаваемой при ударе:

$$E_{\text{пад}} = 0,5mN_{\text{пад}} \left[V_{\infty}^2 + RT_{\text{пад}} \left(4 + \frac{1}{\varphi + 1} \right) \right], \quad (12.22)$$

где $N_{\text{пад}}$ определяется выражением (12.9), а функция

$$\varphi = e^{-\bar{c}^2} \left[\pm \bar{c} \sqrt{\pi} \cdot (1 \pm \operatorname{erf} \bar{c}) \right]^{-1}. \quad (12.23)$$

Для отраженных молекул соответственно получаем

$$0,5mn_{\text{отр}}c_{\text{ср}}^2FU dU dV dW;$$

$$E_{\text{отр}} = 0,5mn_{\text{отр}} \left(\pi c_{\text{г отр}}^2 \right)^{-0,5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} c_{\text{ср}}^2 e^{-c_{\text{ср}}^2/c_{\text{г отр}}^2} V dU dV dW;$$

$$E_{\text{отр}} = \rho_{\text{отр}} (RT_{\text{отр}})^{1,5} (2/\pi)^{0,5},$$

где $\rho_{\text{отр}} = mn_{\text{отр}}$. Поскольку $N_{\text{отр}} = N_{\text{пад}}$, зависимость для кинетической энергии, уносимой с лобовой (знак «+») и кормовой (знак «-») поверхностей тела, примет вид

$$E_{\text{отр}} = 2mN_{\text{пад}}RT_{\text{отр}} =$$

$$= \sqrt{2/\pi} \cdot \rho_{\text{пад}}RT_{\text{отр}}\sqrt{RT_{\text{пад}}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} \pm \bar{c} \sqrt{\pi} (1 \pm \operatorname{erf} \bar{c}) \right]. \quad (12.24)$$

Суммарный поток кинетической энергии молекул

$$E = E_{\text{пад}} - E_{\text{отр}}.$$

При больших скоростях ($\bar{c} \geq 2$) для лобовой и кормовой поверхностей можно приближенно считать $\varphi = 0$. Принимая во внимание формулы (12.9), (12.22)–(12.24) и проводя необходимые упрощения, получаем

$$E_{\text{пад лоб}} = 0,5\bar{c}\rho_{\text{пад}}\sqrt{2RT_{\text{пад}}} \cdot (V_{\infty}^2 + 5RT_{\text{пад}}),$$

$$E_{\text{пад корм}} = 0;$$

$$E_{\text{отр лоб}} = 2\sqrt{2} \cdot \rho_{\text{пад}}RT_{\text{отр}}\bar{c}\sqrt{RT_{\text{пад}}},$$

$$E_{\text{отр корм}} = 0.$$

12.3. Процессы аккомодации в свободномолекулярном течении

Согласно гипотезе диффузного отражения, молекулы при ударе успевают полностью «приспособиться» к условиям на стенке и возникающий контакт между ними достаточен, чтобы передать стенке импульс всех молекул.

Реальные процессы взаимодействия отличаются от диффузного отражения и характеризуются более сложными явлениями. Только часть соударяющихся со стенкой молекул передают ей тангенциальную составляющую импульса. Степень их контакта недостаточна для того, чтобы молекулы приобрели среднюю энергию, соответствующую температуре стенки $T_{ст}$.

В основе рассматриваемой концепции отражения лежит идея, что нормальная и тангенциальная составляющие импульса отраженных молекул определяются соответствующими коэффициентами аккомодации:

$$f_n = (P_{пад} - P_{отр}) / (P_{пад} - P_{ст}); \quad (12.25)$$

$$f_\tau = (\tau_{пад} - \tau_{отр}) / \tau_{пад}. \quad (12.26)$$

В соответствии с этим коэффициент аккомодации f_n определяет долю падающих молекул, которые передают стенке нормальную составляющую импульса, а коэффициент f_τ — долю молекул, передающих касательную составляющую импульса. Очевидно, что для полностью зеркального отражения $f_n = f_\tau = 0$ ($p_{пад} = p_{отр}$, $\tau_{пад} = \tau_{отр}$), а для полностью диффузного — $f_n = f_\tau = 1$ ($p_{отр} = p_{ст}$, $\tau_{отр} = 0$).

Давление $p_{ст}$ в (12.25) соответствует нормальной составляющей импульса молекул, которые отражаются с максвелловским распределением скорости, соответствующим термодинамическому равновесию при температуре стенки $T_{ст}$, находящейся в состоянии покоя ($V_\infty = 0$). Согласно выражению (12.15),

$$p_{ст} = 0,5 R \rho_{ст} T_{ст}.$$

Поскольку $\rho_{ст} = m n_{ст}$, а $\rho_{пад} = m n_{пад}$, то

$$p_{ст} = 0,5 R \rho_{пад} T_{ст} n_{ст} / n_{пад}.$$

Для определения отношения $n_{ст} / n_{пад}$ проведем некоторые преобразования. Исходя из того, что $N_{ст} = N_{пад}$, имеем

$$n_{ст} \sqrt{\frac{RT_{ст}}{2\pi}} = N_{пад}.$$

Определив $N_{\text{пад}}$ по формуле (12.9) и вычислив отношение $n_{\text{ст}}/n_{\text{пад}}$, находим выражение для коэффициента давления:

$$\bar{p}_{\text{ст}} = \frac{2p_{\text{ст}}}{\rho_{\text{пад}}V_{\infty}} = \frac{\sin^2 \beta}{2\bar{c}^2} \sqrt{\frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{пад}}}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} \pm \bar{c} \sqrt{\pi} (1 \pm \operatorname{erf} \bar{c}) \right]. \quad (12.27)$$

В общем случае коэффициенты f_n и f_{τ} неодинаковы, так как характеризуют различные процессы передачи импульса при отражении. В приближенных вычислениях можно исходить из гипотезы Максвелла равенства $f_n = f_{\tau} = f$, предполагающей, что процесс отражения характеризуется одним коэффициентом аккомодации f , и указывающей на то, что диффузно отражается f , а зеркально — доля $(1 - f)$ всех молекул. Поэтому из выражения (12.25) получаем

$$p_{\text{отр}} = p_{\text{пад}} (1 - f) + fp_{\text{ст}};$$

$$p = p_{\text{пад}} + p_{\text{отр}} = (2 - f)p_{\text{пад}} + fp_{\text{ст}}. \quad (12.28)$$

Подставляя в уравнение (12.28) давления $p_{\text{пад}}$ из (12.14) и $p_{\text{ст}}$ из (12.27), получаем

$$\begin{aligned} \bar{p} = \frac{2(p_{\text{пад}} + p_{\text{отр}})}{\rho_{\text{пад}}V_{\infty}^2} = \sin^2 \beta & \left\{ (2 - f) \left[\frac{\pm e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c} \sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}^2} \right) (1 \pm \operatorname{erf} \bar{c}) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{f}{2\bar{c}^2} \sqrt{\frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{пад}}}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} \pm \bar{c} \sqrt{\pi} \cdot (1 \pm \operatorname{erf} \bar{c}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Поскольку для отраженных молекул, согласно (12.26),

$$\tau_{\text{отр}} = (1 - f)\tau_{\text{пад}},$$

то суммарное напряжение трения от действия падающих и отраженных молекул будет определяться выражением

$$\tau = \tau_{\text{пад}} - \tau_{\text{отр}} = f\tau_{\text{пад}}. \quad (12.30)$$

С учетом соотношений (12.20) и (12.30) коэффициент трения

$$c_f = \frac{2\tau}{\rho_{\text{пад}}V_{\infty}^2} = f \frac{2\tau_{\text{пад}}}{\rho_{\text{пад}}V_{\infty}^2} = f \sin \beta \cos \beta \left[\frac{\pm e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c} \sqrt{\pi}} + (1 \pm \operatorname{erf} \bar{c}) \right]. \quad (12.31)$$

В случае больших скоростей ($\bar{c} \geq 2$) и сильно охлаждаемой стенки ($T_{\text{ст}} < T_{\text{пад}}$) зависимости (12.29) и (12.31) принимают вид

$$\bar{p}_{\text{лоб}} = 2(2 - f)\sin^2 \beta, \quad \bar{p}_{\text{корм}} = 0;$$

$$c_{f \text{ лоб}} = f \sin^2 \beta, \quad c_{f \text{ корм}} = 0.$$

В приведенных зависимостях коэффициент аккомодации $f \cong 1$, поэтому в расчетах для воздуха можно принимать $f = 0,95 \dots 1$. Однако экспериментально установлено, что для некоторых комбинаций газа и поверхности коэффициент $f \ll 1$. В предельном случае полностью диффузного отражения $f = 1$, а в случае полностью зеркального отражения, что нереально, $f = 0$.

Процесс обмена энергией между падающими молекулами и стенкой, как и рассмотренный выше перенос количества движения, в общем случае не сопровождается полной аккомодацией. Когда контакт падающих молекул вследствие малого времени соприкосновения со стенкой недостаточен, чтобы передать им при отражении среднюю энергию, соответствующую температуре $T_{\text{ст}}$ и равную, согласно (12.24),

$$E_{\text{ст}} = 2mN_{\text{пад}}RT_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \rho_{\text{пад}}RT_{\text{ст}}\sqrt{RT_{\text{пад}}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} \pm \bar{c}\sqrt{\pi}(1 \pm \text{erf } \bar{c}) \right],$$

предполагают, что температура $T_{\text{отр}}$ отличается от температуры стенки $T_{\text{ст}}$. В этом случае при расчете теплопередачи используют термический коэффициент аккомодации

$$\eta = \frac{E_{\text{пад}} - E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}} - E_{\text{ст}}}. \quad (12.32)$$

При полной аккомодации ($\eta = 1$) $E_{\text{отр}} = E_{\text{ст}}$, а при отсутствии аккомодации ($\eta = 0$) $E_{\text{пад}} = E_{\text{отр}}$.

Наблюдения показывают, что характер изменения термического коэффициента аккомодации весьма сложен. Установлено, что с увеличением молекулярного веса и температуры поверхности стенки значение коэффициента η возрастает. Можно предположить, что аккомодация частиц будет зависеть от скорости полета тела, угла подхода молекул к поверхности, свойств материала, состояния поверхности. Ниже представлены результаты экспериментального определения коэффициента η для воздуха при различных материалах поверхности и способах ее обработки:

Ровный лак на бронзе	0,88—0,89
Бронза полированная	0,91—0,94
Бронза машинной обработки	0,89—0,93

Бронза травленая	0,93—0,95
Литая сталь полированная	0,87—0,93
Литая сталь машинной обработки	0,87—0,88
Литая сталь травленая	0,89—0,93
Алюминий полированный	0,87—0,95
Алюминий машинной обработки	0,95—0,97
Алюминий травленный	0,89—0,97

Видно, что термический коэффициент аккомодации воздуха с бронзой, алюминием и сталью при различных способах обработки поверхности близок к единице и колеблется от 0,88 до 0,97. Кроме того, были определены значения η для различных газов при их взаимодействии с поверхностью из платины:

Водород	0,35
Гелий	0,51
Аргон	0,88
Аммиак	0,88
Азот	0,90
Кислород	0,90
Закись азота	0,90
Воздух	0,91
Оксид углерода	0,91
Диоксид углерода	0,92
Сернистый газ	0,95

Согласно этим данным, легкие газы (водород, гелий) слабо аккомодируются стенкой, все остальные — имеют термический коэффициент аккомодации от 0,88 до 0,95.

Сравнение коэффициентов аккомодации показывает, что $f > \eta$. Следовательно, несмотря на то что процесс отражения молекул близок к диффузному, время соприкосновения молекул со стенкой все же недостаточно для выравнивания их температур.

12.4. Аэродинамические характеристики при обтекании тел произвольной формы

Рассмотрим сначала случай вычисления аэродинамических коэффициентов без учета эффекта аккомодации, т. е. при $f = 1$. При соударении с единичной площадкой, расположенной на лобовой поверхности тела (см. рис. 12.4), вследствие нормального давления и трения возникает элементарная продольная сила

$$F_{\text{пад лоб}} = p_{\text{пад лоб}} \sin \beta + \tau_{\text{пад лоб}} \cos \beta$$

или после подстановки соответствующих выражений для $p_{\text{пад лоб}}$ и $\tau_{\text{пад лоб}}$ из (12.17) и (12.20) имеем

$$F_{\text{пад лоб}} = \frac{V_{\infty}^2}{2} \sin \beta \left[\frac{e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c} \sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{\sin^2 \beta}{2\bar{c}^2} \right) (1 + \operatorname{erf} \bar{c}) \right].$$

Интегрируя полученное выражение по лобовой поверхности $S_{\text{лоб}}$, получаем

$$X_{\text{пад лоб}} = \int_{S_{\text{лоб}}} F_{\text{пад лоб}} dS.$$

Отсюда коэффициент продольной силы

$$\begin{aligned} c_{x \text{ пад лоб}} &= \frac{2X_{\text{пад лоб}}}{\rho_{\text{пад}} V_{\infty}^2 S_{\text{мид}}} = \\ &= \int_{\bar{S}_{\text{лоб}}} \sin \beta \left[\frac{e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c} \sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{\sin^2 \beta}{2\bar{c}^2} \right) (1 + \operatorname{erf} \bar{c}) \right] d\bar{S}, \end{aligned} \quad (12.33)$$

где $\bar{S}_{\text{лоб}} = S_{\text{лоб}}/S_{\text{мид}}$; $\bar{c} = (V_{\infty}/c_{\Gamma \text{ пад}}) \sin \beta = \bar{c}_{\infty} \sin \beta$; $\bar{S} = S/S_{\text{мид}}$.

Для кормовой поверхности соответственно

$$F_{\text{пад корм}} = p_{\text{пад корм}} \sin \beta + \tau_{\text{пад корм}} \cos \beta$$

и после подстановки выражений (12.17) и (12.20) для $p_{\text{пад корм}}$ и $\tau_{\text{пад корм}}$, а также проведения аналогичных преобразований получаем

$$\begin{aligned} c_{x \text{ пад корм}} &= \frac{2X_{\text{пад корм}}}{\rho_{\text{пад}} V_{\infty}^2 S_{\text{мид}}} = \\ &= \int_{\bar{S}_{\text{корм}}} \sin \beta \left[\frac{e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c} \sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{\sin^2 \beta}{2\bar{c}^2} \right) (1 - \operatorname{erf} \bar{c}) \right] d\bar{S}, \end{aligned}$$

где $\bar{S}_{\text{корм}} = S_{\text{корм}}/S_{\text{мид}}$ (эту же зависимость можно получить из (12.33) заменой $\bar{c}$ на $-\bar{c}$).

Коэффициент продольной силы обтекаемого тела определяется как разность коэффициентов сил, возникающих от воздействия падающих молекул на лобовую и кормовую поверхности и направленных в противоположные стороны:

$$c_{x \text{ пад}} = c_{x \text{ отр лоб}} - c_{x \text{ пад корм}}.$$

Элементарная сила, создаваемая отраженными от лобовой площадки частицами, с учетом зависимости (12.17) определяется выражением

$$F_{\text{отр лоб}} = p_{\text{отр лоб}} \sin \beta = \\ = \frac{\rho_{\text{пад}} V_{\infty}^2}{2} \frac{\sin^2 \beta}{2\bar{c}^2} \sqrt{\frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} + \bar{c} \sqrt{\pi} (1 + \operatorname{erf} \bar{c}) \right],$$

а ее коэффициент

$$c_{x \text{ отр лоб}} = \frac{1}{2} \int_{\bar{S}_{\text{лоб}}} \frac{\sin^2 \beta}{\bar{c}^2} \sqrt{\frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} + \bar{c} \sqrt{\pi} (1 + \operatorname{erf} \bar{c}) \right] d\bar{S}. \quad (12.34)$$

Аналогично для коэффициента силы, создаваемой отраженными от кормовой площадки молекулами, имеем

$$c_{x \text{ отр корм}} = \frac{1}{2} \int_{\bar{S}_{\text{корм}}} \frac{\sin^2 \beta}{\bar{c}^2} \sqrt{\frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} - \bar{c} \sqrt{\pi} (1 - \operatorname{erf} \bar{c}) \right] d\bar{S}. \quad (12.35)$$

Полный коэффициент от действия отраженных молекул

$$c_{x \text{ отр}} = c_{x \text{ отр лоб}} - c_{x \text{ отр корм}}.$$

По своей физической природе $c_{x \text{ отр}}$ характеризует реактивную силу, возникающую при отражении частиц от поверхности.

Суммарный коэффициент продольной силы для обтекаемого тела

$$c_x = c_{x \text{ пад}} + c_{x \text{ отр}}.$$

Для режимов течения при $\bar{c} \geq 2$ полученные зависимости упрощаются:

$$c_{x \text{ пад лоб}} = 2 \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}_{\infty}^2} \right) \int_{\bar{S}_{\text{лоб}}} \sin \beta d\beta; \quad (12.36)$$

$$c_{x \text{ отр корм}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\bar{c}_{\infty}} \int_{\bar{S}_{\text{корм}}} \sin^2 \beta \sqrt{\frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}} \cdot d\bar{S}; \quad (12.37)$$

$$c_{x \text{ пад корм}} = 0, \quad c_{x \text{ отр корм}} = 0.$$

Для режима одновременного диффузного и зеркального отражений (коэффициент аккомодации импульса $f < 1$) расчет элементарных сил ведут с использованием следующих соотношений:

$$F_{\text{пад лоб}} = F_{\text{пад лоб}}(\bar{c}) = p_{\text{пад лоб}} \sin \beta + f \tau_{\text{пад лоб}} \cos \beta; \quad (12.38)$$

$$F_{\text{пад корм}}(\bar{c}) = F_{\text{пад лоб}}(-\bar{c}); \quad (12.39)$$

$$F_{\text{отр лоб}} = F_{\text{отр лоб}}(\bar{c}) = [p_{\text{пад лоб}}(1-f) + fp_{\text{ст лоб}}] \sin \beta; \quad (12.40)$$

$$F_{\text{отр корм}}(\bar{c}) = F_{\text{отр лоб}}(-\bar{c}). \quad (12.41)$$

Здесь $p_{\text{ст лоб}}$ определяется из зависимости (12.37), в которой выбран знак «+», а соотношения (12.39), (12.41) указывают на то, что $F_{\text{отр корм}}$ и $F_{\text{пад корм}}$ получаются путем замены $\bar{c}$ на $-\bar{c}$ в выражениях для $F_{\text{пад лоб}}$ и $F_{\text{отр лоб}}$.

Рассмотрим использование полученных зависимостей для вычисления аэродинамических коэффициентов конкретных аэродинамических форм. Наиболее простой случай — это обтекание плоской пластинки (рис. 12.5, а).

Если использовать теорию Ньютона, то сила лобового сопротивления, действующая на пластинку площадью $S_{\text{крыл}}$, определяется изменением количества движения до и после соударения:

$$X_a = (\rho_{\infty} V_{\infty} S_{\text{крыл}} \sin \alpha) V_{\infty} - (\rho_{\infty} V_{\infty} S_{\text{крыл}} \sin \alpha) V = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S_{\text{крыл}} \sin \alpha,$$

поскольку $V = 0$, а ее коэффициент

$$c_{xa} = \frac{2X}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2 S_{\text{крыл}}} = 2 \sin \alpha. \quad (12.42)$$

Эти выражения справедливы при очень больших скоростях свободномолекулярного потока. При небольших скоростях следует учитывать эффекты отражения и использовать имеющиеся зависимости для коэффициентов давления и трения.

Пусть отражение происходит с коэффициентом аккомодации $f < 1$. В этом случае на лобовую поверхность пластинки действует сила, определяемая соотношением (12.38):

$$X_{\text{пад лоб}} = F_{\text{пад лоб}} S_{\text{крыл}} = (p_{\text{пад лоб}} \sin \alpha + f \tau_{\text{пад лоб}} \cos \alpha) S_{\text{крыл}},$$

коэффициент которой

$$c_{x\text{пад лоб}} = \frac{2}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} (p_{\text{пад лоб}} \sin \alpha + f \tau_{\text{пад лоб}} \cos \alpha)$$

(отметим, что здесь $\beta = \alpha$).

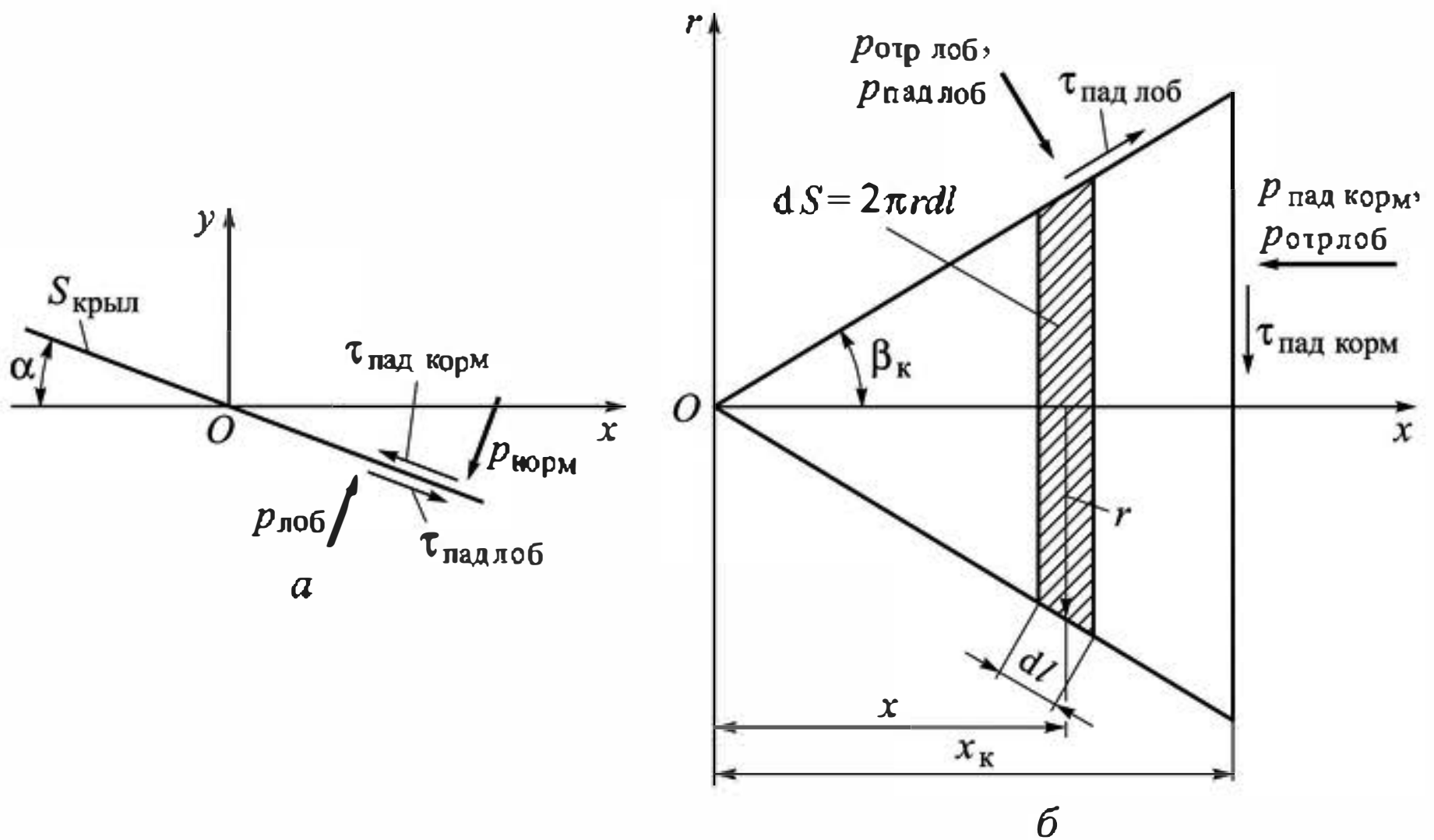


Рис. 12.5. Схема расчета обтекания пластинки (а) и конуса (б) свободно-молекулярным потоком

Используя для $\tau_{\text{пад лоб}}$ и $p_{\text{пад лоб}}$ соответственно выражения (12.37) и (12.42) и учитывая, что $\beta = \alpha$, после преобразований получаем

$$c_{x\text{пад лоб}} = \sin^3 \alpha \left[\frac{e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}^2} \right) (1 + \operatorname{erf} \bar{c}) \right] +$$

$$+ f \sin \alpha \cos^2 \alpha \left(\frac{e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}\sqrt{\pi}} + 1 + \operatorname{erf} \bar{c} \right),$$

где $\bar{c} = \bar{c}_{\infty} \sin \alpha$.

Используя выражение (12.39), аналогично находим для верхней поверхности:

$$c_{x\text{отр корм}} = \sin^3 \alpha \left[\frac{-e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}^2} \right) (1 - \operatorname{erf} \bar{c}) \right] +$$

$$+ f \sin \alpha \cos^2 \alpha \left(\frac{-e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}\sqrt{\pi}} + 1 - \operatorname{erf} \bar{c} \right).$$

Используя зависимости (12.40), (12.41), по аналогии с изложенным выше можно записать выражения для аэродинамических коэффициентов с учетом отражения

$$c_{\text{хотрлоб}} = (1-f)\sin^3 \alpha \left[\frac{-e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}^2}\right)(1 + \operatorname{erf} \bar{c}) \right] +$$

$$+ \frac{f \sin^3 \alpha}{2\bar{c}^2} \sqrt{\frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} + \bar{c}\sqrt{\pi}(1 + \operatorname{erf} \bar{c}) \right];$$

$$c_{\text{хотркорм}} = (1-f)\sin^3 \alpha \left[\frac{-e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}^2}\right)(1 - \operatorname{erf} \bar{c}) \right] +$$

$$+ \frac{f \sin^3 \alpha}{2\bar{c}^2} \sqrt{\frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}} \cdot \left[e^{-\bar{c}^2} - \bar{c}\sqrt{\pi}(1 - \operatorname{erf} \bar{c}) \right].$$

Тогда аэродинамический коэффициент лобового сопротивления падающих молекул

$$c_{\text{хпад}} = c_{\text{хпадлоб}} - c_{\text{хпадкорм}} = 2\sin^3 \alpha \left[\frac{-e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}^2}\right)\operatorname{erf} \bar{c} \right] +$$

$$+ 2f \sin \alpha \cos^2 \alpha \left(\frac{-e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}\sqrt{\pi}} + \operatorname{erf} \bar{c} \right),$$

а отраженных

$$c_{\text{хотр}} = c_{\text{хотрлоб}} - c_{\text{хотркорм}} =$$

$$= 2(1-f)\sin^3 \alpha \left[\frac{-e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}^2}\right)\operatorname{erf} \bar{c} \right] + \frac{f \sin^3 \alpha}{\bar{c}} \sqrt{\pi \frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}}.$$

Таким образом, коэффициент лобового сопротивления при обтекании тонкой пластинки

$$c_{\text{ха}} = c_{\text{хпад}} + c_{\text{хотр}} = 2(2-f)\sin^3 \alpha \left[\frac{-e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}^2}\right)\operatorname{erf} \bar{c} \right] +$$

$$+ f \sin \alpha \left[2\cos^2 \alpha \left(\frac{-e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}\sqrt{\pi}} + \operatorname{erf} \bar{c} \right) + \frac{\sin^2 \alpha}{\bar{c}} \sqrt{\pi \frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}} \right].$$

Для коэффициента подъемной силы окончательное выражение имеет вид

$$C_{ya} = C_{y\text{пад}} + C_{y\text{отр}} =$$

$$= \frac{2}{\rho_{\text{пад}} V_{\infty}^2} \left[G_{\text{падлоб}} - G_{\text{падлоб}}(-\bar{c}) + G_{\text{отрлоб}} - G_{\text{отрлоб}}(-\bar{c}) \right].$$

Здесь

$$G_{\text{падлоб}} = p_{\text{падлоб}} \cos \alpha - f \tau_{\text{падлоб}} \sin \alpha;$$

$$G_{\text{отрлоб}} = \left[p_{\text{падлоб}} (1 - f) - f p_{\text{стлоб}} \right] \cos \alpha.$$

Отметим, что в случае полностью диффузного отражения молекул коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы определяют при $f = 1$, а для зеркального отражения — при $f = 0$.

Рассмотрим теперь обтекание острого конуса с плоским дном под нулевым углом атаки (рис. 12.5, б). Используя соотношения (12.34)–(12.37) и учитывая, что для конуса

$$d\bar{S} = \frac{2\pi r dl}{\pi r_{\text{мид}}^2} = \frac{2\pi r dr}{\pi r_{\text{мид}}^2 \sin \beta_k} = \frac{d\bar{r}^2}{\sin \beta_k};$$

$$\bar{c}_k = \bar{c}_{\infty} \sin \beta_k = M_{\infty} \sqrt{k/2} \sin \beta_k = \text{const},$$

получим для конической поверхности

$$C_{x\text{лоб}} = C_{x\text{падлоб}} + C_{x\text{отрлоб}} = \frac{e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c}_k} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sin \beta_k}{2\bar{c}_{\infty}} \sqrt{\frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}} \right) +$$

$$+ (1 + \text{erf } \bar{c}_k) \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}_{\infty}^2} + \frac{\sin \beta_k}{2\bar{c}_{\infty}} \sqrt{\pi \frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}} \right), \quad (12.43)$$

а для донного среза с учетом его ориентации, приняв $\bar{c}_k = \bar{c}_{\infty}$,

$$C_{x\text{корм}} = C_{x\text{падкорм}} + C_{x\text{отркорм}} = \frac{e^{-\bar{c}_{\infty}^2}}{\bar{c}_{\infty}} \left(\frac{-1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\bar{c}_{\infty}} \sqrt{\frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}} \right) +$$

$$+ (1 - \text{erf } \bar{c}_{\infty}) \left(1 + \frac{1}{2\bar{c}_{\infty}^2} - \frac{1}{2\bar{c}_{\infty}} \sqrt{\pi \frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}}} \right).$$

Учитывая, что сила, действующая на донный срез, направлена навстречу набегающему потоку, аэродинамический коэффициент

$$C_x = C_{x\text{лоб}} - C_{x\text{корм}}, \quad (12.44)$$

а при очень больших скоростях ($\bar{c} \geq 1$)

$$c_x = 2,$$

причем вне зависимости от формы тела.

Примечателен тот факт, что значение $c_x = 2$ соответствует выводам корпускулярной теории Ньютона. Силу нужно рассчитывать как произведение коэффициента c_x , скоростного напора и проекции поверхности на плоскость, нормальную к направлению вектора скорости V_∞ .

При скоростях полета, которым соответствуют небольшие значения $\bar{c}$, значение коэффициента c_x возрастает вследствие влияния отраженных молекул.

Следует учесть, что результаты точных расчетов c_x для числа $M_\infty > 1$ практически не отличаются от его значения, найденного с использованием теории Ньютона. Следовательно, при небольших числах M_∞ аэродинамические силы (коэффициенты) можно рассчитывать по схеме диффузного отражения, а при больших числах M_∞ — с помощью теории Ньютона.

В случае несимметричного обтекания конуса необходимо коэффициенты давления рассчитывать по методу местных конусов.

12.5. Теплопередача в свободномолекулярном потоке

Температуру отраженных молекул $T_{отр}$ можно определить из уравнения баланса энергии между телом ЛА и средой. Запишем его применительно к единичной площадке на произвольном участке поверхности ЛА. К этой площадке подводится энергия поступательного движения молекул $E_{пад}$. Энергия отраженных молекул

$$E_{отр} = (1 - \eta) E_{пад} + \eta E_{ст} = (1 - \eta) E_{пад} + 2\eta m N_{пад} R T_{ст}, \quad (12.45)$$

где коэффициент η определяется выражением (12.32).

При учете теплоты $q_{рад}$ от внешней радиации, например солнечного излучения, подводимая энергия равна сумме $E_{пад} + q_{рад}$.

Считая, что расход энергии наряду с ее переносом отраженными молекулами обусловлен также излучением внешней поверхности вследствие ее дополнительного охлаждения или нагрева изнутри (соответственно «+» или «-» $q_{ох}$), уравнение баланса энергии для единичной площади при стационарной теплопередаче имеет вид

$$E_{\text{пад}} + q_{\text{рад}} = E_{\text{отр}} + \varepsilon \sigma T_{\text{ст}}^4 \pm q_{\text{ох}}$$

или с учетом зависимости (12.45)

$$\eta E_{\text{пад}} + q_{\text{рад}} = \eta E_{\text{ст}} + \varepsilon \sigma T_{\text{ст}}^4 \pm q_{\text{ох}}. \quad (12.46)$$

Здесь ε — степень черноты тела; σ — постоянная Стефана — Больцмана, $\sigma = 5,698 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$.

Выражение (12.46) и входящие в него соотношения для $E_{\text{пад}}$ и $E_{\text{ст}}$ соответствуют движению одноатомного газа. Воздух, в частности, рассматривают как двухатомную модель среды, каждая частица которой обладает кроме энергии поступательного движения также внутренней энергией, обусловленной ее вращением и колебанием в зависимости от свойств газа. В этом случае частицы газа, попадая на единичную поверхность, передают ей за единицу времени внутреннюю энергию

$$E'_{\text{пад}} = \frac{5 - 3k}{k - 1} \frac{mRT_{\text{пад}}}{2} N_{\text{пад}},$$

а отражаясь от нее при температуре $T_{\text{ст}}$, уносят внутреннюю энергию

$$E'_{\text{ст}} = \frac{5 - 3k}{k - 1} \frac{mRT_{\text{ст}}}{2} N_{\text{ст}},$$

где $N_{\text{пад}} = N_{\text{отр}}$.

В этом случае для двухатомного газа уравнение баланса энергии имеет вид

$$\eta E_{\text{пад}\Sigma} + q_{\text{рад}} = \eta E_{\text{ст}\Sigma} + \varepsilon \sigma T_{\text{ст}}^4 \pm q_{\text{ох}}, \quad (12.47)$$

где $E_{\text{пад}\Sigma} = E_{\text{пад}} + E'_{\text{пад}}$; $E_{\text{ст}\Sigma} = E_{\text{ст}} + E'_{\text{ст}}$.

Расчеты температуры $T_{\text{ст}}$ для пластинки с помощью уравнения (12.47) показали, что влияние на нее солнечной радиации значительнее при малых углах α и возрастает с увеличением высоты. Начиная с 240...250 км, солнечная радиация является основным фактором, определяющим температуру стенки. Для снижения температуры $T_{\text{ст}}$ можно использовать поверхности с малым коэффициентом аккомодации η . В этом случае желательно, чтобы угол наклона стенки был минимальным, что достигается при полетах на малых углах атаки.

Зная температуру $T_{\text{ст}}$, можно вычислить температуру отраженных молекул $T_{\text{отр}}$. Согласно уравнению (12.45), энергия отраженных двухатомных молекул

$$E_{\text{отр}\Sigma} = (1 - \eta) E_{\text{пад}\Sigma} + \eta E_{\text{ст}\Sigma}. \quad (12.48)$$

Здесь

$$\begin{aligned} E_{\text{отр}\Sigma} &= E_{\text{отр}} + E'_{\text{отр}} = \\ &= 2mN_{\text{пад}}RT_{\text{пад}} + \frac{5-3k}{k-1} \frac{mRT_{\text{отр}}}{2} N_{\text{пад}} = 2mN_{\text{пад}}RT_{\text{отр}}k_1; \end{aligned} \quad (12.49)$$

$$E_{\text{пад}\Sigma} = E_{\text{пад}} + E'_{\text{пад}} = E_{\text{пад}}k_2; \quad (12.50)$$

$$E_{\text{ст}\Sigma} = E_{\text{ст}} + E'_{\text{ст}} = 2mN_{\text{пад}}RT_{\text{ст}}k_1, \quad (12.51)$$

где

$$k_1 = 1 + \frac{5-3k}{4(k-1)} = \frac{k+1}{4(k-1)}; \quad (12.52)$$

$$k_2 = 1 + \frac{1}{E_{\text{пад}}} \frac{5-3k}{k-1} \frac{mRT_{\text{пад}}}{2} N_{\text{пад}}. \quad (12.53)$$

Подставив соотношения (12.49)–(12.51) в (12.48), получим уравнение для определения температуры отраженных двухатомных молекул:

$$\frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}} = \frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{пад}}} \left[\frac{(1-\eta)E_{\text{пад}}k_2}{2mN_{\text{пад}}RT_{\text{ст}}k_1} + \eta \right]. \quad (12.54)$$

Температуру $T_{\text{отр}}$ необходимо рассчитывать отдельно для лобовой и кормовой поверхностей, для которых значения $N_{\text{пад}}$ и $E_{\text{пад}}$, а следовательно, и $T_{\text{ст}}$ различны. Если коэффициент аккомодации $\eta = 1$, то $T_{\text{отр}} = T_{\text{ст}}$.

Такой результат будет и в случае так называемой адиабатической стенки, которая характеризуется отсутствием внешнего подвода и отвода теплоты, за исключением энергии падающих молекул. Поскольку в этом случае стенка нагревается только в результате поступательного движения молекул, уравнение (12.47) принимает вид

$$E_{\text{пад}\Sigma} = E_{\text{ст}\Sigma}$$

или с учетом (12.50) и (12.51)

$$E_{\text{пад}}k_2 = 2mN_{\text{пад}}RT_{\text{ст}}k_1 = E_{\text{ст}}k_1. \quad (12.55)$$

Из (12.55) после подстановки выражения (12.25) получаем

$$\frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{пад}}} = \frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}} = \frac{k_2}{4RT_{\text{пад}}k_1} \left[V_{\infty}^2 + RT_{\text{пад}} \left(4 + \frac{1}{\varphi+1} \right) \right],$$

откуда находим

$$\frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{пад}}} = \frac{T_{\text{отр}}}{T_{\text{пад}}} = \left[1 + \frac{kM_{\infty}}{4} + \frac{1}{4(\varphi+1)} \right] \frac{k_2}{k_1}.$$

Из этой зависимости следует, что температура адиабатической стенки является своеобразным аналогом температуры торможения при сплошном течении. Если по условиям полета поддерживается некоторая постоянная температура стенки, то расчеты в этом случае сводятся к нахождению температуры отраженных частиц.

Удельный тепловой поток к стенке определяется как разность энергий падающих и отраженных молекул:

$$q = E_{\text{пад}\Sigma} - E_{\text{отр}\Sigma}.$$

Согласно выражению (12.48),

$$q = \eta (E_{\text{пад}\Sigma} - E_{\text{ст}\Sigma})$$

или с учетом (12.50) и (12.51)

$$q = \eta (E_{\text{пад}} k_2 - 2mN_{\text{пад}} RT_{\text{ст}} k_1).$$

Используя полученное ранее выражение (12.22) для $E_{\text{пад}}$, имеем

$$q = \frac{\eta m N_{\text{пад}}}{2} \left\{ k_2 \left[V_{\infty}^2 + RT_{\text{пад}} \left(4 + \frac{1}{\varphi+1} \right) \right] - 4RT_{\text{ст}} k_1 \right\}. \quad (12.56)$$

После подстановки выражений (12.9), (12.23), (12.52), (12.53) для $N_{\text{пад}}$, φ , k_1 , k_2 и массы молекулы $m = \rho_{\text{пад}}/n_{\text{пад}}$ для лобовой поверхности получаем

$$q = \eta \rho_{\text{пад}} \sqrt{\frac{(RT_{\text{пад}})^3}{2\pi}} \cdot \left\{ \left[e^{-\bar{c}^2} + \bar{c} \sqrt{\pi} \cdot (1 + \operatorname{erf} \bar{c}) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\bar{c}_{\infty}^2 - \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{пад}}} + \frac{k+1}{2(k-1)} \right] + \frac{1}{2} \bar{c} \sqrt{\pi} \cdot (1 + \operatorname{erf} \bar{c}) \right\}. \quad (12.57)$$

Для кормовой поверхности в полученном выражении (12.57) нужно $\bar{c}$ заменить на $-\bar{c}$.

Полагая, что тепловой поток $q = 0$, из соотношения (12.56) определяем равновесную температуру стенки

$$T_e = T_{\text{ст}} = \frac{k_2}{4Rk_1} \left[V_{\infty}^2 + RT_{\text{пад}} \left(4 + \frac{1}{\varphi+1} \right) \right]. \quad (12.58)$$

Очевидно, что при больших скоростях ($V_\infty^2 \gg a_{\text{пад}}^2$) параметр $k_2 \cong 1$. Подставив выражение (12.52) для k_1 и пренебрегая вторым слагаемым в квадратных скобках зависимости (12.58), получаем

$$T_e = \frac{k-1}{k+1} \frac{V_\infty^2}{R},$$

или

$$T_e = \frac{2T_{\text{пад}}(k-1)}{k+1} \bar{c}_\infty^2.$$

Для расчета теплопередачи необходимо знать число Стантона, являющееся безразмерным параметром теплопередачи:

$$\text{St} = \frac{2k}{k+1} \frac{q}{\eta \rho_{\text{пад}} V_\infty c_{p \text{ пад}} (T_e - T_{\text{ст}})}, \quad (12.59)$$

которое в таком виде называется *локальным модифицированным числом Стантона*. При больших скоростях ($\bar{c}_\infty \gg 1$, $\bar{c} \gg 1$) для лобовой поверхности тепловой поток, согласно (12.57), можно записать в приближенной форме:

$$q = \frac{1}{2} \eta R \rho_{\text{пад}} T_{\text{пад}} \sqrt{RT_{\text{пад}}} \cdot \left(\frac{e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c} \sqrt{\pi}} + 1 + \text{erf } \bar{c} \right) \bar{c} \bar{c}_\infty^2.$$

С учетом выражения (12.57), соотношений $RT_{\text{пад}} = p_{\text{пад}}/\rho_{\text{пад}} = a_{\text{пад}}^2/k$, $\bar{c} = \bar{c}_\infty \sin \beta$ (где $\bar{c}_\infty = V_\infty/a_{\text{пад}} \sqrt{k/2}$) и при условии, что $T_{\text{ст}} \ll T_e$, выражение (12.59) принимает вид

$$\text{St} = \frac{\sin \beta}{2} \left(\frac{e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c} \sqrt{\pi}} + 1 + \text{erf } \bar{c} \right). \quad (12.60)$$

Коэффициент трения на лобовой поверхности определяется зависимостью

$$c_{f \text{ пад}} = f \sin \beta \cos \beta \left(\frac{e^{-\bar{c}^2}}{\bar{c} \sqrt{\pi}} + 1 + \text{erf } \bar{c} \right). \quad (12.61)$$

Из выражений (12.60) и (12.61) находим связь между числом Стантона и местным коэффициентом трения:

$$\text{St} = \frac{c_{f \text{ пад}}}{2f \cos \beta}. \quad (12.62)$$

Интегрируя выражение (12.61) по обтекаемой поверхности, можно определить суммарный коэффициент трения, затем по формуле (12.62) вычислить значение числа Стантона и, наконец, из соотношения (12.59) найти полный тепловой поток к стенке.

Для практической деятельности необходимо определение теплового потока в точке полного торможения. Экспериментальные исследования показали, что тепловой поток в точке торможения за тупленного тела можно вычислить по формуле

$$q_0 = 3,08 \cdot 10^{-11} \eta \left(\frac{\rho_{\infty H}}{\rho_{\infty 3}} \right) \left(\frac{V_{\infty}}{V_1} \right)^3,$$

где $\rho_{\infty H}$, $\rho_{\infty 3}$ — плотность воздуха соответственно на высоте H и вблизи Земли; V_1 — первая космическая скорость. Зная тепловой поток, можно вычислить равновесную температуру в этой точке:

$$T_{\text{ст}} = (q_0 + q_{\text{рад}} \pm q_{\text{ох}})^{1/4} (\epsilon \sigma)^{1/4}.$$

При очень больших скоростях тепловой поток на лобовой поверхности определяют по формуле

$$q = 0,4997 \eta \rho_{\text{пад}} V_{\infty}^3 \left(1 + \frac{5}{k M_{\infty}^2} \right) \sin \beta.$$

Для критической точки необходимо принять $\beta = \pi/2$.

Режим течения со скольжением занимает промежуточное положение между свободномолекулярным и сплошным течениями. Большинство современных методов расчета трения и теплопередачи для этого режима основано на применении уравнений пограничного слоя, решение которых должно удовлетворять специальным граничным условиям, допускающим разрыв скорости (скольжение).

13. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕСТАЦИОНАРНОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Для решения практических задач, связанных с созданием ЛА, исследованием траектории их движения, переходных процессов и т. п., необходимо знать характеристики аппаратов как в условиях стационарного течения, так и при нестационарном обтекании. В последнем случае изменение кинематических параметров во времени может подчиняться и непериодическому закону. Одной из важнейших задач аэродинамики неустановившегося движения является разработка методов определения нестационарных аэродинамических характеристик.

В главе изложены различные подходы к экспериментальному определению характеристик в условиях нестационарного обтекания тел. Большое внимание уделено физическим закономерностям, структурам течения при неустановившемся движении, влиянию амплитуды и частоты колебаний на аэродинамические характеристики.

13.1. Определение нестационарных аэродинамических характеристик

В условиях неустановившегося движения коэффициенты аэродинамической нормальной силы и момента тангажа можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_y &= c_{y0} + c_y^\alpha \alpha + c_y^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + c_y^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z + c_y^{\dot{\bar{\omega}}_z} \dot{\bar{\omega}}_z; \\ m_z &= m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z + m_z^{\dot{\bar{\omega}}_z} \dot{\bar{\omega}}_z, \end{aligned} \tag{13.1}$$

где c_{y0}, m_{z0} — коэффициенты обтекания ЛА под углом атаки α_0 ; $c_y^\alpha, c_y^{\dot{\alpha}}, c_y^{\bar{\omega}_z}, c_y^{\dot{\bar{\omega}}_z}, m_z^\alpha, m_z^{\dot{\alpha}}, m_z^{\bar{\omega}_z}, m_z^{\dot{\bar{\omega}}_z}$ — производные аэродинамических коэффициентов по параметрам $\alpha, \dot{\alpha}, \bar{\omega}_z, \dot{\bar{\omega}}_z$ соответственно; $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}b/V_\infty$ — безразмерная производная от угла атаки α по времени; $\bar{\omega}_z = \omega_z b/V_\infty$ — безразмерная угловая скорость; $\dot{\bar{\omega}}_z = \dot{\omega}_z b^2/V_\infty^2$ — безразмерная производная от угловой скорости ω_z по времени; b — характерный размер тела.

Такое представление аэродинамических коэффициентов базируется на предположении о возможности использования принципа наложения отдельных частных видов движения, для которых структура обтекания ЛА будет оставаться неизменной — отрывной или безотрывной. В этом случае оказывается возможным в явном виде выделить основные параметры, влияющие на эти коэффициенты.

Когда производные аэродинамических коэффициентов не зависят от числа Sh и слабо зависят от числа Re , можно допустить, что они являются универсальными, а значит, их можно использовать в расчетах при любых законах изменения кинематических параметров во времени. Такое предположение, введенное в практику аэродинамических исследований С.М. Белоцерковским, называется *гипотезой гармоничности*. Согласно этой гипотезе, аэродинамические характеристики можно вычислить с помощью соотношений (13.1), в которых производные определены экспериментально при гармонических законах движения или теоретически, а кинематические параметры определены на основании их временных зависимостей.

В случае малых амплитуд колебаний аэродинамические коэффициенты вычисляют в виде их производных по определяющим параметрам $\alpha, \dot{\alpha}, \omega_z, \dot{\omega}_z$. Причем при нестационарном обтекании в условиях колебательного режима при фиксированном угле атаки структура обтекания соответствует стационарному течению. При использовании так называемого *метода больших амплитуд* модели ЛА придают колебательное движение с различными амплитудами и частотами и определяют действующие на нее при фиксированном угле атаки «полные» аэродинамические силы и момент, которые в общем случае зависят от параметров $\alpha, \dot{\alpha}, \omega_z$. Особо следует подчеркнуть, что аэродинамические характеристики при этом соответствуют мгновенной структуре течения при нестационарном обтекании.

13.2. Нестационарные аэродинамические характеристики корпусов летательных аппаратов

В авиационной и ракетно-космической технике широкое применение находят элементы конструкций, выполненные в виде затупленных тел небольшого удлинения с изломом образующей поверхности и различными поперечными сечениями (круглыми, близкими к квадратному или прямоугольному). Это корпуса или отдельные элементы самолетов, вертолетов, противотанковых ракет, космических объектов и т. п. Обтекание таких тел может сопровождаться отрывом потока (рис. 13.1, а, б), что приводит к возникновению ряда специфических особенностей, вызывающих неоднозначность аэродинамических характеристик. Обусловливается это наличием различных структур течения вблизи поверхности тела и запаздыванием их перестройки. Области гистерезиса аэродинамических характеристик зависят от целого ряда факторов — чисел M_∞ , Re , Sh , углов атаки и скольжения.

На аэродинамику подобных тел оказывает влияние нестационарность обтекания. При неустановившемся движении может произойти трансформация областей неоднозначности аэродинамических характеристик, что необходимо учитывать при проведении расчетов.

Производные коэффициентов нормальной силы и момента тангажа

Как уже отмечалось, колебательное движение тела даже с малой амплитудой вносит существенные изменения в структуру его обтекания, в частности расширяет диапазон значений чисел M_∞ , при которых существует отрывное течение.

Рассмотренные ниже нестационарные аэродинамические характеристики тела с плоскими гранями и сегментальным затуплением, полученные для конкретных значений амплитуды и частоты его колебаний, можно использовать для изучения переходных процессов при любых законах движения ЛА.

Анализ кривых, приведенных на рис. 13.1, в, показывает, что с увеличением числа M_∞ производная $c_y^\alpha(M_\infty)$ в дозвуковом диапазоне скоростей ($M_\infty = 0,6 \dots 0,9$) уменьшается, оставаясь положительной. В интервале $M_\infty = 0,93 \dots 1,1$ она изменяет свой знак и достигает минимального значения $c_y^\alpha = -0,5$ при $M_\infty = 1,0$. Последующее увеличение числа Маха ($M_\infty > 1,0$) приводит к росту c_y^α , и только при $M_\infty > 1,1$ производная $c_y^\alpha > 0$. Это означает, что при колеба-

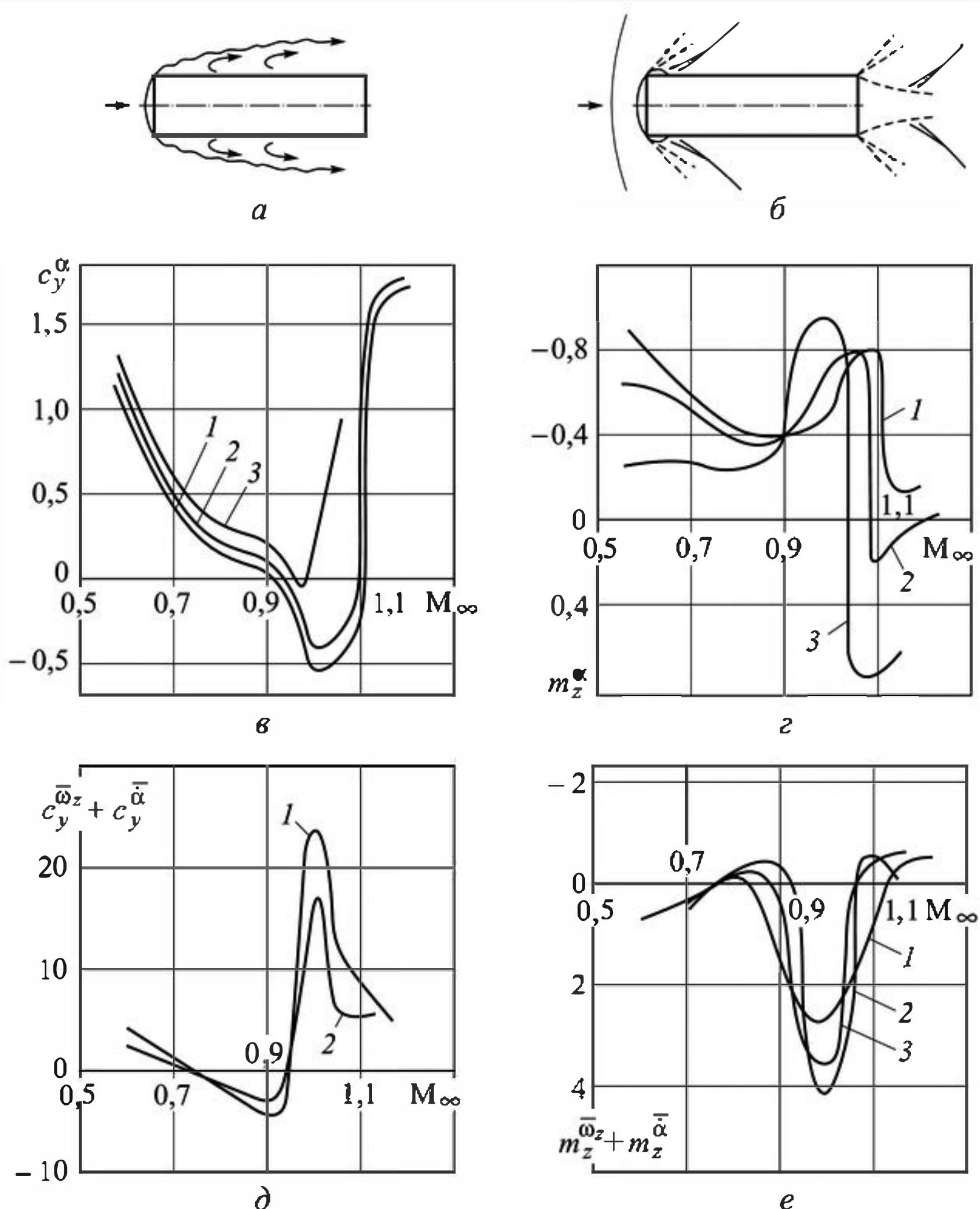


Рис. 13.1. Структуры течения (а, б) и изменение производных аэродинамических коэффициентов (в–е) сегментно-затупленных тел в зависимости от числа M_∞ и расстояния до условного центра масс $\bar{x}_{\text{усл}}$, равного 0,262 (1), 0,428 (2) и 0,76 (3), при нулевом угле атаки

тельном движении тела относительно нулевого угла атаки в диапазоне $M_\infty = 0,9 \dots 1,1$ действующая на него нормальная сила направлена противоположно направлению изменения угла атаки ($c_y^\alpha < 0$).

Экспериментальные исследования при стационарном обтекании показали, что только при отрыве потока на теле может возникнуть отрицательная нормальная сила (при $\alpha > 0$), а значение M_∞ , при

котором происходит изменение знака c_y^α с отрицательного на положительный, соответствует моменту перестройки отрывного течения (см. рис. 13.1, а) на безотрывное (см. рис. 13.1, б). При колебательном движении тела относительно нулевого угла атаки это наблюдается при $M_\infty = 1,15$, в то время как в условиях стационарного обтекания перестройка структуры течения происходит при $M_\infty = 1,05$. Таким образом, наличие угловой скорости тангажа, т. е. колебательного движения тела, приводит к увеличению области существования отрывного течения до больших значений M_∞ .

Важной практической задачей при исследовании обтекания тел в условиях колебательного движения является определение степени влияния на аэродинамические характеристики положения условного центра масс $\bar{x}_{усл} = x_{усл}/b$ (здесь b — характерный размер тела). Установлено, что характер изменения производной $c_y^\alpha(M_\infty)$ при различных положениях оси вращения является общим для всех исследуемых значений $x_{усл}$. При дозвуковых скоростях набегающего потока ($M_\infty < 0,9$) смещение условного центра масс к кормовой части тела приводит к небольшому увеличению производной коэффициента нормальной силы. Наиболее существенно это проявляется в диапазоне $M_\infty = 1,0 \dots 1,15$, когда обтекание носит неустойчивый характер.

С возникновением на теле безотрывного течения производная c_y^α остается неизменной для различных положений условного центра масс и практически совпадает со значением c_y^α , полученным при стационарном обтекании. Область отрицательных значений c_y^α , а следовательно, и нормальной силы при смещении условного центра масс к кормовой части тела уменьшается и почти исчезает при его приближении к донному срезу. Поскольку возникает эта сила только при отрывном режиме обтекания, диапазон значений M_∞ , при котором она существует, также уменьшается. При смещении положения условного центра масс к кормовой части (увеличение $\bar{x}_{усл}$) перестройка структуры течения с отрывной на безотрывную происходит при меньших значениях M_∞ и практически совпадает с соответствующим значением M_∞ в стационарных условиях ($\omega_z = 0$). Это связано с влиянием угловой скорости колебаний. При переднем положении условного центра масс (например, в кормовой части) распределение линейных скоростей таково, что при $\omega_z > 0$ оно способствует расширению отрывной зоны на верхней и уменьшению на нижней поверхностях тела. Вследствие этого происходит затягивание существования отрывного течения до больших значе-

ний M_∞ . При значительном смещении положения условного центра масс к кормовой части ЛА распределение линейных скоростей по поверхности, обусловленных движением тела, практически не влияет на формирование структуры его обтекания в этой области, а обтекание носовой части весьма устойчиво.

Анализ зависимости $m_z^\alpha(M_\infty)$ в исследуемом диапазоне скоростей потока показал, что при $M_\infty < 1$ величина $m_z^\alpha < 0$, а при $M_\infty > 1$ знак производной определяется положением условного центра масс (рис. 13.1, z). Для отрывных режимов течения, соответствующих $M_\infty < 1,15$, значения m_z^α , полученные при вынужденных колебаниях и в условиях стационарного обтекания, существенно отличаются между собой. Это позволяет сделать вывод о том, что колебательное движение тела приводит к заметной трансформации отрывной структуры обтекания при дозвуковых и околозвуковых скоростях невозмущенного потока, а следовательно, и к изменению аэродинамических коэффициентов ЛА по сравнению с их значениями, полученными в условиях стационарного обтекания.

На рис. 13.1, δ видно, что с изменением M_∞ в дозвуковом диапазоне скоростей ($M_\infty < 0,9$) происходит непрерывное уменьшение суммы производных коэффициентов нормальной силы $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$, а при трансзвуковых скоростях — ее возрастание с последующим уменьшением, причем максимальное значение $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ достигается при $M_\infty = 1$. Такое изменение суммы производных в зависимости от числа M_∞ можно объяснить, оценивая в отдельности каждую из них.

При скоростях набегающего потока, соответствующих $0,6 \leq M_\infty \leq 0,9$, отрывная структура обтекания тела (см. рис. 13.1, a) трансформируется незначительно. Известно, что производная $c_y^{\bar{\alpha}}$, обусловленная в основном запаздыванием структуры течения по углу колебаний, остается практически постоянной. В соответствии с этим изменение комбинации производных $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ будет полностью определяться характером изменения $c_y^{\bar{\omega}_z}$.

Величина $c_y^{\bar{\omega}_z}$ представляет собой вращательную производную, зависящую от изменения местных углов атаки при колебательном движении тела в плоскости тангажа. При вращательном движении с угловой скоростью ω_z в различных точках поверхности появляются дополнительные составляющие скорости потока, направленные при обратном движении в сторону, противоположную окружной скорости тела. Для рассматриваемых положений оси вра-

щения при $\omega_z > 0$ эти скорости приводят к появлению отрицательного угла атаки для носовой части тела и положительного — для кормовой. Направление аэродинамической силы для исследуемого тела определяется скоростью невозмущенного набегающего потока. Оно зависит от положения оси вращения и размеров областей действия положительных и отрицательных нормальных сил. Так, при $\bar{x}_{\text{усл}} = 0,262$ ($M_\infty < 0,75$) значение $c_y^{\bar{\omega}_z} > 0$, т. е. нормальные силы в носовой и кормовой частях тела имеют положительное направление.

С увеличением скорости потока происходит уменьшение производной $c_y^{\bar{\omega}_z}$, что связано с распространением области действия отрицательной нормальной силы ($c_y^\alpha < 0$) за ось колебаний.

В диапазоне скоростей, соответствующих $0,9 < M_\infty \leq 1,0$, наблюдается резкое увеличение значения суммы производных $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$, однако при $M_\infty = 1$ производная $c_y^\alpha < 0$ достигает своего минимального значения. Следовательно, резкое повышение $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ в основном определяется значением $c_y^{\bar{\alpha}} > 0$. Последующее возрастание скорости набегающего потока ($M_\infty > 1$) приводит к уменьшению суммы производных (см. рис. 13.1, $\bullet$). Такое скачкообразное изменение нестационарных производных соответствует условиям, при которых возникает неустойчивое отрывное течение. В данном случае это происходит при $M_\infty = 1$.

При числах Маха набегающего потока $M_\infty \geq 1,15$ наблюдается перестройка структуры обтекания на безотрывную. При этом производная $c_y^{\bar{\alpha}}$ будет оставаться положительной. В условиях безотрывного течения на поверхности тела имеет место распределение давления, создающее только положительную нормальную силу ($c_y^\alpha > 0$). Следовательно, знак и значение производной $c_y^{\bar{\omega}_z}$ будут определяться результирующей двух направленных в разные стороны сил в носовой и кормовой частях тела. Изменение суммы производных коэффициента тангажа $m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}$ от числа M_∞ (рис. 13.1, e) аналогично рассмотренному.

При анализе нестационарных аэродинамических характеристик представляет интерес изменение положения динамического фокуса

$$\bar{x}_{F_\omega} = x_{F_\omega} / b = \bar{x}_{\text{усл}} - \frac{m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}}{c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}}$$

при различных скоростях обтекания.

Результаты расчета $\bar{x}_{F_\omega}$ при $\bar{x}_{усл} = 0,262$ ($\alpha = 0$) приведены на рис. 13.2. Точка приложения нестационарной силы $(c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}})\bar{\alpha}$ при малых дозвуковых скоростях (до $M_\infty = 0,6$) располагается в носовой части модели ЛА, т. е. коэффициент момента тангажа определяется в основном производной $c_y^{\bar{\omega}_z}$. При увеличении скорости набегающего потока (до $M_\infty \leq 0,7$) точка приложения этой силы располагается вне тела ($|c_y^{\bar{\alpha}}| > |c_y^{\bar{\omega}_z}|$), а точка приложения составляющей $c_y^{\bar{\alpha}}\bar{\alpha}$ — за осью колебаний. В тех случаях, когда $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}} = 0$, зависимость $\bar{x}_{F_\omega}(M_\infty)$ претерпевает разрыв.

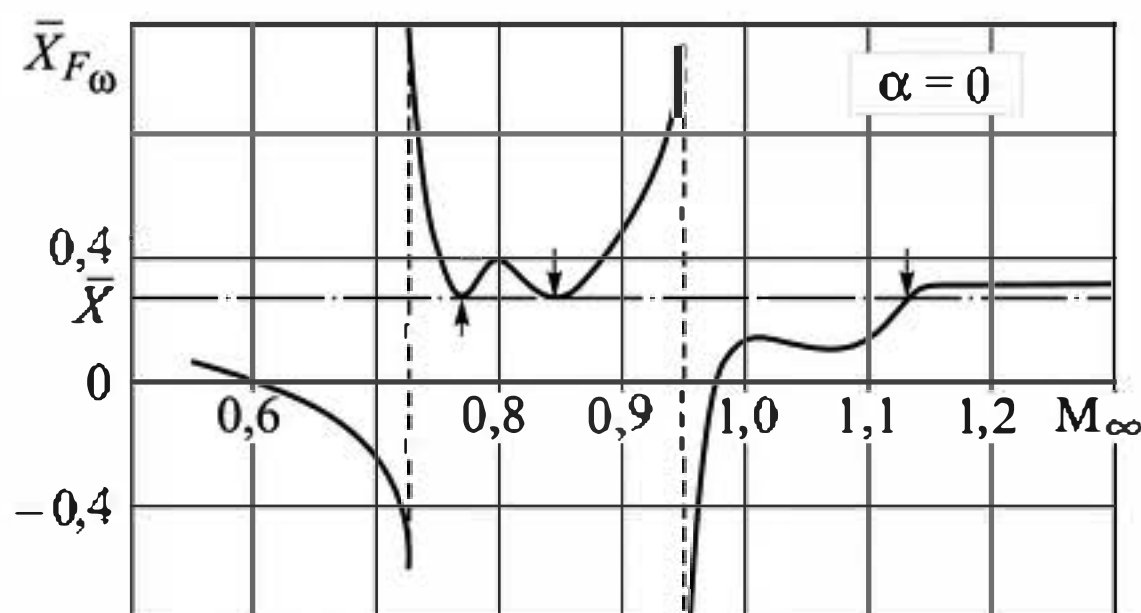


Рис. 13.2. Зависимость координаты динамического фокуса от числа M_∞ при нулевом угле атаки

При околозвуковых скоростях невозмущенного потока ($M_\infty = 0,9 \dots 1,2$) сумма $m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} > 0$. Возникновение антидемпфирования при $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}} < 0$ будет иметь место, если координата динамического фокуса находится за точкой условного центра масс, т. е. $\bar{x}_{F_\omega} > \bar{x}_{усл}$, а при $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}} > 0$ — перед ней ($\bar{x}_{F_\omega} < \bar{x}_{усл}$). Эти выводы подтверждают данные, приведенные на рис. 13.2.

При скорости потока, соответствующей моменту перестройки структуры течения, координата $\bar{x}_{F_\omega}$ асимптотически стремится к бесконечности. Если структура течения остается отрывной, то динамический фокус располагается за точкой условного центра масс ниже по потоку, при безотрывном обтекании — перед ней. При сверхзвуковом обтекании ($M_\infty > 1,15$) сумма $m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} < 0$. Тогда точка приложения аэродинамической положительной нестационарной силы $(c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}})\bar{\alpha}$ располагается за осью колебаний. В тех слу-

чаях, когда $\bar{x}_{F_\omega} = \bar{x}_{усл}$, продольный момент демпфирования близок к нулю.

Таким образом, проведенный анализ положения динамического фокуса в зависимости от числа Маха свидетельствует о весьма сложной структуре обтекания тела в условиях колебательного движения при до- и околосвуковых скоростях.

Для оценки влияния начального (установочного) угла атаки модели ЛА на аэродинамические производные $c_y^{\bar{\alpha}}$, $m_z^{\bar{\alpha}}$, $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$, $m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}$ рассмотрим приведенные на рис. 13.3, а результаты экспериментальных исследований при $\bar{x}_{усл} = 0,262$ и углах α , равных 5 и 10°. Если $\alpha_{уст} = 5^\circ$, то общий характер зависимости $c_y^\alpha(M_\infty)$ остается практически таким же, как и при нулевом угле атаки. Менее интенсивное уменьшение производной c_y^α с увеличением скорости набегающего потока в данном случае связано с незначительной трансформацией отрывного течения на подветренной стороне

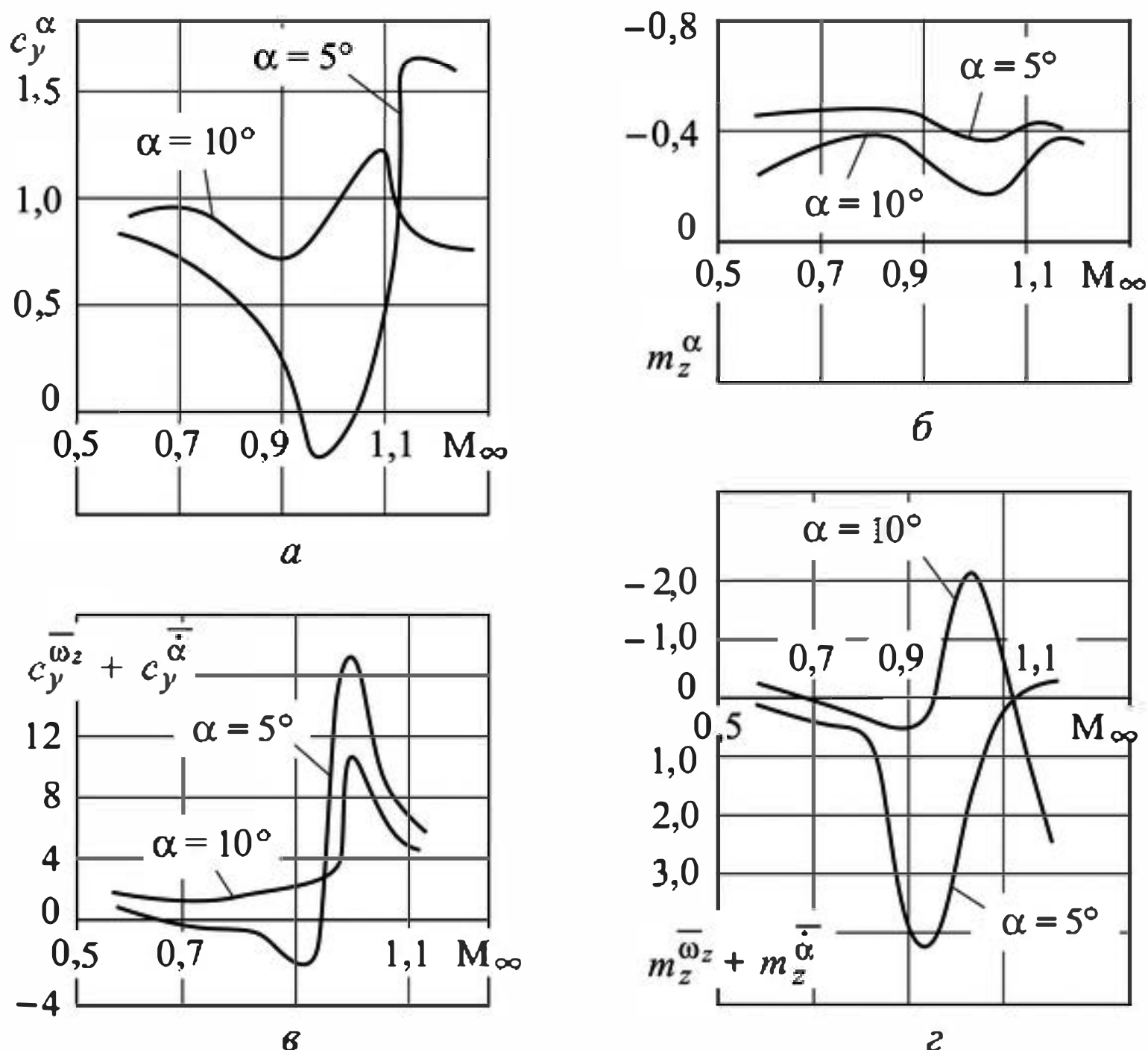


Рис. 13.3. Зависимости производных аэродинамических коэффициентов от числа Маха при $\alpha_{уст} = 5$ и 10°

модели. Производная коэффициента момента m_z^α (рис. 13.3, б) в отличие от случая $\alpha_{уст} = 0$ (см. рис. 13.2) изменяется незначительно во всем диапазоне исследуемых чисел Маха.

Характер комбинации производных $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ зависит от распределения нормальных сил по поверхности модели ЛА. Производная $c_y^{\bar{\alpha}}$ оказывает первостепенное влияние на то, что в некотором околозвуковом диапазоне уменьшается отрицательное значение $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ по модулю по сравнению с описанным выше случаем нулевого угла атаки (рис. 13.3, в).

Увеличение установочного угла атаки до $\alpha = 10^\circ$ ведет к существенному изменению структуры обтекания, а следовательно, и характера изменения сумм производных $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ во всем исследуемом диапазоне чисел Маха. В носовой части тела при таком угле установки в условиях отрывного обтекания не возникает отрицательной нормальной силы ($c_y^\alpha > 0$), а значит, изменение $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ будет обусловлено перераспределением области положительной нормальной силы относительно оси вращения. Поскольку структура течения остается весьма устойчивой вплоть до $M_\infty \leq 1,0$, то знак и значение комбинации производных $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ определяются составляющей $c_y^{\bar{\omega}_z}$. Резкое увеличение значения $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ при $M_\infty \approx 1$ связано с изменением $c_y^{\bar{\alpha}}$.

Наибольшее возрастание суммы производных $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ объясняется появлением в кормовой части тела системы косых скачков уплотнения, замкнутых на отрывную зону (см. рис. 13.3, в).

Перераспределение сил на поверхности тела при его колебательном движении приводит к существенному изменению и демпфирующих свойств (рис. 13.3, г). При скорости потока, соответствующей моменту перестройки структуры течения, координата $\bar{x}_{F_\omega}$ асимптотически стремится к бесконечности. Если структура течения остается отрывной, то динамический фокус располагается за точкой условного центра масс ниже по потоку, при безотрывном обтекании $\bar{x}_{F_\omega} < \bar{x}_{усл}$. При сверхзвуковом обтекании ($M_\infty > 1,15$)

сумма $m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} < 0$, а $(c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}})\bar{\alpha} > 0$, т. е. точка приложения аэродинамической нестационарной силы располагается за осью колебаний. В тех случаях, когда $\bar{x}_{F_\omega} = \bar{x}_{усл}$, продольный момент демпфирования близок к нулю.

Следует отметить особенность в пересчете вращательных производных для разных положений условного центра масс (оси вращения). Согласно линейной теории, производная $c_y^{\bar{\alpha}}$ не зависит от положения оси вращения и должна быть постоянной для заданных условий обтекания. Следовательно, сумма производных $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ будет определяться величиной $c_y^{\bar{\omega}_z}$ и может быть представлена в следующем виде:

$$\left(c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}\right)_{\bar{x}_{\text{усл}}} = \left(c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}\right)_{\bar{x}_{\text{усл и}}} + \Delta\bar{x}_{\text{усл}} c_y^{\alpha},$$

где $\left(c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}\right)_{\bar{x}_{\text{усл и}}}$, $\left(c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}\right)_{\bar{x}_{\text{усл}}}$ — комбинации производных для исходного положения оси вращения $\bar{x}_{\text{усл и}}$ и выбранного $\bar{x}_{\text{усл}}$ соответственно; $\Delta\bar{x}_{\text{усл}} = \bar{x}_{\text{усл и}} - \bar{x}_{\text{усл}}$.

Однако экспериментальные значения суммы $c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}}$ при различных положениях условного центра масс $\bar{x}_{\text{усл}}$ не согласуются с рассчитанными по указанному выше соотношению. Объясняется это трансформацией структуры течения при изменении $\bar{x}_{\text{усл}}$ для рассматриваемого диапазона скоростей. Аналогичный вывод можно сделать и для суммы $m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}$ при различных положениях оси вращения.

Таким образом, представление аэродинамических характеристик тел с изломом образующей в рамках гипотезы гармоничности возможно только при заданном фиксированном положении условного центра масс для некоторого конечного диапазона изменения определяющих параметров — угла атаки, числа Маха, амплитуды и частоты колебаний, которые оказывают первостепенное влияние на структуру обтекания таких тел.

Коэффициенты полной нормальной силы и полного момента тангажа

Рассмотрим определение полных сил и момента тангажа с учетом особенностей перестройки отрывной структуры течения (рис. 13.4, а, б) при неустановившемся движении с большими амплитудами. Здесь и далее на аналогичных рисунках данные, полученные при увеличении угла атаки в процессе колебательного движения (прямой ход), обозначены светлыми точками, при уменьшении угла атаки (обратный ход) — темными точками, а в стационарных условиях — штриховыми линиями.

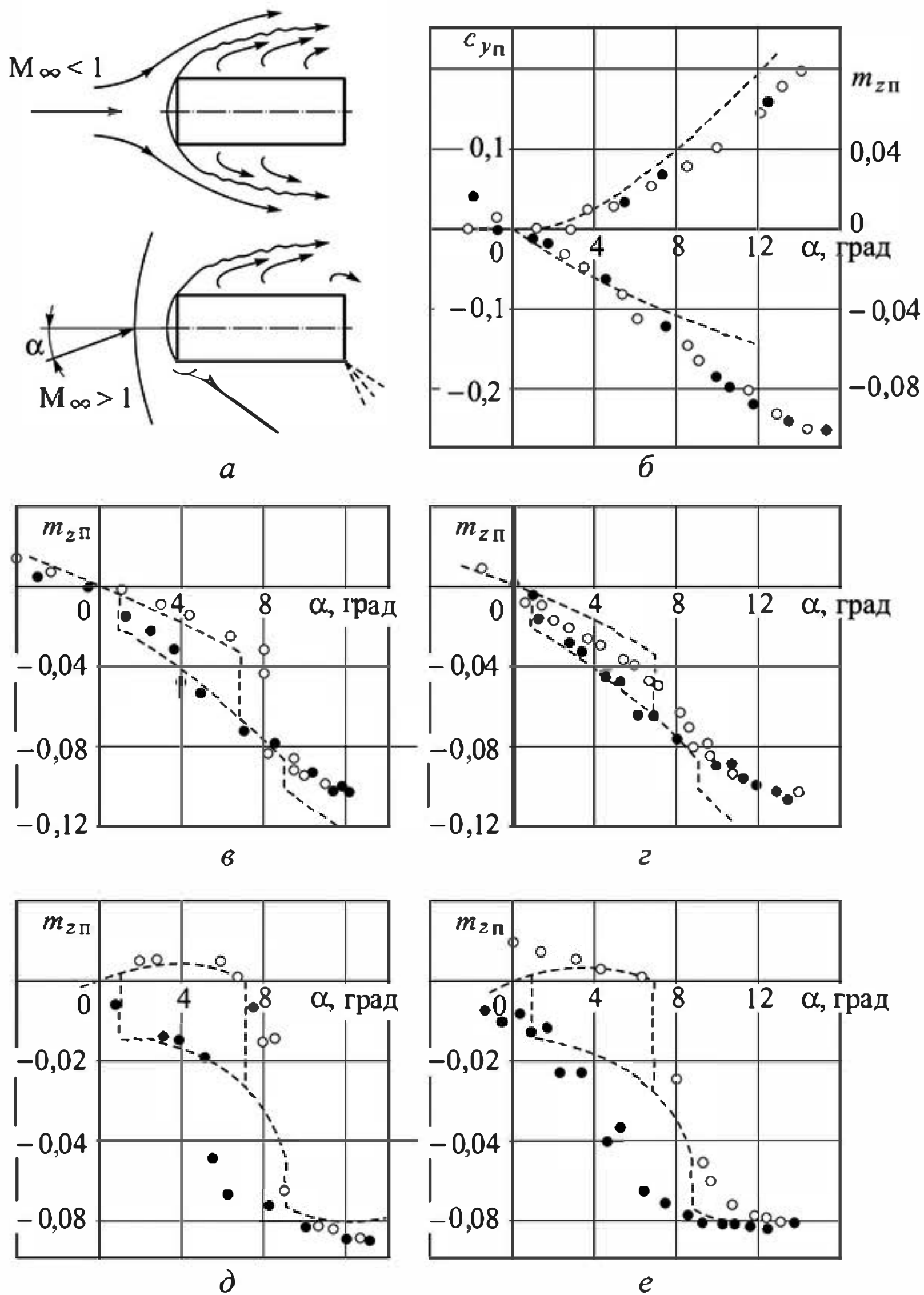


Рис. 13.4. Структуры обтекания и зависимости аэродинамических коэффициентов $c_{yп}$ и $m_{zп}$ от угла атаки тел с изломом образующей в трансзвуковом диапазоне скоростей:

a – структуры обтекания; $б$ – $M_\infty = 0,8$, $\bar{x}_{усл} = 0,262$, $f = 0,2 \dots 2,5$ Гц; $в, г$ – $M_\infty = 1,12$, $\bar{x}_{усл} = 0,262$, $f = 0,2$ и $1,0$ Гц соответственно; $д, е$ – $M_\infty = 1,12$, $\bar{x}_{усл} = 0,428$, $f = 0,2$ и $1,0$ Гц соответственно. Здесь и далее на аналогичных рисунках $\circ$ – прямой ход, $\bullet$ – обратный ход, ---- – стационарные условия

Анализ кривых, приведенных на рис. 13.4, б, показывает, что колебательное движение приводит к изменению характеристик, соответствующих стационарному обтеканию (штриховые линии). В диапазоне углов атаки $0 \leq \alpha \leq 3^\circ$ коэффициент $c_{yп} \approx 0$. При нестационарном обтекании в носовой части тела нормальная сила отрицательна в несколько большем диапазоне углов атаки, чем при стационарных условиях, вследствие чего расширяется область α , где $c_{yп} \approx 0$. Увеличение угла атаки ($\alpha > 3^\circ$) приводит к возрастанию $c_{yп}(\alpha, \omega_z, \dot{\omega}_z)$, причем изменение частоты колебаний в исследованном диапазоне $f = 0,2 \dots 2,5$ Гц не оказывает существенного влияния на характер зависимости $c_{yп}(\alpha)$. Это связано с тем, что при таких частотах колебаний для рассматриваемого режима обтекания приращение нестационарной составляющей $(c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}})\bar{\alpha}$ мало. Этим же можно объяснить совпадение значений $c_{yп}$ при увеличении и уменьшении угла атаки в процессе колебательного движения. При нестационарном обтекании значение $c_{yп}(\alpha)$ несколько меньше, чем $c_y(\alpha)$ в стационарных условиях. Однако характер изменения $c_{yп}(\alpha)$ такой же, как $c_y(\alpha)$. Некоторое уменьшение несущих свойств тела при нестационарном обтекании связано с менее интенсивным ростом положительной нормальной силы в кормовой части тела с изменением α .

В диапазоне $0 \leq \alpha \leq 3^\circ$ значения коэффициента момента тангажа $m_{zп}$ (см. рис. 13.4, б) близки к соответствующим значениям m_z при стационарном обтекании. Различие в значениях этого коэффициента при $\alpha > 3^\circ$ объясняется трансформацией дозвуковой отрывной структуры течения при неустановившемся движении тела по сравнению со стационарным обтеканием.

Из полученных результатов также следует, что влияние положения условного центра масс $x_{усл}$ на аэродинамические характеристики в условиях стационарного и нестационарного обтекания различно. Поэтому для неустановившегося движения нельзя пересчитывать моментные характеристики при разных положениях $x_{усл}$.

В окрестности $\alpha = 0$ при трансзвуковых скоростях ($M_\infty > 1$) в стационарных условиях наблюдается безотрывное сверхзвуковое обтекание, которое характеризуется наличием местного λ -образного скачка уплотнения и замкнутой циркуляционной зоны в его носовой части. При некотором угле атаки $\alpha = \alpha_1$ (прямой ход) происходит разрушение λ -образного скачка с подветренной стороны, соединение циркуляционной зоны с развивающейся к этому моменту

срывной областью на поверхности тела и перестройка структуры обтекания с безотрывной на отрывную. Обратная перестройка структуры при уменьшении угла атаки (обратный ход) наблюдается при меньшем значении угла атаки ($\alpha = \alpha_2$) по сравнению с прямым ходом. Установлено, что указанная схема изменения структуры обтекания сохраняется и при колебательном движении с амплитудой $\theta_\alpha > \alpha_1$.

Для случая сверхзвуковых скоростей ($M_\infty = 1,12$) при частоте колебаний тела $f = 0,2$ Гц в диапазоне углов атаки $0 \leq \alpha \leq 8^\circ$ имеет место безотрывное обтекание. Увеличение α в пределах амплитуды колебания $\theta_\alpha = \pm 16^\circ$ приводит к перестройке течения на отрывное. С уменьшением угла атаки (обратный ход) переход к безотрывному обтеканию происходит при меньших α , вследствие чего возникает зона неоднозначности аэродинамических характеристик (рис. 13.4, в, г).

Изменение частоты колебаний в пределах $f = 0,2 \dots 0,5$ Гц существенно не влияет на характер зависимости $m_{zп}(\alpha)$. Увеличение частоты колебаний до $f = 1$ Гц вызывает значительное изменение аэродинамических характеристик и трансформацию области неоднозначности коэффициента момента тангажа в зависимости от угла атаки. При таких частотах колебаний и углах атаки $\alpha \leq 8^\circ$ значение коэффициента $m_{zп}$ возрастает по модулю, а безотрывное обтекание в том виде, в котором оно наблюдалось при меньших частотах, не возникает. В окрестности нулевого угла атаки значение коэффициента $m_{zп}$ меньше соответствующего значения при стационарном обтекании тела с безотрывной структурой. Такое различие объясняется образованием отрыва потока на поверхности тела. Однако для отрывной структуры течения $m_{zп} > m_z$. В диапазоне $3^\circ \leq \alpha \leq 9^\circ$ $m_{zп} = m_z$ при $M_\infty = 1,12$.

В условиях колебательного движения тела с частотой $f > 1$ Гц возникает срывное течение, сохраняемое при всех углах атаки, в то время как в стационарных условиях существует два типа обтекания: безотрывное и отрывное. При стационарном обтекании неоднозначность аэродинамических характеристик (наличие областей гистерезиса) объясняется запаздыванием перестройки течения при увеличении и уменьшении того или иного определяющего параметра (числа M_∞ , углов α или β и т. д.). В условиях колебательного движения тела неоднозначность его аэродинамических характеристик может наблюдаться и при однотипной, например отрывной, структуре обтекания, что объясняется различными изменениями

геометрии срывных зон и параметрами потока в них. С увеличением частоты колебаний ($f > 1$ Гц) характер зависимости $m_{zп}(\alpha)$ в пределах амплитуд колебаний $\theta_\alpha = \pm 16^\circ$ не изменяется, но область неоднозначности аэродинамических коэффициентов по углам атаки несколько расширяется. Так, изменение положения условного центра масс тела (смещение его к кормовой части) при безотрывном обтекании и частотах колебаний $f \leq 0,5$ Гц не приводит к изменению значения коэффициента момента тангажа по сравнению со случаем стационарного обтекания (рис. 13.4, д). Перестройка течения на отрывное происходит в окрестности угла атаки $\alpha \approx 9^\circ$. При значениях $\alpha > 9^\circ$ течение на наветренной и подветренной сторонах отрывное.

Уменьшение угла атаки от максимального значения, соответствующего $\theta_\alpha = \pm 16^\circ$, сопровождается тем, что значения коэффициента $m_{zп}$ существенно отличаются от соответствующих значений m_z , полученных в стационарных условиях. Для диапазона частот $f < 0,5$ Гц в окрестности $\alpha \approx 5,5^\circ$ при обратном ходе происходит скачкообразное уменьшение коэффициента $m_{zп}$, причем такой характер зависимости $m_{zп}(\alpha)$ сохраняется для частот колебаний $f \leq 2,5$ Гц. Таким образом, возникновение безотрывной структуры обтекания на нижней и верхней поверхностях тела происходит при углах атаки $\alpha \approx \pm 5,5^\circ$ и $\alpha \approx 0$ соответственно.

Отметим, что увеличение частоты колебаний до $f = 1,0$ Гц приводит к появлению особенностей в изменении коэффициента момента тангажа в окрестности $\alpha = 0$ (рис. 13.4, е). Как при переходе от положительного угла атаки к отрицательному ($\dot{\alpha} < 0$), так и в обратном случае ($\dot{\alpha} > 0$), значение $m_{zп} \neq 0$, причем с увеличением частоты колебаний оно возрастает. Объяснить это только наличием момента, обусловленного максимальной угловой скоростью, не представляется возможным, поскольку составляющая $(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\dot{\alpha}}})\bar{\dot{\alpha}}_{\max}$ на порядок меньше, чем $m_{zп}$. Следовательно, полученный выше результат может быть обусловлен лишь несимметричной структурой течения вследствие запаздывания перестройки с одного типа обтекания на другой. Например, при уменьшении положительного угла атаки ($\dot{\alpha} < 0$) начало перестройки с отрывного на безотрывное течение затягивается на верхней поверхности тела до отрицательных углов атаки.

Таким образом, при неустановившемся движении устраняется четко выраженный момент восстановления безотрывного обтека-

ния на верхней поверхности, характерный для стационарных условий течения, в результате чего возникает отмеченная особенность в изменении $m_{zп}(\alpha)$ при $\alpha \approx 0$.

Дополнительным доказательством существования несимметричной структуры обтекания симметричного тела служат результаты исследований неустановившегося движения, когда в окрестности $\alpha = 0$ создавалось искусственное торможение, вследствие чего скорость изменения угла атаки $\dot{\alpha}$ меняла знак, цикл перестройки заметно сокращался и $m_{zп} \approx 0$.

Проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод: при неустановившемся движении происходит существенная трансформация области неоднозначности и аэродинамических характеристик по сравнению со стационарным обтеканием, что обусловлено смещением моментов перестройки течения по углам атаки.

Рассмотрим теперь зависимости $c_{yп}(\alpha)$ и $m_{zп}(\alpha)$ при сверхзвуковых скоростях (рис. 13.5), для которых характерна безотрывная устойчивая структура обтекания при $\alpha = 0$. Изменение амплитуды колебаний позволило оценить влияние колебательного движения тела на перестройку структуры течения и его аэродинамические характеристики.

При колебательном движении с $\theta_{\alpha} = \pm 8^{\circ}$ ($\bar{x}_{усл} = 0,262$, $f = 1,0$ Гц), когда $\theta_{\alpha} < \alpha_1$, структура обтекания остается безотрывной. При этом значения коэффициентов $m_{zп}$ и m_z при неустановившемся движении и в стационарных условиях хорошо согласуются между собой. Изменение частоты колебаний в диапазоне $f = 0,2 \dots 2,5$ Гц не сказывается на характере зависимости $m_{zп}(\alpha)$.

Как показывает анализ кривых, приведенных на рис. 13.5, а, в случае неустановившегося движения с амплитудой $\theta_{\alpha} = \pm 10^{\circ}$ ($\theta_{\alpha} > \alpha_1$, $\bar{x}_{усл} = 0,262$, $f = 0,2$ Гц) при изменении текущего угла атаки $\alpha < \alpha_1$, т. е. при существовании на теле безотрывной структуры течения, значения коэффициентов продольного момента и нормальной силы, полученные при колебаниях тела и в стационарных условиях, практически совпадают. Колебательный процесс обуславливает запаздывание перестройки структуры течения, вследствие чего изменение коэффициента $m_{zп}$, соответствующего возникновению отрывного течения, происходит при больших углах атаки, чем в стационарных условиях. Кроме того, изменяются параметры и размеры зон отрыва потока на верхней и нижней поверхностях тела. Это подтверждают зависимости $c_{yп}(\alpha)$, которые для рассматриваемых условий обтекания существенно различаются.

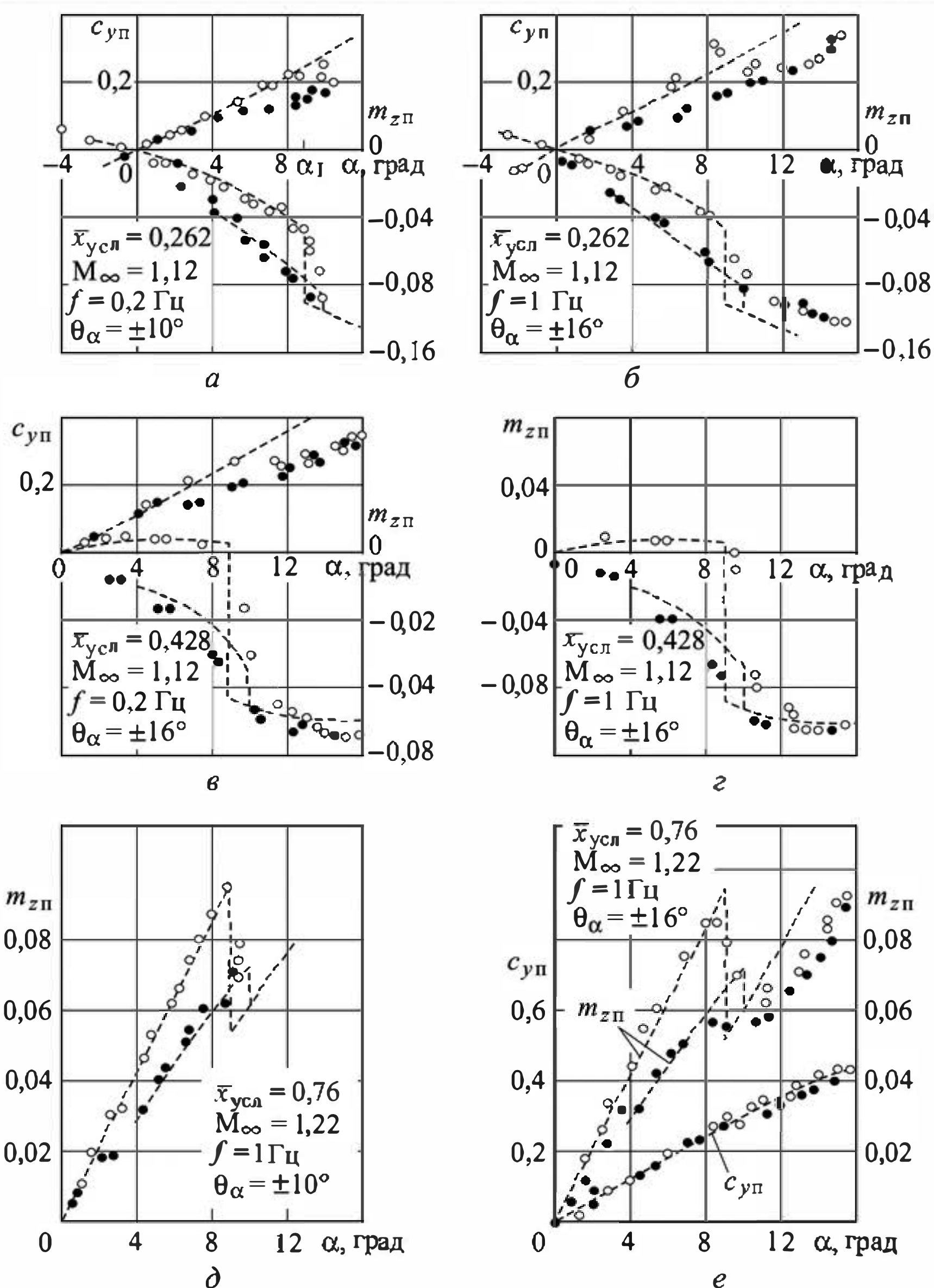


Рис. 13.5. Изменение коэффициентов $c_{yп}$, $m_{zп}$ в зависимости от угла атаки при различных значениях $\bar{x}_{yсл}$, M_{∞} , f и θ_{α}

При уменьшении угла атаки в диапазоне $4^{\circ} \leq \alpha \leq 10^{\circ}$ значения коэффициента момента тангажа при неустановившемся движении и в стационарных условиях практически совпадают, в то время как

между значениями коэффициента нормальной силы наблюдается существенное различие.

При колебательном движении тела перестройка отрывной структуры обтекания на безотрывную происходит при меньших углах атаки. Увеличение частоты колебаний до $f = 2,5$ Гц не вносит существенных изменений в характер зависимостей $c_{yп}(\alpha)$, $m_{zп}(\alpha)$.

В случае $\theta_\alpha = \pm 16^\circ$ ($\bar{x}_{усл} = 0,262$) основные закономерности изменения аэродинамических коэффициентов по углу атаки остаются теми же, что и при колебательном движении с $\theta_\alpha = \pm 10^\circ$ и лишь незначительно отличаются в области критических режимов (см. рис. 13.5, б).

Анализ приведенных данных еще раз подтверждает вывод о наличии существенной трансформации отрывной структуры обтекания при неустановившемся движении по сравнению со стационарными условиями.

Сопоставляя результаты экспериментальных исследований, полученные для других положений ($\bar{x}_{усл} = 0,428$; $0,76$) оси вращения (условного центра масс), можно сделать следующий вывод: со смещением положения оси вращения к кормовой части тела наблюдается значительная трансформация областей неоднозначности аэродинамических характеристик, в частности меньше различаются значения коэффициента нормальной силы при увеличении и уменьшении угла атаки (см. рис. 13.5, в—е).

Таким образом, при нестационарном сверхзвуковом обтекании тела на его аэродинамические характеристики влияют частота и амплитуда колебаний, а также положение оси вращения. Степень этого влияния зависит от скорости невозмущенного набегающего потока. Так, при скоростях, соответствующих моменту перестройки структуры течения с отрывной на безотрывную (с локальными зонами отрывного течения), отличие трансформации аэродинамических характеристик по сравнению со стационарными условиями наибольшее.

13.3. Нестационарные аэродинамические характеристики крыльев летательных аппаратов

Как было указано выше, при определении аэродинамических характеристик в рамках гипотезы гармоничности существует некоторая зависимость от числа Рейнольдса. Анализ результатов иссле-

дований по определению суммы производных коэффициентов нормальной силы и момента тангажа от угла атаки крыла малого удлинения в зависимости от числа Рейнольдса при малых дозвуковых скоростях обтекания показал следующее (рис. 13.6). При $\alpha < \alpha^*$, когда обтекание крыла является безотрывным, изменение числа Re не сказывается ни на значениях производных, ни на характере их зависимостей от угла атаки. Влияние числа Re проявляется при углах атаки, превышающих α_n , когда происходит перестройка структуры течения. Увеличение числа Re обуславливает смещение возникновения отрывной структуры на больший угол атаки.

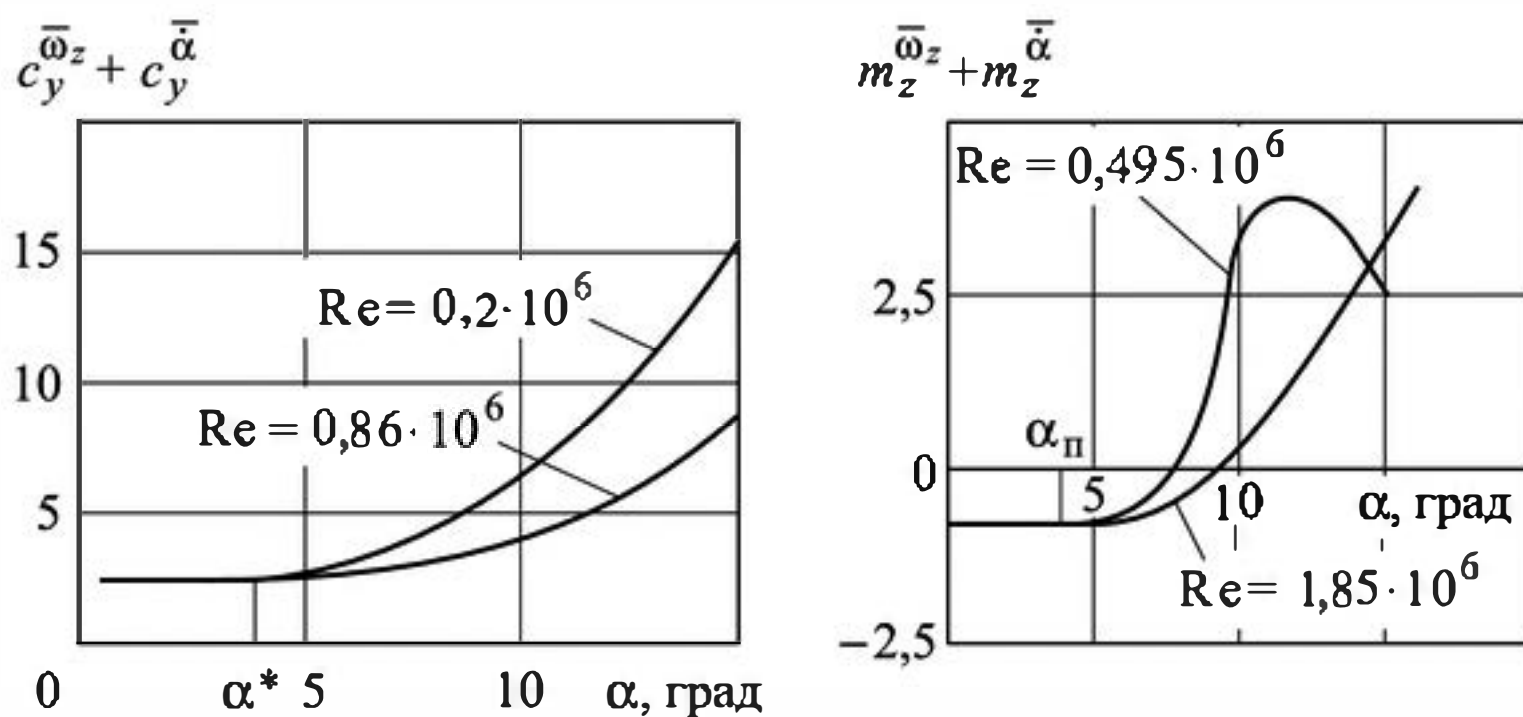


Рис. 13.6. Изменение суммы производных аэродинамических коэффициентов в зависимости от угла атаки при различных числах Re

Рассмотрим влияние неустановившегося движения на полные аэродинамические характеристики прямоугольного крыла малого удлинения ($\lambda \approx 1,0$) при дозвуковых скоростях.

Рабочий диапазон изменения угла атаки при неустановившемся движении связан с особенностями изменения структуры обтекания в стационарных условиях. В нем можно выделить три зоны (рис. 13.7):

- 1) $-10^\circ \leq \alpha \leq \alpha_1$ — безотрывное обтекание;
- 2) $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ — сложное отрывное течение при наличии обширной циркуляционной зоны в середине верхней поверхности крыла;
- 3) $\alpha \geq \alpha_2$ — полное, или глубокое, срывное обтекание (отрыв потока вдоль передней кромки с образованием застойной зоны в носовой части крыла и возвратного течения на остальной его части).

Исходя из этого, влияние неустановившегося движения на аэродинамические силу и момент крыла малого удлинения исследовали при различных амплитудах и частотах колебаний для тех углов

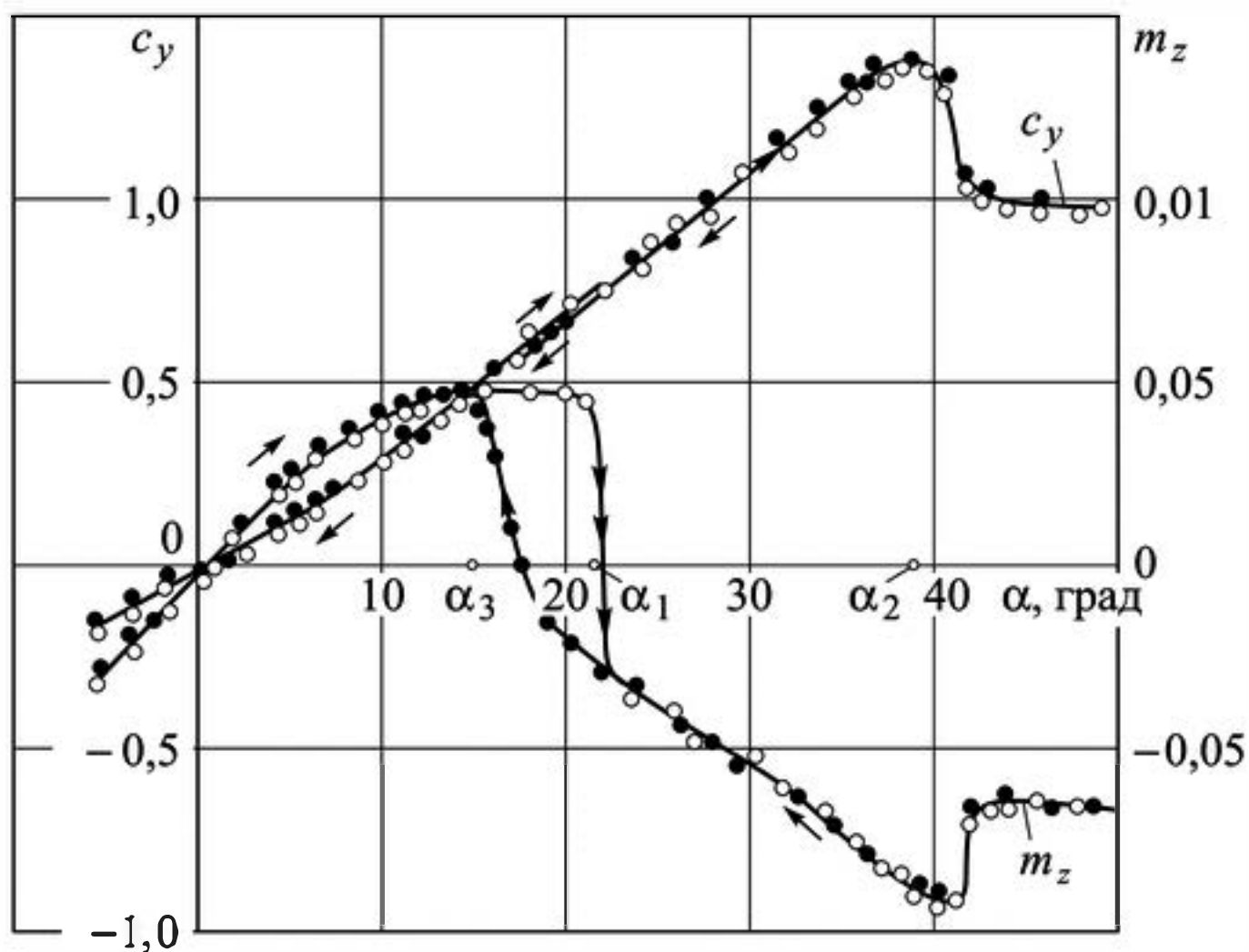


Рис. 13.7. Изменение коэффициентов нормальной силы c_y и момента тангажа m_z в зависимости от угла атаки α при стационарном обтекании

атаки, где структура обтекания однозначная (например, в первой или второй зоне). При сложной структуре обтекания крыла колебания исследовали при одной амплитуде во всем диапазоне углов α . Такой выбор условий динамического эксперимента позволил выявить влияние неустановившегося движения на аэродинамические характеристики крыла при различных структурах обтекания. Чтобы исключить возможное влияние числа Re на аэродинамические характеристики крыла, силу и момент тангажа в стационарных условиях и при неустановившемся движении определяли при одном и том же числе $Re \approx 1,01 \cdot 10^6$.

Как видно на рис. 13.8, а, б, в случае, когда колебания происходят в диапазоне углов атаки с однозначной структурой течения, значения $m_{zп}(\alpha, \omega_z, \dot{\omega}_z)$ при неустановившемся движении и в стационарных условиях хорошо согласуются между собой, причем как при увеличении ($\dot{\alpha} > 0$), так и при уменьшении ($\dot{\alpha} < 0$) угла α . Это имеет место и на режиме безотрывного обтекания ($-10^\circ < \alpha < \alpha_1$, см. рис. 13.8, а), и при сложном отрывном обтекании крыла ($\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, см. рис. 13.8, б). Небольшое отличие значений $m_{zп}$ при прямом и обратном ходе может быть объяснено наличием малой нестационарной составляющей $(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\dot{\alpha}}})\dot{\alpha}$ при однозначной структуре обтекания.

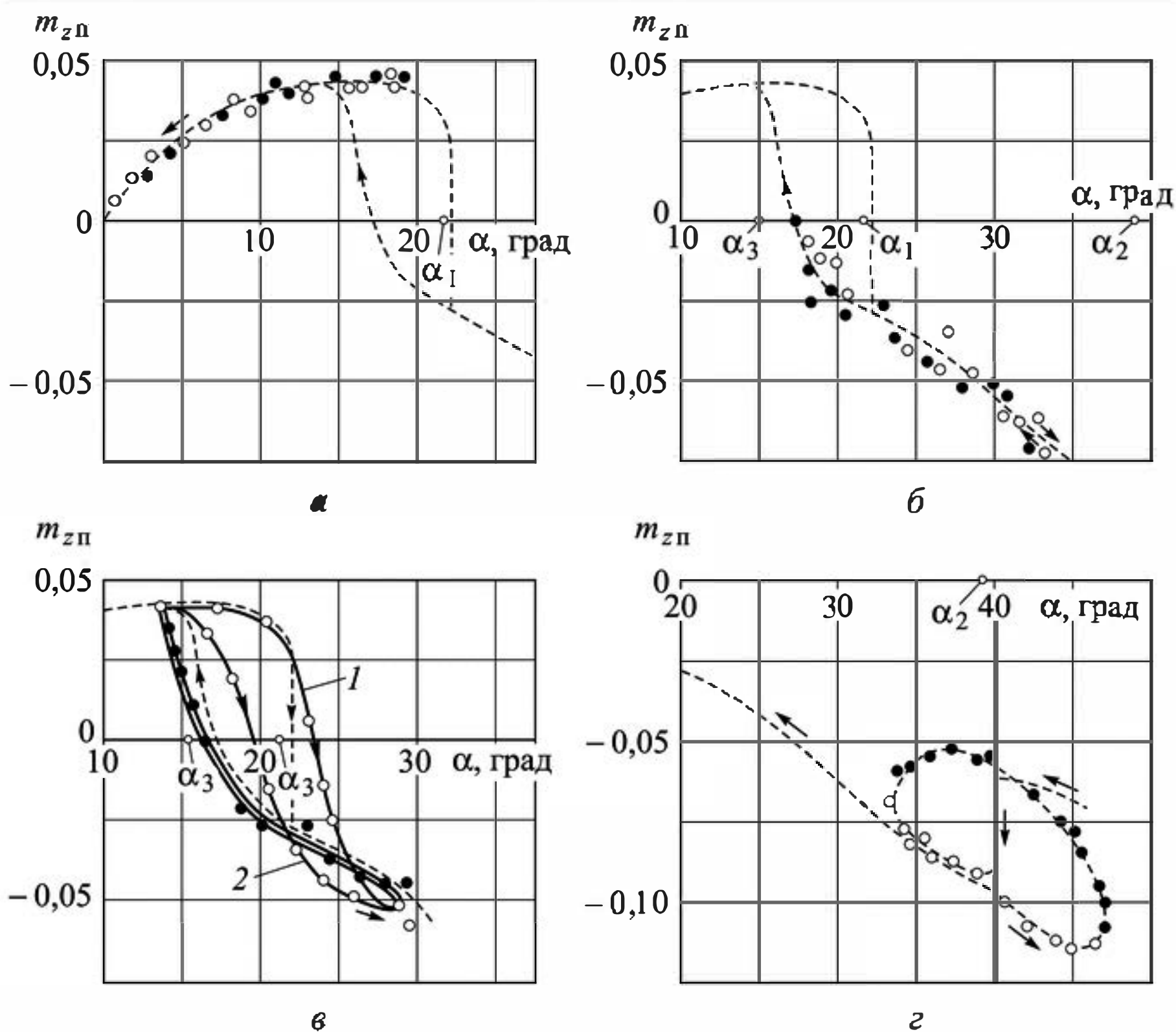


Рис. 13.8. Изменение коэффициента $m_{zп}$ в зависимости от угла атаки при различных амплитудах колебаний ($f = 1,5$ Гц)

В тех случаях, когда изменение угла атаки происходит в диапазоне $\alpha_3 \leq \alpha \leq \alpha_1$ и амплитуда колебаний достигает углов перестройки структур течений, появляется неоднозначность в изменении аэродинамических характеристик, обусловленная неустойчивостью структур обтекания при углах, близких к α_3 . В условиях установившегося движения крыла углу α_3 соответствует момент перестройки отрывного течения на безотрывное.

Изменение аэродинамического коэффициента $m_{zп}$ для крыла малого удлинения при его колебаниях в диапазоне углов атаки $14^\circ \leq \alpha \leq 29^\circ$ показано на рис. 13.8, в.

Переход от безотрывного типа течения к сложному вихревому с обширной циркуляционной зоной в середине крыла происходит при увеличении угла α ($\dot{\alpha} > 0$) в интервале $24 \dots 24,5^\circ$ почти скачкообразно. При уменьшении угла α ($\dot{\alpha} < 0$) сокращение циркуляцион-

ной зоны происходит постепенно. Если при стационарных условиях (статическая характеристика) переход от отрывного обтекания к безотрывному наблюдается при $\alpha \approx 15^\circ$, то при неустановившемся движении ($\dot{\alpha} < 0$) циркуляционная зона еще сохраняется в носовой части корневых сечений крыла при $\alpha = 14,2...14,6^\circ$. Это указывает на затягивание существования отрывной структуры обтекания в условиях неустановившегося движения. Моменту перестройки соответствует угол атаки $\alpha \approx 14^\circ$. Конкретное значение угла α_3 при неустановившемся движении определяется случайными факторами. Вследствие этого структура обтекания крыла на следующем периоде колебаний ($\dot{\alpha} > 0$) будет определяться в основном типом течения (отрывное или безотрывное) при уменьшении угла α предыдущего периода.

В случае разрушения циркуляционной зоны в момент $\omega_z = 0$ ($\alpha_{\min} = 14^\circ$), приводящего к безотрывному обтеканию прямоугольного крыла, последующее увеличение угла атаки ($\dot{\alpha} > 0$) будет сопровождаться безотрывным течением (см. кривая 1 на рис. 13.8, в). Сохранение циркуляционной зоны в окрестности угла $\alpha_{\min} = 14^\circ$ приводит при увеличении α к дальнейшему развитию отрывного течения.

Следствием неоднозначности структуры течения для определенного угла атаки при неустановившемся движении является несовпадение значений аэродинамических коэффициентов в некотором диапазоне углов (см. кривая 2 на рис. 13.8, в), а значит, возникновение двух гистерезисных петель.

Особый интерес представляет исследование влияния неустановившегося движения на аэродинамические характеристики крыла в диапазоне α , где наблюдается переход от сложного отрывного течения к полному отрыву (рис. 13.8, г). При неустановившемся движении увеличение угла атаки ($\dot{\alpha} > 0$) приводит к затягиванию по углам атаки перестройки сложного отрывного течения на полный отрыв, тогда как с уменьшением угла атаки ($\dot{\alpha} < 0$) полный отрыв наступает при меньших углах α ($\alpha < \alpha_2$). Поэтому в некотором диапазоне углов атаки имеет место заведомо неоднозначная структура обтекания и вследствие этого существенный гистерезис в аэродинамических характеристиках.

В случае колебаний крыла с амплитудой, охватывающей режимы безотрывного обтекания и сложного отрывного течения (окрестность угла α_2), изменение частоты колебаний приводит к некоторому расширению гистерезисной петли на зависимости $m_z(\alpha)$, полу-

ченной при стационарном обтекании. Это связано с увеличением угла α , соответствующего перестройке структуры обтекания — от безотрывного типа течения к сложному отрывному.

Рассмотрим теперь влияние частоты колебаний на аэродинамические характеристики прямоугольного крыла малого удлинения, когда амплитуда колебаний захватывает две или три различные структуры течения (рис. 13.9).

С ростом частоты колебаний (при фиксированном угле α) наблюдается образование и расширение гистерезисных петель в окрестности углов α_1 , α_2 , где происходит изменение структуры тече-

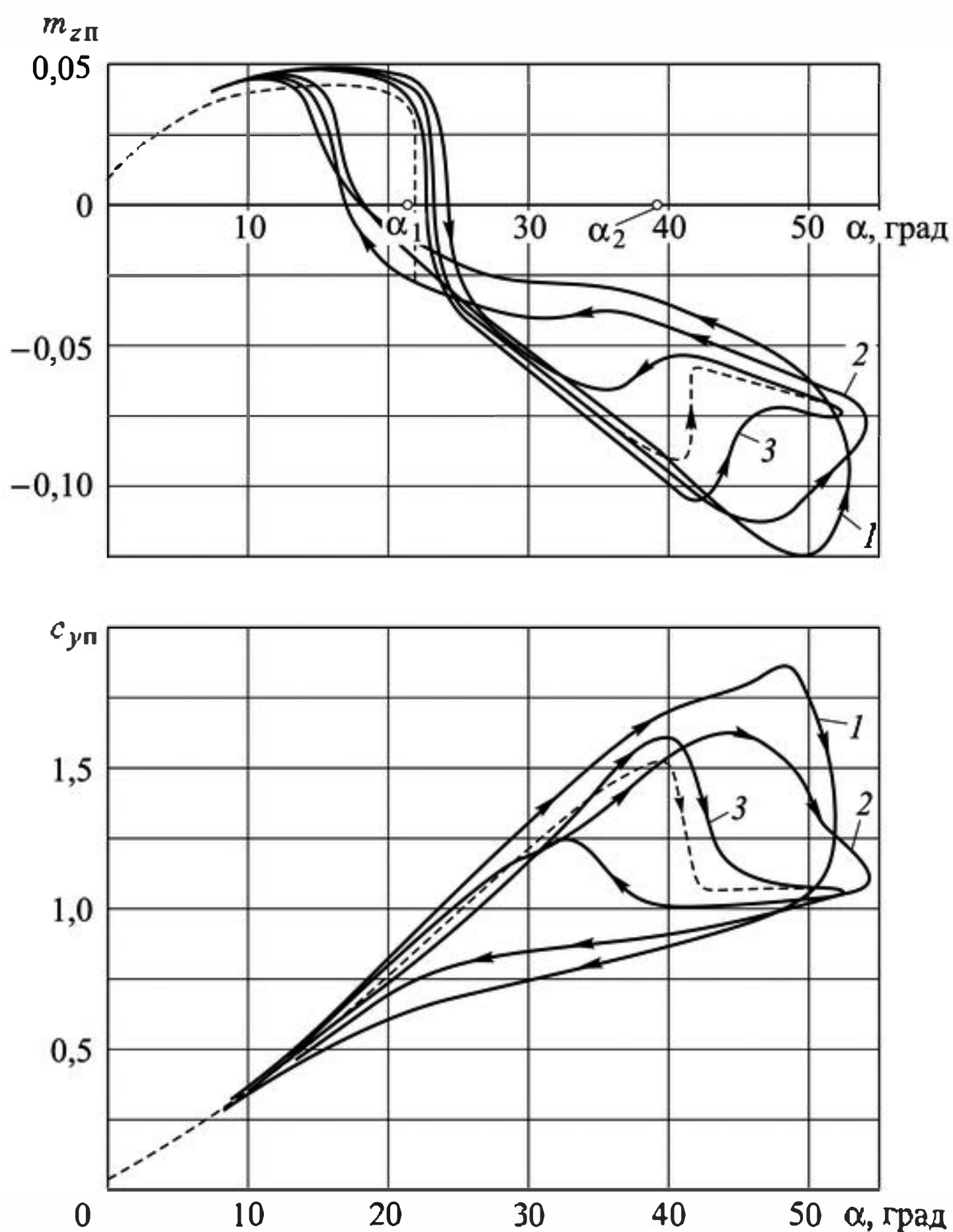


Рис. 13.9. Изменение коэффициентов $m_{zп}$ и $c_{yп}$ от угла атаки α при частоте колебаний 0,1 (1), 0,5 (2) и 1,0 Гц (3)

ния, а также затягивание по углам атаки режима со сложным отрывным течением при прямом ходе ($\dot{\alpha} > 0$) и сохранение режима полного отрыва практически до углов атаки, соответствующих безотрывному обтеканию при обратном ходе ($\dot{\alpha} < 0$). Таким образом, при $\dot{\alpha} < 0$ можно найти такую частоту колебаний $f > 1$ Гц, при которой могут существовать только два режима обтекания.

Из приведенных данных следует, что диапазон углов атаки, в пределах которого происходит затягивание при неустановившемся движении той или иной структуры обтекания, определяется для одних и тех же кинематических параметров движения крыла типом течения и его устойчивостью.

Влияние неустановившегося движения на аэродинамические характеристики модели ЛА с крылом сложной формы в плане исследовали в двух фиксированных диапазонах изменения угла атаки: $-8^\circ \leq \alpha \leq 23^\circ$; $0 \leq \alpha \leq 33^\circ$ при частоте колебаний $f = 0,1 \dots 1,0$ Гц и амплитуде $\theta_\alpha = 13 \dots 16^\circ$. Первый диапазон углов атаки соответствует полностью устойчивой вихревой структуре, второй — включает в себя различные режимы обтекания крыла от устойчивой вихревой структуры при малых углах до режимов, где наблюдается полное разрушение вихревых жгутов над верхней поверхностью крыла.

Как видно из приведенных на рис. 13.10 данных, в случае колебаний с амплитудами, не превышающими α_1 , результаты динамических испытаний с частотой $f = 0,2 \dots 1,0$ Гц хорошо согласуются с данными статических испытаний. При этом результаты испытаний при увеличении или уменьшении угла α близки между собой.

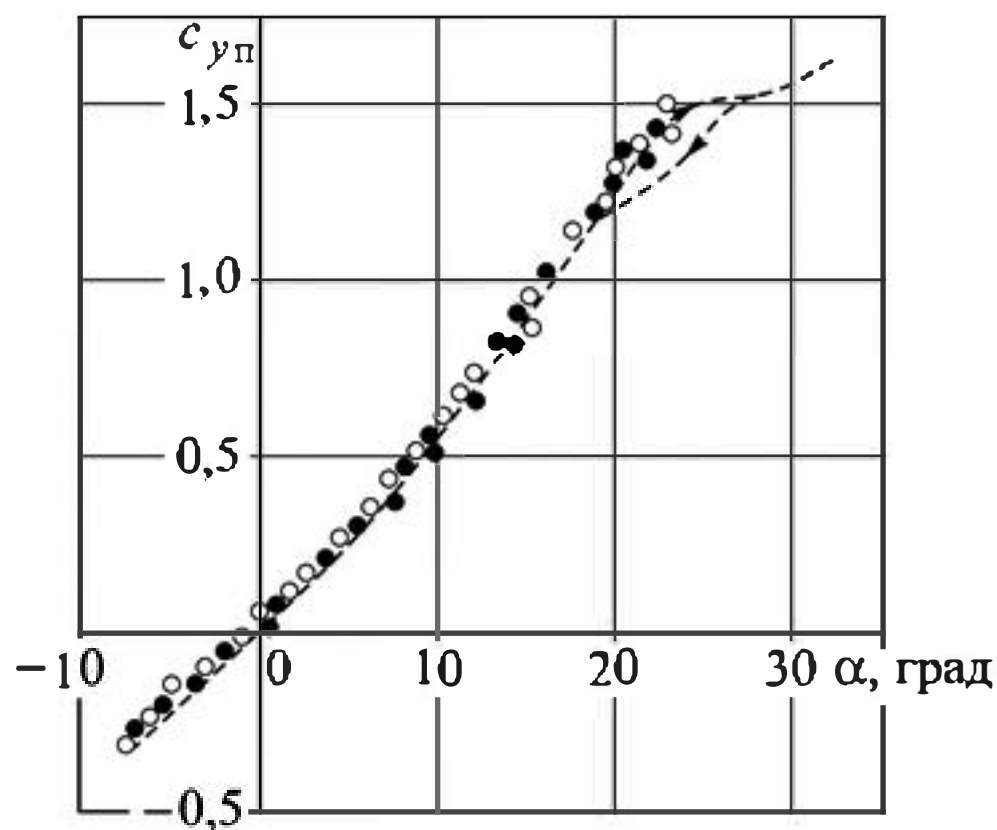


Рис. 13.10. Зависимость коэффициента полной нормальной силы от угла атаки α в условиях безотрывного обтекания

Исследования обтекания колеблющегося треугольного крыла с углом по передней кромке $\chi_{п.к} = 80^\circ$ показали, что имеется значительная разница в положении вихрей при установившемся и неустановившемся течениях. С возрастанием угла атаки вихрь становится более интенсивным и движется к плоскости симметрии крыла, но не достигает положения, соответствующего стационарному обтеканию вплоть до максимального угла атаки. При уменьшении угла атаки вихрь ослабевает и движется к корневой части крыла, тогда как при стационарном обтекании положение вихря по размаху в определенных сечениях крыла, перпендикулярных к плоскости симметрии, остается практически неизменным при изменении угла α . Поэтому можно предположить, что возникающая разница в положении вихрей при установившемся и неустановившемся течениях должна привести к изменению аэродинамических характеристик. Однако результаты исследований показали хорошее согласование данных, полученных при неустановившемся движении и в стационарных условиях. Это позволяет сделать вывод о том, что при устойчивой вихревой структуре ($\alpha < \alpha_1$) возможное изменение положения вихревого жгута над крылом при неустановившемся движении практически не оказывает влияния на аэродинамические характеристики ЛА рассматриваемой компоновки.

Совершенно иная картина наблюдается тогда, когда угол атаки превышает угол перестройки структуры обтекания, т. е. при $\alpha > \alpha_1$ (рис. 13.11). В этом случае при неустановившемся движении наблюдается заметная трансформация зависимости $c_{yп}(\alpha)$ по сравнению с зависимостью $c_y(\alpha)$, полученной при стационарном обтекании. При этом с ростом частоты колебаний имеет место существенное расширение гистерезисной петли. Это связано с тем, что при неустановившемся движении крыла вдоль передней кромки наплыва возникает дополнительное отрывное течение, приводящее к увеличению интенсивности вихревой пелены, а значит, к затягиванию начала разрушения вихревого жгута в окрестности задней кромки и возникновению отрывного течения, по своим характеристикам отличающегося от течения в стационарных условиях. Дополнительным доказательством этого могут служить результаты динамического эксперимента при угле атаки α_{max} , когда угловая скорость равна нулю. В этом случае, как видно на рис. 13.11, в, коэффициент полной нормальной силы заметно отличается от статического коэффициента: $\Delta c_y = c_{yп} - c_y = 0,15$. При обратном изменении угла

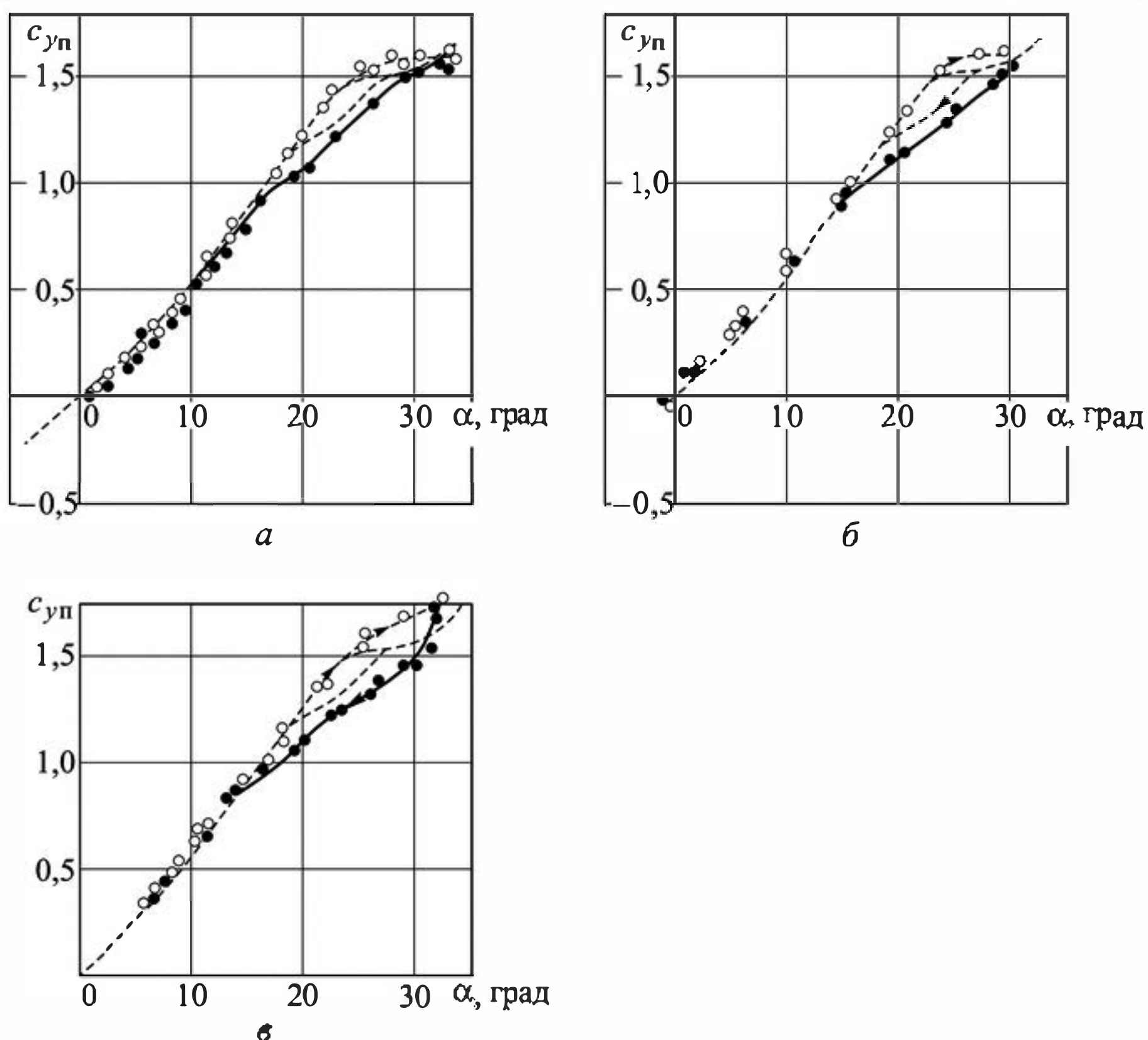


Рис. 13.11. Зависимость коэффициента полной нормальной силы от угла атаки в условиях перестройки структуры течения при частоте колебаний 0,1 (а), 0,5 (б) и 1,0 Гц (в)

атаки восстановление устойчивой вихревой структуры происходит при гораздо меньших углах атаки, чем в условиях стационарного обтекания.

13.4. Нестационарные аэродинамические характеристики крылатых летательных аппаратов

При исследовании коэффициента полной нормальной силы $c_{yn} = Y_n / (Sq)$ крылатых ЛА при неустановившемся движении применяют усовершенствованный метод свободных колебаний модели с закрепленным центром масс. «Сброс» модели проводят при установившейся скорости потока в аэродинамической трубе с фиксиро-

ванного угла атаки, например $\alpha_{сбр} \approx -16^\circ$. Выход модели на различные балансировочные углы атаки обеспечивают установкой органа управления на фиксированные углы. В процессе эксперимента измеряют угол атаки α модели, скорость $\omega_z = \dot{\alpha}$ и ускорение $\dot{\omega}_z = \ddot{\alpha}$ его изменения во времени t , а также полную нормальную силу $Y_n(t, \alpha, \omega_z, \dot{\omega}_z)$, которая в общем случае является функцией этих переменных. Как известно, для случая, когда балансировочный угол атаки $\alpha_{бал}$ лежит в диапазоне углов атаки, не захватывающем зону антидемпфирования, переходный процесс $\alpha(t)$ имеет вид затухающих колебаний относительно $\alpha_{бал}$.

Экспериментальные зависимости коэффициента $c_{yn}(\alpha)$ приведены на рис. 13.12. Как видно на рисунке, результаты динамических испытаний на режимах безотрывного обтекания для любых моментов времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ удовлетворительно согласуются с данными статических измерений. При этом надо иметь в виду, что прирост нестационарной силы $\Delta c_y = (c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\alpha}})\bar{\omega}_z$ на этих режимах весьма мал и поэтому можно считать, что $c_{yn}(\alpha, \omega_z, \dot{\omega}_z) \equiv c_y(\alpha)$ независимо от амплитуды колебаний. Некоторое увеличение коэффициента полной нормальной силы $c_{yn}(\alpha, \omega_z, \dot{\omega}_z)$ на углах атаки $\alpha_{отр} < \alpha \leq \alpha_{сбр}$ ($\alpha_{сбр}$ — максимальная амплитуда колебания моде-

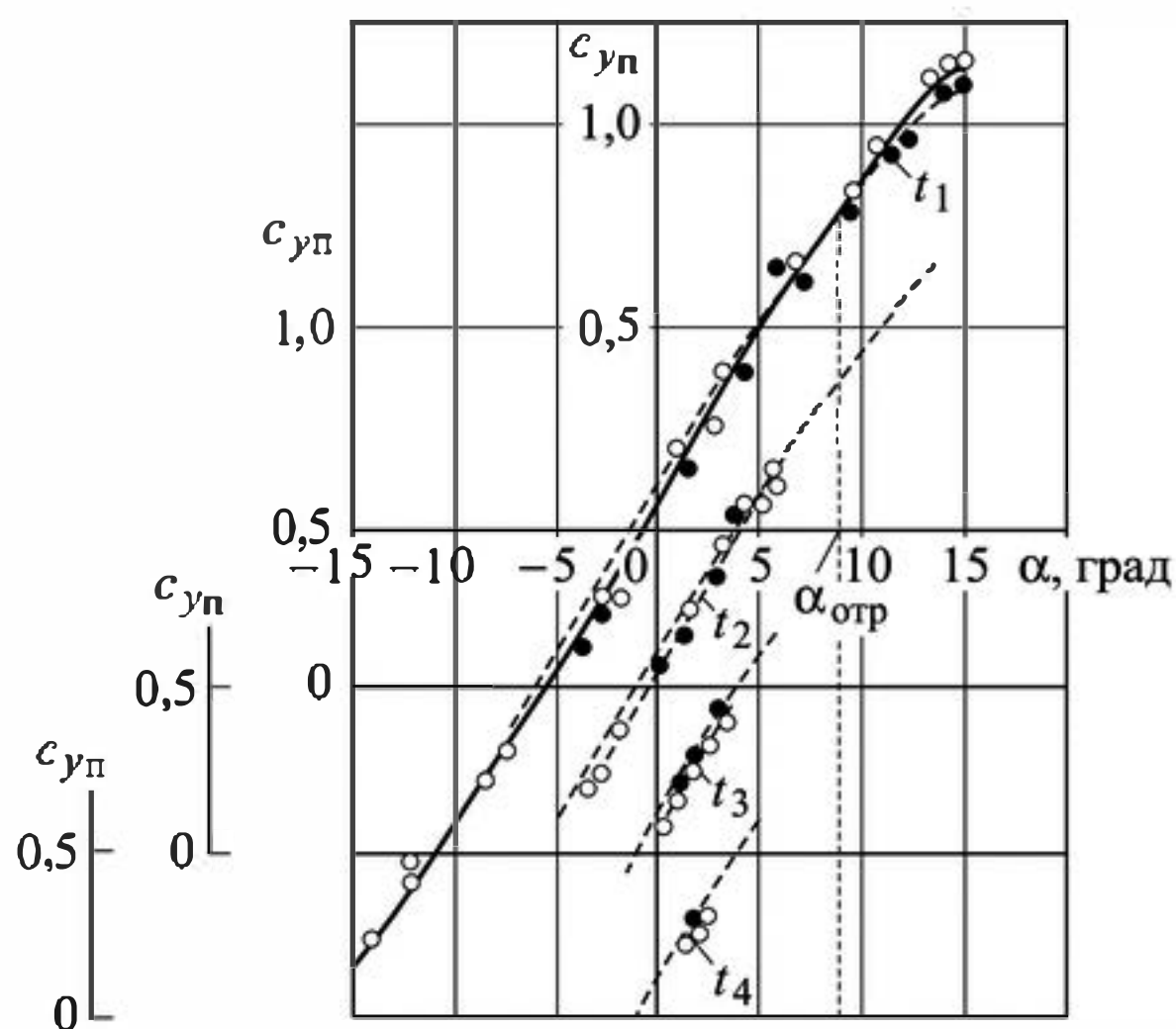


Рис. 13.12. Изменение коэффициента полной нормальной силы c_{yn} в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ в зависимости от угла атаки α в условиях безотрывного обтекания ($\alpha_{сбр} = -15,8^\circ$)

ли, равная $15,2^\circ$) по сравнению с $c_y(\alpha)$ при стационарном обтекании связано с затягиванием возникновения и развития отрывного течения в случае неустановившегося движения. В данных условиях происходит лишь небольшая трансформация безотрывного течения — появляется локальная зона с возвратным потоком, пограничный слой на задней кромке профиля утолщается, тогда как основная часть пограничного слоя остается тонкой и присоединенной.

Отметим, что для рассматриваемых крылатых ЛА угол атаки ($\alpha_{сбр} = 15,2^\circ$) равен критическому углу атаки при стационарном обтекании (угол перестройки структуры течения), когда на крыле имеется развитая структура отрывного течения. Доказательством отсутствия отрывного обтекания крыла в рассматриваемом диапазоне углов атаки $-15,2^\circ \leq \alpha \leq 15,2^\circ$ при неустановившемся движении могут служить результаты эксперимента по оценке коэффициента полного момента тангажа $m_{zп}(\alpha, \omega_z, \dot{\omega}_z) = J_z \ddot{\alpha}(t) / (Sbq)$, где J_z — момент инерции ЛА.

Значения коэффициента полного момента тангажа при положительной угловой скорости (светлые точки) лежат ниже, а при отрицательной (темные точки) — выше соответствующих значений этого коэффициента при стационарном обтекании (рис. 13.13). Это сви-

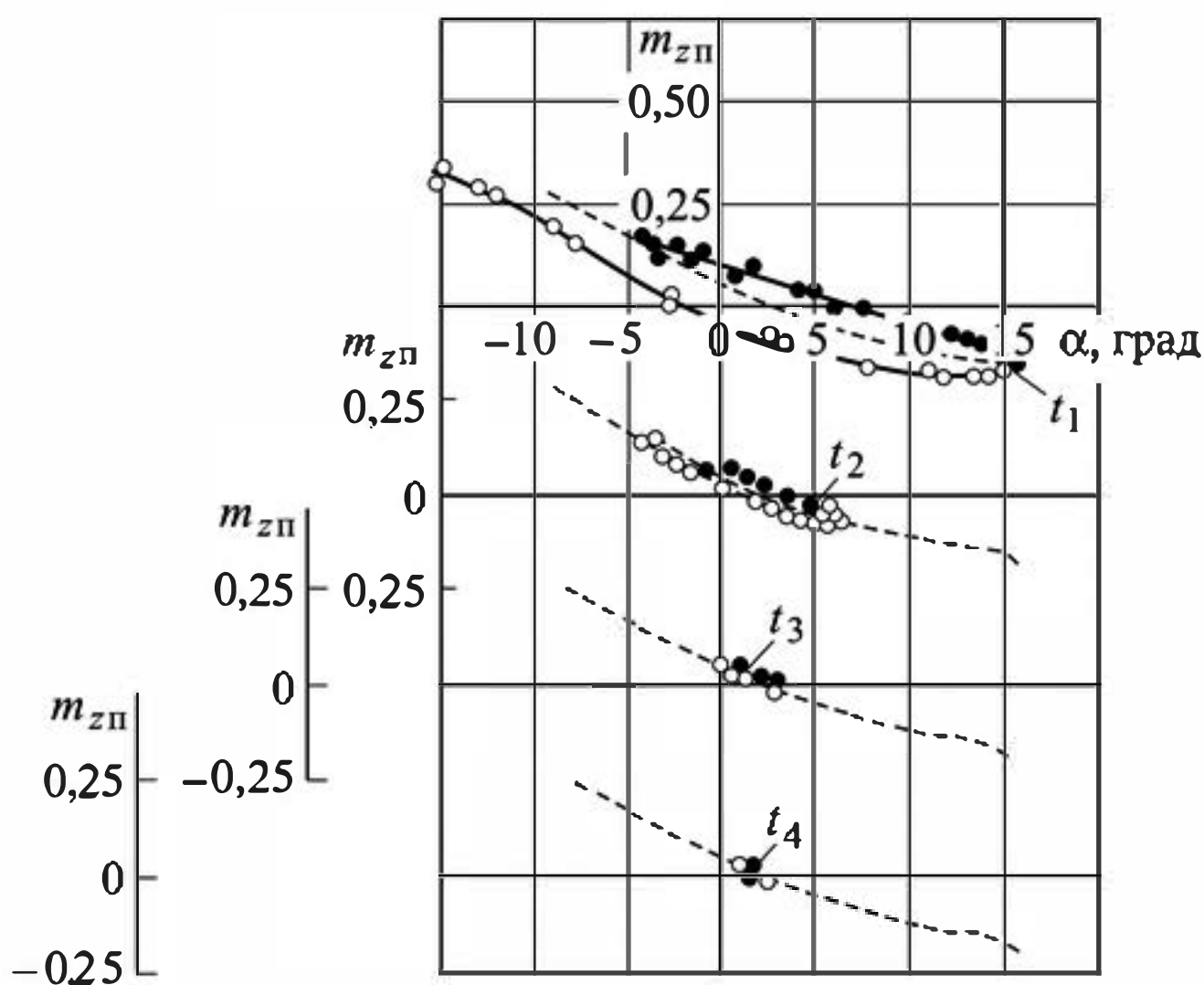


Рис. 13.13. Изменение коэффициента полного момента тангажа $m_{zп}$ в различные моменты времени в зависимости от угла атаки α в условиях безотрывного обтекания

детельствует о существовании демпфирования во всем рассматриваемом диапазоне углов атаки $-15,2^\circ \leq \alpha \leq 15,2^\circ$, а значит, об отсутствии отрывного обтекания крыла. При однозначной структуре течения, в частности при безотрывном обтекании, эффект предистории движения мал, поэтому можно оценить продольное демпфирование (для определенного угла атаки):

$$\left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}\right)_\alpha = \frac{m_{zп,\dot{\alpha}<0} - m_{zп,\dot{\alpha}>0}}{\bar{\omega}_{z,\dot{\alpha}>0} - \bar{\omega}_{z,\dot{\alpha}<0}}.$$

В тех случаях, когда имеется однозначная зависимость $m_{zп}(\alpha)$, например при увеличении угла атаки, можно воспользоваться следующим выражением:

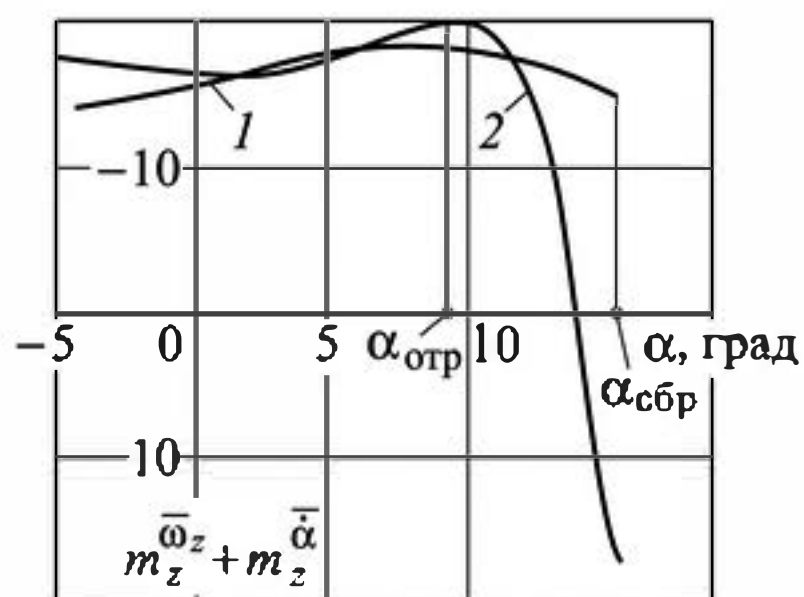
$$\left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}\right)_\alpha \approx \frac{m_{zп,\dot{\alpha}>0} - m_z}{\bar{\omega}_{z,\dot{\alpha}>0}}.$$

Результаты вычисления по этой формуле представлены на рис. 13.14 (кривая 1), там же для сопоставления приведены данные динамических испытаний (кривая 2) по непосредственному измерению продольного демпфирования $(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}})$. Видно, что при стационарном обтекании на углах атаки α , меньших $\alpha_{отр}$, результаты этих экспериментов удовлетворительно согласуются между собой. Существенное расхождение в этих зависимостях при углах $\alpha_{отр} \leq \alpha \leq \alpha_{сбр}$ свидетельствует о заметной трансформации структуры обтекания ЛА при неустановившемся движении на этих углах.

Совершенно иной характер изменения коэффициента полной нормальной силы c_{yn} по углу атаки наблюдается, когда колебания модели происходят относительно балансировочного угла атаки $\alpha_{бал}$, который лежит в области антидемпфирования ($\alpha > \alpha_{отр}$). В этом случае переходные процессы характеризуются на начальном этапе

Рис. 13.14. Зависимость коэффициента продольного демпфирования $m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}$ от угла атаки α :

1 – расчет с использованием усовершенствованного метода свободных колебаний; 2 – расчет по методу вынужденных колебаний с малой амплитудой



некоторым загуханием колебаний с последующим выходом на режим автоколебаний — предельный цикл (рис. 13.15). Для сопоставления на рис. 13.15 также приведены зависимости, полученные при статических испытаниях (штриховые линии) при отклоненном руле высоты ($\delta = -15^\circ$). Сопоставление результатов динамических исследований для трех периодов колебаний (до режима автоколебаний) с данными статических испытаний показывают, что при неустановившемся движении возникают аэродинамические силы, качественно отличающиеся от сил, полученных при стационарном обтекании: на зависимостях $c_{yп}(\alpha, \omega_z, \dot{\omega}_z)$ появляются гистерезисные петли, причем их площадь зависит от угловой скорости и угла сброса (амплитуды колебаний).

Данное явление возникает в случае выхода модели ЛА на большие углы атаки, превышающие углы перестройки при стационарном обтекании.

Заметное увеличение коэффициента полной нормальной силы $c_{yп}$ по сравнению с c_y на таких углах атаки можно объяснить сущест-

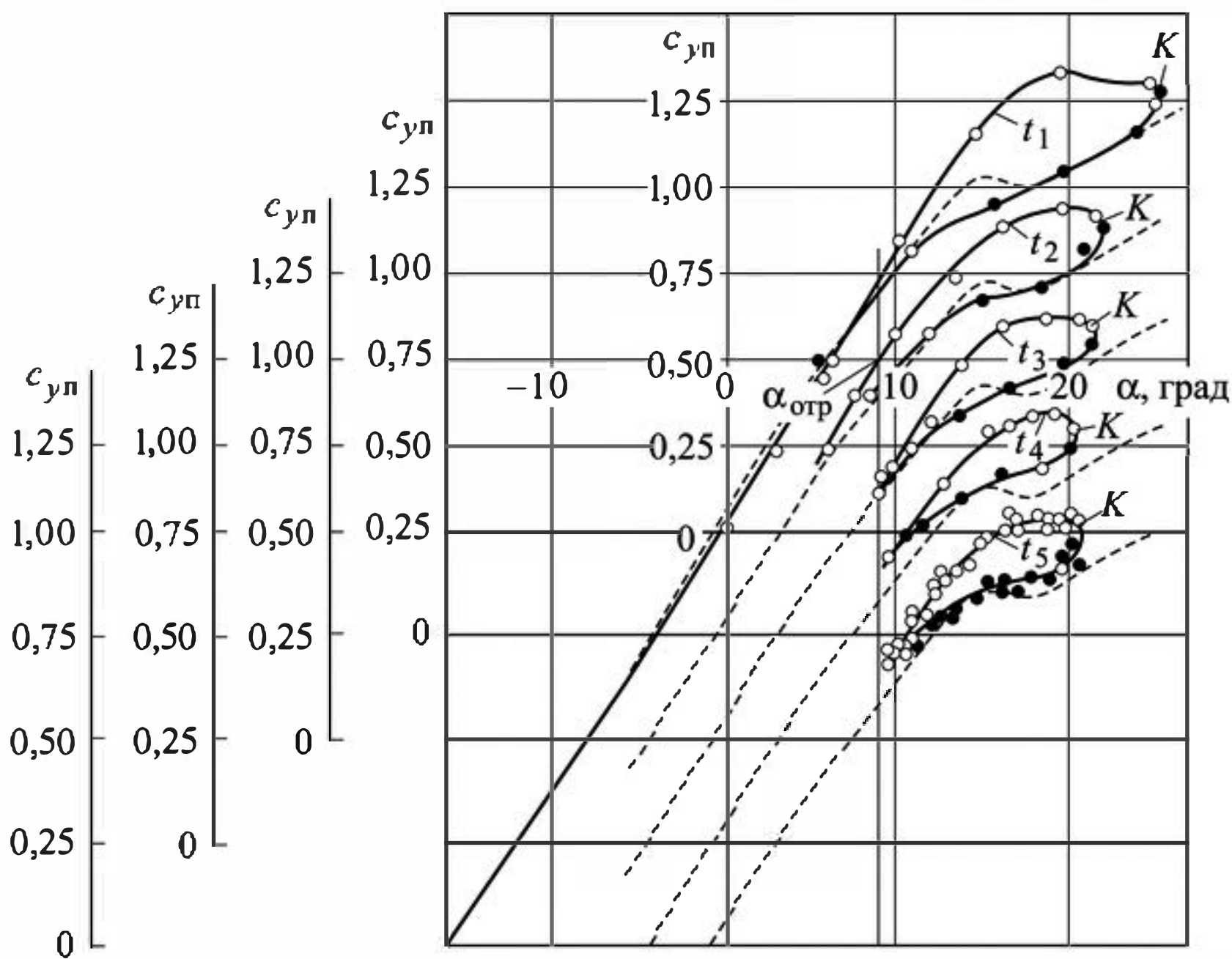


Рис. 13.15. Изменение коэффициента полной нормальной силы $c_{yп}$ в условиях перестройки структуры течения ($\delta = -15^\circ$; $\alpha_{сбр} = -15,2^\circ$) в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$

венной трансформацией структуры пограничного слоя, зарождением и сходом с носовой части крыла вихря при неустановившемся движении. Это приводит к существенному изменению структуры обтекания крыла при таких углах атаки и, как следствие, к изменению аэродинамических характеристик. Дополнительным доказательством могут служить результаты динамических и статических испытаний на максимальных углах атаки (точка K на рис. 13.15). В этом случае зависимость $c_{yп}(\alpha, \dot{\omega}_z)$ заметно отличается от $c_y(\alpha)$. Следовательно, при неустановившемся движении возникают отрывные течения, коренным образом отличающиеся от течения при стационарных условиях для одних и тех же углов атаки.

Результаты исследований в режиме автоколебаний (предельного цикла) представлены на рис. 13.16. Для удобства анализа влияния неустановившегося движения на полную аэродинамическую силу результаты двух динамических экспериментов для нескольких периодов колебаний сопоставляют между собой и с данными, полученными при статических испытаниях. На зависимости $c_{yп}(\alpha, \omega_z, \dot{\omega}_z)$ имеет место гистерезисная петля, площадь и форма которой трансформируются от одного периода к другому в различных экспериментах. Это означает, что изменение полной нормальной силы при колебании модели в диапазоне углов атаки, соответствующем режиму автоколебаний, сопровождается рядом нестационарных эффектов нерегулярного характера. Кроме того, заметное отличие коэффициента $c_{yп}$ в крайних точках предельного цикла, где $\omega_z = 0$ (см. рис. 13.16), от соответствующих значений $c_y(\alpha)$, полученных при статических испытаниях, позволяет сделать вывод, что при неустановившемся движении модели ЛА возникает нестационарное отрывное течение, которое существенно отличается от стационарного. Вследствие этого и суммарный коэффициент нормальной силы, который в рамках гипотезы гармоничности можно представить в виде

$$c_{y\Sigma} = c_y + \left(c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\bar{\dot{\omega}_z}} \right) \bar{\omega}_z,$$

будет заметно отличаться от коэффициента полной нормальной силы (рис. 13.17).

Если угол атаки профиля или крыла колеблется около значения, соответствующего статическому отрыву, то в динамических зависимостях появляется гистерезис. Таким образом, необходимым условием возникновения гистерезиса является смена структуры течения, например переход в нестационарных условиях от безотрывно-

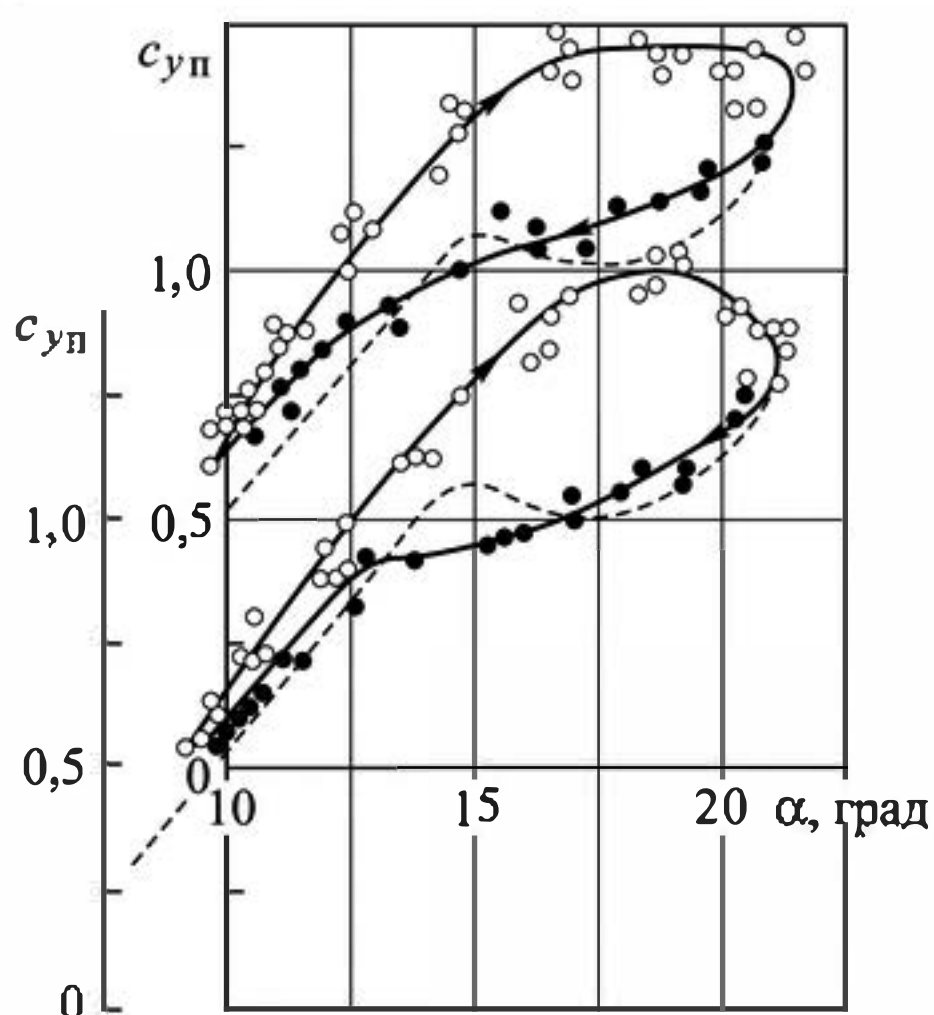


Рис. 13.16. Изменение коэффициента полной нормальной силы в режиме автоколебаний ($\delta = -15^\circ$) для двух серий испытаний

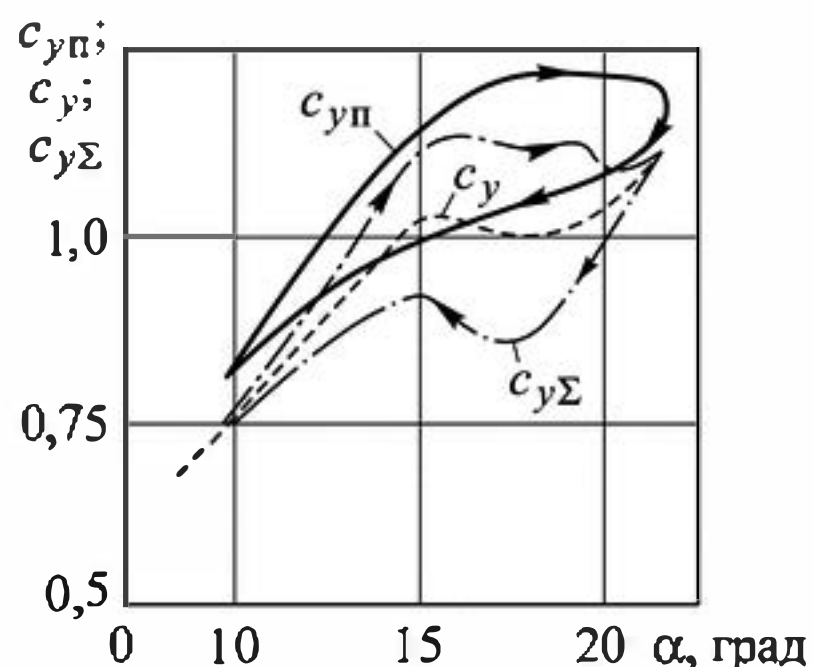


Рис. 13.17. Сравнительная оценка значений коэффициентов нормальной силы в режиме автоколебаний

го обтекания к отрывному, и наоборот. В данном случае гистерезисные явления возникают на углах атаки $\alpha > \alpha_{\text{отр}}$, где заведомо существует отрывное обтекание крыла. Поэтому полагают, что возникновение гистерезиса в аэродинамических характеристиках обусловлено не только сменой структуры течения, но и ее заметной трансформацией по углам атаки при неустановившемся движении. В тех случаях, когда при неустановившемся движении структура обтекания крыла не меняется или меняется незначительно, гистерезисных петель на аэродинамических характеристиках не возникает. Это происходит и при безотрывном обтекании крыла большого удлинения, и при наличии устойчивой вихревой структуры на крыле с наплывом, и при сложном вихревом течении с обширной циркуляционной зоной в середине прямоугольного крыла малого удлинения.

Отмеченные выше особенности аэродинамических характеристик ЛА с крылом большого удлинения были получены при относительно малом (модельном) числе Re . Переход к натурным числам Re не устраняет тех нестационарных эффектов в обтекании крыла рассматриваемого размера на больших углах атаки, которые обуславливают появление гистерезисных петель в аэродинамических

характеристиках при неустановившемся движении ЛА. Как видно на рис. 13.18, результаты летных испытаний подтверждают наличие гистерезисных явлений в аэродинамических характеристиках нормальной силы при неустановившемся движении ЛА с крылом большого удлинения. Явление гистерезиса связано с нестационарностью обтекания и обусловлено в первую очередь неоднозначностью структуры внешнего потенциального потока при одних и тех же кинематических параметрах, полученных при различном направлении их изменения (например, при увеличении или уменьшении угла атаки, числа Маха и т. д.) и необратимостью вязких отрывных течений.

Результаты статических испытаний модели ЛА с тонким крылом сложной формы в плане, общий вид которого приведен на рис. 13.19, показали гистерезисный характер изменения интегральных аэродинамических характеристик при увеличении угла атаки (светлые точки) и при его уменьшении (темные точки).

Как известно, на тонком крыле с наплывом отрыв потока происходит практически с малых углов атаки по всей длине стреловидной передней кромки наплыва и крыла. Непосредственно от вершины крыла начинают распространяться две вихревые пелены, которые с увеличением угла атаки свертываются в вихревые жгуты. При небольших углах атаки $\alpha < 10^\circ$ на одной половине крыла могут образоваться два вихревых жгута — один на наплыве, другой — на консольной части крыла. Однако при последующем росте угла атаки вследствие увеличения интенсивности вихревого жгута на наплыве происходит объединение двух жгутов в один.

За начало срывного обтекания на таких крыльях принимают угол атаки α_1 , при котором возникает разрушение вихревых жгутов непосредственно над поверхностью крыла. Разрушение вихрей на крыле приводит к уменьшению разрежения на его поверхности и изменению точки отрыва пограничного слоя под вихрем. Была установлена обусловленная этим явлением взаимосвязь начала разрушения

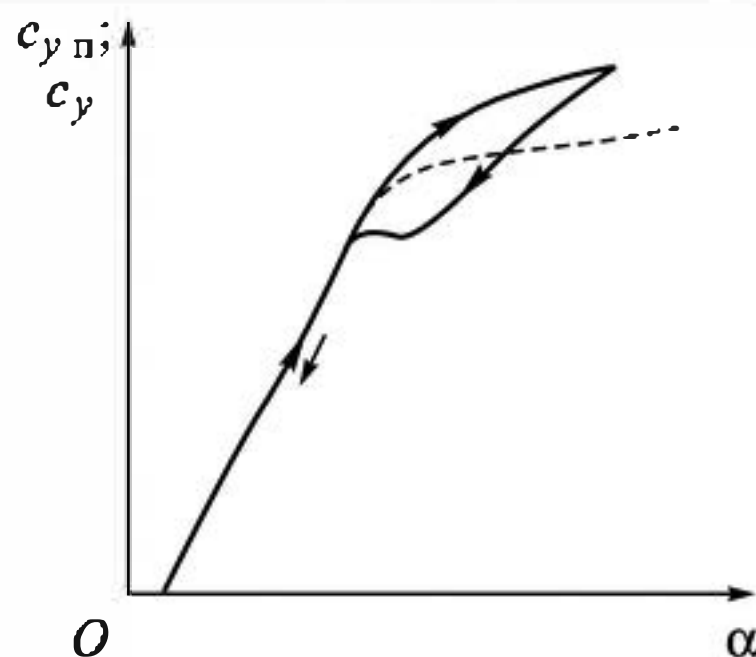


Рис. 13.18. Изменение коэффициентов нормальной силы в зависимости от угла атаки α при статических (штриховая кривая) и летных (сплошная кривая) испытаниях

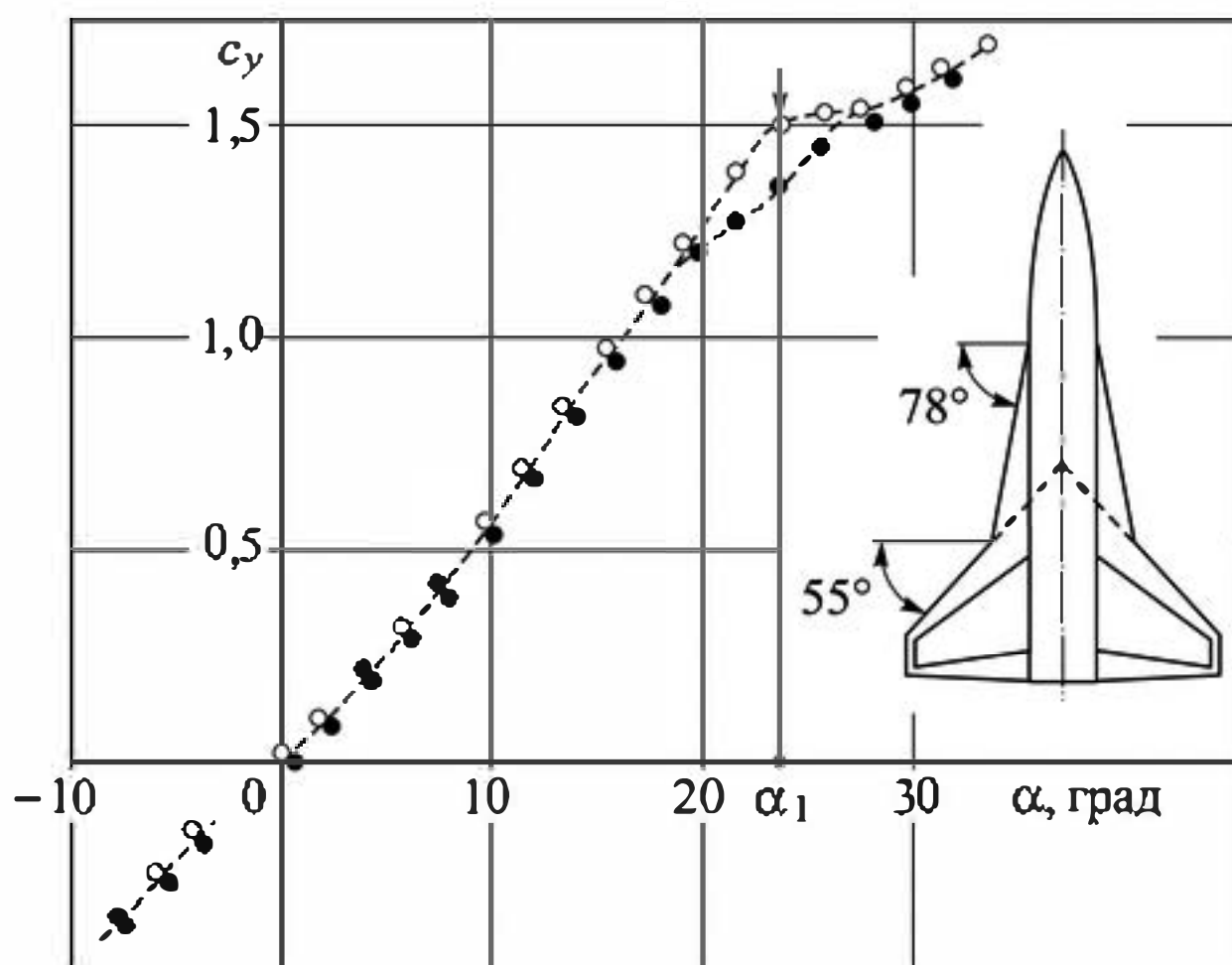


Рис. 13.19. Зависимость коэффициента нормальной силы крыла модели ЛА от угла атаки в условиях стационарного течения

ядер спиральных вихрей у задней кромки крыла с особенностями зависимости $c_y(\alpha)$: при углах атаки $\alpha \geq \alpha_1$ наблюдается резкое уменьшение производной c_y^α .

Зависимости $c_y(\alpha)$, полученные в испытаниях модели с крылом сложной формы в плане, также имеют характерные особенности, позволяющие определить угол атаки перестройки α_1 . В рассматриваемом случае начало разрушения вихревых жгутов в окрестности задней кромки соответствует $\alpha_1 \approx 24^\circ$. При дальнейшем увеличении угла атаки разрушение жгута будет происходить выше по потоку.

Поскольку гистерезисная петля в зависимости $c_y(\alpha)$ при различном направлении изменения углов атаки располагается в окрестности угла α_1 , можно предположить, что неоднозначность структуры обтекания крыла в этом диапазоне углов атаки при относительно малом числе $Re = 0,86 \cdot 10^6$ обусловлена различным характером разрушения вихревых жгутов при увеличении угла атаки и восстановления устойчивой вихревой структуры при его уменьшении.

14. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ АЭРОДИНАМИКА

Создание ЛА связано, как правило, с аэродинамическими исследованиями в аэродинамических трубах. Хотя такие исследования весьма трудоемки и дороги, тем не менее они необходимы и оправданы для обеспечения надежной конструкции ЛА с заданными тактико-техническими параметрами. Тщательные и, следовательно, качественные исследования в аэродинамических трубах способствуют повышению скорости, улучшению аэродинамических, массовых и геометрических характеристик ЛА. При проведении испытаний необходимо соблюдение аэродинамического подобия, так как в этом случае опытные результаты должны быть распространены с модельных на натурные явления, имеющие место при обтекании ЛА.

В главе рассмотрены основные типы аэродинамических экспериментальных установок, приборов и датчиков для измерения параметров газовых течений, а также интегральных аэродинамических характеристик моделей ЛА и их элементов.

14.1. Аэродинамические установки

Лабораторные установки, создающие воздушный поток заданных параметров для экспериментального изучения обтекания тел, называются *аэродинамическими трубами*. Размещая в такой трубе исследуемое тело, можно определить действующие на него аэродинамические нагрузки, тепловые потоки от разогретого газа и поверхности, воспроизвести картину обтекания (аэродинамический спектр).

Аэродинамические трубы, как правило, бывают замкнутого или незамкнутого типа.

В трубах *замкнутого типа* непрерывно циркулирует одна и та же масса газа, поэтому они могут работать при различных давлениях в закрытой рабочей части, обеспечивая тем самым возможность изменения числа Re при испытаниях. Для этого в контуре трубы с помощью компрессора или вакуум-насоса повышают или понижают давление, изменяя при этом плотность газа, а значит, и число Re . В некоторых конструкциях замкнутых труб предусмотрен вывод определенного количества горячего циркулирующего воздуха наружу и забор через специальные клапаны внешнего холодного воздуха для уменьшения температуры установки в процессе работы.

В трубах *незамкнутого типа* газ, пройдя через рабочую часть, выбрасывается наружу, т. е. происходит непрерывная смена потоков газа. Поскольку в каждый момент времени в незамкнутую трубу попадает новый газ, который должен разогнаться в рабочей части до расчетной скорости, расход энергии в такой трубе выше, чем в замкнутой, где необходимо лишь поддерживать движение циркулирующего газа.

Преимуществом труб незамкнутого типа является их меньшая стоимость. Что же касается аэродинамических свойств замкнутых и незамкнутых труб, то они зависят от конструкции рабочей части, а также вида применяемых сопел, диффузоров, обратных каналов и расположенных в местах изгибов этих каналов спрямляющих элементов.

В зависимости от скорости потока в рабочей части аэродинамические трубы подразделяют на *дозвуковые малых скоростей* ($0 < M_{\infty} \leq 0,2$), *дозвуковые больших скоростей* ($0,2 < M_{\infty} \leq 0,8$), *трансзвуковые*, или *околозвуковые* ($0,8 < M_{\infty} \leq 1,2$), *сверхзвуковые* ($1,2 < M_{\infty} \leq 6$) и *гиперзвуковые* ($M_{\infty} > 6$). Гиперзвуковые трубы обычно незамкнутые, с обязательным подогревом рабочего газа и дополнительным разрежением в рабочей части. Остальные аэродинамические трубы выполняют как по замкнутой, так и по незамкнутой схемам.

Различают аэродинамические трубы с *открытой* и *закрытой* рабочими частями, а также с *герметичной камерой*.

В зависимости от длительности работы аэродинамические трубы бывают *кратковременного* и *постоянного действия*. В трубах постоянного действия поток газа создается с помощью осевого компрессора, установленного в контуре аэродинамической трубы и обеспечивающего необходимую степень сжатия газа для достиже-

ния требуемого числа M_∞ . Время действия таких труб практически не ограничено и определяется условиями эксперимента. Трубы кратковременного действия позволяют испытывать модели в течение малого промежутка времени. Питание такой трубы осуществляется от батареи баллонов высокого давления, в которые воздух предварительно накачивается компрессорами. Емкость батареи определяет продолжительность работы аэродинамической трубы. Сюда же относятся вакуумные трубы, в которых перепад давления для получения заданного числа M_∞ в рабочей части создается за счет разрежения на выходе из диффузора.

Аэродинамические трубы должны удовлетворять ряду требований. Это прежде всего равномерность поля скоростей в рабочей части, характеризуемая отношением $(V - V_{\text{ср}})/V_{\text{ср}} = \Delta V/V_{\text{ср}}$, где V , $V_{\text{ср}}$ — соответственно местная и средняя скорости в рассматриваемом поперечном сечении рабочей части трубы. Это отношение должно быть не более $|\Delta V/V_{\text{ср}}| = 0,75\%$.

Поток в рабочей части должен иметь малые углы скоса относительно оси трубы, определяемые в двух плоскостях: между вектором скорости и горизонтальной плоскостью угол $|\Delta\alpha| < 0,5^\circ$ и между вектором скорости и вертикальной плоскостью угол $|\Delta\beta| < 0,5^\circ$.

Существенным параметром является продольный градиент давления dp/dx вдоль оси рабочей части. Наличие такого градиента приводит к появлению выталкивающей силы, действующей на модель в направлении убывания давления и определяемой по формуле

$$\Delta Q = W dp/dx,$$

где W — объем модели.

Достоверность опытных данных во многом определяется степенью турбулентности потока в рабочей части, или начальной турбулентностью,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{3}(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2)} / V_\infty,$$

где V_∞ — усредненная скорость потока в рабочей части трубы; $v_x'^2$, $v_y'^2$, $v_z'^2$ — среднеквадратичные турбулентные пульсации компонент скорости в направлении осей координат.

Поскольку в аэродинамических трубах обычно имеет место изотропная турбулентность, при которой $v_x'^2 = v_y'^2 = v_z'^2$, степень турбулентности

$$\varepsilon = \sqrt{v_x'^2} / V_\infty$$

или в процентах

$$\varepsilon = \left(\sqrt{v_x'^2} / V_\infty \right) \cdot 100 \text{ \%}.$$

Установлено, что турбулентность в атмосфере составляет примерно 0,02 %, однако в рабочей части аэродинамической трубы она, как правило, выше. Уменьшение начальной турбулентности потока до атмосферной особенно важно для малоскоростных труб, поскольку сопротивление ЛА при небольших скоростях полета определяется в большей своей части трением, которое зависит от положения на обтекаемой поверхности точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

Аэродинамические трубы характеризуются также качеством, определяющим экономичность установки:

$$\lambda_T = \frac{\dot{m} V_\infty^2}{2N} = \frac{\rho V_\infty^3 S}{2N},$$

где $\dot{m}$ — массовый расход газа в трубе; ρ_∞ — плотность газа в рабочей части трубы; N — мощность привода; S — площадь ее поперечного сечения.

Чем выше качество трубы λ_T , тем более совершенной является ее конструкция. В современных аэродинамических установках $\lambda_T \approx 4 \dots 5$.

Трубы малых дозвуковых скоростей выполняются незамкнутыми, т. е. они прямого действия. Схема такой трубы всасывающего типа с закрытой рабочей частью показана на рис. 14.1. Вентилятор, вращаемый электромотором, создает разрежение на выходе из диффузора, значение которого определяет скорость V_∞ в рабочей части. Обычно $V_\infty \leq 30 \dots 50$ м/с, поэтому такие трубы ис-

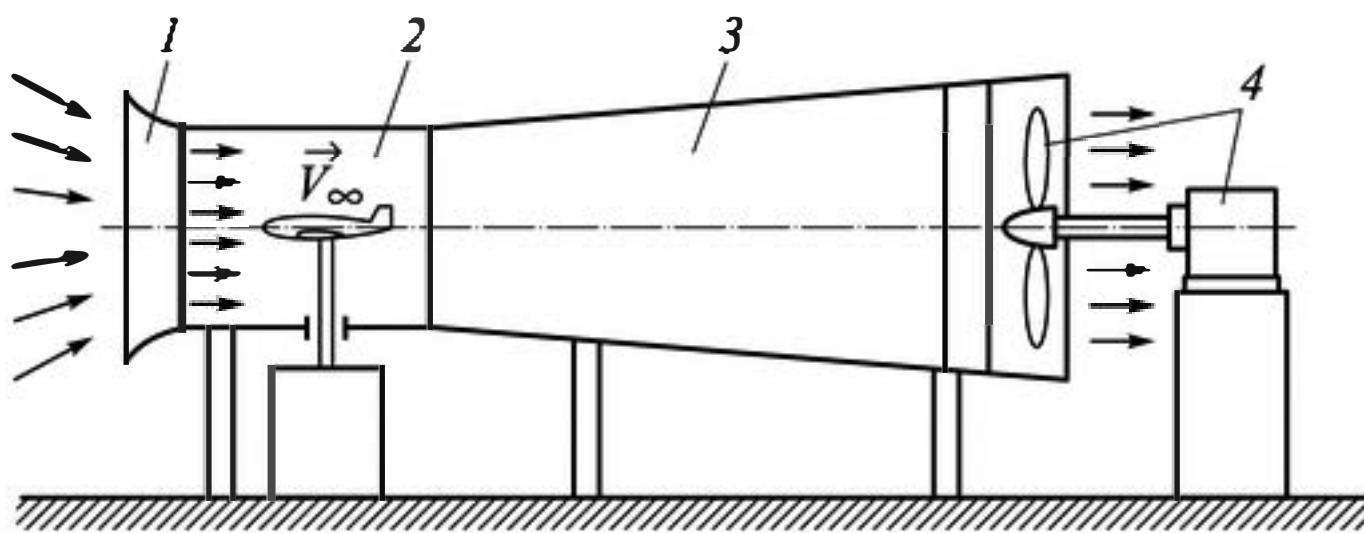


Рис. 14.1. Схема незамкнутой дозвуковой аэродинамической трубы с закрытой рабочей частью:

1 — сопло; 2 — закрытая рабочая часть; 3 — диффузор; 4 — вентилятор с приводом

пользуют для аэродинамических исследований ЛА с малыми скоростями движения.

В аэродинамической трубе с открытой рабочей частью (рис. 14.2) электродвигатель вращает вентилятор, который нагнетает воздух в форкамеру, где размещены решетки хонейкомба и детурбулизирующие решетки. Скорость истечения изменяют путем установки сопел различных диаметров.

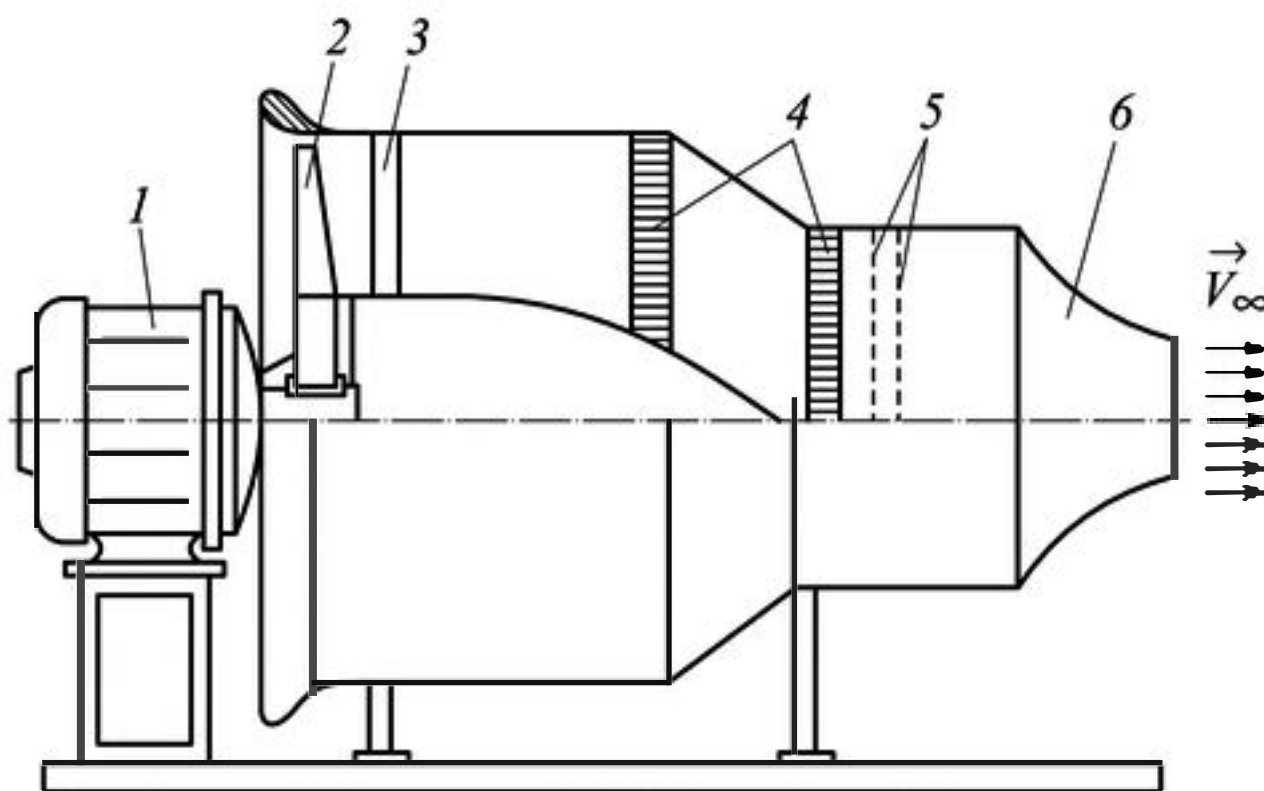


Рис. 14.2. Схема незамкнутой дозвуковой аэродинамической трубы с открытой рабочей частью:

1 – электродвигатель; 2 – вентилятор; 3 – направляющий аппарат; 4 – хонейкомб; 5 – детурбулизирующие решетки; 6 – сопло

Скорости движения воздуха в этих трубах соизмеримы. В трубах, работающих по схеме нагнетания, воздушный поток отличается большей неравномерностью и повышенной турбулентностью, чем в трубах всасывающего типа, однако они более удобны в эксплуатации и их широко применяют для изучения качественной картины обтекания моделей.

В конструкции трубы, приведенной на рис. 14.3, используется осевой вентилятор, приводимый во вращение размещенным вне контура трубы и снабженным регулятором числа оборотов электродвигателем. Это позволяет изменять скорость воздушного потока от 8 до 50 м/с. Канал такой аэродинамической трубы может быть выполнен из многослойной фанеры, что способствует гашению колебаний. Тщательная отделка внутренней поверхности, а также рациональная установка направляющих лопаток и турбулизирующих решеток позволяют получить начальную степень турбулентности не более 0,2 %.

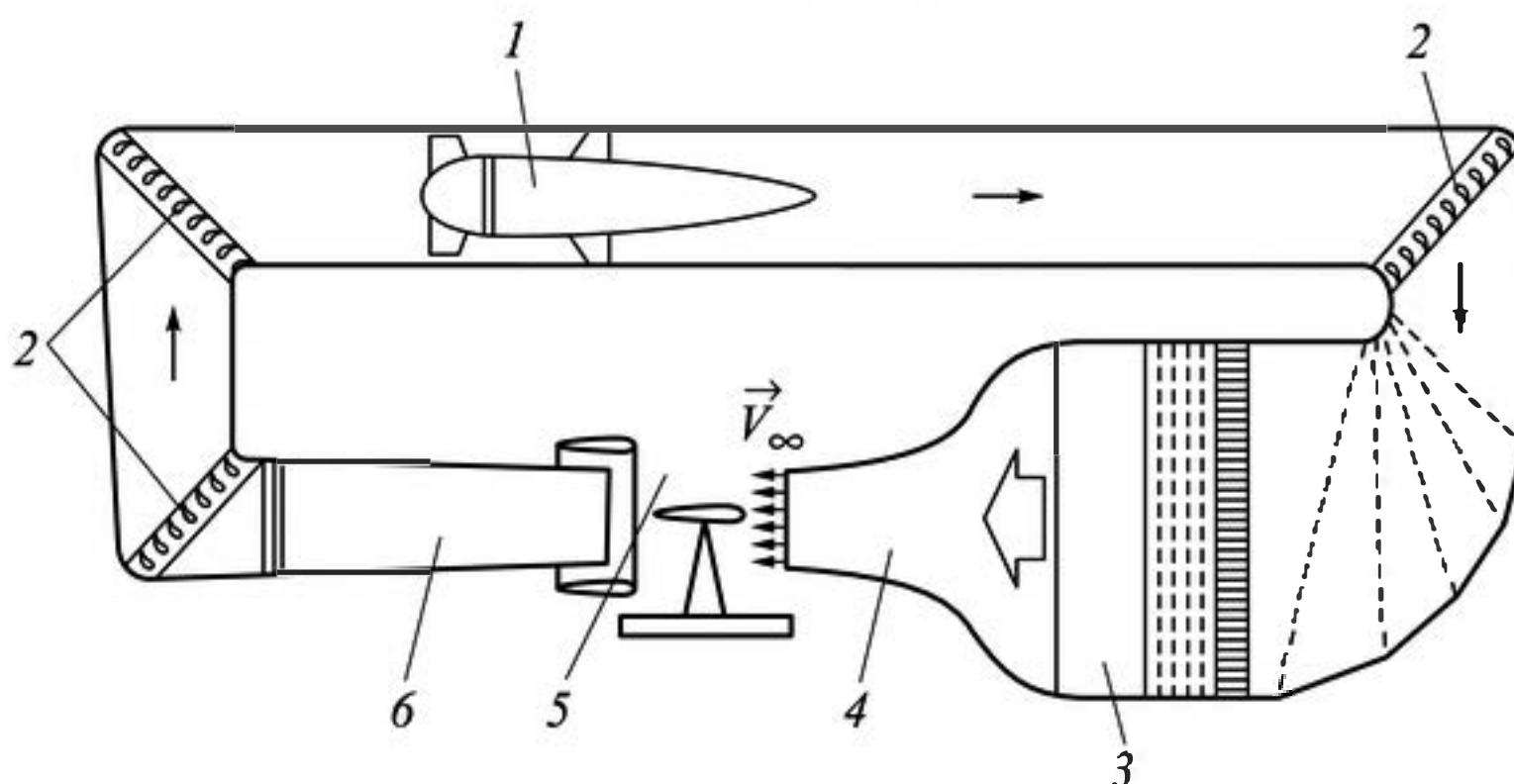


Рис. 14.3. Схема замкнутой дозвуковой аэродинамической трубы с открытой рабочей частью:

1 – вентилятор; 2 – лопасти; 3 – форкамера; 4 – сопло; 5 – рабочая часть; 6 – диффузор

Труба имеет вертикальную конструкцию, т. е. вентилятор и двигатель закреплены над рабочей частью, и снабжена специальным координатным устройством с шаговыми двигателями для перемещения датчиков по трем осям. Для закрепления моделей используют сменные подвижные монтажные столы, что позволяет легко менять их, проводя предварительную подготовку модели вне рабочей части трубы.

Для исследований при больших до- и трансзвуковых скоростях используют трубы, имеющие замкнутый контур и закрытую рабочую часть (рис. 14.4). Одна из действующих труб с площадью сечения рабочей части $2,92 \times 2,01 \text{ м}^2$, длиной 3,05 м и $M_\infty = 0,2 \dots 0,94$ имеет привод мощностью 10 500 кВт. Для поддержания теплового режима воздуха в контуре трубы с помощью клапанов 4 осуществляется воздухообмен с атмосферой.

Для более полного моделирования режимов, т. е. чисел M и Re , применяют трубы с переменной плотностью потока в рабочей части. Их также выполняют по замкнутой схеме с герметичным контуром и рабочей частью, аналогичной приведенной на рис. 14.4. В конструкциях таких труб предусмотрены средства повышения или понижения давления в контуре трубы, что обеспечивает изменение плотности, а следовательно, числа Re .

Сверхзвуковые аэродинамические трубы бывают как кратковременного, так и непрерывного действия. В сверхзвуковой трубе

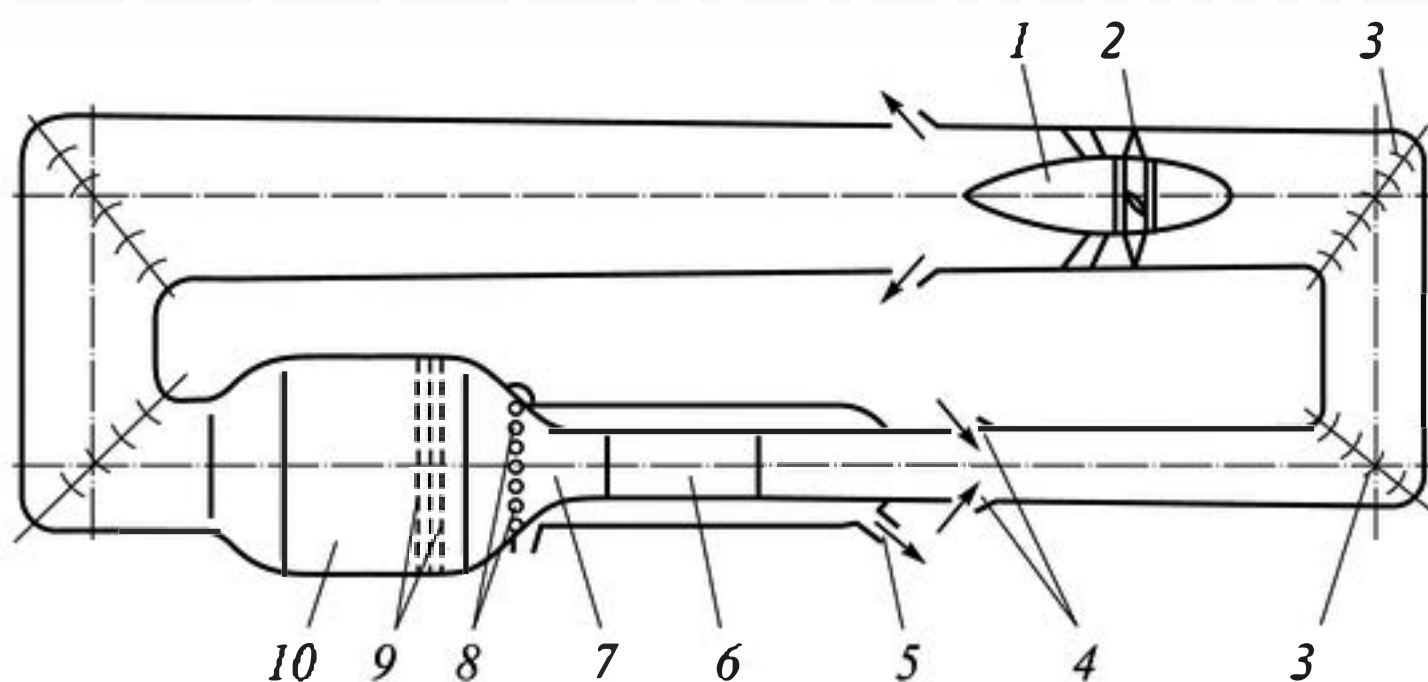


Рис. 14.4. Схема до- и трансзвуковой аэродинамической трубы с закрытой рабочей частью:

1 – привод; 2 – компрессор (вентилятор); 3 – направляющие лопатки; 4 – перепускные клапаны; 5 – клапан для удаления газа; 6 – рабочая часть; 7 – сопло; 8 – отверстия для отсоса пограничного слоя; 9 – решетки; 10 – форкамера

непрерывного действия, которая может быть выполнена по замкнутой или открытой схеме, движение газа обеспечивается мощными осевыми компрессорами. Для обеспечения постоянной температуры воздуха, циркулирующего в трубе, на входе в компрессоры установлены водяные охладители.

Трубы кратковременного действия чаще выполняют с запасом сжатого воздуха в баллонах (относятся к типу баллонных аэродинамических установок). В таких трубах (рис. 14.5) с помощью компрессоров воздух предварительно закачивается в баллоны под высоким давлением (до $250 \cdot 10^5$ Па), из которых по трубопроводам и систему дросселей-задвижек подается в форкамеру (камеру торможения), а из нее поступает в сопло и затем в рабочую часть. После прохождения рабочей части сверхзвуковой газовый поток тормозится сначала в сверхзвуковом диффузоре до дозвуковой скорости, а затем в дозвуковом диффузоре и попадает в глушитель. Время работы трубы определяется запасом воздуха в баллонах и расходом газа через ее рабочее сечение. Для достижения сверхзвуковых скоростей используют профилированные сопла (сопла Лавалья). Обычно изменение площади поперечного сечения достигается установкой двух профилированных вставок (например, верхней и нижней) и двух плоских стенок (боковых). Каждому числу Маха соответствуют индивидуальные вставки, при смене которых обеспечивается дискретное изменение числа M . В таких трубах число M изменяется от 1,5 до 4,5.

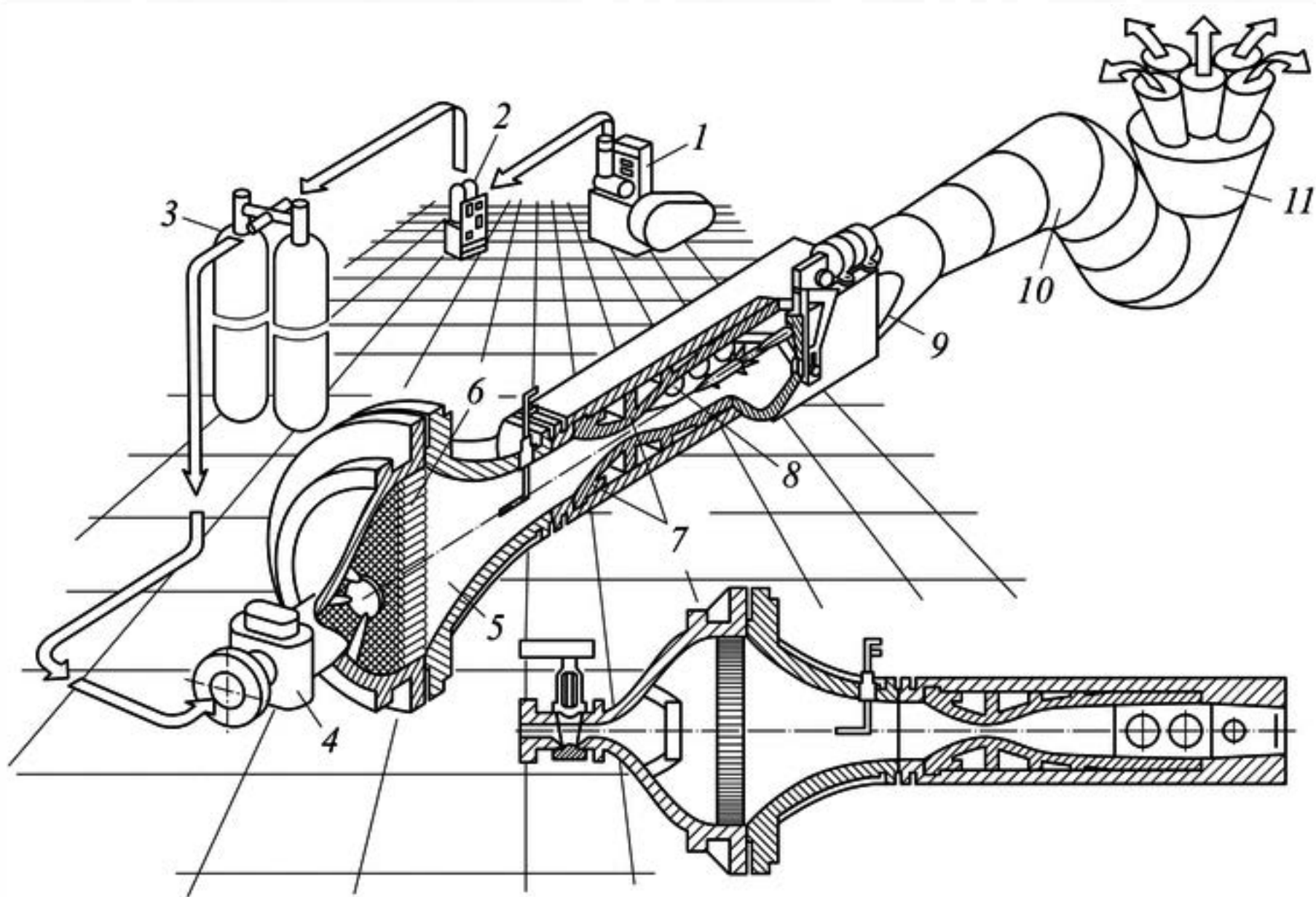


Рис. 14.5. Сверхзвуковая баллонная аэродинамическая труба:

1 – компрессор; 2 – осушитель воздуха; 3 – баллоны высокого давления; 4 – задвижка-редуктор; 5 – форкамера; 6 – хонейкомб; 7 – сопло; 8 – рабочая часть; 9 – сверхзвуковой диффузор; 10 – дозвуковой диффузор; 11 – глушитель

Для сохранения стабильного режима работы сверхзвуковой трубы при испытаниях необходимо использовать специальные устройства, поддерживающие постоянное давление в форкамере при изменяющемся (падающем) давлении в баллонах. Малое время работы сверхзвуковой трубы требует автоматизации проведения эксперимента с использованием современных электронных измерительных и регистрирующих устройств и вычислительной техники.

Схема сверхзвуковой вакуумной аэродинамической трубы кратковременного действия приведена на рис. 14.6. После открытия быстродействующей задвижки 6 воздух через форкамеру 1 и спрямляющие решетки 2 поступает в сопло, где разгоняется до сверхзвуковой скорости. После обтекания модели, установленной в рабочей части 4, воздух поступает в диффузор 5, а затем в резервуар 7, в котором предварительно создается разрежение с помощью вакуумного насоса 8.

Вакуумные трубы применяют при исследовании движения разреженных газов, поскольку они позволяют получать в рабочей час-

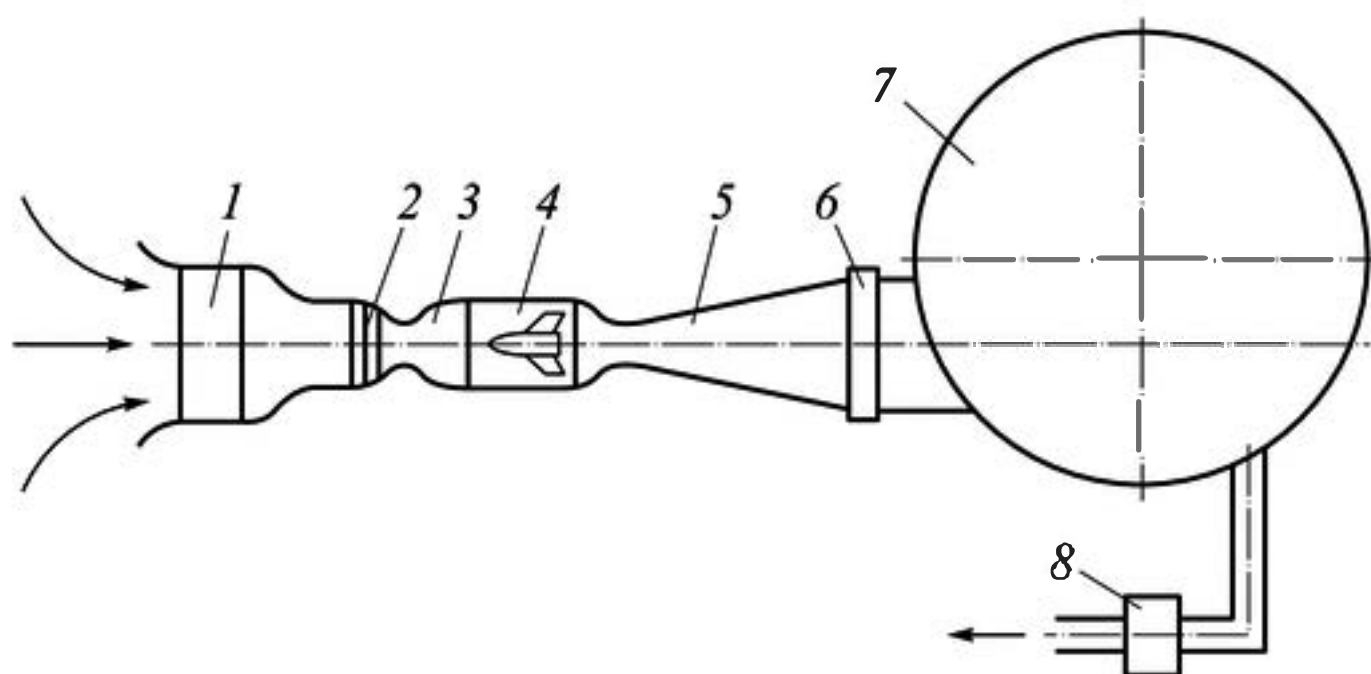


Рис. 14.6. Схема сверхзвуковой вакуумной аэродинамической трубы:
1 – форкамера; 2 – спрямляющие сетки и решетки; 3 – сопло; 4 – рабочая часть;
5 – диффузор; 6 – быстродействующая задвижка; 7 – резервуар (вакуумная
емкость); 8 – вакуумный насос

ти воздушный поток с малой плотностью, т. е. с небольшим числом Рейнольдса.

Для достижения большого числа Маха необходимо существенно увеличить перепад давлений между форкамерой и рабочей частью, а также повысить температуру торможения, чтобы исключить конденсацию частиц воздуха в рабочей части. Поэтому аэродинамические трубы для исследования гиперзвуковых течений имеют ряд конструктивных особенностей (рис. 14.7). В таких трубах газ или воздух поступает в подогреватель, а после регулирующей задвижки — в сопло (обычно используют сменные сопла круглой формы), где он разгоняется до гиперзвуковых скоростей, а затем поступает в вакуумную емкость, в которой установлен специальный теплопоглотитель. Разрежение предварительно создается в вакуумной камере и в канале трубы с помощью вакуумного насоса. Установка подогревателя позволяет увеличить температуру в рабочей части и избежать конденсации частиц воздуха. Вместо воздуха также используют такие газы, как фреон-14, азот, гелий. Применение вакуумной емкости позволяет увеличить перепад давлений без его повышения в баллонах высокого давления. Разрежение в рабочей части можно создавать с помощью эжекторных насосов, запитываемых от баллонов со сжатым газом, или подключением рабочей камеры к эксгаустеру. В гиперзвуковых аэродинамических трубах число Маха можно повысить до 15...20, а температуру торможения — до 3 000 К, что обеспечивает исследование обтекания космических ЛА.

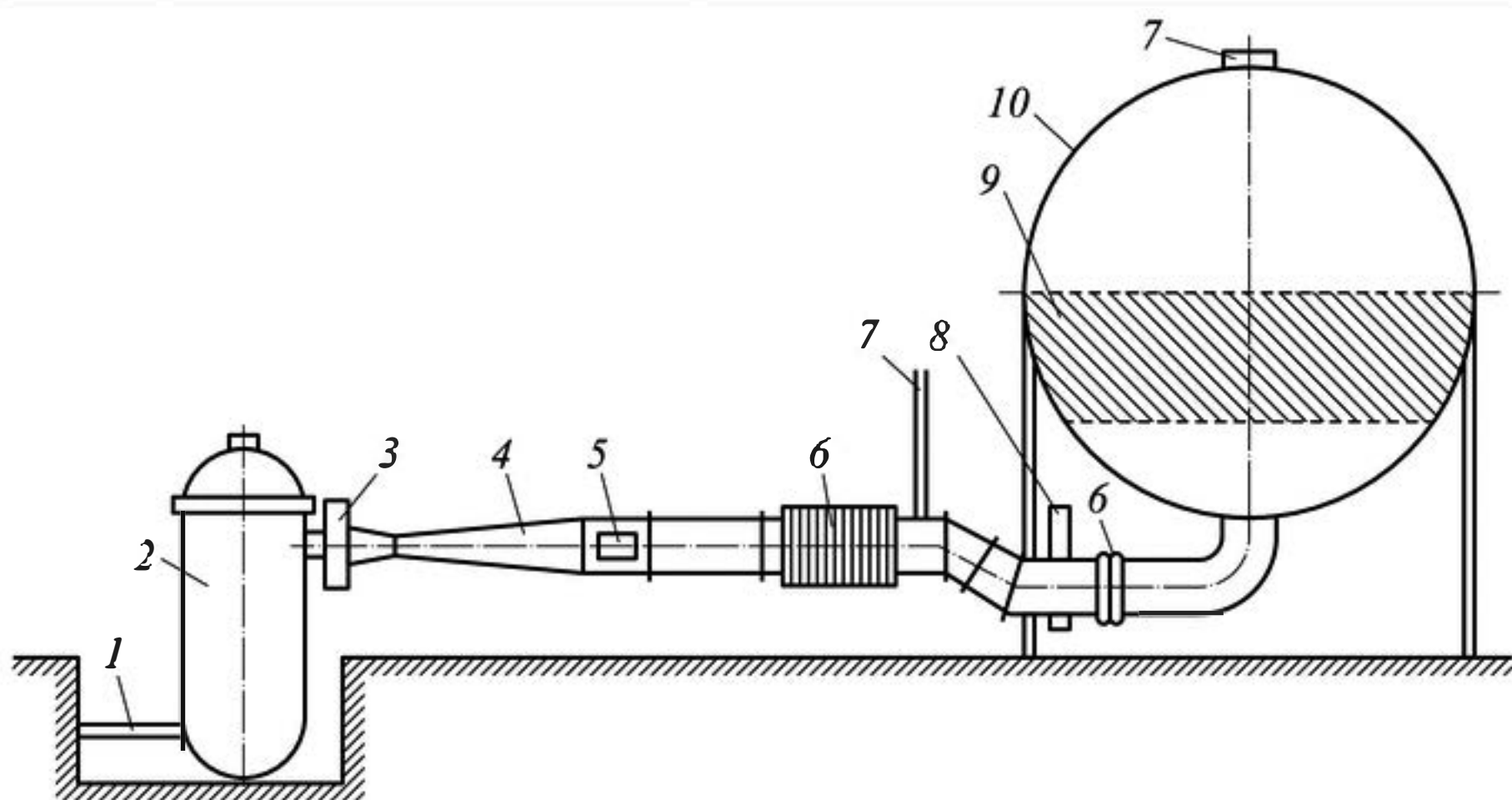


Рис. 14.7. Схема гиперзвуковой аэродинамической трубы:

1 – трубопровод подачи газа высокого давления; 2 – подогреватель; 3 – задвижка; 4 – сопло; 5 – рабочая часть; 6 – сильфоны; 7 – трубопроводы к вакуумному насосу; 8 – вакуумная задвижка; 9 – теплопоглотитель; 10 – вакуумная камера

Ударные аэродинамические трубы представляют собой экспериментальные установки для исследования нестационарного обтекания, кинетики химических реакций и теплофизических процессов в газовом потоке. В простейшем виде ударная труба (рис. 14.8) содержит два отсека, разделенных диафрагмой. В отсеке высокого давления создают высокое давление, а из отсека низкого давления, где размещена исследуемая модель, откачивают воздух, создавая разрежение и обеспечивая значительный перепад давлений.

Пусть давление в отсеке низкого давления p_1 , а в камере высокого давления — p_4 (рис. 14.9). При определенном перепаде давлений диафрагма D разрушается. Примем упрощенную схему, при которой разрушение происходит мгновенно, а передняя контактная поверхность газа высокого давления (толкающего) является плоской. Под

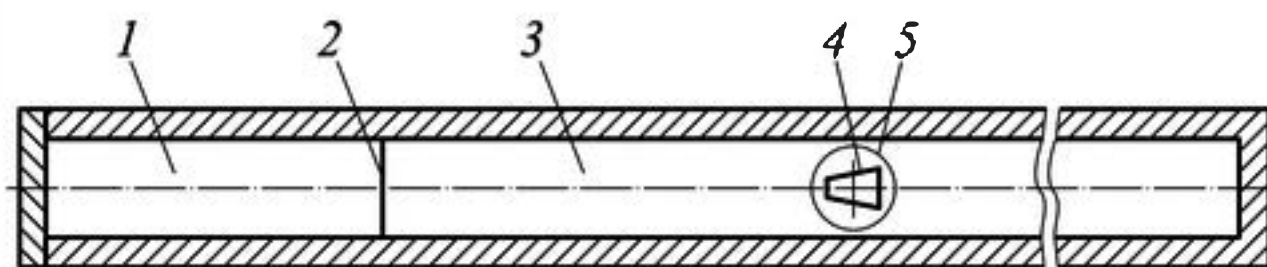


Рис. 14.8. Схема ударной аэродинамической трубы:

1 – отсек высокого давления; 2 – диафрагма; 3 – отсек низкого давления; 4 – модель; 5 – смотровое окно

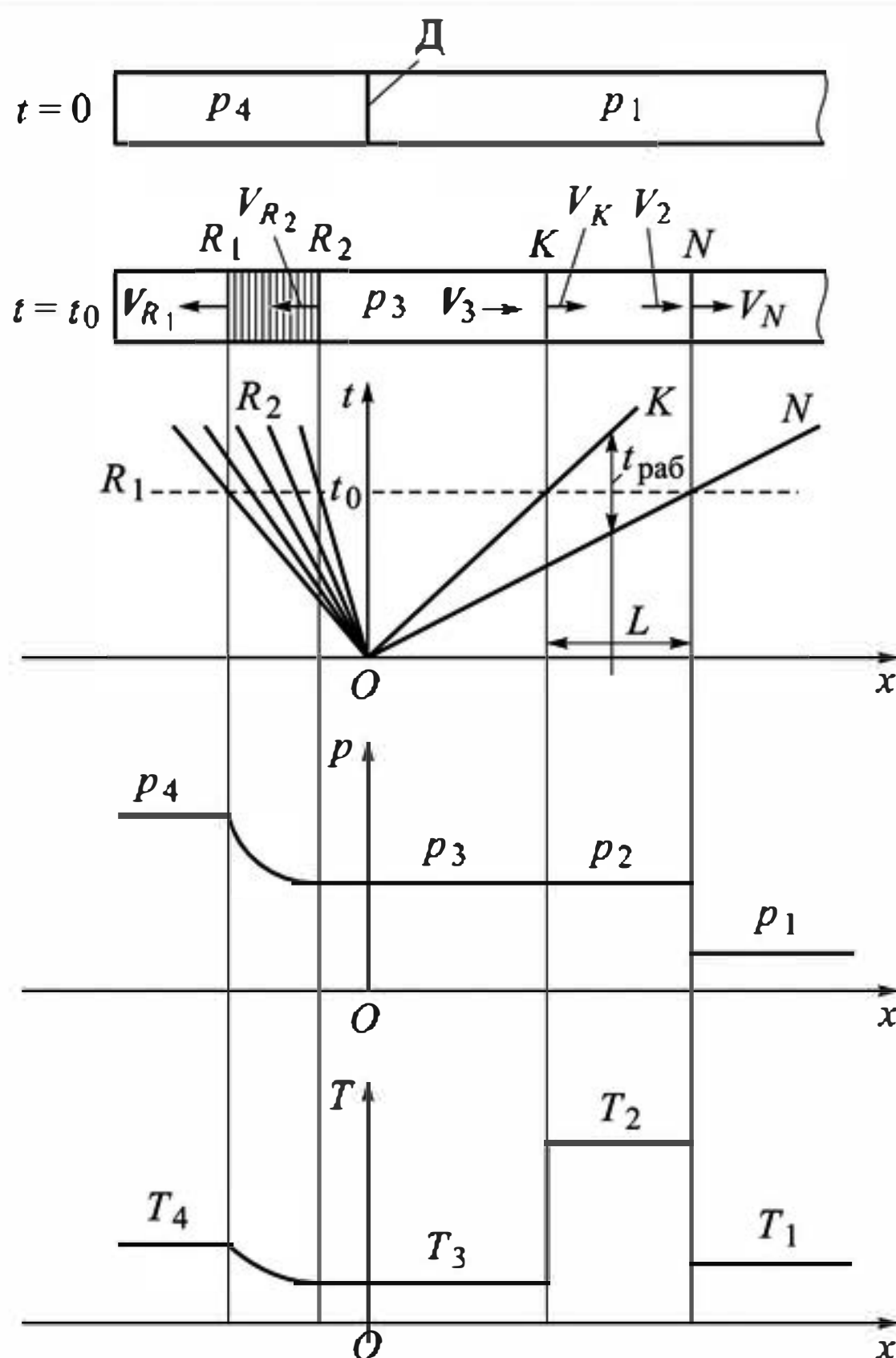


Рис. 14.9. Изменение параметров в однодиафрагменной ударной аэродинамической трубе

действием толкающего газа в область низкого давления начинает распространяться ударная волна, за которой образуется область уплотненного газа с параметрами p_2 , ρ_2 , T_2 , ..., получившая название «пробка» и перемещающаяся в направлении движения ударной волны. Поскольку толкающий газ расширяется, то его параметры уменьшатся по сравнению с начальными и станут равными p_3 , ρ_3 , T_3 , ...

На рис. 14.9 изменение параметров газа приведено в координатах Oxt , Oxp и OxT , а началом отсчета времени является момент разрушения диафрагмы. Ударная волна N распространяется со скоростью V_N , а контактная поверхность — со скоростью V_K . Через промежуток времени t_0 ударная волна N , контактная поверхность K и волны разрежения R_1 , R_2 расположатся так, как показано на рисунке. В координатах Oxt положения контактной поверхности и ударной волны

в каждый момент времени отображают лучи OK и ON . Следует отметить, что в область высокого давления распространяется серия волн разрежения, передняя из которых движется со скоростью $V_{R_1} = a_4$, а замыкающая — со скоростью $a_3 < a_4$, так как температура в зоне разрежения падает ($T_3 < T_4$). Вследствие того, что волна, движущаяся со скоростью V_{R_1} , распространяется в неподвижном газе, а волна, имеющая скорость a_3 , — в движущейся среде, скорость волны относительно трубы будет $V_{R_2} = a_3 - V_3$ (где V_3 — скорость толкающего газа, направленная в сторону отсека низкого давления). В результате образуется область течения, расположенная между рабочей пробкой и волнами разрежения.

Для контактной поверхности скорости справа и слева от нее, как и давления, одинаковы, т. е. $p_2 = p_3$. Но соответствующие температуры не равны, поскольку по обе стороны от контактной поверхности находятся разные газы, причем один расширяется, а другой сжимается.

Для исследования обтекания тел высокотемпературным потоком рассматривают течение в рабочей пробке. Чем дальше по потоку от диафрагмы расположена модель, тем больше продолжительность $t_{\text{раб}}$ работы трубы, так как по мере удаления от диафрагмы длина пробки возрастает. Отличительной особенностью ударных труб является очень малое время $t_{\text{раб}}$ (сотые и даже тысячные доли секунды), необходимое для достижения высоких значений давления торможения и температуры газа в пробке.

Еще одним методом получения высокоскоростного потока, обтекающего модель и имеющего большую температуру, является сжатие газа поршнем, быстро движущимся в канале аэродинамической установки адиабатического сжатия (рис. 14.10). В отсеке 1 высокого давления нагнетается толкающий газ, а в камере 8 и рабочей части 6 создается вакуум. По достижении заданного давления происходит разрыв диафрагмы 2 и поршень начинает движение по отсеку 3 низкого давления, сжимая находящийся в нем газ до давления $2 \cdot 10^{10}$ Па. При таком сжатии газ нагревается до 3 000...4 000 °С.

В трубе адиабатического сжатия возможны два режима работы. В случае применения тяжелого поршня (первый режим) скорость его движения обычно меньше скорости звука в толкаемом газе и разрыв газа в отсеке 3 происходит без образования ударной волны, т. е. изоэнтропически.

При использовании легкого поршня (второй режим) скорость его движения резко возрастает и может существенно превысить ско-

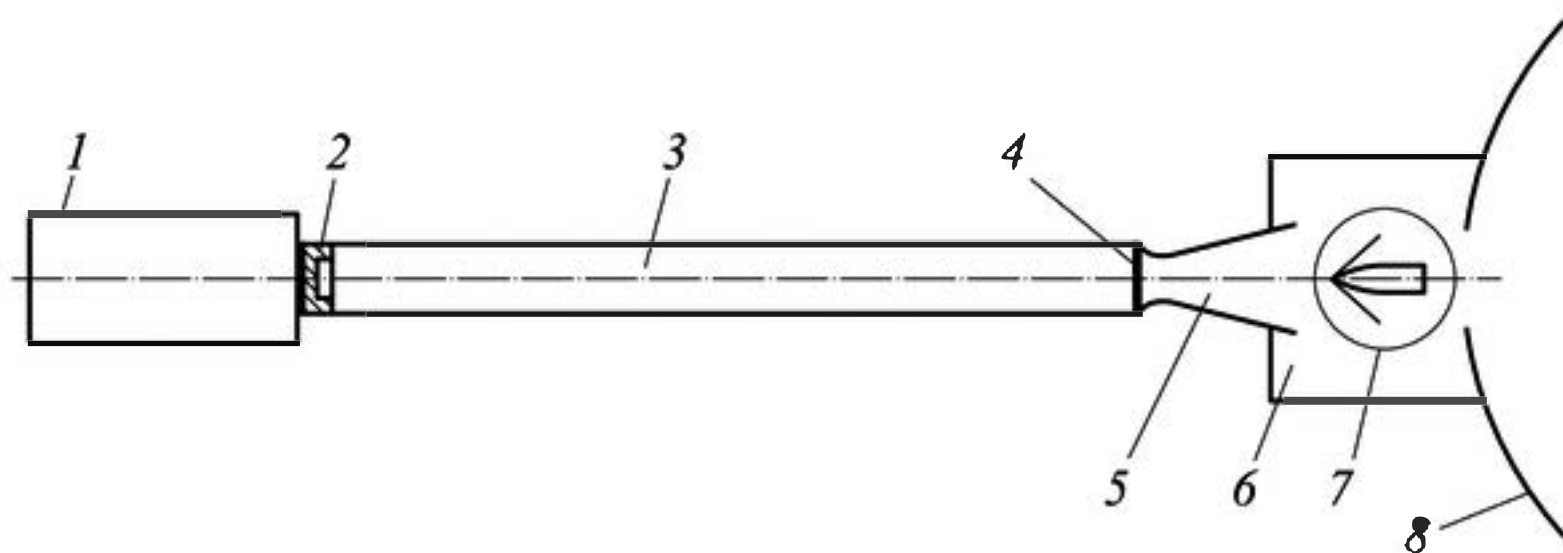


Рис. 14.10. Схема аэродинамической установки адиабатического сжатия: 1 – отсек высокого давления; 2, 4 – диафрагмы; 3 – отсек низкого давления; 5 – сопло; 6 – рабочая часть; 7 – окно с оптическими стеклами; 8 – вакуумная камера

рость звука в газе. В этом случае обязательно возникает ударная волна, располагающаяся перед движущимся поршнем. Достигнув диафрагмы 4, установленной перед критическим сечением сопла, ударная волна отражается от нее и распространяется обратно к поршню. В результате многократных отражений ударной волны от диафрагмы и поршня рабочий газ претерпевает неизоэнтропическое сжатие и сильно разогревается. По достижении заданного давления происходит разрыв диафрагмы 4 и истечение газа через сопло. Исследования показывают, что температура газа в этом случае оказывается значительно выше, чем при использовании тяжелого поршня. Применение водорода или гелия в качестве толкающего газа обеспечивает увеличение скорости движения легкого поршня и, следовательно, повышение температуры газа перед соплом.

В установках адиабатического сжатия наряду с возможностью получения высокоскоростного и сильно разогретого потока газа большой плотности, обеспечивающего моделирование полета с гиперзвуковыми скоростями в плотных слоях атмосферы, значительно больше по сравнению с ударными трубами время рабочего режима.

14.2. Измерение параметров потока в аэродинамических трубах

Измерительные устройства

Аэродинамический эксперимент предусматривает большой комплекс измерений параметров газового потока, обтекающего модель ЛА. Одна часть этих измерений связана с исследованием свойств и

параметров набегающего (невозмущенного) течения, другая — с определением параметров газа в возмущенном потоке: непосредственно на поверхности обтекаемого тела или вблизи него.

Экспериментальное изучение газовых течений основано на использовании различных по конструкции и назначению измерительных приборов и устройств. Та часть устройства, на которую воздействует измеряемая физическая величина, называется *первичным измерительным устройством* (датчиком); другая часть, работающая в комплексе с датчиком и воспринимающая от него по линии связи сигналы для их отображения, — *вторичным измерительным устройством*. Например, термопара (первичное устройство) передает сигнал регистрирующему потенциометру (вторичный прибор).

Датчики бывают *пассивные* и *активные*, т. е. генераторные. У первых под воздействием измеряемого физического параметра, например температуры, меняется одна из характеристик, например сопротивление, которую измеряют электрически. Вторые при измерении физического параметра вырабатывают (генерируют) электрический сигнал, который в дальнейшем регистрируется. Средства измерений подразделяют на *рабочие*, предназначенные для регулярных измерений, *образцовые*, применяемые для проверки и градуировки, и *эталонные*, используемые для хранения и воспроизведения единиц измерения с максимальной точностью.

Приборы для измерения давления

Основным элементом приемника давления являются дренажные отверстия (каналы), воспринимающие давление. У насадка (приемника статического давления) это отверстие должно располагаться на боковой поверхности при условии, что линия тока исследуемого течения совпадает с касательной к этой поверхности в месте расположения дренажной точки (рис. 14.11).

У насадка полного давления дренажное отверстие совпадает с точкой полного торможения (критической точкой) на обтекаемой поверхности (рис. 14.12). Кроме того, существуют комбинированные насадки для одновременного измерения и статического, и полного давления (рис. 14.13). В зависимости от числа M_∞ набегающего потока давление, измеряемое в точке торможения, рассчитывают так. При малых дозвуковых скоростях ($M_\infty \leq 0,2$)

$$p_0 = p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2 / 2,$$

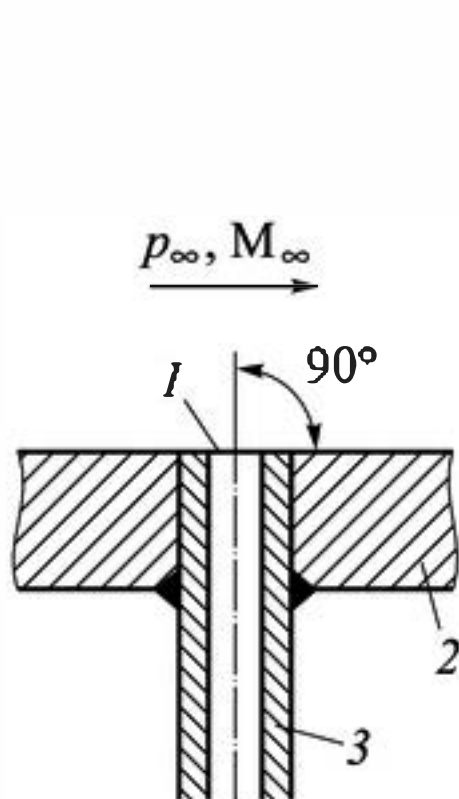


Рис. 14.11. Схема приемника статического давления:
1 – приемное отверстие; 2 – стенка (модель); 3 – дренажная трубка

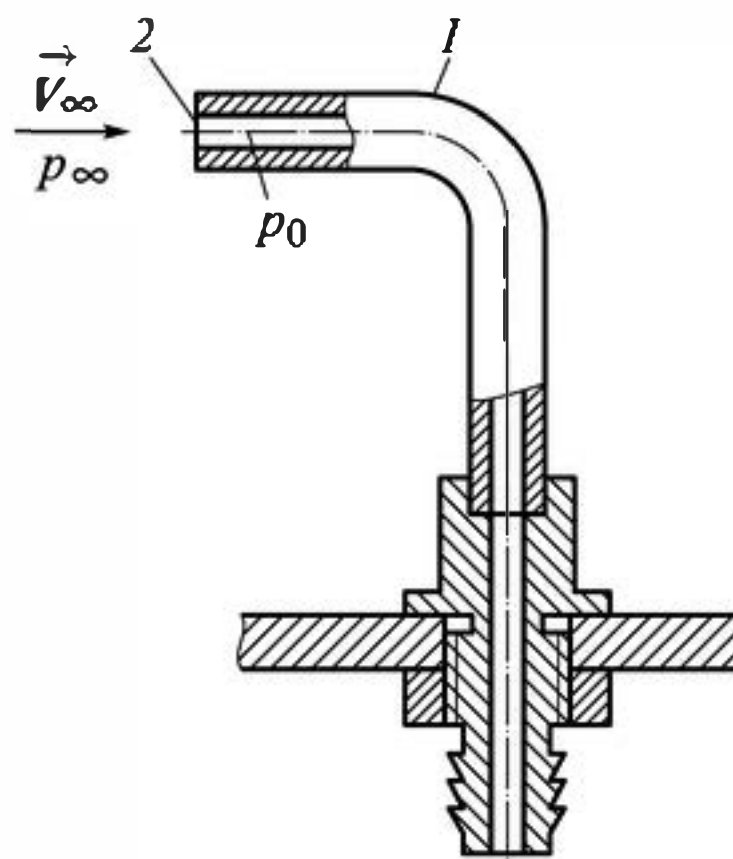


Рис. 14.12. Схема насадки для измерения полного давления (трубка Пито):
1 – приемная трубка; 2 – приемное отверстие

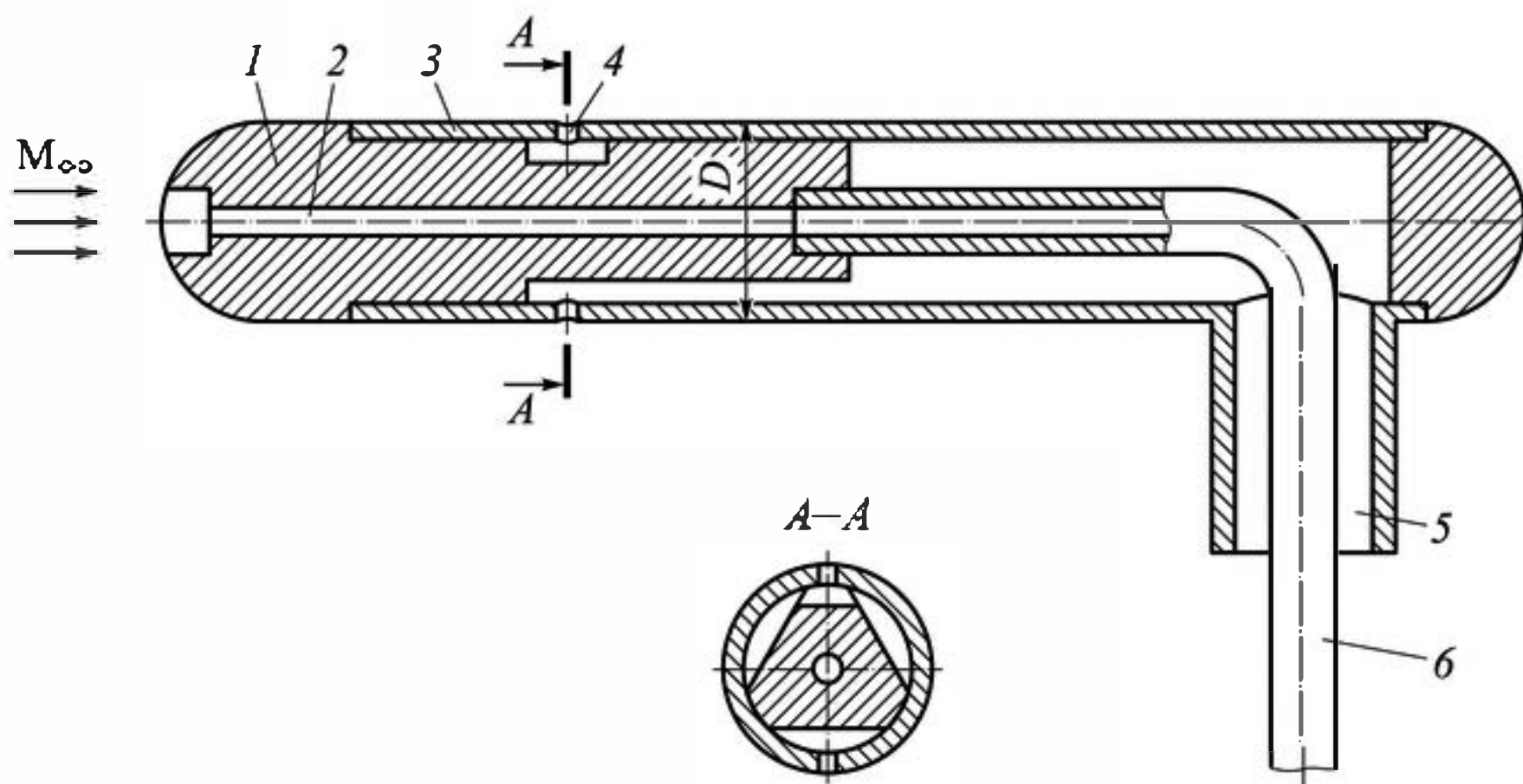


Рис. 14.13. Схема комбинированного насадка (трубки Пито – Прандтля):
1 – головная часть; 2 – приемник полного давления; 3 – корпус; 4 – приемник статического давления; 5 – державка; 6 – дренажная трубка

при умеренных дозвуковых скоростях ($0,2 < M_\infty < 1$)

$$p_0 = p_\infty \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right)^{k/(k-1)},$$

а при сверхзвуковых скоростях ($M_\infty > 1$)

$$p'_0 = p_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right)^{k/(k-1)},$$

$$\text{где } p_2 = p_\infty \left(\frac{2k}{k+1} M_\infty^2 - \frac{k-1}{k+1} \right), \quad M_2 = \sqrt{\frac{2 + (k-1)M_\infty^2}{2kM_\infty^2 - (k-1)}}, \text{ т. е. воспри-}$$

нимаемое датчиком давление равно давлению торможения за прямым скачком уплотнения.

Возмущения от приемника по пневмометрической трассе (тонким дренажным трубкам) передаются к устройству, фиксирующему измеряемое давление.

Для измерения давления (разности давлений) используют манометры. Выбор конкретного вида манометра, соответствующего определенным условиям эксперимента, определяется предполагаемым значением измеряемого давления, характером его изменения (установившийся или нестационарный процесс), частотой пульсации, требуемой точностью и характером регистрации измерений. В экспериментальных исследованиях применяют манометры абсолютного и избыточного давления, вакуумметры, а также дифференциальные манометры (для измерения разности давлений).

В аэродинамическом эксперименте широко используют жидкостные манометры, принцип действия которых заключается в уравновешивании измеряемого перепада давлений $p_1 - p_2$ массой (весом) столба жидкости (рис. 14.14):

$$p_1 - p_2 = \rho g \Delta h \sin \beta,$$

где ρ — плотность жидкости в манометре; Δh — разность уровней жидкости в правом и левом коленях отсчетной трубки манометра, $\Delta h = h_2 - h_1$; β — угол наклона трубок манометра.

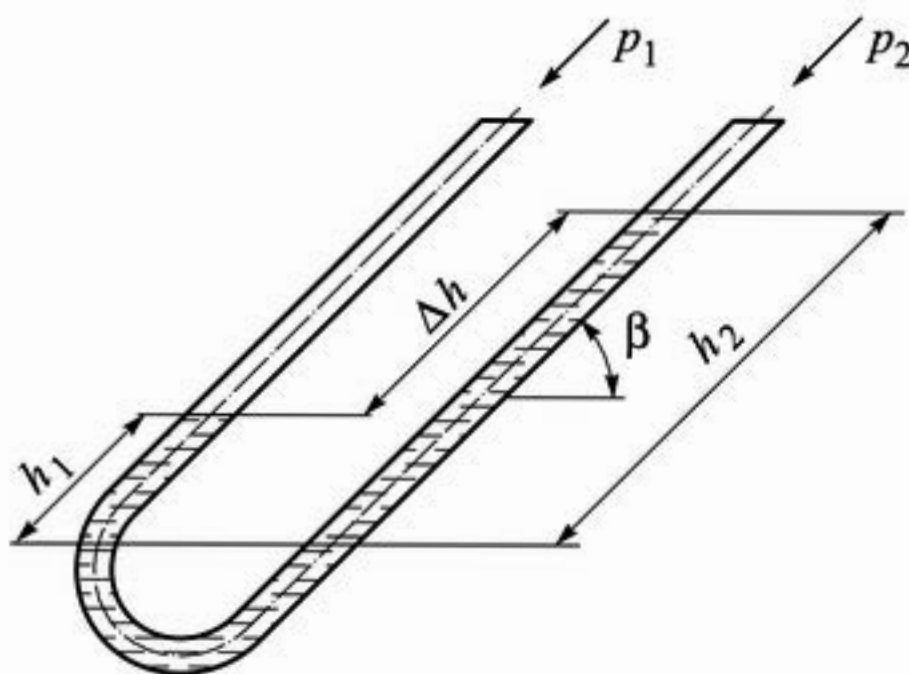


Рис. 14.14. Схема жидкостного дифференциального манометра

Качество манометра характеризуется его чувствительностью, т. е. отношением разности уровней жидкости к соответствующему перепаду давлений:

$$\Delta h / (p_1 - p_2) = (\rho g \sin \beta)^{-1}.$$

Из этой зависимости следует, что чувствительность жидкостного манометра возрастает при использовании легких жидкостей и с уменьшением угла β наклона трубок манометра.

Рассмотренные жидкостные манометры чаще всего используют для измерений в установившихся потоках при малых перепадах давлений. Следует отметить наглядность показаний таких манометров, т. е. при измерении давления удастся визуально определить его значение.

Действие деформационных манометров основано на зависимости упругих свойств чувствительного элемента от измеряемого давления. В обычных манометрах, например стрелочных, деформация чувствительного элемента регистрируется механически. Если же устройство регистрирует значение измеряемого сигнала, характеризующего определенный уровень давления, то будем называть его датчиком давления. Различают индуктивные, емкостные, тензометрические, пьезоэлектрические и другие датчики давления.

Индуктивный датчик давления (рис. 14.15) содержит корпус в виде двух одинаковых магнитопроводов с катушками, установленных с зазором, в котором размещена стальная мембрана. Измеряемое давление p_1 действует на диафрагму через отверстия в корпусе, причем с противоположной стороны диафрагмы имеется опорное давление p_2 . Разность давлений $p_1 - p_2$ вызывает прогиб мембраны, изменение зазоров у магнитопроводов и, как следствие, магнитного сопротивления половин датчика. В результате разбаланса измерительного моста возникает сигнал, пропорциональный деформации мембраны, т. е. перепаду давлений. Требуемая чувствительность индуктивного датчика достигается выбором соответствующей толщины мембраны и усилительной электронной аппаратуры.

Индуктивным датчиком можно измерять как статическое, так и изменяющееся давление. Поскольку эти датчики могут иметь небольшие размеры, их используют для измерения давления в ограниченных по размеру областях течения газа.

Одна из схем емкостного датчика показана на рис. 14.16. В корпусе, внутренняя часть которого выполнена из диэлектрика, установлены электроды, образующие с закрепленной в центре мембра-

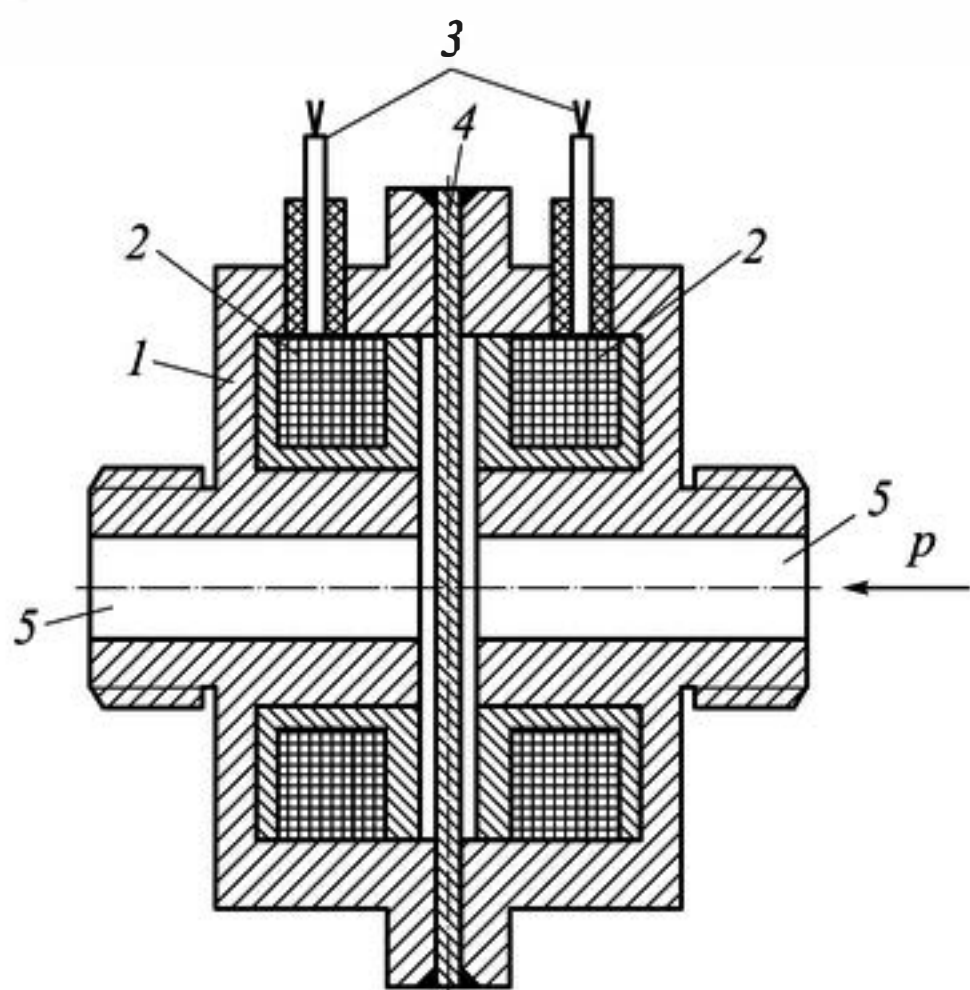


Рис. 14.15. Схема индуктивного датчика:

1 – корпус; 2 – катушки; 3 – выводы; 4 – мембрана; 5 – каналы подачи давления

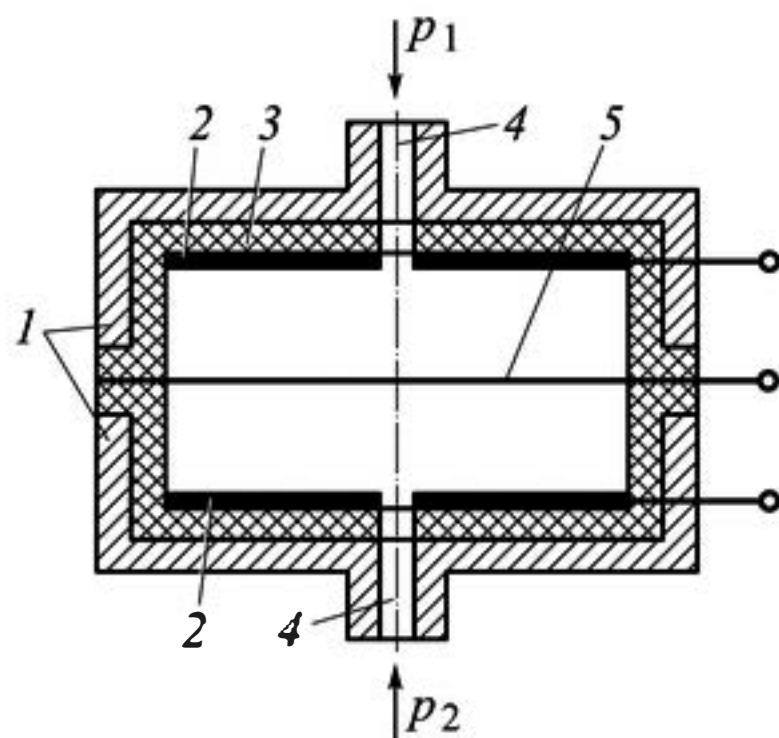


Рис. 14.16. Схема дифференциального емкостного датчика:

1 – корпус; 2 – электроды; 3 – изоляция (диэлектрик); 4 – каналы подачи давления; 5 – мембрана

ной, дифференциальный конденсаторный (емкостной) преобразователь. Под действием разности давлений $p_1 - p_2$ происходит прогиб мембраны, вызывающий изменение емкости пары конденсаторов. Оба электрода (верхний и нижний) образуют плечи измерительного моста. Емкостные датчики отличаются простотой конструкции, высокой чувствительностью и малой инерционностью, т. е. возможностью измерения высокочастотных колебаний давления.

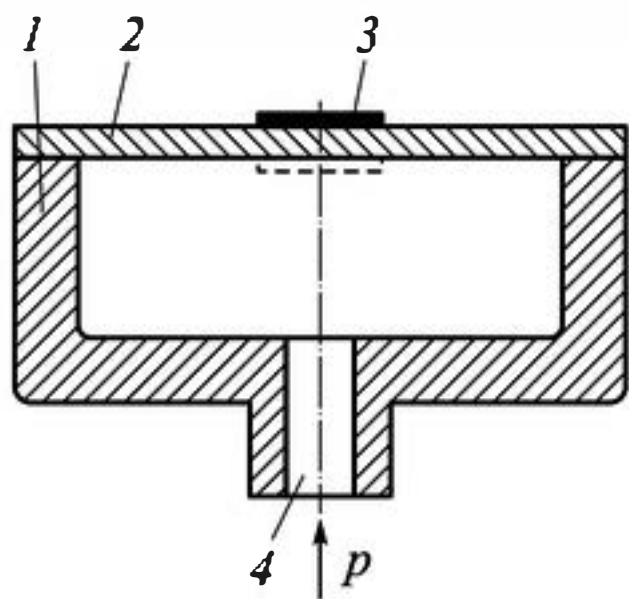


Рис. 14.17. Схема тензометрического датчика:

1 – корпус; 2 – мембрана; 3 – тензорезистор; 4 – канал подачи давления

В тензометрических датчиках на упругий деформируемый элемент наклеен тензорезистор, включенный в электрическую измерительную схему (рис. 14.17). Тензометрические датчики бывают проволочными или из полупроводникового материала. Они позволяют измерять как постоянные, так и высокочастотные переменные давления. Благодаря наличию электрического выходного сигнала они пригодны для работы с системами автоматической регистрации результатов экспериментов.

В пьезоэлектрических датчиках при приложении механического усилия к кристаллу на его гранях возникает электрический заряд, пропорциональный действующему давлению, которое воспринимается либо непосредственно кристаллом или керамикой, либо мембраной, взаимодействующей с чувствительным элементом (рис. 14.18). С увеличением площади мембраны возрастает сила, действующая на кристалл, т. е. повышается чувствительность преобразователя, но при этом снижаются его частотные характеристики. Это необходимо учитывать при использовании пьезоэлектрических преобразователей для исследования нестационарных явлений в ударных трубах, турбулентном пограничном слое и т. д. Такие датчики позволяют регистрировать процессы с частотами до 50 кГц в широком диапазоне температур, например пьезокристаллические от -240 до $+260$ °С, а пьезокерамические от -55 до 100 °С.

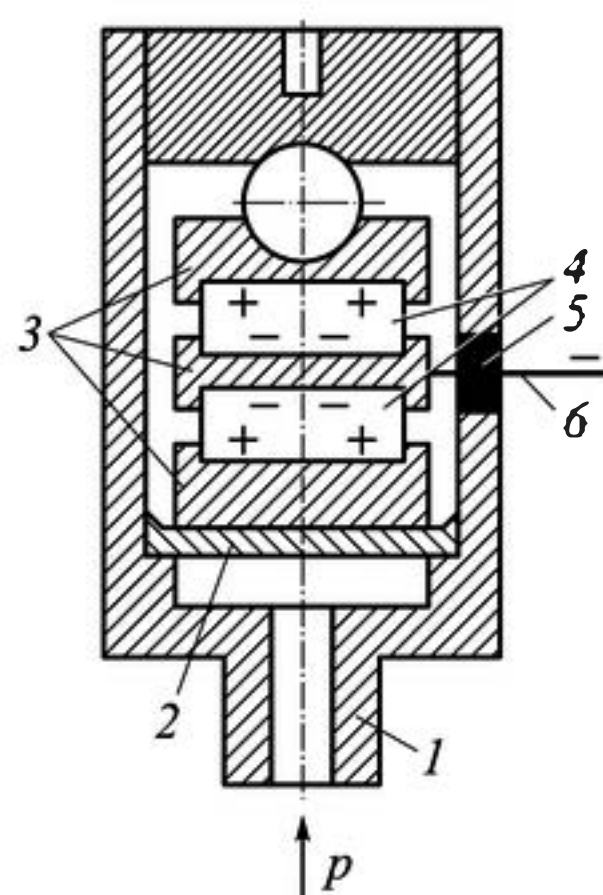


Рис. 14.18. Схема пьезоэлектрического датчика: 1 – корпус; 2 – мембрана; 3 – металлические вкладыши; 4 – кристаллы кварца; 5 – изолятор; 6 – вывод

Методы измерения скорости и температуры газовых потоков

Для определения скорости дозвуковых потоков широко используют пневмометрический метод. В этом случае в потоке устанавливают комбинированный насадок (см. рис. 14.13) и измеряют перепад давлений $\Delta p_0 = p_0 - p_\infty$, например, с помощью жидкостного дифференциального манометра. Для несжимаемого потока ($M_\infty < 0,2$) скорость вычисляют по формуле

$$V_\infty = \sqrt{2\Delta p_0 / \rho_\infty}.$$

При больших дозвуковых и сверхзвуковых скоростях использование комбинированного насадка позволяет по измеренным давлениям рассчитать число M_∞ и скорость V_∞ . При дозвуковых скоростях ($M_\infty < 1$)

$$V_\infty = a_\infty M_\infty = a_\infty \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{p_0}{p_\infty} \right)^{(k-1)/k} - 1 \right]},$$

а при $M_\infty > 1$ число M_∞ определяют по измеренному давлению торможения за прямым скачком уплотнения и статическому давлению:

$$\frac{p'_0}{p_\infty} = \left(\frac{2k}{k+1} M_\infty^2 - \frac{k-1}{k+2} \right) \left[\frac{4k}{(k+1)^2} - \frac{2(k-1)}{(k+1)^2} \frac{1}{M_\infty^2} \right]^{-k/(k-1)}.$$

Скорость звука в среде вычисляют по формуле

$$a_\infty = \sqrt{kRT_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right)^{-1}},$$

где T_0 — температура торможения потока, которую можно измерить в форкамере аэродинамической трубы.

В последние годы особое внимание уделяют развитию методов, позволяющих проводить точные количественные измерения скорости и турбулентности потока в ограниченных и свободных потоках газа, таких как течения в аэродинамических трубах, при движении тел в воздушной и водной средах, течения в каналах и струях и т. д. Данные методы основаны на использовании лазерного и термоанемометрического оборудования. Лазерным анемометром измеряют скорости движения микрочастиц, взвешенных в потоке газа или жидкости. Термоанемометры позволяют определять мгновенные скорости потока посредством нагреваемых элементов (например, тонкой вольфрамовой нити), вносимых в исследуемое течение. В отличие от классических измерений с помощью трубки Пито — Прандтля в обоих рассмотренных методах можно проводить исследования с минимальными возмущениями потока, что, несомненно, скажется на точности измерения. Кроме того, эти методы позволяют измерять как скорость, так и ее пульсации, а следовательно, турбулентность течения; они имеют электрический выходной сигнал, который удобен для обработки на ЭВМ, создания базы данных и хранения результатов экспериментов.

В современной анемометрии используют лазерный доплеровский измеритель скорости и лазерный анемометр с фотонной корреляцией.

Использование доплеровских систем измерения скорости основано на том факте, что излучение, проходя через среду, рассеивается находящимися в ней движущимися частицами. Рассеянное (отраженное) излучение несет информацию о скорости этих частиц,

которая проявляется в сдвиге Δf частоты излучения, падающего на движущуюся частицу. Разность между частотой излучения, падающего на частицу, и частотой рассеянного излучения, попадающего на приемник, называется *доплеровским сдвигом*, или *доплеровской частотой*:

$$\Delta f = \frac{\bar{V}n}{\lambda}(\bar{e}_s - \bar{e}_i), \quad (14.1)$$

где $\bar{V}$ — вектор скорости частицы; n — показатель преломления среды (в дальнейшем примем $n = 1$); λ — длина волны источника излучения; $\bar{e}_s, \bar{e}_i$ — единичные векторы, направленные от рассеивающей частицы к приемнику и от источника к рассеивающей частице соответственно.

Согласно выражению (14.1), простая (однокомпонентная) доплеровская система позволяет измерить составляющую скорости, которая направлена вдоль вектора, делящего пополам угол между направлениями падающего и рассеянного излучения.

На рис. 14.19 показан принцип работы однокомпонентной доплеровской системы. Здесь измеряется составляющая скорости $\bar{V} \cos \beta$, параллельная $(\bar{e}_s - \bar{e}_i)$ и направленная по биссектрисе угла между падающим и рассеянным излучением. В обозначениях, использованных на рис. 14.19, формула (14.1) принимает вид

$$\Delta f = \frac{|\bar{V}| \cos \beta}{\lambda} 2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad (14.2)$$

где β — угол между вектором мгновенной скорости и биссектрисой угла θ ; θ — угол между направлениями падающего и рассеянного излучения.

Через измеряемую скорость $V_{\text{изм}}$ формулу (14.2) можно записать так:

$$V_{\text{изм}} = \bar{V} \cos \beta = \frac{\lambda \Delta f}{2 \sin(\theta/2)}. \quad (14.3)$$

Если определять обратное рассеяние (т. е. излучение, рассеянное вдоль направления падающего излучения, $\theta = 180^\circ$), то соотношение (14.3) принимает вид

$$V_{\text{изм}} = \lambda \Delta f / 2. \quad (14.4)$$

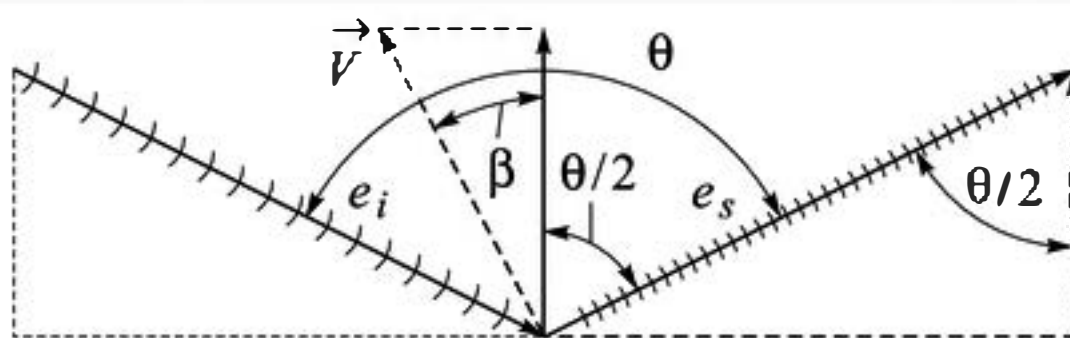


Рис. 14.19. Принцип работы однокомпонентной доплеровской системы

Выражения (14.1)—(14.4) являются основными для однокомпонентной доплеровской системы. Три такие системы позволяют непосредственно измерять трехмерное поле скорости. Лазерным доплеровским измерителем скорости определяют сдвиг частоты, вызванный движением частиц исследуемого потока. Величина сдвига зависит от длины волны излучения, направления рассеянного света и скорости частиц. Зная длину волны лазера, а также геометрию системы и измеряя доплеровский сдвиг частоты, можно вычислить скорость источников рассеянного света. В случае использования лазерного доплеровского измерителя скорости источниками обычно являются частицы, движущиеся вместе со средой. Таким образом, скорость частиц связана со скоростью потока, в котором они взвешены. Если частицы очень маленькие, то полагают, что они движутся со скоростью потока.

На рис. 14.20 показана схема приборной реализации однокомпонентной оптической системы. Луч лазера *1* падает на полупро-

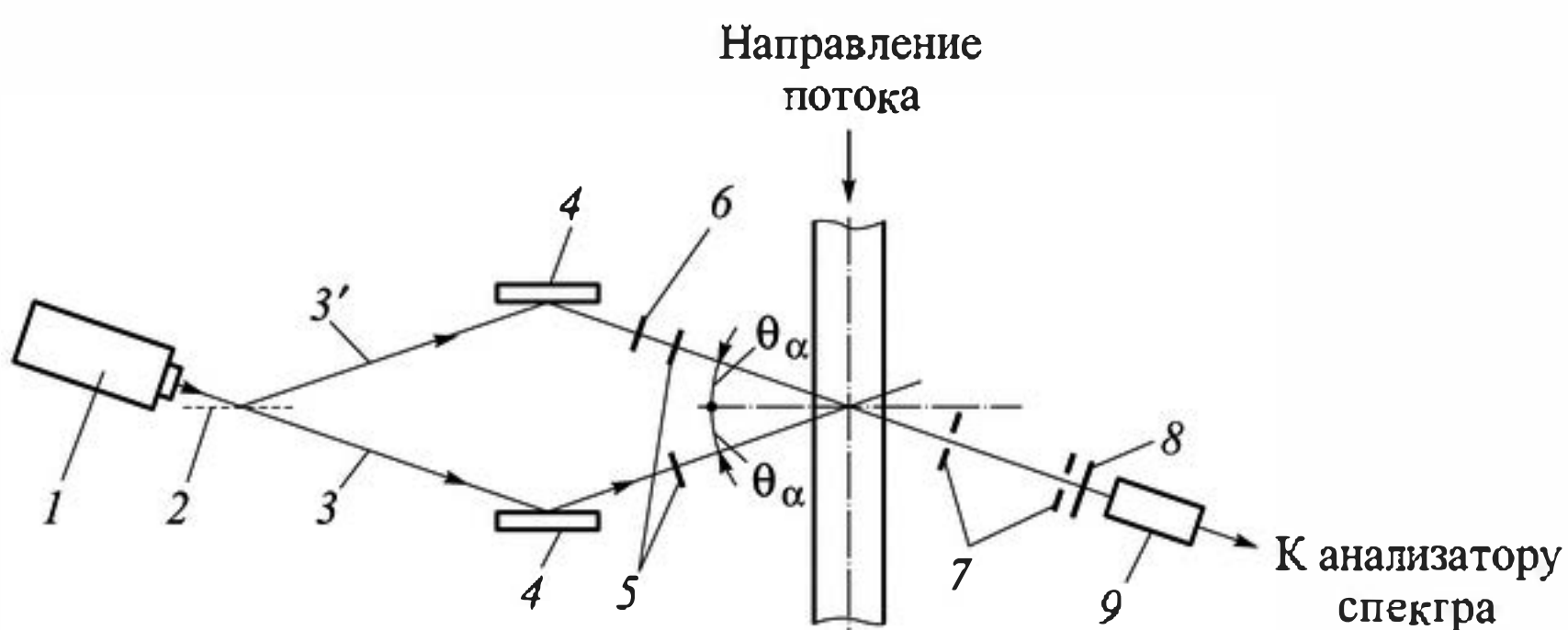


Рис. 14.20. Схема однокомпонентного лазерного доплеровского измерителя скорости:

1 — лазер; *2* — светоделитель; *3, 3'* — лучи; *4* — зеркала; *5* — линза; *6* — нейтральный фильтр; *7* — диафрагмы; *8* — интерференционный фильтр; *9* — фотоэлектронный умножитель

зрачную посеребренную пластину 2, на которой происходит его разделение вследствие частичного отражения на основной 3 и опорный 3'. Основной луч с помощью зеркала 4 и линзы 5 фокусируется в потоке жидкости. Часть падающего света рассеивается в направлении фотоэлектронного умножителя 9, при этом вследствие эффекта Доплера происходит сдвиг частоты.

Опорный луч 3' отражается от зеркала и фокусируется линзой приблизительно в то же место потока, что и основной луч. Опорный луч попадает в фотоэлектронный умножитель через две апертурные диафрагмы 7, которые ограничивают объем и угловое направление поля наблюдения фотоумножителя, и интерференционный фильтр 8. Два луча (основной и опорный), падающие на фотокатод умножителя, дают биения с частотой, равной доплеровскому сдвигу. Для удобства основной и опорный лучи направлены под одинаковым углом θ_α к плоскости, перпендикулярной оси потока. Следовательно, доплеровский сдвиг частоты пропорционален составляющей скорости, параллельной этой оси. Выходной сигнал умножителя анализируется с помощью анализатора спектра (дискриминатора). Доплеровский сдвиг, соответствующий средней скорости потока, обычно соответствует частоте, на которой выходной сигнал максимален.

Методы, основанные на эффекте Доплера, могут быть применены при рассеянии любой электромагнитной волны. Доплеровские системы в микроволновой области спектра используют для измерения скорости в атмосфере.

Обычно для измерения доплеровского сдвига частоты применяют один из двух способов: смешивают рассеянный и первичный лучи лазера в фотоприемнике или расщепляют первичный луч, а затем направляют полученные лучи таким образом, чтобы они пересекались. При этом в пространстве образуется интерференционная картина, а рассеянный пучок регистрируется фотоприемником. Система, в которой рассеянный и первичный лучи смешиваются в фотоприемнике, называется *системой с опорным лучом*, или *гетеродинного типа*.

На рис. 14.21, а показана система с опорным лучом и регистрацией излучения, рассеянного вперед. Отметим, что оптические системы лазера и фотоприемника настроены таким образом, чтобы в фотоприемник попадало только излучение от частиц, находящихся в фокальной плоскости. Фотоприемником здесь является фотоэлектронный умножитель.

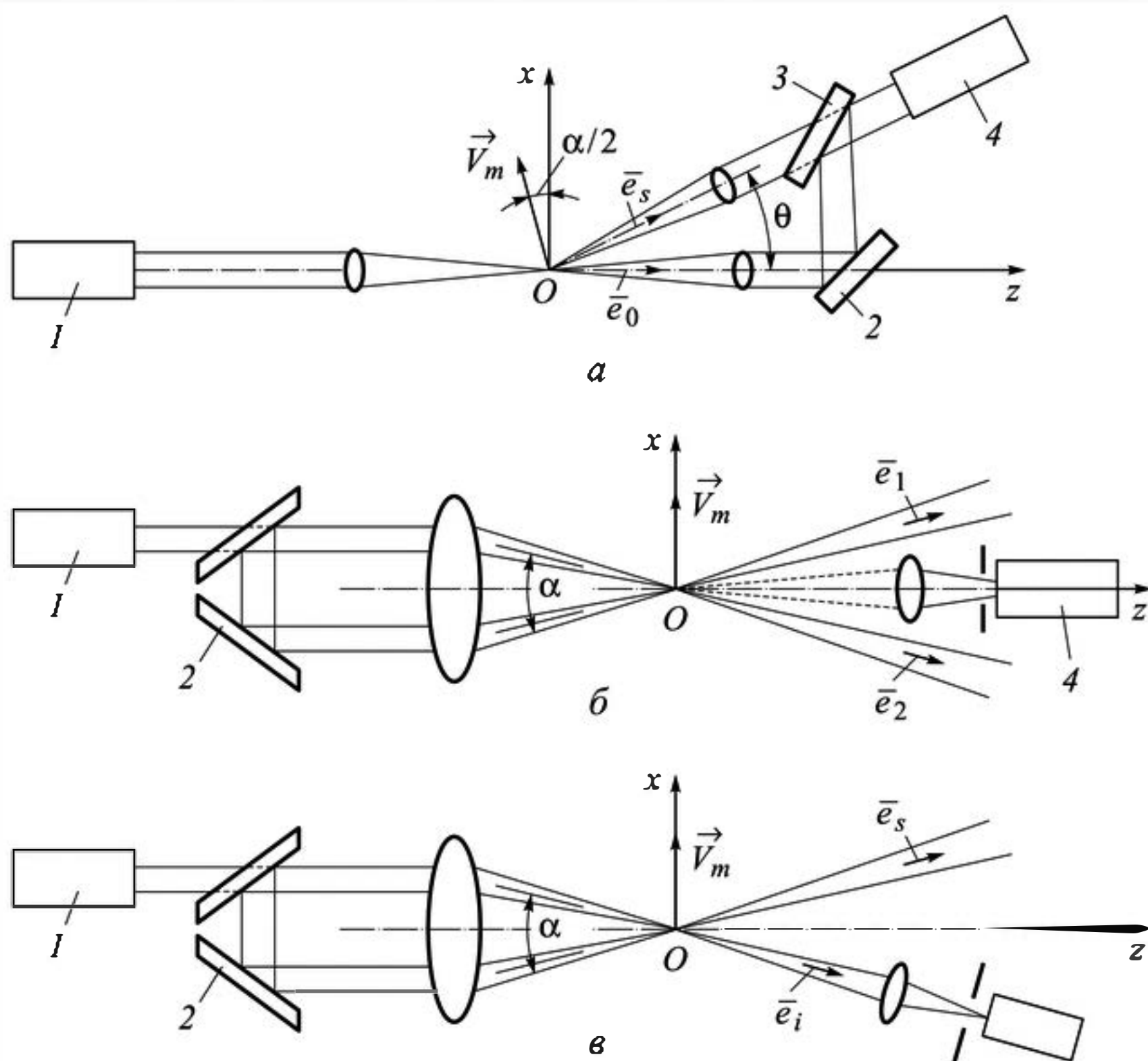


Рис. 14.21. Схемы лазерных доплеровских систем измерения скорости:
 а – с опорным лучом и рассеянием вперед; б – двухлучевая с рассеянием вперед;
 в – двухлучевая с опорным лучом; *I* – лазер; 2 – зеркало; 3 – светоделитель;
 4 – фотоэлектронный умножитель

В системе с опорным лучом смешение (или образование бие-ний) рассеянного и первичного лучей лазера происходит в фото-приемнике. При смешении двух волн, имеющих различные частоты, интенсивность светового пучка является функцией суммы и разности этих частот, из которых только разность частот не слишком велика и может быть обнаружена фотоприемником. Эта разность $\Delta f = (\vec{V}/\lambda)(e_s - e_0)$, известная как доплеровская частота, обнаруживается фотоприемником по движению видимой интерференционной картины, т. е. на его поверхность попадает излучение, изменение интенсивности которого определяется доплеровской частотой.

В двухлучевой схеме первичный лазерный луч расщепляется на два, которые затем фокусируются в одну точку пространства.

В месте пересечения лучей образуется видимая интерференционная картина, на которую попадает частица, проходящая через фокальный объем. Интенсивность рассеянного пучка определяется той частью интерференционной картины, где находится частица. Оптическая система приемника излучения в схеме, приведенной на рис. 14.21, б, сфокусирована на объеме, где пересекаются два луча, при этом $\Delta f = (V/\lambda)(e_2 - e_1)$. На рис. 14.21, в показана двухлучевая схема с опорным лучом. В этом случае $\Delta f = (V/\lambda)(e_s - e_i)$.

В рассмотренных схемах для получения разности частот смешивали два сигнала. Отметим, что при этом существует неопределенность в направлении движения частицы, равная 180° , т. е. разность частот первичного и рассеянного лучей будет одинаковой как при прямом, так и при обратном (отличающемся на 180°) направлении движения частицы. Однако эту неопределенность можно устранить путем смещения частоты гетеродина, что приведет к появлению сдвига (доплеровской частоты), равного смещению частоты гетеродина.

Такое смещение можно осуществить несколькими методами, например рассеиванием излучения гетеродина на мишени, движущейся с постоянной скоростью, или изменением его частоты с помощью акустооптического преобразователя, что более удобно. В последнем случае луч лазера пропускают через кристалл или жидкость, в которых возбуждаются акустические колебания; при этом происходит сдвиг по фазе на угол δ и смещение частоты. Наиболее распространенным акустооптическим преобразователем является ячейка Брэгга. Ее применяют в небольших лазерных доплеровских системах.

Для измерения двух- и трехмерных течений можно использовать одновременно несколько приемников излучения. В трехкомпонентном лазерном доплеровском измерителе скорости (рис. 14.22) первичный лазерный луч лежит в плоскости Oxz перпендикулярно оси симметрии аэродинамической трубы 2. Составляющие V_x , V_y , V_z скорости направлены вдоль осей Ox , Oy и Oz соответственно. Приемник 4 рассеянного излучения установлен в плоскости Oxz , приемники 3 и 5 расположены некомпланарно. Выходной сигнал от каждого приемника можно представить в линейном виде: $V_x(t)$, $V_y(t)$ и $V_z(t)$. Решая три уравнения с тремя неизвестными, можно непосредственно получить значения $V_x(t)$, $V_y(t)$ и $V_z(t)$. Если $\Delta f_1(t)$, $\Delta f_2(t)$ и $\Delta f_3(t)$ — доплеровские частоты, регистрируемые приемни-

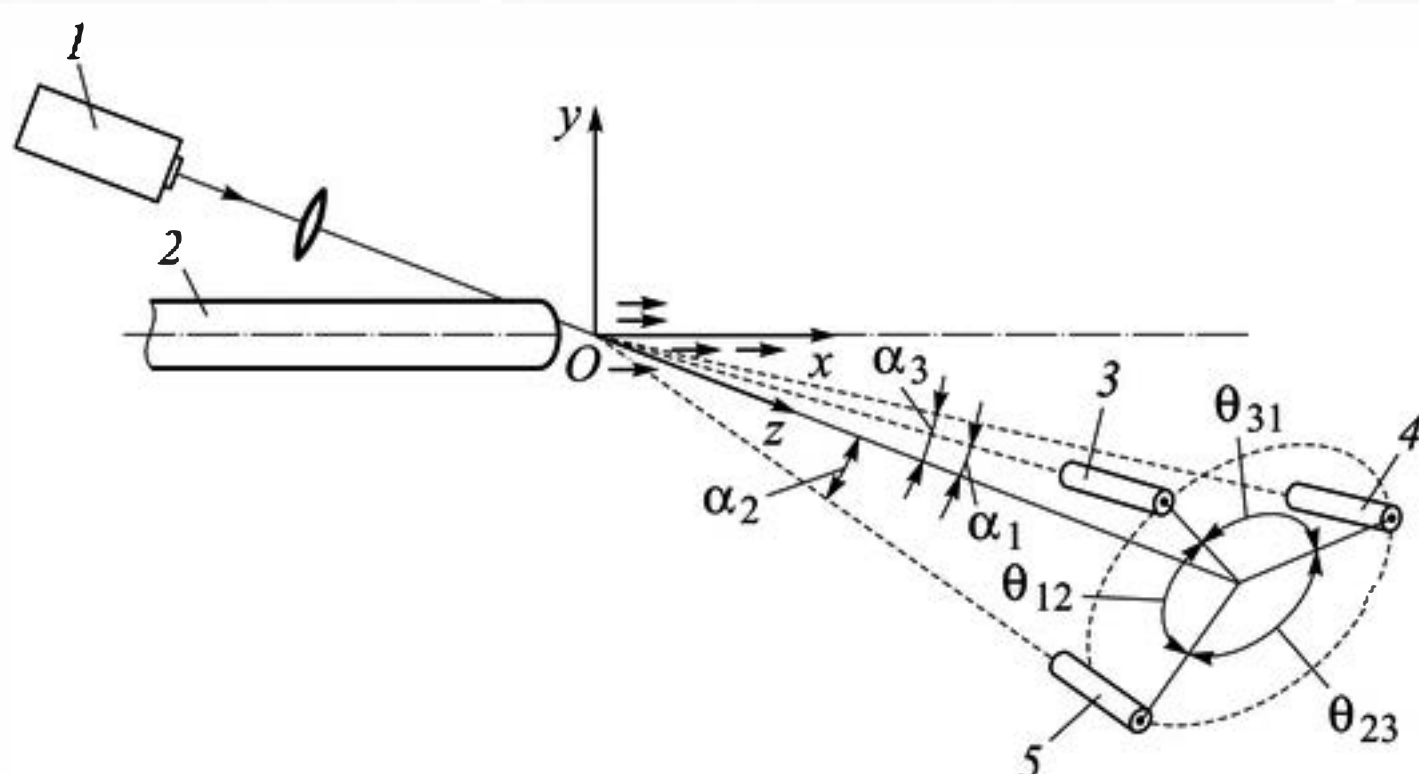


Рис. 14.22. Схема трехкомпонентного лазерного доплеровского измерителя:
1 – лазер; 2 – аэродинамическая труба; 3–5 – приемники излучения

ками 3–5 в момент времени t , то выражения для составляющих скорости в направлении соответствующих осей можно записать так:

$$V_x(t) = A_1 \Delta f_1(t) + A_2 \Delta f_2(t) + A_3 \Delta f_3(t);$$

$$V_y(t) = B_1 \Delta f_1(t) + B_2 \Delta f_2(t) + B_3 \Delta f_3(t);$$

$$V_z(t) = C_1 \Delta f_1(t) + C_2 \Delta f_2(t) + C_3 \Delta f_3(t),$$

где A_i , B_i , C_i – коэффициенты, связывающие составляющие скорости с соответствующими доплеровскими сдвигами частоты.

В лазерном анемометре с фотонной корреляцией (рис. 14.23, а) с помощью блока 1 расщепления и поляризации луча в фокальном объеме 2 фокусируется интерференционная картина в виде чередующихся ярких и темных колец (рис. 14.23, б). Используя детектор фотонов 3 и дискретный коррелятор 4 со специальными часами, можно обнаружить частицы 5, пролетающие через яркие зоны интерференционных колец и определить время t , затраченное ими на перемещение между кольцами. Зная время t и расстояние $L = \lambda(2 \sin \theta)$ между кольцами, можно определить скорость движения частицы:

$$V = L/t.$$

Применение в аэродинамических экспериментах лазерного анемометра с фотонной корреляцией позволяет измерять среднюю скорость и турбулентность потока в диапазоне от нескольких микрометров в секунду до 500 м/с с погрешностью менее 1 % без искусственного запыления потока частицами.

Термоанемометры с нагреваемым чувствительным элементом достаточно широко применяют для измерения скорости и температуры потока. По сравнению с лазерными анемометрами они более просты в настройке и эксплуатации.

Принцип действия термоанемометра основан на зависимости температуры нагретого проводника, помещенного в поток, от скорости его обтекания. Чувствительным элементом является нитяной, пленочный или пластинчатый датчик, способный измерять колебания скорости (температуры) в турбулентных течениях.

В соответствии с законом Джоуля – Ленца теплота, выделяемая на нити,

$$Q = EI = E^2/R_n = I^2 R_n, \quad (14.5)$$

где E — падение напряжения на нити; I — сила тока; R_n — электрическое сопротивление нагретой нити.

Однако из решения задачи теплоотвода с поверхности нити следует, что

$$Q = l\lambda(T_n - T_\infty) \left(1 + \sqrt{\frac{2\pi\rho_\infty V_\infty d c_p}{\lambda}} \right), \quad (14.6)$$

где l , d — длина и диаметр нити (цилиндра) соответственно; λ , c_p — теплопроводность и теплоемкость газа при температуре T_∞ ; T_n — температура нагретой нити.

Приравняв выражения (14.5) и (14.6), получим

$$R_n I^2 = (T_n - T_\infty) (A + B\sqrt{V_\infty}), \quad (14.7)$$

где A и B — постоянные коэффициенты.

Если во время измерений температура T_∞ набегающего потока не изменяется, то, согласно (14.7), скорость потока является функ-

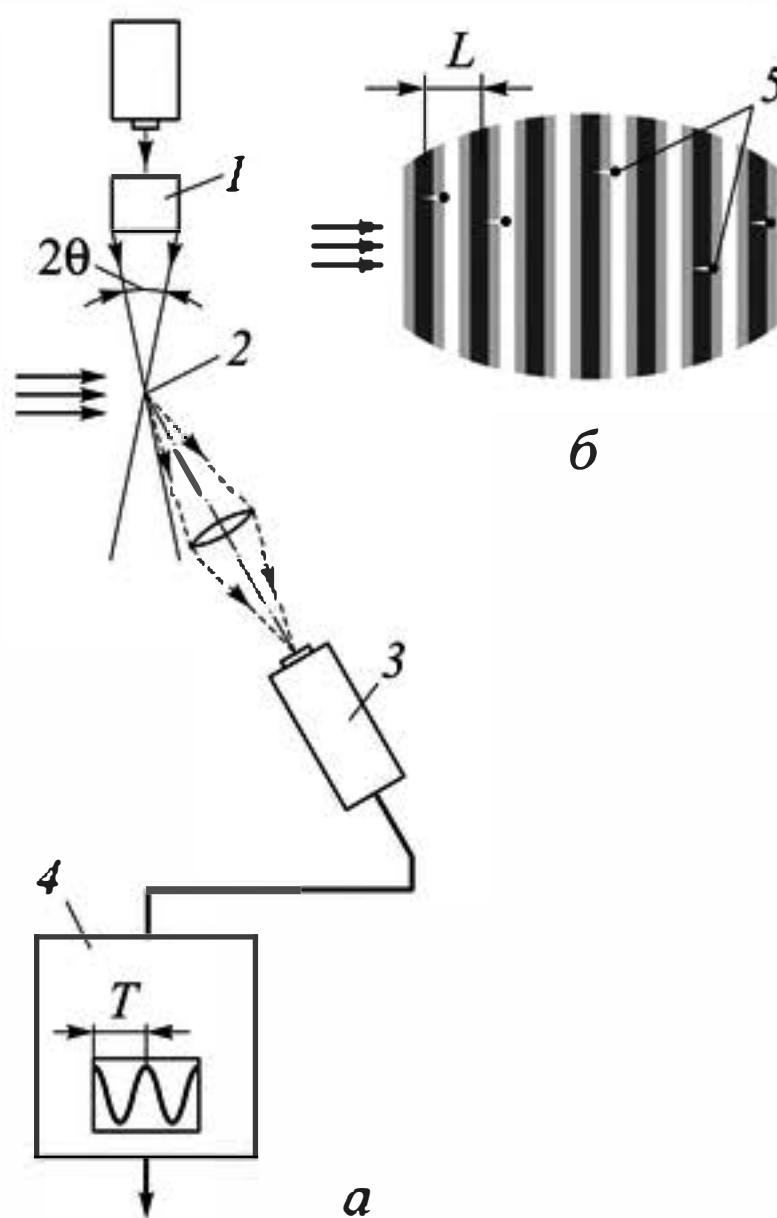


Рис. 14.23. Схема лазерного анемометра с фотонной корреляцией (а) и интерференционная картина в исследуемой области (б):

1 — блок расщепления и поляризации луча; 2 — фокальный объем; 3 — детектор фотонов; 4 — дискретный коррелятор; 5 — частицы

цией только двух переменных R_H и I . Электрическое сопротивление нити зависит от температуры ее нагрева:

$$R_H = R_{293} [1 + \alpha(T_H - 293)], \quad (14.8)$$

где R_{293} — сопротивление нити при ее нагреве до 293 К; α — температуропроводность материала нити.

Для удобства измерений в термоанемометре добиваются того, чтобы одна из величин — R_H или I — оставалась постоянной, т. е. используют две схемы работы: в режиме постоянной температуры и в режиме постоянного тока.

В режиме *постоянного тока* (постоянного среднего сопротивления) по мере изменения скорости течения ток регулируется таким образом, чтобы электрический мост Уитстона, в одно из плечей которого включен термоанеметрический датчик, был все время уравновешен. Тем самым сопротивление чувствительного элемента поддерживается постоянным.

В режиме *постоянной температуры* (постоянного мгновенного сопротивления) для уравновешивания мостовой схемы используют усилитель с обратной связью (рис. 14.24).

Разбаланс электронного моста 2 возникает при изменении сопротивления R_4 нагретого чувствительного элемента датчика 1 вследствие изменения теплопередачи. Для обнаружения разбаланса моста в электрическую цепь введен усилитель постоянного тока 3 с обратной связью. Усилитель воспринимает разбаланс и благодаря обратной связи автоматически изменяет ток в мостовой цепи так, чтобы мгновенное сопротивление чувствительного элемента осталось неизменным. Поддержание постоянного сопротивления эквивалентно поддержанию постоянной температуры нагретого датчика. С помощью вольтметра 4 измеряется выходное напряжение усилителя E , используемое для питания моста, и по его значению определяется скорость потока V_∞ .

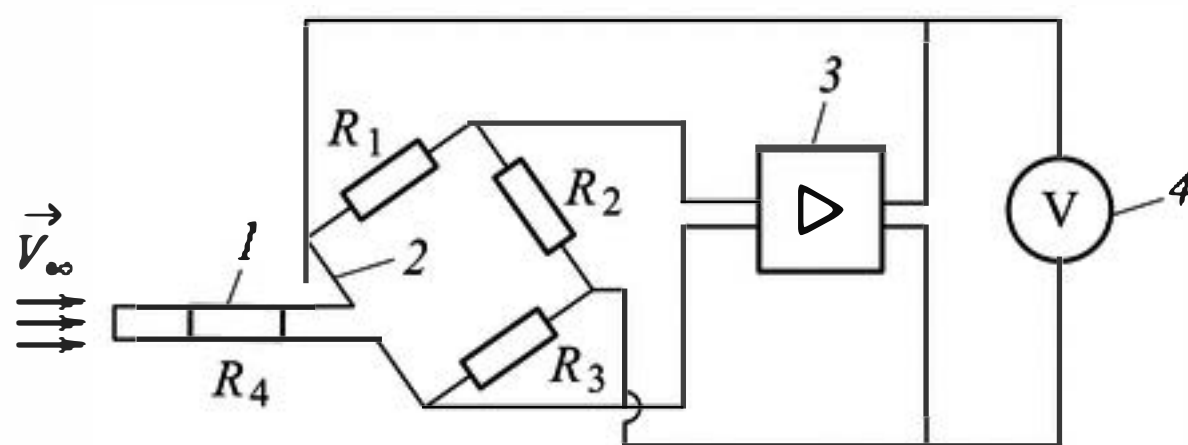


Рис. 14.24. Схема термоанемометра постоянной температуры:

1 — термодатчик; 2 — электронный мост; 3 — усилитель постоянного тока; 4 — вольтметр

Из уравнений (14.6) и (14.7) легко получить зависимость для вычисления скорости V_∞ :

$$E^2 = A + B\sqrt{V_\infty},$$

где A, B — постоянные коэффициенты, определяемые при тарировке каждого датчика.

Таким образом, для расшифровки показаний вольтметра 4 необходимо для каждого датчика предварительно получить тарировочную зависимость $E(V_\infty)$.

Частотная характеристика термоанемометра постоянной температуры определяется тем, насколько быстро электронная схема может уравновесить мост. Выпускаемые термоанемометры, работающие по этой схеме, имеют удовлетворительную частотную характеристику до частот более 50 кГц. В связи с этим термоанемометр постоянной температуры чаще используют для измерения скорости и ее пульсаций. Кроме того, он обеспечивает сохранность нити датчика после окончания замера. Дело в том, что если сохранить повышенное напряжение, которое имелося во время обдувки датчика потоком, то при отсутствии движения газа охлаждение датчика уменьшится, возрастет его температура и нить может перегореть. Схема же с постоянным током предпочтительна для измерений температуры газового потока.

Чувствительные элементы для измерения воздушных потоков обычно изготавливают из вольфрамовой или платиновой проволоки диаметром 2,5...12 мкм и длиной 1...12 мм.

Проволока из чистых металлов предпочтительнее, поскольку их температуропроводность выше, чем у сплавов, поэтому вольфрам чаще используют для проволоочных датчиков. Широко применяют также платину, главным образом потому, что из нее можно изготовить удобную в обращении волластоновую проволоку. В процессе Волластона тонкий платиновый стержень покрывают толстой оболочкой из серебра (или другого материала примерно с таким же модулем Юнга и напряжением текучести). Затем заготовку подвергают волочению до получения минимально достижимого выходного диаметра проволоки. При этом диаметр платиновой жилы в оболочке получается наименьшим по сравнению с другими способами изготовления. Дополнительное преимущество волластоновой проволоки заключается в том, что большинство монтажных операций с ней можно провести до травления серебряной оболочки, предохраняющей тонкую и хрупкую платиновую жилу.

Пленочные чувствительные элементы чаще выполняют из платины или никеля, хотя напылять можно большинство металлов. Кварц или подобное ему по составу стекло является универсальным материалом для подложки.

Правильный выбор датчиков и режимов их работы обеспечивает необходимую точность и надежность измерений. Для незапыленных газовых потоков широко используют проволоочные датчики с различной ориентацией и числом нитей (рис. 14.25, а, б).

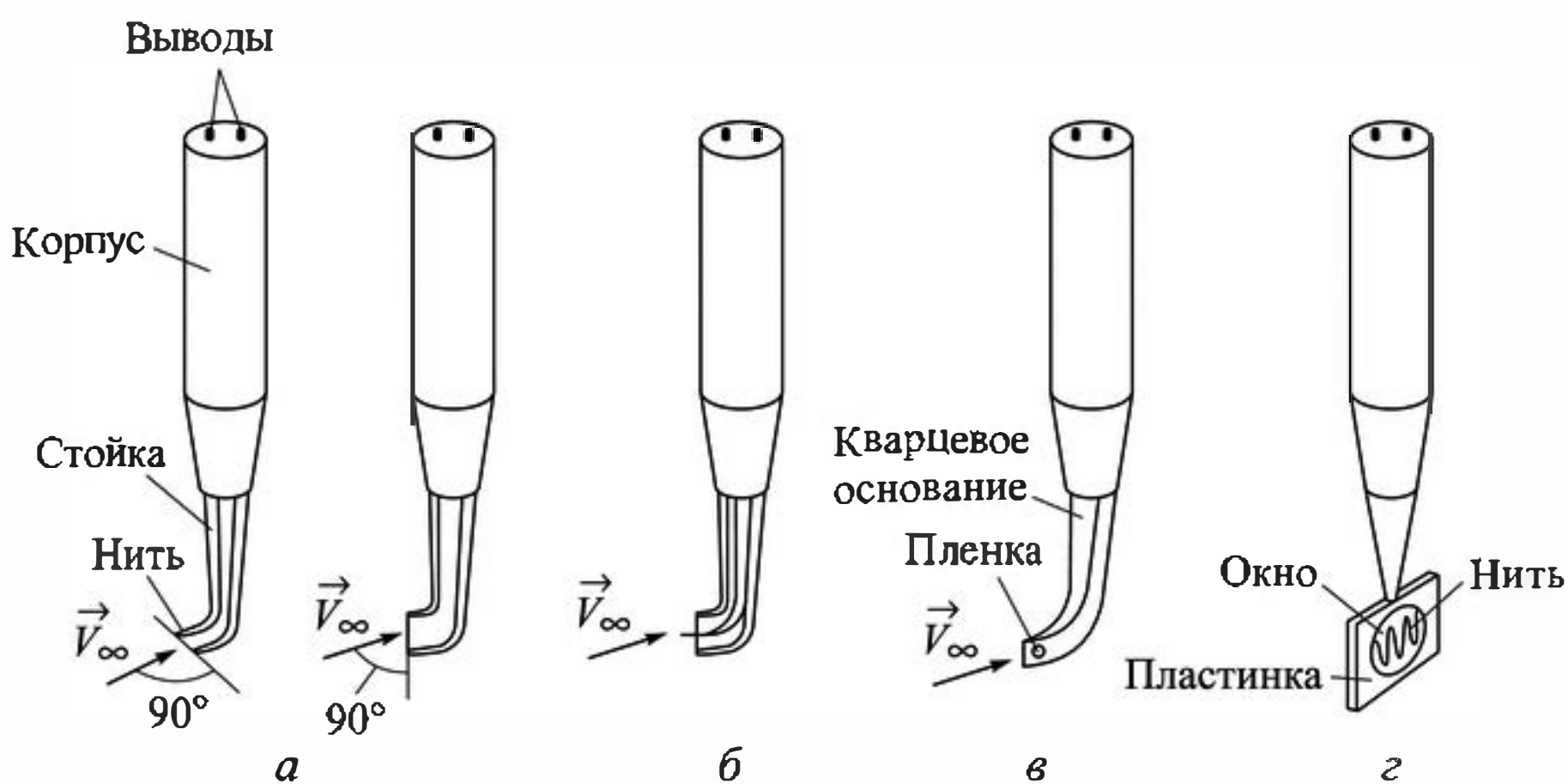


Рис. 14.25. Однонитяные (а), двухнитяной (б), пленочный (в) и пластиночный (г) термоанемометрические датчики

При выборе типа датчика необходимо руководствоваться следующими соображениями.

Датчик чувствителен к составляющей скорости, направленной по нормали к нагретой нити, поэтому, имея набор датчиков с различной ориентацией нитей, можно измерить соответствующие проекции вектора скорости.

Диаметр нити датчика выбирают, исходя из ее механической прочности и частотной характеристики. Чем тоньше нить, тем выше верхняя граница ее частотной характеристики и ниже механическая прочность. Для большинства измерений усредненной скорости и ее пульсаций в дозвуковом потоке применяют вольфрамовую нить диаметром 5 мкм и длиной 1,1 мм.

При выборе материала нити необходимо помнить, что точность измерений повышается с ростом температуры T_n нагретой нити по сравнению с температурой T_0 ненагретого источника. Поэтому

чувствительный элемент стремятся нагреть до максимально допустимой температуры, которая для вольфрамовой проволоки составляет 300 °С, а для платиноиридиевой — 800...1000 °С, при больших температурах происходит окисление и сгорание нитей.

Преимущество нагретой нити по сравнению с другими нагреваемыми элементами заключается в том, что она не требует специальной подложки (как в случае пленочного датчика). Поэтому отвод теплоты к стойкам на концах нити не оказывает существенного влияния на ее тепловой режим. Однако тонкие пленки (рис. 14.25, в), изготовленные обычно из платины или никеля и нанесенные на подложку из кварца клиновидной или конической формы, прочнее нагретых нитей и на них меньше влияет загрязнение (обычно загрязняется только окрестность передней критической точки). Поэтому для измерений в потоках с большими скоростными напорами и в жидкостях обычно применяют пленки толщиной 1...2 мкм, которые напыляют на кварцевое основание корпуса датчика.

В запыленных потоках, содержащих мелкодисперсные инородные частицы, нитяные и пленочные датчики практически непригодны для использования, так как они быстро выходят из строя и требуют восстановления разрушенного чувствительного элемента. В МГТУ им. Н.Э. Баумана разработан малогабаритный термоанемометр постоянной температуры на базе пластинчатых датчиков разной конфигурации и предложена методика проведения измерений в промышленных потоках, содержащих мелкие твердые и жидкие частицы. Пластинчатый датчик (рис. 14.25, г) содержит нагревательный элемент, расположенный в измерительном окне на тонкой пластинке и защищенный с двух сторон специальной пленкой, которая предохраняет его от разрушения в агрессивной среде.

Термоанемометрические датчики устанавливают на державке в исследуемую область течения и соединяют специальным экранированным кабелем с измерительными приборами.

Температуру газового потока измеряют разнообразными по устройству приборами, действие которых основано на различных физических эффектах. В покоящейся среде чувствительный элемент такого прибора через некоторое время принимает температуру этой среды, которая регистрируется измерительным устройством. В этом случае можно использовать достаточно инерционные датчики, например термометры сопротивления. Конструктивно такой датчик представляет собой рамку из изоляционного материала, например фарфора, с намотанной тонкой проволокой диа-

метром 0,05...0,3 мм, обычно платиновой. Датчики обеспечивают высокую стабильность измерений и надежность работы, но наряду с инерционностью обладают значительными габаритами. Эти свойства датчиков определили их применение в неподвижной среде в качестве эталонных.

В газовом потоке характер теплового воздействия на температурный датчик будет иным. Обтекание неподвижного чувствительного элемента вызовет его нагрев до некоторой равновесной температуры T_e , которая будет отличаться от температуры T_0 торможения газового потока ввиду относительно слабого конвективного теплообмена между датчиком и движущимся газом, а также излучения и теплопроводности датчика. Для заданных условий обтекания имеется однозначная зависимость между T_e и T_0 , установленная в результате тарировки измерительного прибора. Используя тарировочный график, по измеренной температуре T_e можно определить температуру торможения T_0 .

Конструкция датчика характеризуется коэффициентом восстановления

$$r = \frac{T_e - T_\infty}{T_0 - T_\infty}. \quad (14.9)$$

Здесь статическая температура газового потока T_∞ при известном числе M_∞ определяется по зависимости для одномерного изэнтропического течения:

$$T_\infty = T_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right)^{-1}. \quad (14.10)$$

Если известно значение коэффициента восстановления r , определенное опытным путем для данного датчика при различных числах M_∞ и Re_∞ , то по измеренному значению T_e используя соотношение (14.9), можно определить T_0 :

$$T_0 = \frac{T_e}{r + (1-r)(T_\infty/T_0)}$$

или с учетом формулы (14.10)

$$T_0 = \frac{T_e}{r + (1-r) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right)^{-1}}.$$

Для различных конструкций датчиков коэффициент восстановления r изменяется от 0,6 до значения, близкого к единице. При $r \approx 1$ измеренная температура $T_e = T_0$. При $r \neq 1$ рассчитать температуру торможения T_0 можно, если определены критерии M_∞ и Re_∞ , что позволяет правильно выбрать значение коэффициента восстановления.

Если для конструкции датчика не удастся достичь $r \approx 1$, то стремятся, чтобы коэффициент восстановления r имел постоянное значение при различных условиях эксперимента.

При $M_\infty = 0,35 \dots 0,75$ и относительно небольших температурах торможения целесообразно использовать датчики с термистором, который обладает эффектом существенного изменения сопротивления при изменении его температуры. Термистор имеет небольшие размеры (диаметр около 0,2 мм) и с помощью проводов соединяется с усилительной и регистрирующей аппаратурой. Сам термистор выступает из трубки (корпуса) и является открытым. При такой конструкции коэффициент восстановления датчика $r = 0,75$.

Значительно больший диапазон температур торможения можно измерить датчиками с термопарами. При этом следует иметь в виду, что коэффициент восстановления r зависит от конструкции датчика. Для датчиков, выполненных с открытым спаем термопары, коэффициент восстановления $r = 0,68 \pm 0,07$. Сравнительно небольшое значение r объясняется значительными потерями теплоты спаем термопары вследствие излучения и теплопроводности.

Для увеличения коэффициента восстановления спай экранируют (рис. 14.26). Экран такого датчика представляет собой термоизоляционный насадок, выполненный из диоксида кремния и позволяющий значительно уменьшить тепловые потери. При небольших числах M_∞ такой датчик имеет коэффициент восстановления $r = 0,94 \dots 0,998$, т. е. на уровне значений r у современных температурных датчиков.

При больших числах M_∞ значительна разница температур спая и экрана, что приводит к тепловым потерям. Для их уменьшения используют многоэкранные датчики или датчики с подогреваемым экраном, температуру которого доводят до температуры спая термопары с помощью отдельной обмотки подогрева.

Для измерения температуры торможения можно использовать термоанемометр, включенный по схеме с постоянным током, значение которого выбирают возможно меньшим, чтобы не вызвать нагрева датчика, но достаточным для измерения сопротивления дат-

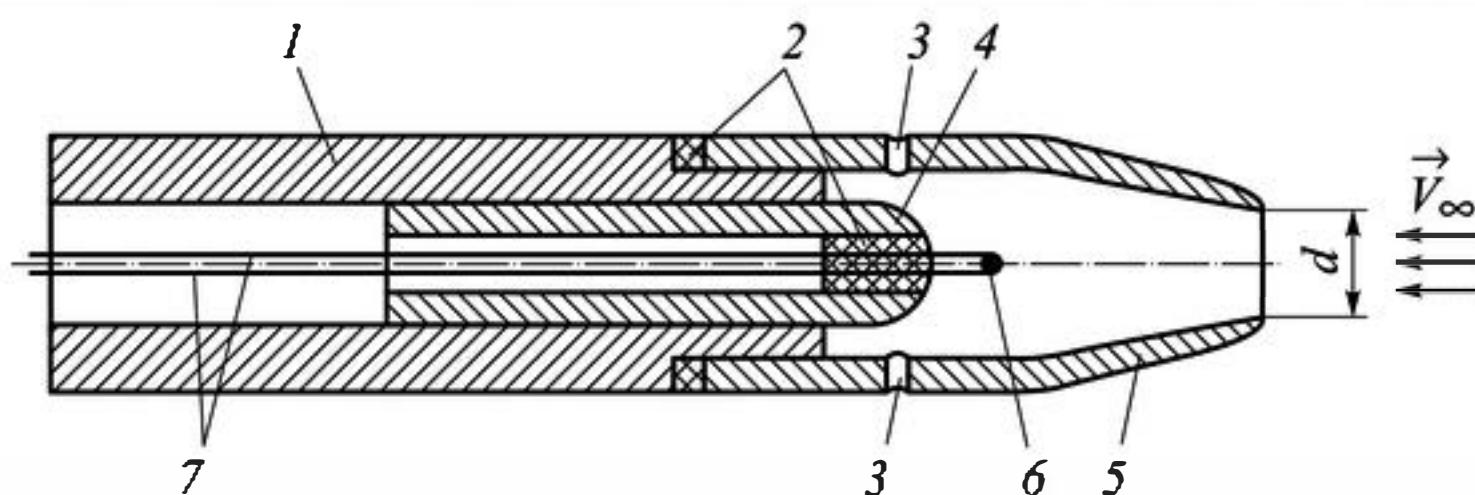


Рис. 14.26. Экранированный насадок для измерения температуры торможения:

1 — корпус насадка; 2 — уплотнения; 3 — вентиляционные отверстия; 4 — державка; 5 — экран; 6 — термопара; 7 — выводы

чика R_n . Во время эксперимента измеряют сопротивления R_n и R_{293} и, используя зависимость (14.8), вычисляют температуру T_n , которая и соответствует T_e

14.3. Методы аэродинамического эксперимента

Современные эксперименты включают в себя большой комплекс аэродинамических исследований. Это прежде всего методы визуализации, определение основных параметров газового потока, а также интегральных аэродинамических сил и моментов, по которым рассчитывают соответствующие коэффициенты.

Параметры газового потока в рабочей части аэродинамической трубы, как правило, определяют с помощью рассмотренных выше датчиков, которые закрепляют на державках или координатных устройствах. Количество датчиков (проводимых замеров) зависит от методики исследования. Например, при контрольном определении скорости потока достаточно измерить ее в одной точке ядра потока, а при нахождении поля скоростей — в различных сечениях по всей плоскости потока.

Рассмотрим измерение скорости с помощью термоанемометрических датчиков в одномерном и пространственном потоках.

Для нахождения скорости V_∞ на оси аэродинамической трубы используют малогабаритный термоанемометр постоянной температуры и пластинчатые датчики. Для расшифровки показаний вольтметра необходимо предварительно получить для каждого датчика тарировочную зависимость $E(V)$, которая имеет, как правило, нелинейный характер (рис. 14.27).

Тарировку термоанемометрических датчиков проводят в воздушном потоке с известной, но изменяемой скоростью, в специальной тарировочной установке, представляющей собой, например, малотурбулентную дозвуковую аэродинамическую трубу с регулируемой скоростью. При этом важно, чтобы условия, в которых тарируют датчик (ориентация вектора скорости и другие параметры потока, особенно температура) были такими же, как и в эксперименте. В противном случае возникает необходимость введения дополнительных поправок к тарировочной кривой и процесс расшифровки измерений усложняется.

Следовательно, для измерения скорости в одномерном течении необходима тарировка пластинчатого термоанемометрического датчика при нулевых углах атаки α и скольжения β , постоянной температуре потока T_∞ и переменной скорости течения V_∞ . Для этой цели датчик 3 (рис. 14.28) с помощью термоанемометрической державки 1 устанавливают в рабочей части тарировочной трубы 4 и закрепляют вкладышем 2. Скорость V_∞ в рабочей части регулируют путем изменения числа оборотов вентиляторной установки 5 при изменении напряжения питания с помощью автотрансформатора 6. Контроль и регистрацию скорости V_∞ можно проводить по результатам измерения давления торможения p_0 и статического давления p_∞ на стенках трубы. Согласно уравнению Бернулли, для несжимаемой жидкости

$$V_\infty = \sqrt{2(p_0 - p_\infty)/\rho_\infty},$$

где $(p_0 - p_\infty)$ — разность давлений, измеряемая с помощью манометра, $(p_0 - p_\infty) = \xi_{\Delta p} K_T \sin \beta \cdot \rho_{\text{ж}} \Delta h$; $\xi_{\Delta p}$, K_T — тарировочные коэффициенты соответственно системы измерения перепада давлений на стенках трубы и манометра; β — угол наклона отсчетных трубок манометра; $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости в манометре; Δh — разность уровней жидкости в отсчетных трубках; ρ_∞ — плотность потока в рабочей части аэродинамической трубы.

Датчик подключают к электрической цепи термоанемометра 8, выходной сигнал E которого пропорционален скорости V потока и может регистрироваться с помощью цифрового вольтметра 7 или системы автоматизированного сбора и обработки данных 9.

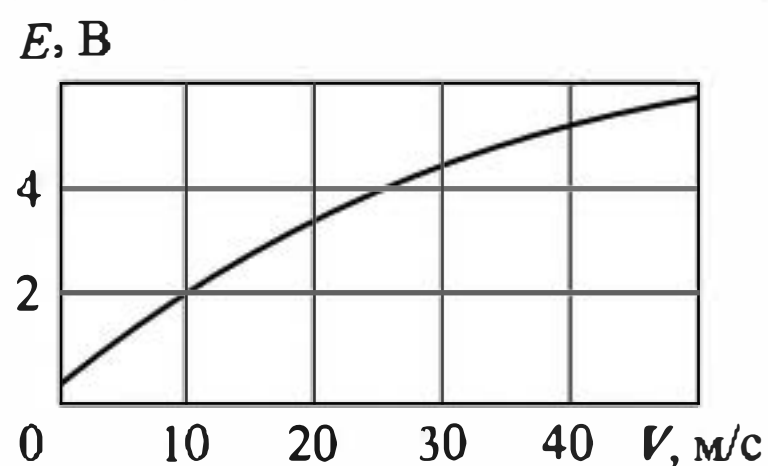


Рис. 14.27. Типичная тарировочная зависимость $E(V)$

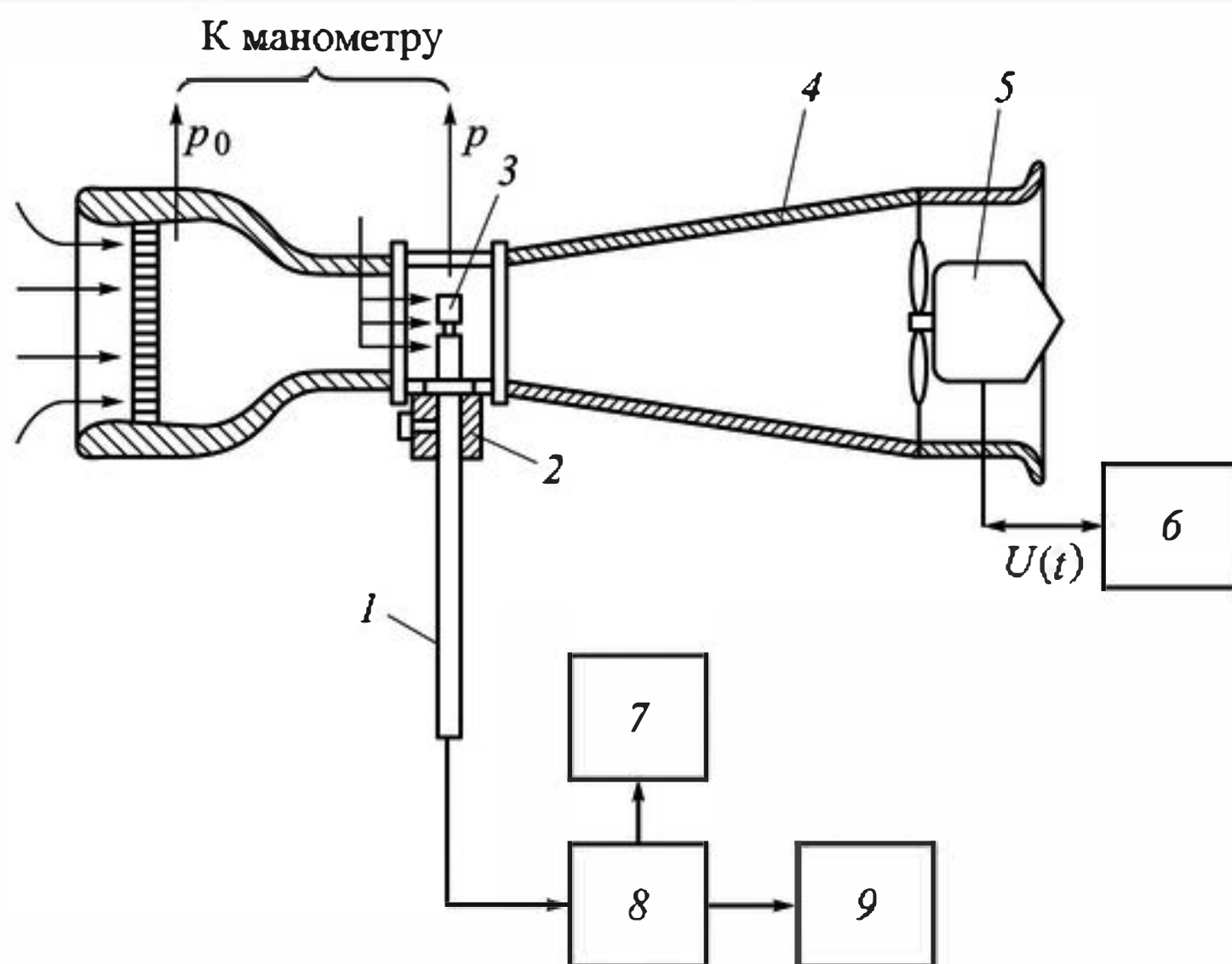


Рис. 14.28. Схема тарировочной установки:

1 – державка; 2 – вкладыш; 3 – пластинчатый датчик; 4 – тарировочная труба; 5 – вентиляторная установка; 6 – регулятор скорости вращения двигателя; 7 – вольтметр; 8 – термоанемометр; 9 – система сбора и обработки данных

При обтекании ЛА набегающим потоком в его окрестности формируется пространственное течение, изучение которого требует организации более сложных измерений. Рассмотрим проведение эксперимента по определению скорости пространственного течения с помощью термоанемометрического оборудования и тарировку термодатчиков для измерения вектора скорости в двухмерных потоках.

В качестве примера измерим скорость в окрестности профиля крыла, обтекаемого дозвуковым потоком. В эксперименте воспользуемся малогабаритным термоанемометром постоянной температуры и пластинчатыми датчиками (см. рис. 14.24 и 14.25, *з*). Для расшифровки показаний вольтметра и определения вектора скорости в двухмерном потоке необходимо для каждого датчика иметь двухпараметрическую тарировочную зависимость $E(V_\infty, \alpha)$, которую можно представить в виде сетки кривых $E(V_\infty)$ и $E(\alpha)$, полученных при фиксированных значениях α и V соответственно. Зависимость $E(V)$ при $\alpha = 0$ была получена ранее (см. рис. 14.27), она носит нелинейный характер и монотонно возрастает с увеличением скорости течения.

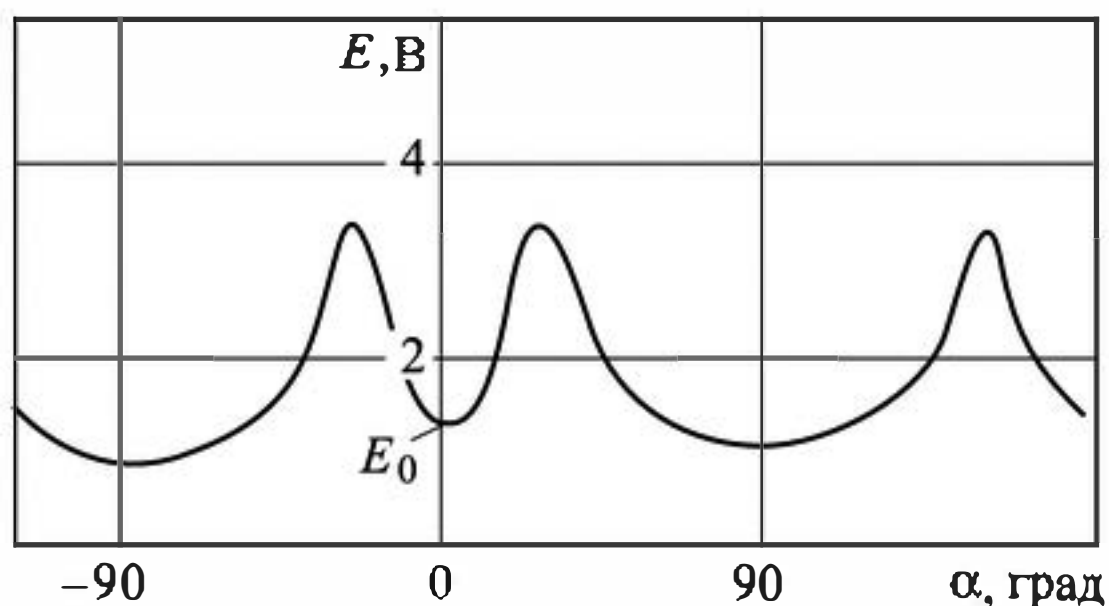


Рис. 14.29. Тарировочная зависимость от угла атаки

Тарировка пластинчатых датчиков по углу атаки α при фиксированной скорости V (рис. 14.29) показала, что сигнал $E(\alpha)$ отражает характер обтекания тонкого прямоугольного крыла, т. е. при малых углах атаки скорость потока над крылом растет, теплообмен увеличивается, напряжение возрастает. При дальнейшем увеличении α наступает срыв потока, образование застойной зоны с замедленным рециркуляционным течением и сигнал $E(\alpha)$ уменьшается. Аналогичная картина наблюдается и при отрицательных углах атаки α .

Таким образом, при измерении пластинчатыми датчиками сигнал термоанемометра имеет «вилку» в области малых углов атаки α . Это свойство позволяет упростить методику определения вектора скорости в двумерном потоке, исключив определение двухпараметрической зависимости $E(V_\infty, \alpha)$. Итак, вращая датчик 5 (рис. 14.30) по углу α , необходимо получить «вилку» сигнала E , по которой можно определить направление вектора V_∞ (при $\alpha = 0$) и значение его модуля по сигналу E_0 . При этом потребуются только однопараметрическая зависимость $E(V_\infty)$, найденная при $\alpha = 0, \beta = 0$. При нахождении вектора скорости в трехмерном течении для определения угла скольжения β следует провести дополнительные аналогичные измерения посредством пластинчатого датчика во взаимно перпендикулярной (вертикальной) плоскости потока Oxy .

Для получения тарировочной зависимости $E(\alpha)$ датчик 5 на термоанемометрической державке помещают в рабочую часть дозвуковой аэродинамической трубы 6, закрепив их в координатном устройстве 1, как показано на рис. 14.30. С помощью этого устройства, установленного на аэродинамическом столе 2, можно вращать датчик по углам атаки α и скольжения β , а также перемещать по

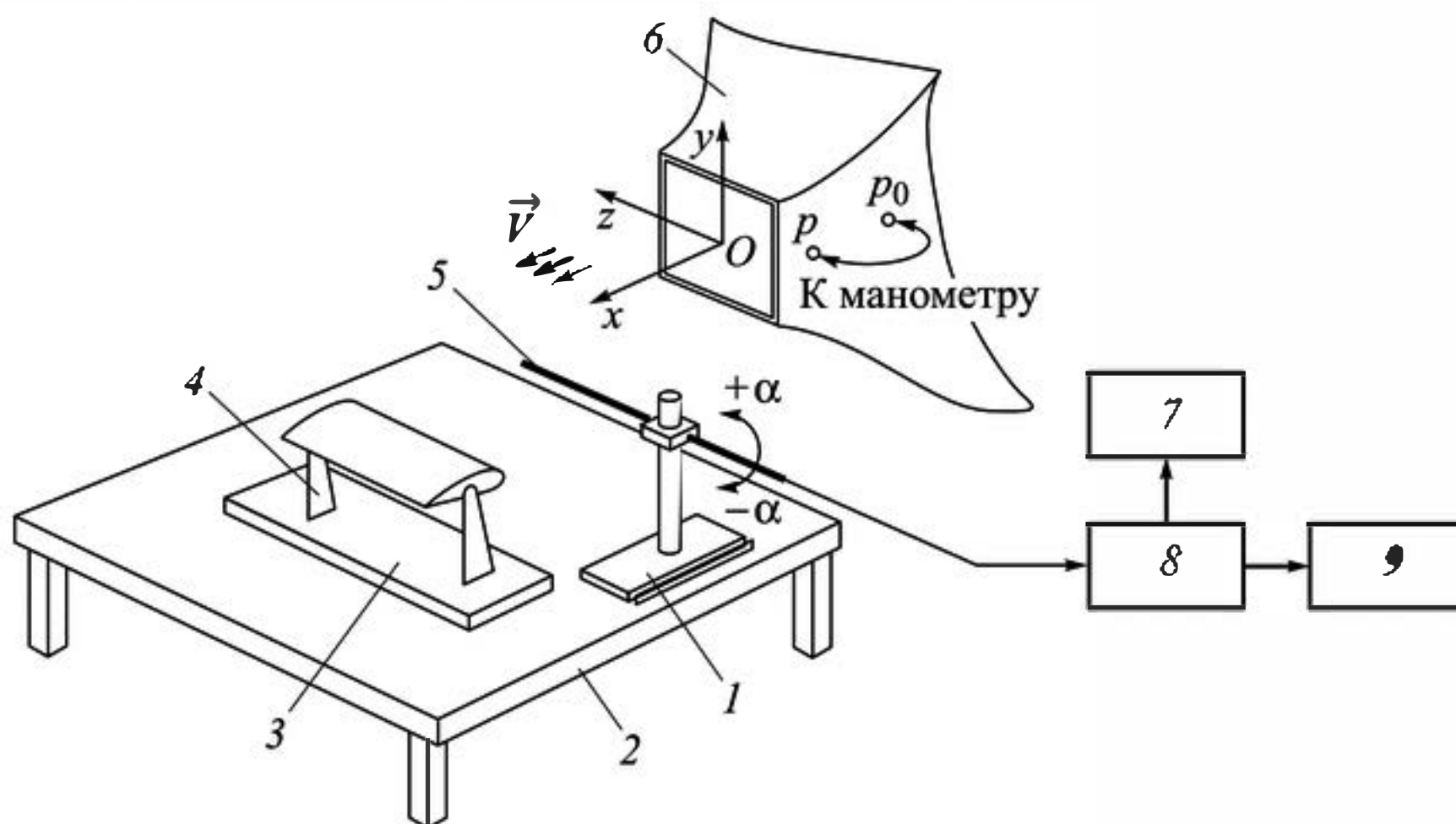


Рис. 14.30. Схема экспериментальной установки для измерения в окрестности профиля крыла:

1, 3 – координатные устройства; 2 – аэродинамический стол; 4 – модель крыла; 5 – термодатчик; 6 – аэродинамическая труба; 7 – вольтметр; 8 – термоанемометр; 9 – система сбора и обработки данных

координатам x и y в необходимую точку исследуемого пространства. Датчик соединяют экранированным электрическим кабелем с термоанемометром 8, цифровым вольтметром 7 или системой автоматизированного сбора и обработки информации 9. Задавая необходимую скорость V_∞ в рабочей части трубы и контролируя ее по перепаду давления ($p_0 - p_\infty$) на стенках трубы, как это было проведено в предыдущем эксперименте, выполняют тарировку по углам атаки при фиксированной скорости V_∞ . Вектор скорости в двумерном течении можно измерять в окрестности профиля крыла 4 (например, над его поверхностью), которое закреплено в рабочей части трубы на координатном устройстве 3 и вращается по углу атаки α_i . Для создания трехмерного течения достаточно с помощью данного координатного устройства придать крылу еще и угол скольжения β_i .

Для изучения структур обтекания тел используют различные *методы визуализации*. Одним из наиболее известных методов является *дымовой*. Для этого в газовый поток с помощью трубок вводят струйки дыма (сгоревшее масло). Обычно такие исследования проводят при скоростях воздушного потока до 40 м/с и в аэродинамических трубах незамкнутого типа.

В соответствии с методом *газовых струек* в поток, обтекающий исследуемую модель, поступает химически активный газ, который, взаимодействуя с веществом, нанесенным на поверхность этой модели, оставляет ясно видимые следы, позволяющие делать заключение о характере течения в пограничном слое.

К настоящему времени разработаны эффективные методы *сублимации*, позволяющие исследовать течение в пограничном слое. Для этого на поверхность тела наносят твердые вещества, легко испаряющиеся при его испытании в аэродинамической трубе. Поскольку скорость испарения (сублимации) различается в ламинарной и турбулентной зонах пограничного слоя, то после выключения аэродинамической трубы на исследуемой поверхности остаются следы, позволяющие определить протяженность этих зон.

Существуют и другие методы визуализации обтекания тел — *наклеивание легкоподвижных шелковинок, нанесение сажемасляных покрытий* и другие, позволяющие изучать те или иные аэродинамические явления.

Визуальные методы исследования предусматривают использование специальных оптических устройств, в частности таких, как теневой прибор, интерферометр, лазерные ножи и др. В случае проведения испытаний на аэродинамических установках с закрытой рабочей частью в ее боковых стенках предусматривают смотровые окна, с герметично вмонтированными в них оптическими стеклами.

Оптические методы основаны на использовании эффектов изменения коэффициента преломления света (теневые) или времени распространения света (интерференционные) в зависимости от плотности воздушной среды.

Имеющую место картину обтекания обычно определяют фотографическими методами, регистрирующими неоднородное поле плотностей. По этому полю методами аэродинамики рассчитывают распределение давлений и других параметров, а затем и аэродинамические характеристики.

При *дренажных исследованиях* в стенках модели просверливают по нормали дренажные отверстия малого диаметра, каждое из которых соединяют с манометром. Во время работы аэродинамической трубы определяют соответствующее давление и его распределение на заданной поверхности. Анализируя полученное распределение давления, делают вывод о характере обтекания поверхности, наличии скачков уплотнения, структуре пограничного слоя, зонах отрывных течений и т. п.

Выбор числа и формы расположения дренажных отверстий на модели является существенным этапом подготовки эксперимента. В зависимости от его целевого назначения число и расположение дренажных отверстий может быть различным. Следует учитывать, что отверстия должны быть расположены в местах предполагаемого существенного изменения давления при условии достаточно близкого расположения их между собой. При выборе числа и схемы расположения дренажных отверстий необходимо учитывать особенности конструкции модели и ее державки. Например, общее число дренажных отверстий может быть ограничено допустимым числом дренажных трубок, которые можно разместить в державке и подвести к модели. При исследовании обтекания тонких тел (тонкое крыло, корпус) часто практически невозможно выполнить дренажные отверстия на тех участках поверхности, к которым нельзя подвести дренажные трубки в связи с малым поперечным сечением тела.

Особенность дренажных испытаний состоит в том, что с их помощью можно найти только ту составляющую полной аэродинамической силы, которая обусловлена давлением; силы трения в этом случае не определяют.

Весовые испытания предназначены для измерения аэродинамическими весами сил и моментов, действующих на модель ЛА. В этом случае модель закрепляют с помощью специальных державок на чувствительных элементах весов и помещают в рабочую часть трубы. По измеренным силам и моментам рассчитывают аэродинамические коэффициенты. Для этого необходимо знать параметры потока в аэродинамической трубе, например скоростной напор. Эти параметры определяют, как правило, одновременно с проведением весовых измерений.

Важным преимуществом весовых испытаний является то, что они позволяют определять полную аэродинамическую силу (момент), являющуюся результатом воздействия на обтекаемую модель одновременно давления и трения.

Аэродинамические весы можно разделить на внешние и внутримодельные. Внешние весы содержат поддерживающие устройства, на которых закрепляют исследуемую модель, соединенную с размещенными вне рабочей части силоизмерительными элементами. Внутримодельные весы имеют силоизмерительные элементы, размещенные внутри модели.

Аэродинамические весы подразделяют по числу измеряемых ими компонент, т. е. составляющих полной аэродинамической силы и момента.

Для исследования в сверхзвуковых аэродинамических трубах наибольшее распространение получили внутримодельные тензометрические весы. В качестве датчика в них используют тензометрические преобразователи, чувствительные к действию только одной составляющей аэродинамической силы. Традиционно тензометрический преобразователь содержит упругие балки, на которые наклеены тензодатчики. При деформации балок деформируются и тензодатчики, вызывая изменение их сопротивления. Поскольку это изменение очень мало (доли процента), то для его регистрации используют специально разработанные тензостанции. В результате тарировки получают зависимость выходного сигнала от приложенной нагрузки, известной по величине и направлению. Например, если тарируется канал осевой силы X , то нагрузку прикладывают вдоль продольной оси весов, а при тарировке канала нормальной силы Y — по нормали к продольной оси, которая в тарировочном приспособлении должна быть ориентирована горизонтально.

На рис. 14.31, а приведена схема трехкомпонентного тензометрического элемента, позволяющего измерять осевую X и нормальную Y силы и момент тангажа M_z относительно электрического центра весов. Под электрическим центром тензометрических весов понимают такую точку на продольной оси весов, в которой при действии нормальной силы Y не появляется сигнал в канале измерения момента M_z . Эту точку называют *моментной*.

Измерительный элемент содержит посадочные конусы для соединения с моделью и державкой. Упругие элементы включают в себя центральную и две изогнутые балки, ориентированные вдоль продольной оси весового элемента. Одни из концов этих балок соединены с конусом для крепления к державке. Противоположный им конец центральной балки соединен с серединой вертикальной стойки, концы которой связаны с другими концами изогнутых балок и с конусом крепления модели. На центральной и крайних балках тензодатчики наклеены так, что продольная ось датчика параллельна продольной оси тензометрических весов.

Схемы соединения датчиков для образования мостовых схем измерения составляющих аэродинамической силы приведены на рис. 14.31, б. Датчики, а их по четыре в каждой схеме, что обеспечивает повышение чувствительности и температурной компенсации, подключены к индивидуальным каналам тензостанции. Диагональ каждого моста запитана от источника опорного напряжения. Для моста, собранного на наклеенных на центральную балку

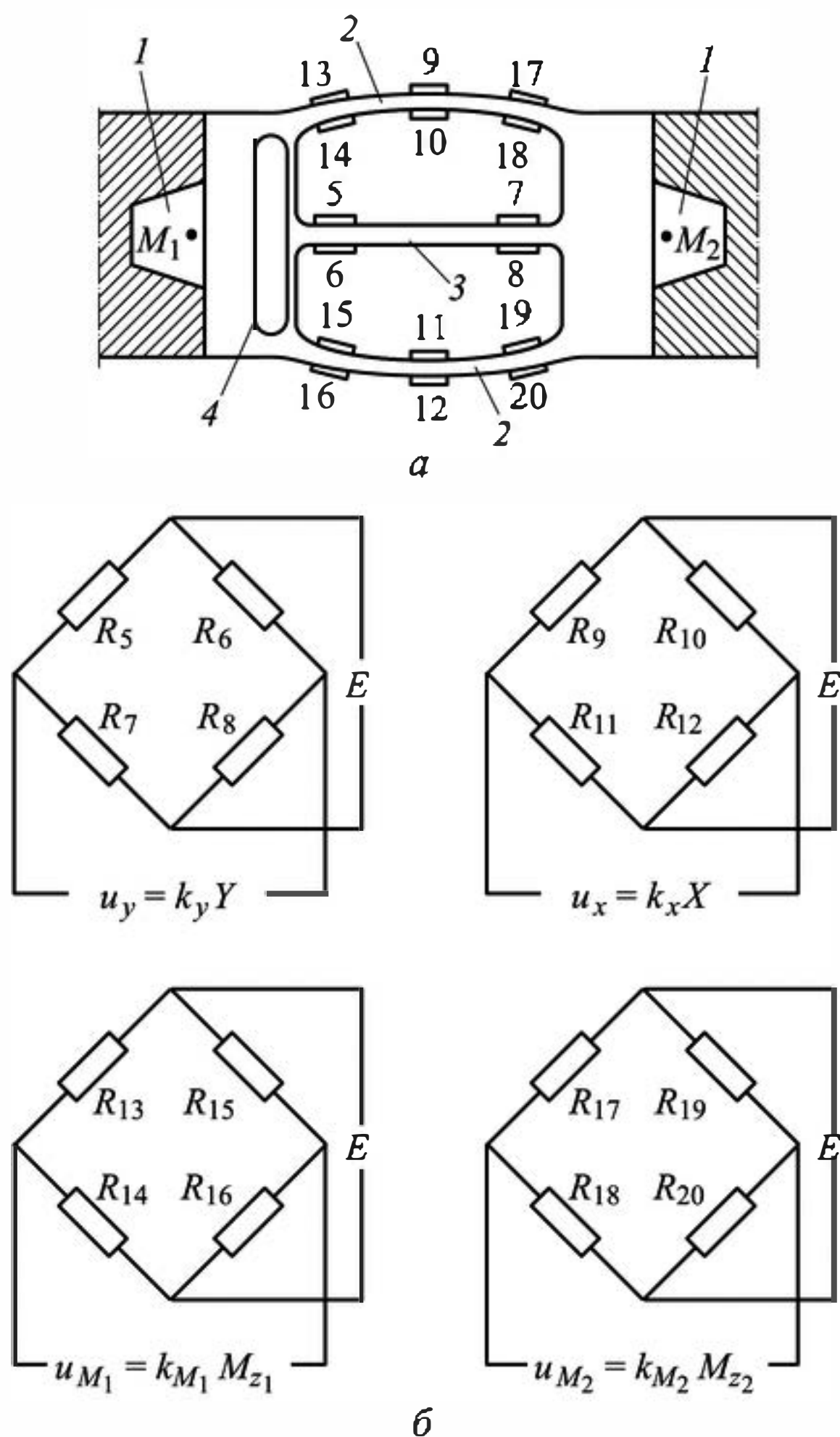


Рис. 14.31. Схема трехкомпонентных внутримodelьных тензoметрических весов (а) и электрические схемы соединения тензодатчиков (б):

1 – посадочный конус; 2 – изогнутая балка; 3 – центральная балка; 4 – вертикальная стойка; 5–20 – тензодатчики

датчиках $R_5—R_8$, выходной сигнал будет пропорционален нормальной силе: $u_y = k_y Y$, а для моста с датчиками $R_9—R_{12}$, наклеенными в средней части изогнутых балок, — осевой силе: $u_x = k_x X$. Датчики, наклеенные по краям изогнутых балок, позволяют собрать два моста: $R_{13}—R_{16}$ и $R_{17}—R_{20}$, выходные сигналы с которых пропорциональны моментам тангажа: $u_{M_1} = k_{M_1} M_{z_1}$ и $u_{M_2} = k_{M_2} M_{z_2}$.

Под действием осевой силы X деформируются изогнутые балки 2, причем наибольшую деформацию испытывают их средние части, на которые наклеены тензодатчики 9—12. Под действием осевой силы прогибается вертикальная стойка, и нагрузка на центральную балку не передается. Под действием осевой силы тензодатчики 9 и 12, наклеенные на наружные поверхности изогнутых балок, претерпевают деформацию одного знака, а тензодатчики 10, 11 — другого.

Под действием нормальной силы изгибается центральная балка, причем поскольку ее поперечное сечение больше, чем изогнутых балок, она воспринимает большую часть нормальной силы. Вертикальная стойка в этом случае передает почти всю нормальную силу на центральную балку. Тензодатчики 5—8, наклеенные на центральную балку, собирают в мостовую схему для измерения нормальной силы. Изогнутые балки под действием нормальной силы претерпевают деформации разных знаков, т. е. одна из балок сжимается, а другая растягивается, при этом противоположные стороны этих балок имеют деформацию одного знака. Следовательно, в мостовой схеме для измерения осевой силы не появляется выходной сигнал, поскольку она собрана таким образом, чтобы разбаланс моста наступал только в случае деформации тензодатчиков на каждой изогнутой балке с разными знаками.

При действии изгибающего момента центральная балка играет роль упругого шарнира (т. е. кинематического элемента), относительно которого происходит поворот узла крепления (посадочного конуса) весов к модели. В этом случае нагрузка от момента почти полностью воспринимается изогнутыми балками, нагружаемыми продольными силами противоположного знака. Тензодатчики мостов для измерения продольного момента соединены таким образом, что реагируют на их деформацию изгиба с учетом алгебраической суммы знаков. Поскольку тензодатчики наклеены по краям изогнутых балок, то положение моментной точки для каждой мостовой схемы будет различным (определяется экспериментально).

Как указывалось выше, работа с тензометрическими весами возможна только с использованием специальной аппаратуры — тензостанции, имеющей индивидуальные усилительные каналы для каждой мостовой схемы. Следует отметить, что при тарировке обязательно регистрируют показания всех измерительных каналов, независимо от того, какой из них нагружают, т. е. тарируют. Таким образом устанавливают взаимное влияние между каналами, что и учитывают при выводе тарировочных зависимостей мостов.

Для определения положения моментной точки весы необходимо ориентировать горизонтально и надеть на них специальный цилиндрический стакан. Затем подвешивают груз, обеспечивающий тарировку по каналу нормальной силы Y , который перемещают вдоль продольной оси весов (модели), регистрируя показания в канале нормальной силы Y и момента тангажа, например M_{z_1} . При таком перемещении груза показания в канале Y должны быть неизменными, а в канале M_{z_1} добиваются, чтобы они стали равными нулю. Положение груза в этом случае и будет соответствовать координате моментной точке M_1 . Аналогично определяют и координату точки M_2 .

При тарировке аэродинамических весов при необходимости вводят поправку, называемую поправкой на вес. Обычно аэродинамический эксперимент планируют таким образом, чтобы все показания выводились на нулевые при нулевом угле атаки. Во время эксперимента задают различные углы атаки модели и регистрируют показания измерительных каналов. В этом случае выходной сигнал будет суммой аэродинамического воздействия и массы (веса) модели. Очевидно, что при изменении угла атаки будет изменяться реакция каналов тензометрических весов на нагрузку от модели. Если вес модели существенен и углы атаки большие, то эту реакцию надо учитывать. Для этого необходимо регистрировать показания тензовесов при различных углах атаки, когда на них установлена модель. Эти показания следует учитывать при обработке опытных данных (вычитать с учетом знаков). Если вес модели мал, а углы атаки невелики, то поправка будет пренебрежимо мала. Если аэродинамический эксперимент планируют таким образом, что при каждом угле атаки регистрируют нулевые показания тензометрических весов, то никакой поправки на вес в этом случае не будет.

Во время эксперимента с помощью тензометрических весов регистрируют сигналы с усилителей тензостанций. Затем, используя тарировочные зависимости, рассчитывают действующие силы. Для рассмотренных трехкомпонентных весов это осевая сила X , нормальная сила Y и момент M_{z_1} относительно точки M_1 (или M_{z_2} и M_2). По значению скоростного напора в рабочей части: $q_\infty = (k/2) \rho_\infty M_\infty^2$, или $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2 / 2$, и геометрическим размерам модели, т. е. характерной площади $S_{\text{хар}}$ и характерной длине $l_{\text{хар}}$, вычисляют соответствующие коэффициенты: $C_x = X / (q_\infty S_{\text{хар}})$, $C_y = Y / (q_\infty S_{\text{хар}})$, $m_{z_1} = M_{z_1} / (q_\infty S_{\text{хар}} l_{\text{хар}})$, $m_{z_2} = M_{z_2} / (q_\infty S_{\text{хар}} l_{\text{хар}})$.

Использование тензометрических весов, а также других датчиков с электрическим выходным сигналом позволяет осуществлять автоматизацию сбора и обработки опытных данных во время аэродинамического эксперимента. В этом случае выходы электрических датчиков или их усилителей подключают к аналого-цифровому преобразователю, включенному на входе ЭВМ. Установленная программа должна обеспечить математическую обработку полученных данных.

В процессе аэродинамических исследований в трубах необходимо знать влияние условий эксперимента на результаты определения аэродинамических коэффициентов. Например, при проведении тензометрических измерений следует учитывать, что выходной сигнал с тензостанции наряду с постоянной составляющей, определяемой действующей аэродинамической силой, содержит переменные составляющие, зависящие от вибраций установки и поддерживающих устройств, а также внешних помех. В случае регистрации с помощью ЭВМ в программу замера и обработки опытных данных должна быть заложена необходимость многократного замера, например на каждом угле атаки, с последующим вычислением среднего значения при условии, что на выходе усилителя обязательно установлен фильтр, задерживающий помехи.

Нужно также учитывать влияние загромождения рабочей части моделью и спутной струей. Модель, помещенная в движущийся в рабочей части трубы равномерный поток, изменяет площадь ее проходного сечения. В результате в потоке между стенками трубы и моделью (между стенками и спутной струей) устанавливается течение, отличное от течения вокруг тела в свободном полете.

Наконец, при проведении аэродинамических исследований необходимо учитывать влияние поддерживающих устройств, закрепляющих модель в рабочей части, на ее обтекание (взаимное влияние или интерференцию), которое может быть определено только с учетом конкретных особенностей эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

- Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика: В 2 ч. М.: Наука, 1991. Ч 1. 600 с.
- Аржанников Н.С., Садекова Г.С.* Аэродинамика летательных аппаратов. М.: Высш. шк., 1983. 359 с.
- Аэрогидромеханика* / Е.Н. Бондарев, В.Т. Дубасов, Ю.А. Рыжов и др. М.: Машиностроение, 1993. 608 с.
- Аэродинамика летательных аппаратов: Учеб. для вузов* / Г.А. Колесников, В.К. Марков, А.А. Михайлюк и др.; Под ред. Г.А. Колесникова. М.: Машиностроение, 1993. 544 с.
- Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов* / Под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Наука; Физматлит, 1998. 811 с.
- Аэромеханика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы* / Под ред. Г.Л. Гродзовского. М.: Машиностроение, 1975. 184 с.
- Бабкин А.В., Селиванов В.В.* Прикладная механика сплошных сред: В 3 т. Т. 1: Основы механики сплошных сред / Под ред. В.В. Селиванова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 368 с.
- Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004. 636 с.
- Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А.* Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1989. 252 с.
- Белов И.А., Исаев С.А.* Моделирование турбулентных течений: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во БГТУ, 2001. 108 с.
- Газовая динамика. Механика жидкости и газа* / В.С. Бекнев, В.М. Епифанов, А.И. Леонтьев и др.; Под ред. А.И. Леонтьева. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 671 с.
- Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю.* Отрывные и кавитационные течения. М.: Наука, 1990. 384 с.
- Калугин В.Т.* Аэрогазодинамика органов управления полетом летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 688 с.

Калугин В.Т. Расчет сверхзвуковых течений конечно-разностным методом сверхзвукового счета. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1991. 53 с.

Киреев В.И., Вайновский А.С. Численное моделирование газодинамических течений. М.: Изд-во МАИ, 1991. 253 с.

Краснов Н.Ф. Аэродинамика: В 2 ч. М.: Высш. шк., 1980. Ч. I. 495 с.; Ч. II. 416 с.

Краснов Н.Ф. Аэродинамика тел вращения. М.: Машиностроение, 1964. 572 с.

Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Калугин В.Т. Аэродинамика отрывных течений. М.: Высш. шк., 1988. 349 с.

Краснов Н.Ф. Основы аэродинамического расчета. М.: Высш. шк., 1981. 496 с.

Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.

Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Машиностроение, 1987. 840 с.

Математические модели летательных аппаратов / Под ред. С.М. Белоцерковского. М.: Новый Центр, 2003. 631 с.

Пирумов У.Г. Численные методы: Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Дрофа, 2003. 224 с.

Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. 4-е изд., испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 424 с.

Самойлович Г.С. Гидрогазодинамика. М.: Машиностроение, 1990. 154 с.

Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1987. 432 с.

Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб / Ю.А. Быстров, С.А. Исаев, Н.А. Кудрявцев, А.И. Леонтьев. СПб.: Судостроение, 2005. 392 с.

Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов и др.; Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976. 400 с.

Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: Пер. с нем. М.: Наука, 1974. 712 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Физические свойства и модели воздушной среды.	
Аэродинамические силы и моменты	5
1.1. Физическое и математическое описание воздушной среды ..	5
1.2. Стандартная атмосфера	20
1.3. Модели воздушных потоков	22
1.4. Силовое воздействие потока на летательный аппарат	27
1.5. Системы координат	31
1.6. Определение аэродинамических сил и моментов по извест- ному распределению давления и касательного напряжения	35
2. Основные уравнения и соотношения аэродинамики для расчета параметров течений	39
2.1. Методы исследования движения сплошной среды	39
2.2. Движение частиц жидкости и газа	43
2.3. Уравнения сохранения	52
2.4. Интегралы уравнений движения идеального газа	64
2.5. Уравнения для потенциала скорости	71
2.6. Уравнения движения с развитой турбулентностью	73
2.7. Модели турбулентности	75
2.8. Аэродинамическое подобие	82
3. Потенциальное и вихревое течения несжимаемого газа	91
3.1. Основные понятия	91
3.2. Примеры потенциальных потоков	96
3.3. Сила и момент, действующие на цилиндр произвольной формы. Формулы Жуковского – Чаплыгина	111
3.4. Вихревое течение. Теоремы Стокса, Томсона, Гельмгольца ..	114
3.5. Поле скоростей, вызываемое вихрями. Формула Био-Савара	121
4. Теории изозэнтропических течений и скачков уплотнения	124
4.1. Одномерное течение газа	124
4.2. Основные соотношения для определения параметров газа за скачком уплотнения	139
4.3. Взаимодействие скачков уплотнения	152

5. Движение вязкого газа. Пограничный слой и аэродинамический нагрев	156
5.1. Пограничный слой	156
5.2. Интегральное соотношение и условная толщина пограничного слоя	158
5.3. Уравнения Прандтля для пограничного слоя	162
5.4. Приближенные методы расчета пограничного слоя на плоской пластине	168
5.5. Смешанный пограничный слой. Критическое число Рейнольдса	175
5.6. Пограничный слой на криволинейной поверхности	179
5.7. Тепловой пограничный слой	189
5.8. Расчет параметров течения в пограничном слое на плоской пластине при высоких скоростях обтекания с помощью определяющих параметров	196
5.9. Аэродинамический нагрев	199
5.10. Связь между трением и теплопередачей	203
6. Теория отрывных течений	206
6.1. Виды отрывных течений и причины их возникновения	206
6.2. Общие закономерности течений с отрывом и присоединением потока	216
6.3. Особенности отрывных течений	235
6.4. Определение параметров в характерных областях отрывных течений газа	255
6.5. Методы расчета отрывных течений	269
7. Методы решения аэродинамических задач	285
7.1. Метод характеристик	285
7.2. Метод линеаризации	308
7.3. Метод конечных разностей (метод сеток)	315
7.4. Метод Годунова	332
7.5. Метод контрольного объема	352
7.6. Метод дискретных вихрей	366
7.7. Метод Ньютона	376
8. компоновки летательных аппаратов и формы их элементов ..	387
8.1. Основные характеристики и геометрические параметры корпуса летательного аппарата	387
8.2. Формы несущих, управляющих, стабилизирующих и вспомогательных поверхностей летательного аппарата	392
8.3. Аэродинамические схемы и органы управления полетом летательного аппарата	397
8.4. Выбор аэродинамической схемы летательного аппарата. Исследование устойчивости тел в полете	404

9. Аэродинамика корпусов	410
9.1. Определение аэродинамических коэффициентов тел вращения	410
9.2. Система уравнений при осесимметричном обтекании заостренного конуса	416
9.3. Метод местных конусов. Приближенные методы расчета обтекания заостренного конуса	429
9.4. Расчет обтекания заостренного тела вращения с произвольной образующей	438
9.5. Расчет обтекания затупленного тела вращения	449
9.6. Применение метода Ньютона к расчету аэродинамических коэффициентов тел вращения	457
9.7. Донное давление за телом вращения. Влияние формы кормовой части легательного аппарата на его аэродинамические характеристики	465
9.8. Расчет аэродинамических характеристик корпусов, составленных из различных элементов	471
9.9. Расчет коэффициентов трения на телах вращения	479
10. Аэродинамика крыльев	484
10.1. Силы и моменты, действующие на крыло	484
10.2. Аэродинамические характеристики профиля и крыла в несжимаемом потоке	487
10.3. Аэродинамика крыла в сжимаемом дозвуковом потоке. Учет сжимаемости среды при докритических скоростях	511
10.4. Аэродинамика профиля и крыла при околозвуковых скоростях	519
10.5. Аэродинамика профиля и крыла при сверхзвуковых скоростях	527
10.6. Влияние стреловидности на аэродинамические характеристики крыльев	537
11. Аэродинамическая интерференция	546
11.1. Природа аэродинамической интерференции	546
11.2. Нормальная сила для комбинации корпус — плоское оперение	551
11.3. Нормальная сила для комбинации корпус — полностью подвижные органы управления	559
11.4. Аэродинамическое сопротивление комбинации корпус — оперение	566
12. Особенности обтекания тел разреженной средой	572
12.1. Границы применимости гипотезы сплошности	572
12.2. Давление и трение в свободномолекулярном потоке	578

12.3. Процессы аккомодации в свободномолекулярном течении . .	587
12.4. Аэродинамические характеристики при обтекании тел произвольной формы	590
12.5. Теплопередача в свободномолекулярном потоке	597
13. Некоторые вопросы нестационарной аэродинамики	603
13.1. Определение нестационарных аэродинамических характеристик	603
13.2. Нестационарные аэродинамические характеристики корпусов летательных аппаратов	605
13.3. Нестационарные аэродинамические характеристики крыльев летательных аппаратов	620
13.4. Нестационарные аэродинамические характеристики крылатых летательных аппаратов	628
14. Экспериментальная аэродинамика	637
14.1. Аэродинамические установки	637
14.2. Измерение параметров потока в аэродинамических трубах . .	649
14.3. Методы аэродинамического эксперимента	670
Литература	682

Учебное издание

Голубев Алексей Геннадьевич
Калугин Владимир Тимофеевич
Луценко Александр Юрьевич
Москаленко Валерий Осипович
Столярова Елена Глебовна
Хлупнов Александр Иванович
Чернуха Полина Алексеевна

АЭРОДИНАМИКА

Редактор *Е.Н. Ставицкая*
Технический редактор *Э.А. Кулакова*
Художник *Н.Г. Столярова*
Корректор *О.В. Калашиникова*
Компьютерная графика *О.В. Левашовой*
Компьютерная верстка *Н.Ф. Бердавцевой*

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003961.04.08 от 22.04.2008 г.

Подписано в печать 03.12.09. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 43,0. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
E-mail: press@bmstu.ru
<http://www.baumanpress.ru>

Отпечатано в ГУП ППП «Типография «Наука».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.